

- 1) Vyřešte vzájemnou polohu přímek $p: X = [1; 2; -1] + t(0; 1; 3)$ a $q: Y = [0; 0; 2] + s(1; -3; -1)$. V případě různoběžnosti uveďte průsečík.

Rěšení: přímka p má směrový vektor $\vec{P} = [1; 2; -1]$ a má směrový vektor $\vec{P}_1 = (0; 1; 3)$ a q má směrový vektor $\vec{Q} = [0; 0; 2]$ a má směrový vektor $\vec{P}_2 = (1; -3; -1)$.
 Vektory $\vec{P}_1$ a $\vec{P}_2$ nejsou rovnoběžné $\Rightarrow$ neliší se o rovnoběžky.
 Pro vektory $\vec{P}_1, \vec{P}_2$ a $\vec{PQ}$ LN či L2, pokud jsou LN $\Rightarrow$ neliší se o rovnoběžky, pokud L2 neliší se o rovnoběžky.
 $\vec{PQ} = Q - P = (-1; -2; 3)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{+1} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{+5} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 19 \end{pmatrix} \Rightarrow LN$$

Přímky p a q jsou rovnoběžné.

- 2) Vyřešte vzájemnou polohu přímek $p: X = [0; 1; -1] + t(1; 0; 1)$ a $q: Y = [2; 3; 2] + s(1; 2; 2)$. V případě různoběžnosti uveďte průsečík.

Rěšení: Směrové vektory přímek nejsou rovnoběžné $\Rightarrow$ přímky nejsou rovnoběžné.
 Hledáme společný bod řešení soustavy (pokud $\exists \Rightarrow$ různoběžky, pokud $\nexists \Rightarrow$ rovnoběžné).

$$\begin{aligned} t &= 2 + s \\ 1 &= 3 + 2s \Rightarrow \underline{s = -1} \\ -1 + t &= 2 + 2s \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} t &= 2 - 1 = 1 \\ \Downarrow \\ -1 + 1 &= 2 - 2 \\ 0 &= 0 \dots \text{O.K.} \end{aligned} \quad \text{Mají společný bod jsou to rovnoběžky.}$$

$$P = [0; 1; -1] + 1(1; 0; 1) = \underline{[1; 1; 0]}$$

- 3) Vyřešte vzájemnou polohu přímek $p: X = [1; 1; -2] + t(2; -2; 4)$ a $q: Y = [0; 3; 1] + s(-3; 3; -6)$. V případě různoběžnosti uveďte průsečík.

Rěšení: Směrové vektory jsou rovnoběžné. Ujistíme, zda bod $[1; 1; -2] \in q$ či ne.

$$\begin{aligned} 1 &= 0 - 3s \Rightarrow s = -\frac{1}{3} \\ 1 &= 3 + 3s \\ -2 &= 1 - 6s \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s &= -\frac{1}{3} \\ \Downarrow \\ 1 &= 3 - 1 = 2 \Rightarrow \underline{1 \neq 2} \end{aligned}$$

neliší se o rovnoběžky

4) Typické vzájemnou polohu přímek $\mu: x = [1; 2; 3] + t(2; -2; 4)$ a $q = [0; 3; 1] + s(-3; 3; -6)$. V případě různoběžnosti více přeškrtně.

Rěšení: Smírové vektor jsou rovnoběžné, je bod $[1; 2; 3] \in q$ nebo bodu q ?

$$1 = 0 - 3s \Rightarrow s = -\frac{1}{3}$$

$$2 = 3 + 3s \quad \underline{2 = 3 - 1 = 2 \text{ o.k.}} \Rightarrow \text{jedná se o incidenci přímky.}$$

$$3 = 1 - 6s \quad 3 = 1 + 2 \cdot 3 \text{ o.k.}$$

5) Typické vzájemnou polohu přímky $\mu: x = [1; 1; -2] + t(-1; 3; 0)$ a roviny $\rho: Y = [2; 3; 1] + s_1(1; 2; -1) + s_2(3; 1; -2)$. V případě různoběžnosti více přeškrtně.

Rěšení: O vzájemné poloze rozhodneme podle počtu společných bodů.

1) Věcíme reparametrizovat rovnici roviny ρ :

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-3 & z-1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (y-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} + (z-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-3(x-2) - (y-3) - 5(z-1) = 0$$

$$\rho: \boxed{3x + y + 5z - 14 = 0}$$

$\mu \cap \rho$:

$$3(1-t) + (1+3t) + 5(-2) - 14 = 0$$

$$3 - 3t + 1 + 3t - 10 - 14 = 0$$

$$\underline{-20 \neq 0} \Rightarrow \mu \cap \rho = \emptyset$$

Přímka je rovinnou rovnoběžná.

