

Stochastické procesy - cvičení

1. **Příklad** Částice na přímce může zaujímat 5 pozic v bodech 1, 2, 3, 4 a 5. Pokud se dostane do polohy 1 nebo 5, tak v ní setrvává. Z ostatních poloh se s pravděpodobností p přemístí o 1 vpravo a s pravděpodobností $1 - p$ o 1 vlevo.

- a) Napište matici přechodu odpovídajícího Markovského řetězce a klasifikujte stavy.
 b) Metodou maximální věrohodnosti odhadněte parametr p , jestliže byla částice v poloze 3 a po 3 krocích skončila v poloze 2.

Řešení: a) Jestliže si označíme v souladu se zadáním polohy jako stavy 1 - 5, pak jsou stavy 1 a 5 trvalé a absorpční a stavy 2, 3 a 4 jsou přechodné. Matice přechodu má tvar

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- b) Aby částice přešla z polohy 3 do polohy 2 ve třech krocích musí projít jednou z cest: $\{3, 2, 3, 2\}$, $\{3, 4, 3, 2\}$.

Při průchodu oběma cestami projde 2 kroky vlevo a 1 vpravo. Obě cesty mají stejnou pravděpodobnost $(1-p)^2 p$ a tudíž je pravděpodobnost obou možností, věrohodnostní funkce $L(p)$ rovna

$$L(p) = 2p(1-p)^2.$$

Maximálně věrohodný odhad $\hat{p}$ parametru p je maximální hodnota věrohodnostní funkce v intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

Protože je $L(0) = L(1) = 0$ bude mít věrohodnostní funkce maximum v bodě, kde je její derivace nulová. Je

$$L'(p) = 2(1-p)^2 - 4p(1-p) = 2(1-p)(1-p-2p) = 2(1-p)(1-3p) = 0 \Rightarrow p = \frac{1}{3}.$$

Maximálně věrohodným odhadem parametru p je hodnota $\hat{p} = \frac{1}{3}$.

Poznámka: Stejnou hodnotu dostaneme jako maximum logaritmu věrohodnostní funkce. Je

$$l(p) = \ln L(p) = \ln 2 + \ln p + 2 \ln(1-p) \Rightarrow l'(p) = \frac{1}{p} - \frac{2}{1-p} = 0 \Rightarrow \frac{1}{p} = \frac{2}{1-p} \Rightarrow$$

$$1-p = 2p \Rightarrow 1 = 3p \Rightarrow p = \frac{1}{3}.$$

2. **Příklad** Částice na přímce může zaujímat 5 pozic v bodech 1, 2, 3, 4 a 5. Pokud se dostane do polohy 1, tak se v dalším kroku vrátí do polohy 2, pokud se dostane do polohy 5, tak v ní setrvává. Z ostatních poloh se s pravděpodobností p přemístí o 1 vpravo a s pravděpodobností $1 - p$ o 1 vlevo.

a) Napište matici přechodu odpovídajícího Markovského řetězce a klasifikujte stavy.

b) Metodou maximální věrohodnosti odhadněte parametr p , jestliže byla částice v poloze 2 a po 3 krocích skončila v poloze 3.

Řešení: a) Jestliže si označíme v souladu se zadáním polohy jako stavy 1 - 5, pak je stav 5 trvalý a absorpční a stavy 1, 2, 3 a 4 jsou přechodné. Matice přechodu má tvar

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Aby částice přešla z polohy 2 do polohy 3 ve třech krocích musí projít jednou z cest, které mají pravděpodobnost:

1. $\{2, 1, 2, 3\}$, $P_1 = p(1-p)$;

2. $\{2, 3, 2, 3\}$, $P_2 = p^2(1-p)$;

3. $\{2, 3, 4, 3\}$, $P_3 = p^2(1-p)$.

Pravděpodobnost cest, věrohodnostní funkce, je

$$L(p) = P_1 + P_2 + P_3 = p(1-p) + 2p^2(1-p) = p + p^2 - 2p^3.$$

Protože je $L(0) = L(1) = 0$ bude mít věrohodnostní funkce maximum v bodě, kde je její derivace nulová. Je

$$L'(p) = 1 + 2p - 6p^2 = 0 \Rightarrow p_{1,2} = \frac{1}{6}(1 \pm \sqrt{7}).$$

Protože je $p_2 < 0$ je maximálně věrohodným odhadem parametru p hodnota

$$p_1 = \hat{p} = \frac{1}{6}(1 + \sqrt{7}) \doteq 0.6076.$$