Kapitola 9. Rezidua

Definice 9.1. (izolovaná singularita)

Bod $z_0 \in \mathbb{C}^*$ nazveme **izolovanou singularitou** (**izolovaný singulární bod**) funkce f, jestliže

i) f není holomorfní v bodě z_0,

ii) existuje prstencové okolí bodu z_0, na němž je f holomorfní.

Izolovanou singularitu z_0 nazýváme

i) **odstranitelnou singularitou**, jestliže $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$,

ii) **pólem**, jestliže $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$,

iii) **podstatnou singularitou**, jestliže $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ neexistuje.

Věta 9.2. (o izolované singularitě v nekonečnu)

Funkce $f = f(z)$ má izolovaný singulární bod $z_0 = \infty$ právě tehdy, když funkce $g(w) = f\left(\frac{1}{w}\right)$ má izolovaný singulární bod $w_0 = 0$.

Druh singularity funkce f v bodě $z_0 = \infty$ je shodný jako druh singularity funkce g v bodě $w_0 = 0$.

Věta 9.3. (charakteristika odstranitelné singularity)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

i) Bod z_0 je odstranitelnou singularitou funkce f, tj.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \in \mathbb{C}.$$

ii) Funkce f je omezená na nějakém prstencovém okolí $P(z_0)$, tj.

$$\exists\, \delta > 0\ \exists\, K > 0\ \forall\, z \in P(z_0, \delta): \ |f(z)| \le K.$$

iii) Všechny členy hlavní části Laurentova rozvoje funkce f se středem v bodě z_0 jsou rovny nule, tj.

$$\forall\, k \in \mathbb{N}: \ a_{-k} = 0.$$

iv) Funkci f lze definovat (či změnit) v bodě z_0 tak, že f bude holomorfní na nějakém okolí $U(z_0)$.

Definice 9.4. (násobnost kořene funkce)

Nechť funkce f je holomorfní na okolí $U(z_0)$ bodu $z_0 \in \mathbb{C}$. Pokud f není identicky rovna nule na $U(z_0)$, potom číslo $k \in \mathbb{N}$, pro které platí

$$f(z_0) = \cdots = f^{(k-1)}(z_0) = 0 \quad a \quad f^{(k)}(z_0) \neq 0,$$

se nazývá **násobnost** (**řád**) **kořene** z_0 **funkce** f.

Věta 9.5. (charakteristika pólu)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

i) Bod z_0 je pólem, tj.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty.$$

ii) Existuje číslo $k \in \mathbb{N}$ tak, že funkci f lze na nějakém prstencovém okolí $P(z_0)$ vyjádřit ve tvaru

$$f(z) = \frac{h(z)}{(z - z_0)^k},$$

kde funkce h je holomorfní na okolí $U(z_0) = P(z_0) \cup \{z_0\}$ a $h(z_0) \neq 0$.

Tj. číslo $k \in \mathbb{N}$ je takové nejmenší číslo, že

$$\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) \in \mathbb{C}.$$

Číslo k je určeno jednoznačně a nazývá se **násobnost** nebo **řád pólu** z_0.

iii) Hlavní části Laurentova rozvoje funkce f se středem v bodě z_0 má pouze $k \in \mathbb{N}$ nenulových členů, tj.

$$\exists\, k \in \mathbb{N} : \ \Big(a_{-k} \neq 0 \quad \wedge \quad \forall\, n \in \mathbb{N} : \ n > k \ \Rightarrow \ a_{-n} = 0 \Big).$$

iv) Funkce $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ má izolovaný nulový bod z_0 (násobnost nulového bodu udává násobnost pólu).

Věta 9.6. (charakteristika podstatné singularity)

Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f. Potom následující tvrzení jsou ekvivalentní:

i) Bod z_0 je podstatnou singularitou, tj.

$$\lim_{z \to z_0} f(z) \quad \text{neexistuje.}$$

ii) Hlavní části Laurentova rozvoje funkce f se středem v bodě z_0 má nekonečně mnoho nenulových členů, tj.

$$a_{-n} \neq 0 \quad \text{pro nekonečně mnoho } n \in \mathbb{N}.$$

Věta 9.7. (l'Hospitalovo pravidlo)

Nechť funkce f a g jsou holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$, který je jejich nulovým bodem, nebo mají v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ pól. Potom platí

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \to z_0} \frac{f'(z)}{g'(z)}.$$

Věta 9.8. (Weierstrass - Casorati - Sochockij)

Je-li $z_0 \in \mathbb{C}^*$ podstatným singulárním bodem funkce f, potom

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{C}^* \quad \exists\, (z_n): \quad \lim_{n \to +\infty} z_n = z_0 \quad \wedge \quad \lim_{n \to +\infty} f(z_n) = \alpha.$$

Věta 9.9. (velká Picardova věta)

Je-li $z_0 \in \mathbb{C}^*$ podstatným singulárním bodem funkce f, potom na každém prstencovém okolí $P(z_0)$ nabývá funkce f všech konečných hodnot $w = f(z) \in \mathbb{C}$ s výjimkou nejvýše jedné.

