8. Definiční obory, obory hodnot, hladiny funkce více proměnných

Další příklady na procvičení TRIAL[π] 606.1

8.1. Definiční obory a obory hodnot. Pro následující funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

(a) nalezněte a graficky znázorněte definiční obor D_f,
(b) nalezněte obor hodnot H_f.

(1) $f(x,y) = \sqrt{x^3y^3}$,
(2) $f(x,y) = \log(xy+1)$,
(3) $f(x,y) = \sqrt{xy-1}$,
(4) $f(x,y) = \log(2x-y+1)$,
(5) $f(x,y) = \ln(1-|x-y|)$,
(6) $f(x,y) = \sqrt{2x+8-x^2-y^2}$,
(7) $f(x,y) = \sqrt{9-x^2-y^2} + \sqrt{x^2+y^2-4}$,
(8) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2-1) + \log(16-x^2-16y^2)$ (bez oboru hodnot),
(9) $f(x,y) = \sqrt{\sin x \sin y}$,
(10) $f(x,y) = \arcsin(xy)$,
(11) $f(x,y) = \arccos \frac{y}{x}$,
(12) $f(x,y) = \sqrt{1-|x|-|y|}$,
(13) $f(x,y) = \ln\ln\ln|x-y|$,
(14) $f(x,y) = \dfrac{1}{y-x^3+x^2}$,
(15) $f(x,y) = \dfrac{1}{|\sin(x)|+|\sin(y)|}$.

8.2. Hladiny. Nalezněte hladiny následujících funkcí $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pro které hodnoty $C \in \mathbb{R}$ jsou hladiny neprázdné množiny?

(1) $f(x,y) = x+y-4$,
(2) $f(x,y) = \frac{x-1}{y-2}$,
(3) $f(x,y) = x^2+y^2+4x-2y+6$,
(4) $f(x,y) = x^2+4y^2-3$,
(5) $f(x,y) = x^2-y^2+5$,
(6) $f(x,y) = |x|+2|y|$,
(7) $f(x,y) = \log(1-x^2-y^2)$,
(8) $f(x,y) = \sqrt{xy+1}$.

8.3. **Funkce $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$.** Pro následující funkce $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

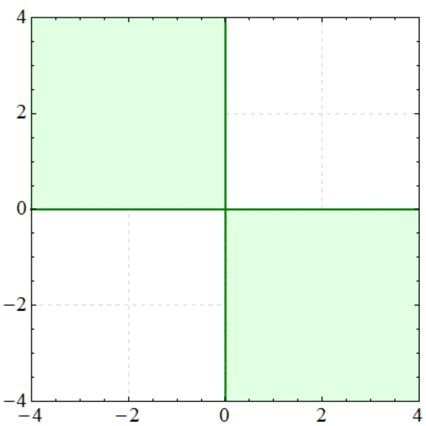
(a) nalezněte definiční obor D_f,
(b) nalezněte obor hodnot H_f,
(c) popište hladiny funkce.

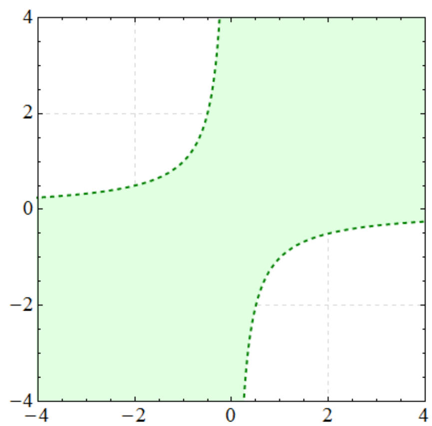
(1) $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$,
(2) $f(x, y, z) = x - 2y + 4z + 3$,
(3) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$,
(4) $f(x, y, z) = \frac{1}{\operatorname{sign}(x)\operatorname{sign}(y)\operatorname{sign}(z)}$,
(5) $f(x, y, z) = \operatorname{sign}(\sin(x)) \operatorname{sign}(\sin(y)) \operatorname{sign}(\sin(z))$,
(6) $f(x, y, z) = \sin(|x| + |y| + |z|)$.

