

Cvičení 7.10.2008

G1

- 1) Dokažte, že body $A=[2;1;3;2]$, $B=[3;2;3;4]$ a $C=[4;3;3;6]$ jsou kolineární a napište parametrické rovnice přímky určené těmito body.

Rěšení: Kolineární body leží na 1 přímce

$$\vec{AB} = (1; 1; 0; 2) \\ \vec{AC} = (2; 2; 0; 4) \Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{AC} \Rightarrow \text{Body } A, B, C \text{ jsou kolineární.}$$

par. rce přímky: $X = A + t \cdot \vec{AB} \quad t \in \mathbb{R}$, kdy

$$x = 2 + t; y = 1 + t, z = 3, w = 2 + 2t$$

- 2) Je dána rovina ρ body $A=[1;2;1]$, $B=[1;1;1]$ a $C=[2;1;2]$. Napište parametrické i neparametrické rovnice roviny.

Rěšení: $\vec{AB} = (0; -1; 0)$ par. rce ρ : $X = A + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC}$

$$\vec{AC} = (1; -1; 1)$$

$$\begin{aligned} x &= 1 + s \\ y &= 2 - r - s \\ z &= 1 + s \end{aligned}$$

Oblebnice:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (-1) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x-1 & z-1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x-1 - (z-1) = 0$$

$$\boxed{x-z=0}$$

- 3) Napište neparametrické rovnice roviny procházející bodem $A=[2;3;4]$ a rovnoběžné s rovinou $x+y-z+1=0$.

Rěšení: Hledaná rovina musí mít rovnici tvaru $x+y-z+d=0$, bod A v ní leží $\Rightarrow$

$$2+3-4+d=0$$

$$\underline{d=-1} \Rightarrow \boxed{x+y-z-1=0}$$

- 4) Leží body $A=[1;1;1]$, $B=[3;5;4]$ a $C=[-1;-3;-2]$ na téže přímce. Pište s využitím parametrické rce přímky.

Rěšení: $\vec{AB} = B-A = (2; 4; 3)$

$$r = \vec{AB}: \begin{aligned} x &= 1+2t \\ y &= 1+4t \\ z &= 1+3t \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$C \in p: -1 = 1+2t \Rightarrow \underline{t=-1}$$

$$\begin{aligned} y &= 1+4t \\ z &= 1+3t \end{aligned} \quad \begin{aligned} y &= -3 \\ z &= -2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} y &= -3 \\ z &= -2 \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{o.k.} \\ \text{o.k.} \end{aligned}$$

Ano leží na 1 přímce.

strana 1

5) Najděte parametrické vyjádření přímky o směrovém vektoru $\vec{u} = (1; 2; 3; -1)$ a procházející bodem $A = [5; 1; 2; 1]$.
Najděte na této přímce body $P = [0; ?; ?; ?]$ a $N = [?; ?; ?; 0]$.

Rěšení: Parametrické přímky: $X = A + t \cdot \vec{u}$

$$X = [5; 1; 2; 1] + t \cdot (1; 2; 3; -1) \quad t \in \mathbb{R}$$

bod P: $0 = 5 + t \Rightarrow t = -5$

$$P = [5; 1; 2; 1] + (-5) \cdot (1; 2; 3; -1) = [0; -9; -13; 6]$$

bod N: $0 = 1 - t \Rightarrow t = 1$

$$N = [5; 1; 2; 1] + (1; 2; 3; -1) = [6; 3; 5; 0]$$

6) Napište neparametrickou rovnici nadrovin $L = [A; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]$,
kde $A = [1; 2; 1; 2]$, $\vec{u} = (1; 1; 1; 1)$, $\vec{v} = (2; 3; 1; 2)$ a $\vec{w} = (0; 1; 1; 0)$.

Rěšení:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 & w-2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 & w-2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-1 & w-2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1)^6 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} x-1 & z-1 & w-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1)^5 \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} x-1 & w-2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x - 1 - w + 2 = 0$$

$$\boxed{x - w + 1 = 0}$$

7) Dokažte, že body $A=[1;1;1]$, $B=[0;3;2]$, $C=[5;2;2]$ a $D=[2;8;5]$ jsou komplanární a napište obecnou rovnici příslušné roviny.

Rěšení: komplanární body = body ležící v rovině

$$? D \in \overleftrightarrow{ABC}?$$

$$\vec{AB} = (-1; 2; 1)$$

$$\vec{AC} = (4; 1; 1)$$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1) \cdot (2-1) - (y-1)(-1-4) + (z-1)(-1-8) = 0$$

$$x-1+5y-5-9z+9=0$$

$$\boxed{x+5y-9z+3=0}$$

$$D \in \overleftrightarrow{ABC}?$$

$$2+5 \cdot 8-9 \cdot 5+3=2+40-45+3=0 \Rightarrow D \in \overleftrightarrow{ABC}.$$

Body jsou komplanární.

8) Napište parametrickou i obecnou rovnici roviny, která prochází body $A=[2;2;1]$ a $B=[5;4;3]$, znáte-li jeden vektor z jejího vektorového namítání $\vec{u}=(-3;2;-1)$.

