

1) Je dána uspořádaná trojice $A_m(B, V_m, \phi)$, kde $B = \mathbb{R}^n$, $V_m = \mathbb{R}^n$, zobrazení ϕ je dáno předpisem:

$$\forall x, y \in B \quad \phi(x, y) = (y_1 - x_1; y_2 - x_2; y_3 - x_3; \dots; y_n - x_n) = (\mu_1; \mu_2; \mu_3; \dots; \mu_n) = \vec{\mu} \in V_m.$$

Rozhodněte zda struktura A_m je afinní prostor.

Rěšení: Overáme podmínky (i) a (ii) z D 1.1.

(i) $\forall x, y, z \in B: \phi(x, y) + \phi(y, z) = \phi(x, z) \quad ???$

$$\begin{aligned} \phi(x, y) + \phi(y, z) &= (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3, \dots, y_n - x_n) + (z_1 - y_1, z_2 - y_2, z_3 - y_3, \dots, z_n - y_n) = \\ &= (y_1 - x_1 + z_1 - y_1, y_2 - x_2 + z_2 - y_2, y_3 - x_3 + z_3 - y_3, \dots, y_n - x_n + z_n - y_n) = \\ &= (z_1 - x_1, z_2 - x_2, z_3 - x_3, \dots, z_n - x_n) = \phi(x, z) \end{aligned}$$

(ii) $\forall x \in B \quad \forall \vec{\mu} \in V_m \exists! y \in B: \phi(x, y) = \vec{\mu} \quad ???$... splňuje

$$\phi(x, y) = (y_1 - x_1; y_2 - x_2; y_3 - x_3; \dots; y_n - x_n) = (\mu_1; \mu_2; \mu_3; \dots; \mu_n) = \vec{\mu} \in V_m$$

$\Downarrow$

$$y_1 - x_1 = \mu_1$$

$$y_2 - x_2 = \mu_2$$

$$y_3 - x_3 = \mu_3$$

$$\vdots$$

$$y_n - x_n = \mu_n$$

$$y_1 = \mu_1 + x_1$$

$$y_2 = \mu_2 + x_2$$

$$y_3 = \mu_3 + x_3$$

$$\vdots$$

$$y_n = \mu_n + x_n$$

... splňuje.

Struktura A_m je afinní prostor.

2) V afinní rovině je dán rovnoběžník ABCD. Uveďte afinní souřadnou soustavu a vyjádřete v ní souřadnice vrcholů ABCD.

Rěšení: Nejprve si zvolíme počátek soustavy v bodě A, básové vektory $\vec{AB}$ a $\vec{AD}$.



$A = [0; 0]$... je to počátek

$$B = A + \vec{AB} \Rightarrow B = [1; 0]$$

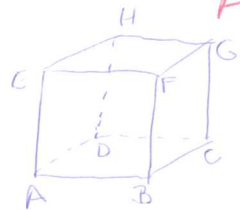
$$C = A + \vec{AB} + \vec{BC} = A + \vec{AB} + \vec{AD} \Rightarrow C = [1; 1]$$

$$D = A + \vec{AD} \Rightarrow D = [0; 1]$$

strana 1

3) V prostoru A_3 je daná rovnobežnost ABCDEFGH. Vyhledejte afinní souřadnou soustavu a v ní souřadnice vrcholů B, D, G, H.

Rěšení: *Počítal soustavu volíme o bodě A, bázeové vektory $\vec{AB}$, $\vec{AD}$ a $\vec{AE}$.*



$$B = A + \vec{AB} \Rightarrow B = [1; 0; 0]$$

$$D = A + \vec{AD} \Rightarrow D = [0; 1; 0]$$

$$G = A + \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG} = A + \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} \Rightarrow G = [1; 1; 1]$$

$$H = A + \vec{AD} + \vec{DH} = A + \vec{AD} + \vec{AE} \Rightarrow H = [0; 1; 1]$$

4) Ujistěte, že souřadnice má bod $M = A + (\vec{a} + 2\vec{b}) \in A'$ v afinní souřadnicové soustavě $\langle P, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4 \rangle$. Zde $A = P + (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3)$, $\vec{a} = 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_4$, $\vec{b} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - 2\vec{e}_4$.

Rěšení:

$$M = A + (\vec{a} + 2\vec{b}) = P + \vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 + 2\vec{e}_1 + 3\vec{e}_4 + 2(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 - 2\vec{e}_4) =$$

$$= P + 3\vec{e}_1 + 2\vec{e}_3 + 3\vec{e}_4 - 2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 - 4\vec{e}_4 =$$

$$= P + \vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 - \vec{e}_4 \Rightarrow M = [1; 2; 4; -1]$$

5) Jsou dány dvě soustavy lineárních souřadnic $O_{x,y,z}$ a $O'_{x',y',z'}$, přičemž $O' = [2; 1; 3]$; $\vec{e}'_1 = (2; 4; 1)$; $\vec{e}'_2 = (0; 4; 4)$; $\vec{e}'_3 = (1; 1; 0)$. Vyjádřete transformaci vztahy původu od jedné soustavy k druhé a souřadnice počátku O a bázeových vektorů v soustavě $O_{x,y,z}$.

Rěšení: *neboť*

$$\begin{aligned} O' &= O + 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_1 &= 2\vec{e}_1 + 4\vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_2 &= 4\vec{e}_2 + 4\vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2x' + y' + 2 \\ y = 4x' + 4y' + z' + 1 \\ z = x' + y' + 1 \end{cases}$$

6) Máme daný dva afinní repéry $S = \langle [0; 3], (-1, -1), (1, 0) \rangle$ a $S' = \langle [1; 1], (2, 0), (1, 2) \rangle$. Najděte souřadnice bodu $X = [2; 0] \in S$ a bodu $Y = [4; 1] \in S'$.

Rěšení

$$[0; 3] + x \cdot (-1, -1) + y \cdot (1, 0) = [1; 1] + x' \cdot (2, 0) + y' \cdot (1, 2)$$

pro X :

$$[0; 3] + x \cdot (-1, -1) + y \cdot (1, 0) = [1; 1] + 2 \cdot (2, 0) + 0 \cdot (1, 2)$$

$$[0 - x + y; 3 - x] = [-3; 1]$$

III

$$y - x = -3$$

$$3 - x = 1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow y = -1$$

$$\boxed{X = [2; -1]}$$

pro Y :

$$[0; 3] + 4 \cdot (-1, -1) + 1 \cdot (1, 0) = [1; 1] + x' \cdot (2, 0) + y' \cdot (1, 2)$$

$$[-3; -1] = [1 + 2x' + y'; 1 + 2y']$$

$$-3 = 1 + 2x' + y'$$

$$x' = -\frac{3}{2}$$

$$-1 = 1 + 2y' \Rightarrow y' = -1$$

$$\boxed{Y' = [-\frac{3}{2}; -1]}$$