8.1.

(1) (a) $D_f = \{(x, y) : xy \geq 0\}$ (1. a 3. kvadrant včetně souřadnicových os),
(b) $H_f = \langle 0, +\infty)$,

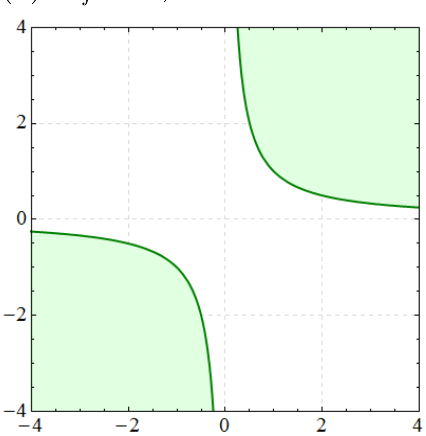
(2) (a) $D_f = \{(x, y) : xy > -1\}$ (oblast "mezi"větvemi hyperboly $y = -\frac{1}{x}$)
(b) $H_f = \mathbb{R}$,

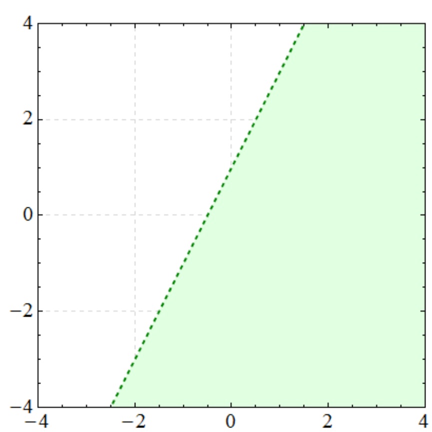




(3) (a) $D_f = \{(x, y) : xy \geq 1\}$ (oblast "na a vně"větví hyperboly $y = \frac{1}{x}$)
(b) $H_f = \langle 0, +\infty)$,

(4) (a) $D_f = \{(x, y) : y < 2x - 1\}$ (polorovina pod přímkou $y = 2x - 1$)
(b) $H_f = \mathbb{R}$,



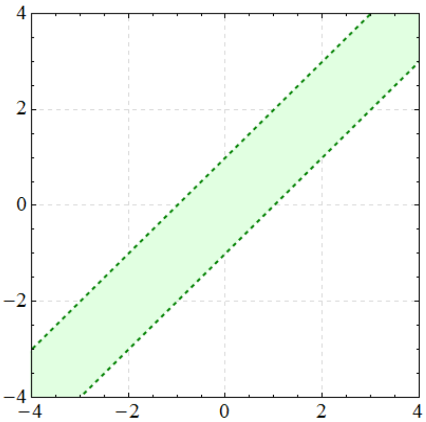


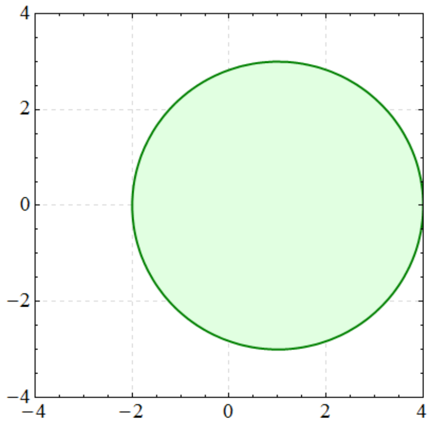
(5) (a) $D_f = \{(x, y) : |x - y| < 1\}$ (pás mezi přímkami $y = x - 1$ a $y = x + 1$),

(b) $H_f = (-\infty, 0\rangle$,

(6) (a) $D_f = \{(x,y) : (x-1)^2 + y^2 \leq 9\}$ (kruh se středem v bodě $[1,0]$ a poloměrem 3)