Rěšení: Hledaná rovina ρ je tedy určena bodem A a vektory $\vec{AB}$ a $\vec{u}$

$$\vec{AB} = (3; 2; 2)$$

$$\text{par. rce: } \begin{cases} x = 2 + 3t - 3s \\ y = 2 + 2t + 2s \\ z = 1 + 2t - s \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$\text{Obecná: } \begin{vmatrix} x-2 & y-2 & z-1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(-2-4) - (y-2)(-3+6) + (z-1)(6+6) = 0$$

$$-6x+12-3y+6+12z-12=0$$

$$-6x-3y+12z+6=0$$

~~$$-6x-3y+12z+6=0$$~~

$$6x+3y-12z-6=0$$

$$2x+y-4z-2=0$$

3) Lze-li body $A = [1; 1; 2; 1]$, $B = [2; 2; 3; 2]$, $C = [1; 3; 4; 1]$ a $D = [2; 4; 5; 2]$ v téže rovině? Píšte s vyřešením parametrické rovnice roviny.

Rěšení:

? $D \in \overleftrightarrow{ABC}$?

$$\overrightarrow{AB} = (1; 1; 1; 1)$$

$$\overrightarrow{AC} = (0; 2; 2; 0) \Rightarrow$$

$$\overleftrightarrow{ABC}: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t + 2s \\ z = 2 + t + 2s \\ u = 1 + t \end{cases}$$

$$\text{Lze-li } D? \Rightarrow 2 = 1 + t \Rightarrow t = 1$$

$$4 = 1 + t + 2s \Leftarrow$$

$$5 = 2 + t + 2s$$

$$2 = 1 + t$$

$$\Rightarrow 4 = 1 + 1 + 2s \Rightarrow s = 1$$

Dosažením $t=1$ a $s=1$ do 3. a 4. rce zjistíme

$$5 = 2 + 1 + 2 \cdot 1 \dots \text{O.K.}$$

$$2 = 1 + 1 \dots \text{O.K.}$$

$\Rightarrow$ Body leží v téže rovině.

10) Napište neparamebickou rovnici nadroving B procházející bodem $A = [1; 1; 2; 2]$ a rovnoběžnou s nadrovinou $\alpha: x - y + z - u + 10 = 0$

Rěšení: Jelikož $B \parallel \alpha \Rightarrow$ rce $B: x - y + z - u + l = 0$

$$A \in B \Rightarrow 1 - 1 + 2 - 2 + l = 0$$

$$l = 0$$

$$\text{Rovnice: } \boxed{x - y + z - u = 0}$$

11) Najděte parametrické rovnice roviny s vektorovým parametrem $\vec{n} = (2; 1; 3; 1)$ a $\vec{v} = (3; -1; -2; 1)$ a procházející bodem $A = [1; 2; 3; 4]$. Najděte v této rovině body $B = [2; 0; ?; ?]$ a $C = [?; ?; 1; 0]$.

Rěšení:

$$X = A + t \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \quad t, s \in \mathbb{R}$$

$$\alpha: \begin{cases} x = 1 + 2t + 3s \\ y = 2 + t - s \\ z = 3 + 3t - 2s \\ u = 4 + t + s \end{cases}$$

$$B \in \alpha \Rightarrow 2 = 1 + 2t + 3s$$

$$0 = 2 + t - s \Leftarrow$$

$$2t + 3s = 1 \quad \text{I}$$

$$t - s = -2 \quad \text{II}$$

$$5t = -5 \quad \text{I} + 3\text{II}$$

$$t = -1 \text{ dosažením } \Rightarrow s = 1$$

Souřadnice bodu B získáme dosažením t a s do 2. rce $\Rightarrow B = [2; 0; -2; 4]$.

$$C \in \alpha \Rightarrow$$

$$1 = 3 + 3t - 2s$$

$$0 = 4 + t + s$$

$$3t - 2s = -2 \quad \text{I}$$

$$t + s = -4 \quad \text{II}$$

$$5t = -10 \quad \text{I} + 2\text{II}$$

$$t = -2 \Rightarrow s = -2$$

$$\text{Dosažením: } C = [-9; 2; 1; 0].$$

strana 4

12) Nadroviná α je určena body $A = [1; 1; 2; 1]$, $B = [5; 1; 2; 3]$, $C = [3; 2; -1; 2]$ a $D = [0; 1; 0; 1]$. Napište neparamebriční vyjádření nadroviny α .

Řešení:

$$\vec{AB} = (4; 0; 0; 2)$$

$$\vec{AC} = (2; 1; -3; 1)$$

$$\vec{AD} = (-1; 0; -2; 0)$$

$\Rightarrow$ lze ověřit, že vektory jsou L.N.

Pro ~~rovnici~~ nadroviny:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 & w-1 \\ 4 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} - (y-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} + (z-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} - (w-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$-4(x-1) + 6(y-1) + 2(z-2) + 8(w-1) = 0$$

$$-4x + 6y + 2z + 8w - 14 = 0$$

$$\boxed{2x - 3y - z - 4w + 7 = 0}$$

