Kapitola 3. Funkce

Definice 3.1. (komplexní funkce)

Komplexní funkcí komplexní proměnné f rozumíme libovolné přiřazení, kterým je prvkům $z \in D \subset \mathbb{C}^*$ přiřazeno jedno nebo více hodnot $w \in H \subset \mathbb{C}^*$. Říkáme, že na množině D je definována funkce komplexní proměnné z a píšeme $w = f(z)$, $z \in D \subset \mathbb{C}^*$, $w \in H \subset \mathbb{C}^*$.

Množinu $D = D(f)$ nazýváme **definičním oborem** a $z \in D(f)$ je **argumentem** resp. **nezávislou proměnnou**. Množinu $H = H(f)$ nazýváme **oborem hodnot** a $w \in H(f)$ je **obrazem** resp. **funkční hodnotou**.

Pokud je každému $z \in D(f)$ je přiřazeno jen jedno jediné $w \in H(f)$, nazývá se funkce f **jednoznačnou funkcí**, v opačném případě **mnohoznačnou funkcí**.

Definice 3.2. (jednoznačná větev)

Mějme mnohoznačnou funkci f. **Jednoznačná větev** funkce f je každá jednoznačná funkce φ, pro kterou platí

i) $D(\varphi) \subset D(f)$,

ii) $\forall\, z \in D(\varphi): \ \varphi(z) \in f(z)$.

Definice 3.3. (inverzní funkce)

Mějme funkci $f : w = f(z)$, $z \in D(f)$.

Funkci $f^{-1} : z = f^{-1}(w)$, která každému číslu $w \in D(f^{-1}) = H(f)$ přiřazuje právě ta komplexní čísla z, pro než platí $w = f(z)$, se nazývá **inverzní funkce** k funkci f.

Definice 3.4. (reálná a imaginární část funkce)

Mějme funkci $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Reálnou částí funkce f rozumíme funkci

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad u(x,y) = \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}\, y), \qquad D(u) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + \mathrm{i}\, y \in D(f)\}.$$

Imaginární částí funkce f rozumíme funkci

$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}\, y), \qquad D(v) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x + \mathrm{i}\, y \in D(f)\}.$$

$$\left(\textit{píšeme:} \qquad f = u + \mathrm{i}\, v \right)$$

Definice 3.5. (limita funkce)

Mějme jednoznačnou komplexní funkci $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ a nechť $z_0 \in \mathbb{C}^*$ je hromadný bod $D(f)$.

Řekneme, že funkce f má v bodě z_0 **limitu** $b \in \mathbb{C}^*$, pokud pro každou posloupnost (z_n) prvků z $D(f)$ platí

$$(\forall n \in \mathbb{N} : z_n \neq z_0) \ \wedge \ \lim_{n\to+\infty} z_n = z_0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} f(z_n) = b.$$

$$\left(\ \textit{píšeme:} \quad \lim_{z\to z_0} f(z) = b \quad \text{nebo} \quad f(z) \underset{z\to z_0}{\longrightarrow} b. \ \right)$$

Věta 3.6. (algebra limit)

Jestliže pro jednoznačné komplexní funkce f a g existují limity v $\mathbb{C}^*$

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = c, \quad \lim_{z\to z_0} g(z) = d, \qquad \text{kde } z_0, \ c, \ d \in \mathbb{C}^*,$$

potom platí

i) $\lim_{z\to z_0} (f(z) \pm g(z)) = c \pm d$ v $\mathbb{C}^*$, pokud se nejedná o neurčitý výraz $\infty \pm \infty$,

ii) $\lim_{z\to z_0} f(z) \cdot g(z) = c \cdot d$ v $\mathbb{C}^*$, pokud se nejedná o neurčitý výraz $0 \cdot \infty$ nebo $\infty \cdot 0$,

iii) $\lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z)}{g(z)} = \dfrac{c}{d}$ v $\mathbb{C}^*$, pokud se nejedná o neurčitý výraz $\dfrac{0}{0}$ nebo $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Věta 3.7. (základní vlastnosti limity)

Pro jednoznačnou komplexní funkci f platí

i) $\lim_{z\to z_0} f(z) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z\to z_0} |f(z)| = 0,$

ii) $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty,$

iii) $\lim_{z\to z_0} f(z) = b \quad \Rightarrow \quad \lim_{z\to z_0} |f(z)| = |b|,$

kde $z_0, b \in \mathbb{C}^*$.

Věta 3.8. (převod limity komplexních funkce na limity reálných funkcí)

Pro jednoznačnou komplexní funkci $f = u + \mathrm{i}\, v : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ platí

i) $\lim_{z\to z_0} f(z) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) = u_0 \ \wedge \ \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y) = v_0,$

ii) $\lim_{z\to \infty} f(z) = b \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{|z|\to +\infty} u(x,y) = u_0 \ \wedge \ \lim_{|z|\to +\infty} v(x,y) = v_0,$

kde $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\, y_0 \in \mathbb{C}$ a $b = u_0 + \mathrm{i}\, v_0 \in \mathbb{C}$.