(b) $H_f = \langle 0, 3\rangle$,

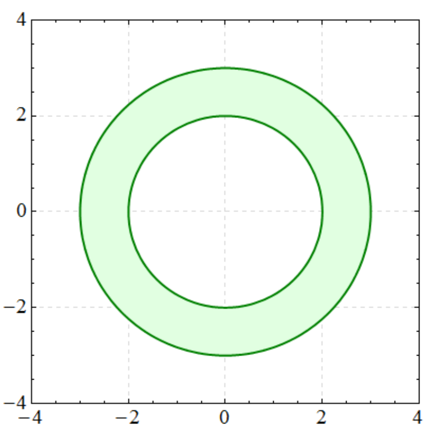


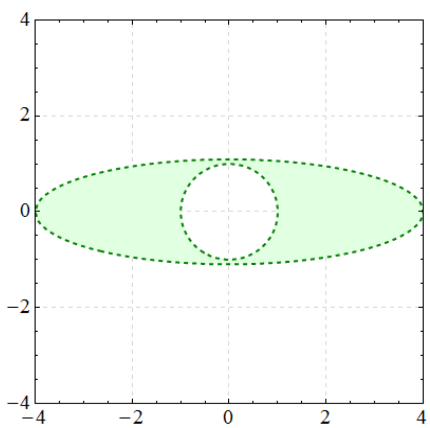


(7) (a) $D_f = \{(x,y) : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$ (mezikruží se středem v $[0,0]$ a poloměry hraničních kružnic 2 a 3),

(b) $H_f = \left\langle \sqrt{5}, \sqrt{10} \right\rangle$, (minima leží na krajních kružnicích, maxima nabývá funkce na kružnici s poloměrem $\sqrt{\frac{13}{2}}$)

(8) (a) $D_f = \{(x,y) : x^2 + y^2 > 1\mathrm{a}x^2 + 16y^2 < 16\}$ (elipsa s a=16, b=1, bez kruhu s poloměrem jedna, vše bez okrajů.



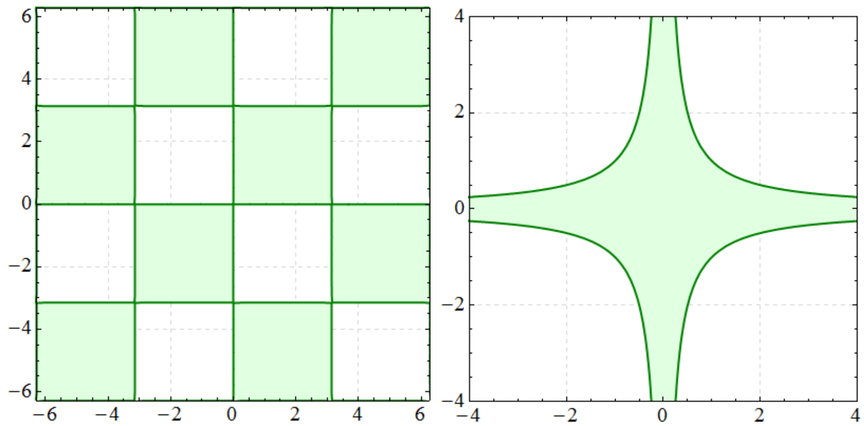


(9) (a) $D_f = \{(x,y) : \sin x \sin y \geq 0\}$ (šachovnice tvořená políčky o délce stran π),

(b) $H_f = \langle 0, 1\rangle$,

(10) (a) $D_f = \{(x,y) : xy \in \langle -1, 1\rangle\}$ ("nekonečná hvězdička"omezená hyperbolami $\frac{1}{x}$ a $-\frac{1}{x}$)

