Kapitola 7. Cauchyovy integrální věty

Věta 7.1. (**Cauchyova fundamentální věta**)

Je-li $\Omega \subset \mathbb{C}$ jednoduše souvislá oblast a funkce f je holomorfní v Ω, potom pro každou jednoduchou uzavřenou po částech hladkou orientovanou křivku φ ležící v Ω platí

$$\oint_{\varphi} f(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

Věta 7.2. (**Cauchyova-Goursatova věta**)

Nechť φ je jednoduchá uzavřená po částech hladká orientovaná křivka v $\mathbb{C}$
a Ω je vnitřní oblast (vnitřek) křivky φ (tj. $\Omega = \operatorname{Int}\varphi$).

Jestliže funkce f je holomorfní v Ω, konečná a spojitá v uzávěru $\overline{\Omega} = \Omega \cup \langle\varphi\rangle$, potom platí

$$\oint_{\varphi} f(z)\ \mathrm{d}z = 0.$$

Věta 7.3. (**Cauchyova-Goursatova věta pro vícenásobně souvislou oblast**)

Nechť $\varphi, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, $n \in \mathbb{N}$, jsou jednoduché uzavřené po částech hladké souhlasně orientované křivky v $\mathbb{C}$ takové, že $\overline{\operatorname{Int}\varphi_j} \subset \operatorname{Int}\varphi$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$ a $\overline{\operatorname{Int}\varphi_j} \cap \overline{\operatorname{Int}\varphi_i} = \emptyset$ pro $i \neq j$.

Jestliže funkce f je holomorfní v $\Omega = \operatorname{Int}\varphi \setminus \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\operatorname{Int}\varphi_j}$, konečná a spojitá v uzávěru $\overline{\Omega}$, potom platí

$$\oint_{\varphi} f(z)\ \mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} \oint_{\varphi_j} f(z)\ \mathrm{d}z.$$

Věta 7.4. (**Cauchyův integrální vzorec**)

Nechť φ je jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka v $\mathbb{C}$
a Ω je vnitřek křivky φ (tj. $\Omega = \operatorname{Int}\varphi$).

Jestliže funkce f je holomorfní v Ω, konečná a spojitá v uzávěru $\overline{\Omega} = \Omega \cup \langle\varphi\rangle$, potom platí
(**Cauchyův integrální vzorec**)

$$\forall z_0 \in \Omega : \ f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\varphi} \frac{f(z)}{z - z_0}\ \mathrm{d}z.$$

Navíc má potom funkce f v Ω derivace všech řádů a platí pro ně vyjádření
(**zobecněný Cauchyův integrální vzorec**)

$$\forall n \in \mathbb{N}\ \forall z_0 \in \Omega : \ f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\varphi} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\ \mathrm{d}z.$$

Věta 7.5. **(existence derivací všech řádů)**

Je-li funkce f holomorfní v otevřené množině $M \subset \mathbb{C}$, potom má v M derivace všech řádů a všechny její derivace jsou také holomorfní v M.

Věta 7.6. **(Morerova věta)**

Je-li funkce f je spojitá a konečná na otevřené množině $M \subset \mathbb{C}$ a její integrál nezávisí na integrační cestě v M, potom funkce f je holomorfní v M.

Věta 7.7. **(Cauchyův odhad)**

Nechť funkce f je holomorfní na otevřené množině $M \subset \mathbb{C}$ a nechť existuje okolí $U(z_0, R) \subset M$ takové, že f je na tomto okolí omezená, tj.

$$\exists K > 0 \ \forall z \in U(z_0, R): \ |f(z)| \le K.$$

Potom platí

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \left| f^{(n)}(z_0) \right| \le \frac{n!K}{R^n}.$$

Věta 7.8. **(o střední hodnotě)**

Nechť f je holomorfní na otevřené množině $M \subset \mathbb{C}$ a nechť existuje R okolí bodu z_0 tak, že $\overline{U(z_0, R)} \subset M$. Potom

$$f(z_0) = \frac{1}{2\,\pi R} \int\limits_{K_R(z_0)} f \,\mathrm{d}s,$$

kde napravo je křivkový integrál I. druhu v $\mathbb{R}^2$ přes kružnici

$$K_R(z_0) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \right\}$$

z komplexní funkce f, tj. hodnota holomorfní funkce ve středu kruhu je rovna průměru hodnot této funkce na hranici tohoto kruhu.

Věta 7.9. **(o principu maxima modulu)**

Je-li f holomorfní v omezené oblasti Ω a konečná a spojitá na $\overline{\Omega}$, potom je buď f konstantní na $\overline{\Omega}$ nebo $|f|$ nabývá svého maxima na $\overline{\Omega}$ pouze na hranici $\partial\Omega$, tj.

$$\forall\, z \in \Omega: \ |f(z)| < \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

Věta 7.10. **(o polynomech v komplexním oboru)**

Pro funkce $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jsou následující dvě tvrzení ekvivalentní:

i) funkce f je polynomem stupně menšího než $n \in \mathbb{N}$;

ii) funkce f je holomorfní v $\mathbb{C}$ a existuje $n \in \mathbb{N}$ tak, že platí $\displaystyle\lim_{z \to \infty} \frac{f(z)}{z^n} = 0$.

Věta 7.11. **(Liouvilleova věta)**

Je-li funkce holomorfní a omezená v $\mathbb{C}$, potom je konstantní v $\mathbb{C}$.

Věta 7.12. (**základní věta algebry**)

Každý polynom kladného stupně má v $\mathbb{C}$ alespoň jeden kořen.