Kapitola 4. Derivace

Definice 4.1. (derivace a diferenciál)

Mějme komplexní funkci $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$, která je jednoznačná a **konečná** na nějakém okolí $U(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$.

i) Řekneme, že funkce f má **derivaci v bodě** z_0, pokud existuje **konečná** limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} =: f'(z_0) \in \mathbb{C}.$$

$$\left(\quad \textit{píšeme:} \qquad f'(z_0) \qquad \text{nebo} \qquad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0) \qquad \text{nebo} \qquad \left.\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0} \quad \right)$$

ii) Řekneme, že funkce f je **diferencovatelná v bodě** z_0, jestliže existuje číslo $A \in \mathbb{C}$ a funkce $\omega : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ tak, že pro všechna $(z_0 + h) \in U(z_0)$ platí

$$f(z_0+h) - f(z_0) = Ah + \omega(h), \qquad \lim_{h\to 0} \frac{\omega(h)}{|h|} = 0.$$

Lineární funkce $\mathrm{d}f : h \mapsto Ah$ se nazývá **diferenciál** funkce f v bodě z_0 a značí se $\mathrm{d}f(z_0, h) = Ah$.

iii) Řekneme, že funkce f **má derivaci** (**je diferencovatelná**) **na množině** $M \subset D(f) \subset \mathbb{C}$, pokud má derivaci (je diferencovatelná) v každém bodě množiny M.

iv) Derivaci a diferenciál $(n+1)$-ního řádu, $n \in \mathbb{N}$, funkce f v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ definujeme indukcí

$$\begin{aligned} f^{(n+1)} &= \left(f^{(n)}\right)'(z_0), \\ \mathrm{d}^{n+1} f(z_0, h) &= \mathrm{d}\left(\mathrm{d}^n f(z_0, h)\right). \end{aligned}$$

Věta 4.2. (vztah mezi derivací a diferenciálem)

Funkce f je diferencovatelná v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ právě tehdy, když má v tomto bodě derivaci $f'(z_0)$. Přitom platí

$$\mathrm{d}f(z_0, h) = f'(z_0)h.$$

Věta 4.3. (vztah mezi derivací a spojitostí)

Má-li funkce f v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ derivaci, potom je v tomto bodě spojitá a konečná.

Věta 4.4. (vlastnosti derivace funkce)

i) Jestliže funkce f a g mají derivaci v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, potom mají derivaci v bodě z_0 i funkce cf $(c \in \mathbb{C})$, $f \pm g$, $f \cdot g$ a $\frac{f}{g}$ (pokud $g(z_0) \neq 0$) a platí

$$\begin{aligned} (cf)'(z_0) &= cf'(z_0), \\ (f \pm g)'(z_0) &= f'(z_0) \pm g'(z_0), \\ (f \cdot g)'(z_0) &= f'(z_0) \cdot g(z_0) + f(z_0) \cdot g'(z_0), \\ \left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) &= \frac{f'(z_0) \cdot g(z_0) - f(z_0) \cdot g'(z_0)}{(g(z_0))^2}. \end{aligned}$$

ii) Jestliže funkce f má derivaci v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a funkce g má derivaci v bodě $f(z_0)$, potom složená funkce $h : w = g(f(z))$ má derivaci v bodě z_0 a platí

$$h'(z_0) = g'(f(z_0)) \cdot f'(z_0).$$

iii) Nechť f^{-1} je jednoznačná větev inverzní funkce k funkci f. Je-li

(a) f^{-1} spojitá v bodě w_0,

(b) f má nenulovou derivaci v bodě $z_0 = f^{-1}(w_0)$,

potom funkce f^{-1} má derivaci v bodě w_0 a platí

$$(f^{-1})'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

Věta 4.5. (Cauchyovy-Riemannovy podmínky)

Funkce $f = u + \mathrm{i}\, v$ má derivaci v bodě $z_0 = x_0 + \mathrm{i}\, y_0 \in \mathbb{C}$ právě tehdy, když platí

i) funkce $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$ jsou diferencovatelné v bodě (x_0, y_0),

ii) funkce $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$ splňují v bodě (x_0, y_0) tzv. **Cauchyovy-Riemannovy podmínky**

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) &= \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Navíc, pokud existuje $f'(z_0)$, potom platí

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathrm{i}\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - \mathrm{i}\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Definice 4.6. (holomorfní funkce)

Řekneme, že funkce f je

i) **holomorfní v bodě** $z_0 \in \mathbb{C}$, jestliže existuje takové okolí $U(z_0)$ bodu z_0, že f má derivaci v každém bodě $z \in U(z_0)$,

ii) **holomorfní v bodě** ∞, jestliže funkce $g : g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ je holomorfní v bodě 0,

iii) **holomorfní na otevřené množině** $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, je-li holomorfní v každém bodě $z_0 \in \Omega$.