(b) $H_f = \left\langle \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$,

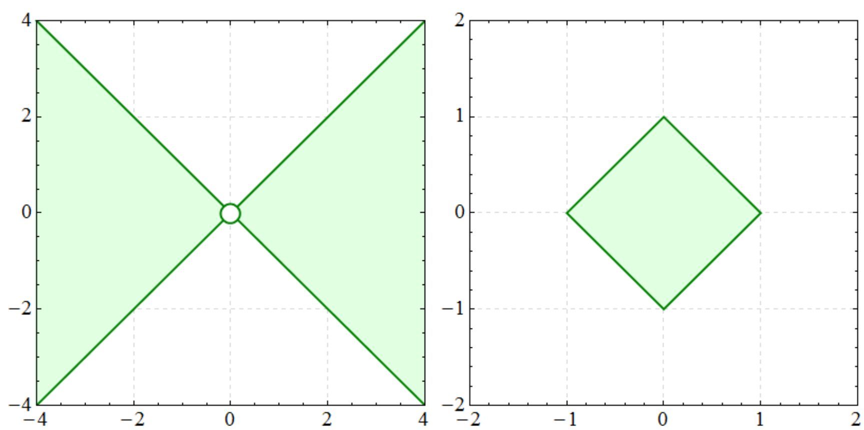


(11) (a) $D_f = \{(x,y) : x \neq 0 \text{ a } y \in \langle -|x|, |x| \rangle\}$ (plocha na a mezi přímkami $y = x$ a $y = -x$, bez počátku)

(b) $H_f = \langle 0, \pi \rangle$,

(12) (a) $D_f = \{(x,y) : |x| + |y| \leq 1\}$ (vnitřek a hranice čtverce procházejícího body $\langle \pm 1, \pm 1 \rangle$)

(b) $H_f = \langle 0, 1 \rangle$,

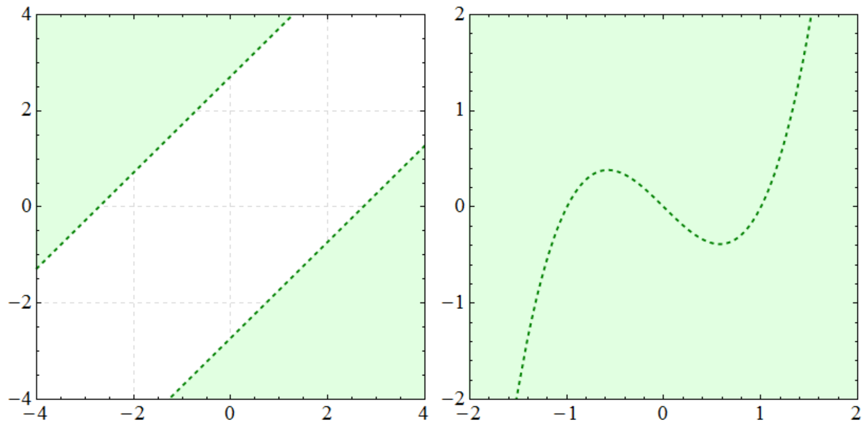


(13) (a) $D_f = \{(x,y) : |x - y| > e\}$ (doplněk k pásu mezi přímkami $y = x - e$ a $y = x + e$)

(b) $H_f = \mathbb{R}$,

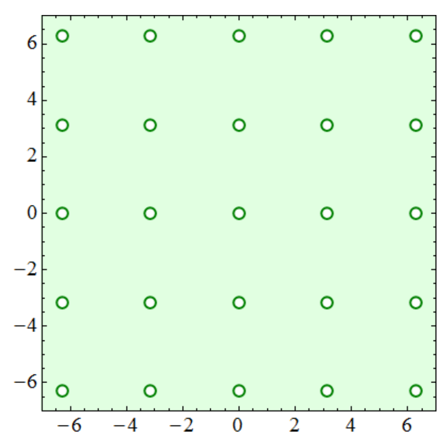
(14) (a) $D_f = \{(x,y) : y \neq x^3 - x^2\}$ ($\mathbb{R}^2$ bez grafu funkce $y = x^3 - x^2$)

(b) $H_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$,



(15) (a) $D_f = \{(x,y) : (x,y) \neq (m\pi, n\pi), m, n \in \mathbb{N}\}$ ($\mathbb{R}^2$ bez všech bodů, kde obě souřadnice jsou násobky π)

