Kapitola 8. Laurentovy řady

Věta 8.1. (křivkový integrál řady funkcí)

Nechť (f_n) je posloupnost konečných a spojitých funkcí na grafu $\langle\varphi\rangle$ po částech hladké křivky $(\varphi, \langle a, b\rangle)$. Jestliže řada funkcí $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)$ konverguje stejnoměrně k funkci s na množině $\langle\varphi\rangle$, potom

$$\int_\varphi \left(\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(z)\right) \mathrm{d}z = \int_\varphi s(z)\,\mathrm{d}z = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\varphi f_n(z)\,\mathrm{d}z.$$

Věta 8.2. (Taylorova věta)

Nechť $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ je holomorfní funkce v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$.
Potom existuje $R > 0$ tak, že pro každé $z \in U(z_0, R)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\varphi \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,\mathrm{d}z, \quad n \in \mathbb{N},$$

kde φ je libovolná kladně orientovaná kružnice se středem v bodě z_0 a poloměrem $\varrho \in (0, R)$.

Věta 8.3. (vlastnosti holomorfních funkcí)

Nechť f je konečná a spojitá funkce na *jednoduše souvislé* oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$.
Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

i) f je holomorfní na Ω;

ii) pro každou jednoduchou uzavřenou po částech hladkou kladně orientovanou křivku φ ležící v Ω platí

$$\forall\, z_0 \in \operatorname{Int}\varphi: \; f(z_0) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_\varphi \frac{f(z)}{z - z_0}\,\mathrm{d}z;$$

iii) pro každou jednoduchou uzavřenou po částech hladkou orientovanou křivku φ ležící v Ω platí

$$\oint_\varphi f(z)\,\mathrm{d}z = 0;$$

iv) f je lokálně reprezentovatelná mocninnou řadou.

Věta 8.4. (o holomorfnosti limitní funkce)

Nechť (f_n) je posloupnost funkcí holomorfních na otevřené množině $M \subset \mathbb{C}$, která na M konverguje lokálně stejnoměrně k limitní funkci f. Potom funkce f je také holomorfní na M a platí

$$\forall\, k \in \mathbb{N}: \; f_n^{(k)} \underset{l.s.}{\overset{M}{\rightrightarrows}} f^{(k)}.$$

Definice 8.5. (Laurentova řada)

i) Nechť $z_0, a_0, a_{\pm 1}, a_{\pm 2}, \ldots$ jsou konečná komplexní čísla. Funkční řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = \cdots + a_{-2}\frac{1}{(z-z_0)^2} + a_{-1}\frac{1}{(z-z_0)} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

nazýváme **Laurentovou řadou** (zobecněnou mocninnou řadou) v komplexním oboru.
Číslo z_0 je **střed Laurentovy řady** a čísla $a_0, a_{\pm 1}, a_{\pm 2}, \ldots$ jsou **koeficienty Laurentovy řady**.

(a) Řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ nazýváme **regulární část Laurentovy řady**.

(b) Řadu $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z-z_0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n}$ nazýváme **hlavní část Laurentovy řady**.

(c) **Součtem Laurentovy řady** rozumíme součet součtů hlavní a regulární části, pokud oba existují.

ii) Nechť $z_0 = \infty$, pak **Laurentovou řadou se středem v bodě $z_0 = \infty$** nazveme řadu

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = \cdots + a_{-2}z^2 + a_{-1}z + a_0 + a_1\frac{1}{z} + a_2\frac{1}{z^2} + \ldots,$$

kde řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ je hlavní část Laurentovy řady a řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$ je regulární část Laurentovy řady.

Věta 8.6. (Laurentova věta)

Nechť funkce f je holomorfní na mezikruží

$$M(z_0, r, R) = \{z \in \mathbb{C} : \; r < |z-z_0| < R\},$$

kde $z_0 \in \mathbb{C}$ a $0 \le r < R \le +\infty$.
Potom existuje právě jedna Laurentova řada $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ taková, že pro každé $z \in M(z_0, r, R)$ platí

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n.$$

Pro koeficienty této řady platí

$$a_n = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{\varphi} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} \, \mathrm{d}z, \quad n \in \mathbb{Z},$$

kde φ je libovolná kladně orientovaná kružnice se středem v bodě z_0 a poloměrem $\varrho \in (r, R)$.

Věta 8.7. (o jednoznačnosti)

Nechť f a g jsou holomorfní funkce na oblasti $\Omega \subset \mathbb{C}$ a nechť $f = g$ na množině $M \subset \Omega$.
Jestliže M má alespoň jeden hromadný bod v Ω, potom $f = g$ na Ω.