

G1 - cvičení 23. 9. 08

1) Vypočítejte následující determinanty:

a)
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 6 + 5 \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 4 - 3 \cdot 1 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 - 6 \cdot 2 \cdot 5 = 6 + 45 + 16 - 6 - 12 - 60 = 67 - 78 = -11$$

- Pro výpočet použijeme Sarrusovo pravidlo

b)
$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} \xrightarrow{\substack{(-2) \\ (-2) \\ (-1)}} \begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^3 \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -4 \\ 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -[0 + 6 + 16 - 6 - 8 - 0] = -8$$

- Někdy se pomocí úprav vytvoříme v prvním sloupci tři nuly a poté provedeme rozvoj podle tohoto sloupce

2) Určete hodnost matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-1) \\ (-1) \\ (-2)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(+1) \\ (-1)}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{h=4}$$

Hodnost řádkové matice je 4, neboť po úpravě na stupňovitý tvar obsahuje 4 nenulové řádky.

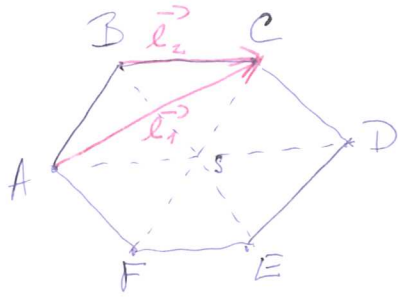
3) Řešte soustavu rovnic:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= 5 \\ 2x + 3y + 4z + 6w &= 1 \\ x + 3y + z + 2w &= 1 \\ 2x + 3y + 4z + 5w &= 1 \end{aligned}$$

Buď řešení využijeme předchozího příkladu, nebo víme, že hodnost matice soustavy i rozšíření je stejná a proto počet neznámých tedy soustava má jedno řešení:

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4w &= 5 \\ y + 2z + 2w &= 9 \\ 4z + 4w &= 13 \\ w &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 5 - 2 \cdot \frac{5}{2} - 3 \cdot \frac{13}{4} - 4 \cdot 0 = 5 - 5 - \frac{39}{4} = -\frac{39}{4} = -9,75 \\ 2z &= 9 - \frac{13}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \\ z &= \frac{13}{4} = 3,25 \end{aligned}$$

- 4) Je dan' pravidelný' šestiúhelník ABCDEF. Najděte souřadnice vektorů $B-A$, $D-A$, $D-B$, $A-E$, $A-F$, $B-E$ v bázi $\langle \vec{e}_1, \vec{e}_2 \rangle$, kde $\vec{e}_1 = C-A$, $\vec{e}_2 = C-B$.



$$B-A = -(C-B) + (C-A) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$$

$$D-A = (D-S) + (S-A) = (C-B) + (C-A) = 2\vec{e}_2$$

úsečky AS a SD jsou shodné s BC...

$$D-B = (D-A) - (B-A) = 2\vec{e}_2 - (\vec{e}_1 - \vec{e}_2) = 3\vec{e}_2 - \vec{e}_1$$

$$A-E = -(D-B) = \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$$

úsečky BD a EA jsou opačně orientované

$$A-F = C-D = (C-A) + (A-D) = \vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$$

úsečka FA je shodná s DC

$$B-E = 2 \cdot (A-F) = 2\vec{e}_1 - 4\vec{e}_2$$

úsečky ES a SD jsou shodné s FA...

- 5) Jaké jsou souřadnice bodu B, který je koncovým bodem vektoru $\vec{v} = (1; -2; 3)$ umístěného do bodu $A = [1; 5; 3]$?

$$B = ?$$

$$\vec{v} = (1; -2; 3)$$

$$A = [1; 5; 3]$$

$$\vec{v} = \vec{AB}$$

$$\vec{v} = B - A$$

$$B = A + \vec{v}$$

$$B = [1; 5; 3] + (1; -2; 3)$$

$$B = [2; 3; 6]$$

- 6) Jaké jsou souřadnice bodu P, který je počátečním bodem vektoru $\vec{v} = (4; 3; -2)$ skončujícím bodem $Q = [2; 2; 1]$?

$$P = ?$$

$$\vec{v} = \vec{PQ}$$

$$\vec{v} = (4; 3; -2)$$

$$\vec{v} = Q - P$$

$$Q = [2; 2; 1]$$

$$P = Q - \vec{v}$$

$$P = [2; 2; 1] - (4; 3; -2)$$

$$\Rightarrow P = [-2; -1; 3]$$

- 7) Pro která čísla k, l jsou vektory $\vec{u} = (2; 1; k)$ a $\vec{v} = (3; l; 3)$ kolmé?
- kolmé vektory jsou rovnoběžné, dva rovnoběžné vektory jsou vzájemně násobky

$$\Rightarrow \frac{\vec{u}}{\vec{v}} = \dots \quad \frac{2}{3} = \frac{1}{l} = \frac{k}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{l} \quad \wedge \quad \frac{2}{3} = \frac{k}{3}$$

$$l = \frac{3}{2}$$

$$k = 2$$

strana 2