Definice 3.9. (spojitost funkce)

Mějme jednoznačnou komplexní funkci $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$ a nechť $z_0 \in D(f)$ je hromadný bod $D(f)$.

Řekneme, že funkce f je **spojitá v bodě** z_0, pokud

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

V případě, že $z_0 \in D(f)$ je izolovaným bodem $D(f)$, potom je funkce f v tomto bodě definována jako spojitá.

Řekneme, že funkce f je **spojitá na množině**, je-li spojitá v každém bodě této množiny.

Řekneme, že funkce f je **spojitá**, je-li spojitá na svém definičním oboru.

Věta 3.10. (vlastnosti spojitých funkcí)

i) Spojitost funkce v konečném bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ odpovídá spojitosti reálné a imaginární části této funkce.

ii) Nechť f a g jsou spojité funkce v bodě $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Potom jsou spojité v bodě z_0 i funkce $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ a $|f|$, pokud mají funkční hodnoty těchto funkcí v bodě z_0 smysl v $\mathbb{C}^*$.

iii) Nechť f je spojitá funkce v bodě z_0 a g je spojitá v bodě $f(z_0)$. Potom složená funkce $h : w = g(f(z))$ je spojitá v bodě z_0.

Definice 3.11. (křivka)

Křivkou v $\mathbb{C}^*$ rozumíme každé *spojité* zobrazení uzavřeného intervalu reálných čísel do množiny $\mathbb{C}^*$

$$\gamma : \langle a, b \rangle \to \Gamma \subset \mathbb{C}^*.$$

i) Pro křivku používáme značení $(\gamma, \langle a, b \rangle)$.

ii) Množina Γ se nazývá **grafem křivky** γ a pro tuto množinu používáme také značení $\langle \gamma \rangle$.

iii) Pokud k množině $M \subset \mathbb{C}^*$ najdeme křivku γ tak, aby grafem křivky γ byla množina M, mluvíme o **parametrizaci množiny**.

iv) Křivku orientujeme kladně nebo záporně, pokud stanovíme, který z bodů $\gamma(a), \gamma(b)$ je počáteční a koncový.

v) Je-li $\gamma(a) = \gamma(b)$, mluvíme o **uzavřené křivce**.

vi) Je-li γ prosté, mluvíme o **jednoduché křivce**.

vii) Jednoduchou uzavřenou křivku nazýváme **Jordanovou křivkou**.

Definice 3.12. (oblast)

Uzávěr množiny $M \subset \mathbb{C}^*$ je množina

$$\overline{M} = \{z \in \mathbb{C}^* : \text{ existuje posloupnost } (z_n) \text{ prvků z } M \text{ tak, že } z_n \to z\}\,.$$

Řekneme, že množina $M \subset \mathbb{C}^*$ je

i) **otevřená**, pokud
$$\forall\, z \in M \; \exists \varepsilon > 0 : \; U(z, \varepsilon) \subset M,$$

ii) **uzavřená**, pokud doplněk $\mathbb{C}^* \setminus M$ je otevřená množina,

iii) **souvislá**, pokud platí
$$\left.\begin{array}{l} M = A \cup B, \\ \overline{A} \cap B = A \cap \overline{B} = \emptyset \end{array}\right\} \Rightarrow (A = \emptyset \vee B = \emptyset)\,,$$

iv) **oblast**, pokud je otevřená a souvislá,

v) **kontinuum**, pokud je uzavřená a souvislá.

Definice 3.13. (jednoduše souvislá oblast)

Řekneme, že množina K je **komponentou množiny** $M \subset \mathbb{C}^*$, pokud je její maximální souvislou podmnožinou, tj. pokud platí

i) $K \subset M$,

ii) K je souvislá množina,

iii) $(K^* \subset M \text{ je souvislá množina }) \wedge (K \subset K^*) \quad \Rightarrow \quad K^* = K$.

Řekneme, že oblast $\Omega \subset \mathbb{C}^*$ je **n-násobně souvislou oblastí**, pokud její doplněk $\mathbb{C}^* \setminus \Omega$ má právě n různých komponent. Každou jednonásobně souvislou oblast nazveme **jednoduše souvislou oblastí**.

Věta 3.14. (topologické vlastnosti spojitých funkcí)

Je-li f spojitá funkce na množině $M \subset \mathbb{C}^*$, potom platí

i) je-li M uzavřená, je $f(M)$ uzavřená,

ii) je-li M souvislá, je $f(M)$ souvislá,

iii) je-li M uzavřená a f prostá, pak inverzní funkce f^{-1} je spojitá na $f(M)$,

iv) je-li M kontinuum, pak $f(M)$ je kontinuum.