Definice 9.9. (reziduum funkce v bodě)

i) Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je izolovaná singularita funkce f a mějme Laurentův rozvoj funkce f na nějakém prstencovém okolí bodu z_0

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \cdots + a_{-2} \frac{1}{(z - z_0)^2} + a_{-1} \frac{1}{(z - z_0)} + a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \ldots$$

Číslo a_{-1} nazýváme **reziduum funkce f v bodě** z_0 a značíme

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) \qquad \text{nebo} \qquad \operatorname{res}_{z_0} f(z) \qquad \text{nebo} \qquad \operatorname{res} f(z_0).$$

ii) Nechť ∞ je izolovaná singularita funkce f a mějme Laurentův rozvoj funkce f na nějakém prstencovém okolí bodu ∞

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a_n}{z^n} = \cdots + a_{-2} z^2 + a_{-1} z + a_0 + a_1 \frac{1}{z} + a_2 \frac{1}{z^2} + \ldots$$

Číslo $-a_1$ nazýváme **reziduum funkce f v bodě** ∞ a značíme

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \qquad \text{nebo} \qquad \operatorname{res}_{\infty} f(z) \qquad \text{nebo} \qquad \operatorname{res} f(\infty).$$

Věta 9.10. (o převodu rezidua v nekonečnu)

Je-li ∞ izolovanou singularitou funkce f, potom platí

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname*{res}_{z=0} g(z),$$

kde $g(z) = \dfrac{-1}{z^2} f\left(\dfrac{1}{z}\right)$.

Věta 9.11. **(výpočet rezidua v bodech odstranitelné singularity)**

i) Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je bod odstranitelné singularity funkce f, potom

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = 0.$$

ii) Nechť ∞ je bod odstranitelné singularity funkce f, potom

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\lim_{z\to\infty} z\left(f(z) - a_0\right),$$

kde $a_0 = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$.

Věta 9.12. **(výpočet rezidua v pólech)**

i) Nechť $z_0 \in \mathbb{C}$ je pól násobnosti menší nebo rovné $k \in \mathbb{N}$ funkce f, potom

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}z^{k-1}} \left[(z-z_0)^k f(z)\right].$$

Speciálně pro jednoduchý pól $z_0 \in \mathbb{C}$ funkce f (tj. $k=1$) platí

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} \left[(z-z_0) f(z)\right].$$

ii) Nechť ∞ je pól násobnosti menší nebo rovné $k \in \mathbb{N}$ funkce f, potom

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^k}{(k+1)!} \lim_{z\to\infty} \left(z^{k+2} \frac{\mathrm{d}^{k+1} f(z)}{\mathrm{d}z^{k+1}} \right).$$

Věta 9.13. **(reziduum pro násobek a podíl funkcí)**

i) Nechť funkce f je holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$ a nechť funkce g má v bodě z_0 jednoduchý pól. Potom

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \left(f(z) \cdot g(z)\right) = f(z_0) \cdot \operatorname*{res}_{z=z_0} g(z).$$

ii) Nechť funkce g a h jsou holomorfní v bodě $z_0 \in \mathbb{C}$. Nechť $g(z_0) \neq 0$ a h má v bodě z_0 jednoduchý kořen (tj. $h(z_0) = 0$, $h'(z_0) \neq 0$). Potom

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Věta 9.14. **(vztah konečného počtu reziduí)**

Nechť funkce f je holomorfní v $\mathbb{C}$ s vyjímkou konečného počtu bodů $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Potom platí

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) + \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z) = 0.$$

Věta 9.15. (reziduová věta)

Mějme jednoduše souvislou oblast $\Omega \in \mathbb{C}$ a nechť

i) φ je jednoduchá uzavřená po částech hladká kladně orientovaná křivka v Ω,

ii) funkce f je holomorfní na $\Omega - \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, kde $z_1, z_2, \ldots, z_n$ jsou navzájem různé izolované singularity funkce f z vnitřku křivky φ.

Potom platí

$$\oint_{\varphi} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i} \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_j} f(z).$$

Věta 9.16. (Jordanovo lemma)

Nechť $\Omega = \{z \in \mathbb{C} :\ \operatorname{Im} z \geq 0, |z| \geq R_0\}$ pro nějaké $R_0 \geq 0$ a mějme konečnou funkci $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, která je spojitá na Ω. Dále označme horní polokružnici poloměru R se středem v počátku $\varphi_R(t) = R\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t}$ pro $R \geq R_0$, $t \in \langle 0, \pi \rangle$ a $M_R = \max\limits_{z \in \langle \varphi_R \rangle} |f(z)|$.

Pak platí následující implikace:

i) Jestliže $R \cdot M_R \to 0$ pro $R \to +\infty$, potom $\displaystyle\int_{\varphi_R} f(z)\,\mathrm{d}z \to 0$ pro $R \to +\infty$.

ii) Jestliže $\alpha > 0$ a $M_R \to 0$ pro $R \to +\infty$, potom $\displaystyle\int_{\varphi_R} f(z)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\alpha z}\,\mathrm{d}z \to 0$ pro $R \to +\infty$.