Kapitola 6. Křivkový integrál

Definice 6.1. (rektifikovatelná křivka)

Nechť $(\varphi, \langle a, b\rangle)$ je křivka a nechť $D : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme $||D|| = \max\limits_{k=1,2,\ldots,n}(t_k - t_{k-1})$ normu dělení. Každému dělení odpovídá lomená čára s vrcholy $z_k = \varphi(t_k)$ $k = 0, 1, \ldots, n$. Existuje-li konečné reálné číslo $K > 0$ takové, že pro každé dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ je

$$\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \leq K,$$

pak existuje konečné supremum množiny všech délek lomených čar $\langle a, b\rangle$ je

$$\sup\left\{\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_{k-1}| \leq K\right\}.$$

Toto suprémum nazýváme **délkou křivky** φ a značíme $d(\varphi)$ nebo S_φ.

Křivce, jejíž délka je konečná, říkáme **rektifikovatelná křivka** nebo křivka s konečnou délkou.

Definice 6.2. (křivkový integrál)

Nechť $(\varphi, \langle a, b\rangle)$ je libovolná křivka, $D : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ je dělení intervalu $\langle a, b\rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Dále nechť $||D|| = \max\limits_{k=1,2,\ldots,n}(t_k - t_{k-1})$ je norma dělení D, $z_k = \varphi(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, a $\tau_k \in \langle t_{k-1}, t_k\rangle$ jsou libovolně zvolené body.

Pak **Riemannovým integrálním součtem** z funkce f po křivce φ nazveme hodnotu

$$J(D, \{\tau_k\}) = \sum_{k=1}^{n} f(\varphi(\tau_k))(z_k - z_{k-1}).$$

Pokud pro každou posloupnost dělení $\{D_n\}$, pro kterou platí $||D_n|| \to 0$ pro $n \to \infty$ a při každé volbě bodů $\{\tau_k\}$ existuje konečná limita

$$\lim_{||D_n||\to 0} J(D_n, \{\tau_k\}) = J,$$

nazveme hodnotu limity J **křivkovým integrálem** funkce f **podél křivky** φ.

Křivkový integrál značíme $\int\limits_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z$ nebo také $\int\limits_{\varphi} f\,\mathrm{d}z$ nebo přesněji $\int\limits_{\langle\varphi\rangle} f(z)\,\mathrm{d}z$.

Při integraci nazýváme křivku **cestou** nebo **dráhou**.

Věta 6.3. (existence křivkového integrálu)

Nechť $(\varphi, \langle a, b\rangle)$ je křivka s konečnou délkou (rektifikovatelná křivka) a nechť f je komplexní funkce konečná a spojitá na množině $\langle\varphi\rangle$. Pak existuje křivkový integrál a platí

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\varphi} u(x, y)\,\mathrm{d}x - v(x, y)\,\mathrm{d}y + \mathrm{i}\int_{\varphi} v(x, y)\,\mathrm{d}x + u(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

kde integrály na pravé straně jsou křivkové integrály II. druhu.

Definice 6.4. (**hladká křivka**)

Je-li γ diferencovatelné zobrazení se spojitou a nenulovou derivací, mluvíme o **hladké křivce** (křivka třídy C^1).

Věta 6.5. (**o výpočtu křivkového integrálu**)

Je-li f konečná a spojitá na grafu po částech hladké křivce $(\varphi, \langle a, b\rangle)$, potom

$$\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{a}^{b} f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\;\mathrm{d}t.$$

Definice 6.6. (**součet křivek**)

Jsou-li $(\gamma_1, \langle a, b\rangle)$ a $(\gamma_2, \langle c, d\rangle)$ dvě křivky splňující $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, pak **součtem** $\gamma_1 \dot{+} \gamma_2$ těchto **křivek** nazýváme křivku $(\gamma_3, \langle a, b + (d - c)\rangle)$ definovanou předpisem

$$\gamma_3(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{pro } t \in \langle a, b\rangle\,, \\ \gamma_2(t - b + c) & \text{pro } t \in (b, b + d - c\rangle\,. \end{cases}$$