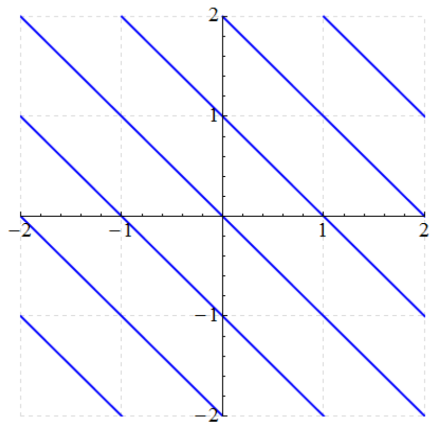
(b) $H_f = \left\langle \frac{1}{2}, \infty \right)$.

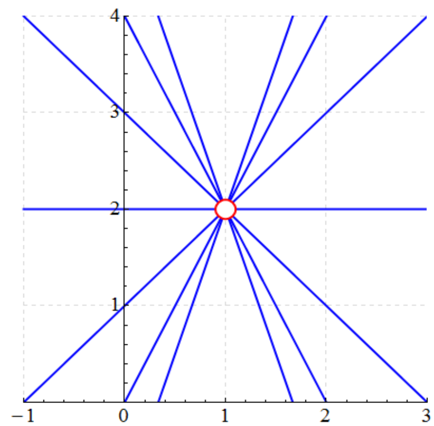


8.2.

(1) přímky rovnoběžné s $y = -x$, $C \in \mathbb{R}$,

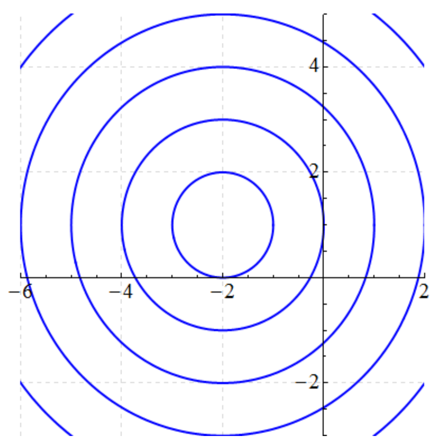
(2) přímky procházející bodem $\langle 1, 2 \rangle$, $C \in \mathbb{R}$,

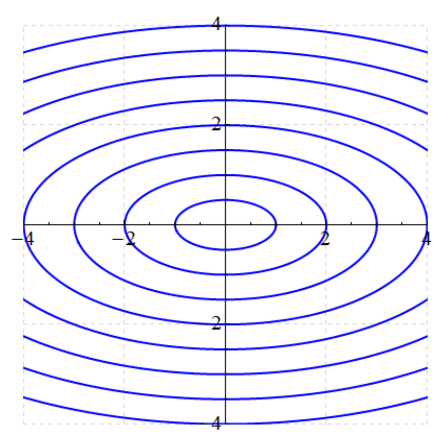




(3) kružnice se středem v bodě $\langle -2, 1\rangle$, $C \geq 1$,

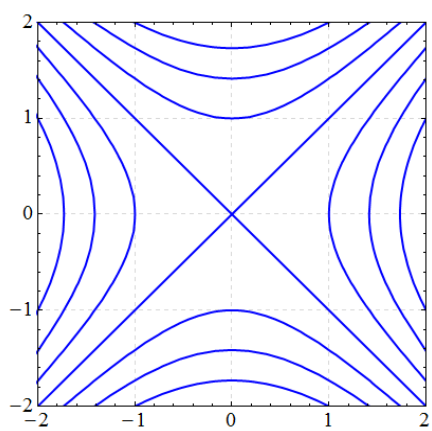
(4) elipsy se středem v počátku s dvakrát větší x-ovou poloosou, $C \geq -3$,