Množinu všech holomorfních funkcí na otevřené množině Ω značíme $H(\Omega)$.

Věta 4.7. (vlastnosti holomorfních funkcí)

i) Jsou-li funkce f a g holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}^*$, potom také funkce $f \pm g$, $f \cdot g$ a $\dfrac{f}{g}$ (pokud $g(z_0) \neq 0$) jsou holomorfní v bodě z_0.

ii) Je-li funkce f holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}^*$ a funkce g holomorfní v bodě $f(z_0)$, potom složená funkce $h : w = g(f(z))$ je holomorfní v bodě z_0.

iii) Je-li funkce f holomorfní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ a $f'(z) = 0$ pro každé $z \in \Omega$, potom f je konstantní na Ω.

iv) Je-li funkce f holomorfní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ a nabývá na Ω pouze reálných (resp. pouze ryze imaginárních) hodnot, potom f je konstantní na Ω.

Definice 4.8. (sdružené harmonické funkce)

Reálná funkce $u = u(x, y)$ dvou reálných proměnných x, y se nazývá **harmonická funkce** na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, pokud

i) funkce u má na oblasti Ω spojité všechny parciální derivace až do druhého řádu včetně,

ii) funkce u splňuje v oblasti Ω Laplaceovu rovnici $\Delta u = 0$, tj.

$$\forall\, (x, y) \in \Omega : \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Funkce $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$ se nazývají navzájem **sdružené harmonické funkce** na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, pokud obě funkce u a v jsou harmonické na Ω a splňují na Ω Cauchyovy-Riemannovy podmínky.

Věta 4.9. (o harmoničnosti složek holomorfní funkce)

Je-li funkce $f = u + \mathrm{i}\, v$ holomorfní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$, potom funkce u a v jsou harmonické na $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Věta 4.10. (o sdružených harmonických funkcích)

Reálné funkce $u = u(x, y)$ a $v = v(x, y)$ dvou reálných proměnných x, y jsou složkami holomorfní funkce $f = u + \mathrm{i}\, v$ na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ právě tehdy, když jsou sdruženými harmonickými funkcemi na oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Věta 4.11. (o konstrukci holomorfní funkce)

Nechť u (resp. v) je harmonická funkce na **jednoduše souvislé oblasti** $\Omega \subset \mathbb{C}$.
Potom existuje až na ryze imaginární (resp. reálnou) konstantu jednoznačně určená funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taková, že platí

i) f je holomorfní na Ω,

ii) $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + \mathrm{i}\, y) \quad \Big(\text{resp. } v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + \mathrm{i}\, y)\Big)$ pro všechna $z = x + \mathrm{i}\, y \in \Omega$.

Definice 4.12. (konformní funkce)

Řekneme, že jednoznačná komplexní funkce $f : w = f(z)$ je **konformní v bodě** $z_0 \in \mathbb{C}^*$, pokud

i) f je spojitá v bodě z_0,

ii) f zachovává orientované úhly sevřené křivkami vycházejícími z bodu z_0.

Věta 4.13. (postačující podmínka pro konformnost funkce)

Jestliže f je holomorfní funkce v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a $f'(z_0) \neq 0$, potom funkce f je konformní v bodě z_0.

Definice 4.14. (koeficient roztažnosti a úhel otočení funkce v bodě)

Nechť funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní v bodě z_0 a $f'(z_0) \neq 0$.

Číslo $|f'(z_0)|$ nazýváme **koeficientem roztažnosti funkce f v bodě** z_0.

Číslo $\arg f'(z_0)$ nazýváme **úhlem otočení funkce f v bodě** z_0.

Věta 4.15. (geometrická interpretace Cauchyových-Riemannových podmínek)

Jestliže funkce $f = u + \mathrm{i}\, v$ je holomorfní na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ a $f'(z) \neq 0$ pro každé $z \in \Omega$, potom křivky

$$u(x, y) = c_1, \quad v(x, y) = c_2, \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

jsou navzájem ortogonální v každém bodě $z \in \Omega$.