Věta 6.7. (**vlastnosti křivkového integrálu**)

Pro libovolnou po částech hladkou křivku $(\varphi, \langle a, b\rangle)$ a pro konečné a spojité funkce f a g na $\langle\varphi\rangle$ platí:

i) (linearita integrálu)

$$\int_{\varphi} (\alpha f(z) + \beta g(z))\;\mathrm{d}z = \alpha \int_{\varphi} f(z)\;\mathrm{d}z + \beta \int_{\varphi} g(z)\;\mathrm{d}z, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C},$$

ii) (integrál přes opačně orientovanou křivku)

$$\int_{\dot{-}\varphi} f(z)\;\mathrm{d}z = -\int_{\varphi} f(z)\;\mathrm{d}z.$$

iii) Je-li $\varphi = \varphi_1 \dot{+} \varphi_2 \dot{+} \ldots \dot{+} \varphi_n$, potom

$$\int_{\varphi} f(z)\;\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} \int_{\varphi_j} f(z)\;\mathrm{d}z.$$

iv) (substituce)

Nechť $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je funkce se spojitou a nenulovou derivací na okolí množiny $\langle\varphi\rangle$. Pak definuji $\psi(t) = g(\varphi(t))$ a $(\psi, \langle a, b\rangle)$ je také hladká křivka v $\mathbb{C}$ a platí (substituce $w = g(z)$)

$$\int_{\psi} f(w)\;\mathrm{d}w = \int_{\varphi} f(g(z))\,g'(z)\;\mathrm{d}z.$$

v) (odhad integrálu)

$$\left|\int_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \le \sup_{z \in \langle\varphi\rangle} |f(z)| \cdot S_{\varphi}.$$

Definice 6.8. (primitivní funkce)

Nechť funkce f je definována na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{C}$.
Holomorfní funkce F se nazývá **primitivní funkcí** k funkci f na Ω, pokud platí

$$\forall z \in \Omega: \; F'(z) = f(z).$$

Množina všech primitivních funkcí k funkci f se značí $\int f(z)\,\mathrm{d}z$.

Věta 6.9. (vlastnosti primitivních funkcí)

i) Je-li F primitivní funkce k f na Ω, potom také $F + c$ je primitivní funkcí k f na Ω pro libovolné $c \in \mathbb{C}$.

ii) Jsou-li F, G primitivní funkce k f, g na Ω, potom $\alpha F + \beta G$ je primitivní funkce k $\alpha f + \beta g$ na Ω pro libovolné $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

iii) (integrace per partes)
Jsou-li F, G primitivní funkce k f, g v Ω a H je primitivní k $F'G$, potom $(FG - H)$ je primitivní k FG' a platí

$$\int FG' \,\mathrm{d}z = FG - \int F'G \,\mathrm{d}z.$$

Definice 6.10. (určitý integrál)

Má-li funkce f v oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ primitivní funkci F, pak pro $z_1, z_2 \in \Omega$ definujeme **určitý integrál**

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\,\mathrm{d}z = F(z_2) - F(z_1).$$

Věta 6.11. (vztah křivkového integrálu a primitivní funkce)

Je-li $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ spojitá funkce v oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$, potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

i) f má primitivní funkci v Ω.

ii) $\oint_{\varphi} f(z) \,\mathrm{d}z = 0$ pro každou uzavřenou po částech hladkou křivku φ ležící v Ω (tj. $\langle\varphi\rangle \subset \Omega$).

iii) Křivkový integrál nezávisí na integrační cestě. Tj. jsou-li $(\varphi_1, \langle a_1, b_1\rangle)$ a $(\varphi_2, \langle a_2, b_2\rangle)$ dvě po částech hladké křivky splňující $\langle\varphi_1\rangle, \langle\varphi_2\rangle \subset \Omega$ a $\varphi_1(a_1) = \varphi_2(a_2)$, $\varphi_1(b_1) = \varphi_2(b_2)$, potom

$$\int_{\varphi_1} f(z) \,\mathrm{d}z = \int_{\varphi_2} f(z) \,\mathrm{d}z.$$