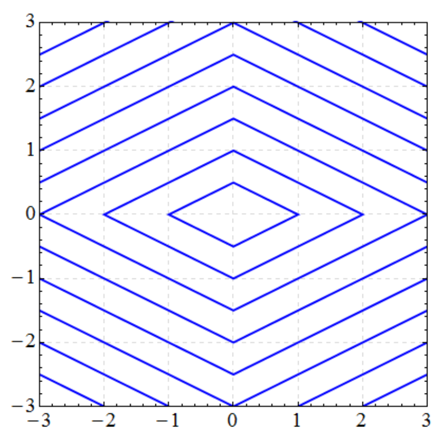




(5) hyperboly se středem v počátku (H_5 jsou dvě přímky), $C \in \mathbb{R}$,

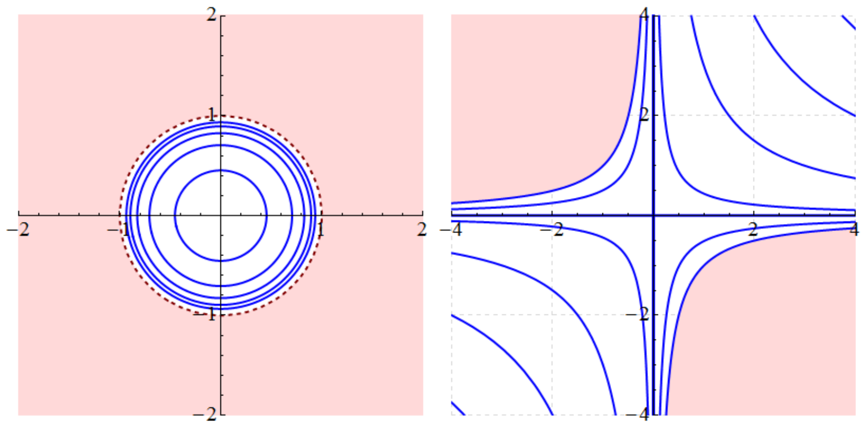
(6) soustředné kosočtverce, $C \geq 0$.





(7) $D_f = \{(x,y) : x^2+y^2 < 1\}$, kružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{1-10^C}$, $C \in (-\infty, 0)$.

(8) $D_f = \{(x,y) : xy < 1\}$, hyperboly $y = \frac{C^2-1}{x}$, pro $C=1$ tvoří hladinu souřadnicové osy. $C \geq 0$.



8.3.

(1) (a) $D_f = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ (koule se středem v počátku a poloměrem 1),
(b) $H_f = \langle 0, 1\rangle$,
(c) pláště soustředných koulí.

(2) (a) $D_f = \mathbb{R}^3$,
(b) $H_f = \mathbb{R}$,
(c) rovnoběžné roviny.

(3) (a) $D_f = \mathbb{R}^3$,
(b) $H_f = \mathbb{R}$,
(c) jednodílné hyperboloidy ($C > 0$), kužel ($C = 0$), dvojdílné hyperboloidy ($C < 0$) (mrkněte na doplňující slidy k přednáškám).

(4) (a) $D_f = \{(x,y,z) : xyz \neq 0\}$ ($\mathbb{R}^3$ bez rovin xy, yz, xz),
(b) $H_f = \{-1, 1\}$,
(c) hladiny jsou vždy 4 z 8 oktantů v $\mathbb{R}^3$ bez os.

(5) (a) $D_f = \mathbb{R}^3$,
(b) $H_f = \{-1, 0, 1\}$,
(c) hladina pro $C = 0$ je krychlová mřížka v $\mathbb{R}^3$, hladiny pro $C = \pm 1$ jsou pak spolu nesousedící krychličky bez plášťů (vnitřky té mřížky).

(6) (a) $D_f = \mathbb{R}^3$,
(b) $H_f = \langle -1, 1\rangle$,

(c) hladiny jsou množiny soustředných osmistěnů. Například hladina pro $C = 0$ jsou všechny osmistěny takové, že $|x| + |y| + |z| = k\pi$, $k \in \mathbb{N}_0$.