6) Typické vzájemnou polohu přímky $\mu: x = [0; -2; 4] + t(1; -1; 2)$ a roviny $\rho: Y = [-1; -1; -3] + s_1(1; 3; 3) + s_2(-2; -2; 0)$. V případě různoběžnosti více přeškrtně.

Rěšení: jako o předchozím.

$$\rho: \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x+1) \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - (y+1) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} + (z+3) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$6 \cdot (x+1) - 6(y+1) + 4(z+3) = 0$$

$$6x - 6y + 4z + 12 = 0$$

$$\rho: \boxed{3x - 3y + 2z + 6 = 0}$$

$\mu \cap \rho$:

$$3 \cdot t - 3(-2-t) + 2(4+2t) + 6 = 0$$

$$3t + 6 + 3t + 8 + 4t + 6 = 0$$

$$10t = -20$$

$$\underline{t = -2}$$

$$\text{Přeškrtně: } P = [0; -2; 4] + 2(1; -1; 2) = \underline{\underline{[2; 0; 0]}}$$

jedná se o různoběžky, přeškrtně $P[2; 0; 0]$.

7) Vyřešte vzájemnou polohu rovin $\rho: X = [3; 3; -4] + s_1(1; 3; -1) + s_2(0; 1; 3)$ a

$\sigma: Y = [0; 0; 0] + t_1(-2; -1; 3) + t_2(3; 4; -1)$. σ případi rovnoběžnosti.
Všechny přímk rovin.

Rěšení: Všechny rovnice neparamebické rovnice rovin.

$$\rho: \begin{vmatrix} x-3 & y-3 & z+4 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-3) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - (y-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + (z+4) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$7(x-3) - 3(y-3) + z+4 = 0$$

$$\rho: \boxed{7x - 3y + z - 8 = 0}$$

$$\sigma: \begin{vmatrix} x & y & z \\ -2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$x \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

$$-11x + 7y - 5z = 0$$

$$\sigma: \boxed{11x - 7y + 5z = 0}$$

Rěšené rovnice.

Přesečník:

$$\begin{aligned} 7x - 3y + z - 8 &= 0 \\ 11x - 7y + 5z &= 0 \end{aligned}$$

$$7x - 3y + z = 8$$

$$-24x + 8y = -40$$

$$7x - 3y + z = 8$$

$$3x - y = 5$$

$$\Rightarrow x = t$$

$$y = 3t - 5$$

$$z = 8 + 3y - 7x = 8 + 9t - 15 - 7t = -7 + 2t$$

$$\rho: X = [0; -5; -7] + t(1; 3; 2)$$

8) Vyřešte vzájemnou polohu přímky $\rho: X = [1; 0; 0] + t(2; 1; -1)$ a rovin $\sigma: 2x - 3y + z - 2 = 0$. σ případi rovnoběžnosti všechny přesečník.

Rěšení: Všechny počet společných bodů.

$$2(1+2t) - 3 \cdot t + 1(-t) - 2 = 0$$

$$2 + 4t - 3t - t - 2 = 0 \Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow t \in \mathbb{R}. \text{ Tedy přímka } \rho \text{ leží v rovině } \sigma.$$

9) Vyřešte vzájemnou polohu rovin $P: X = [3; 0; 1] + s[1; 2; 2] + t[3; 1; 1]$
a $G: Y = [-2; -5; -2] + u[4; 3; 1] + v[-1; 3; 5]$. Upráveďte rovnoběžnost
všechny přímky rovin.

Rěšení: Reparametrizace rovin:

$$P: \begin{vmatrix} x-3 & y & z-1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad (x-3) \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-4(x-3) + 7y - 5(z-1) = 0$$

$$-4x + 7y - 5z + 17 = 0$$

$$4x - 7y + 5z - 17 = 0$$

$$G: \begin{vmatrix} x+2 & y+5 & z+2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad (x+2) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} - (y+5) \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (z+2) \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$12(x+2) - 21(y+5) + 15(z+2) = 0$$

$$12x - 21y + 15z - 51 = 0$$

$$4x - 7y + 5z - 17 = 0$$

→ jsou incidentní!

10) Vyřešte vzájemnou polohu rovin $P: X = [3; 3; -1; 3] + s_1[0; 1; 1; 1] + s_2[1; -2; -1; 0]$
nadrovinou $L: Y = [1; 4; -6; 2] + t_1[1; -1; 0; 1] + t_2[0; 0; 2; -1] + t_3[1; 0; 3; 1]$ v
afinním prostoru A_4 . Upráveďte rovnoběžnost všech přímek.
Rěšení: Všechny reparametrizujeme nadrovinou L :

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-4 & z+6 & u-2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

⇓

$$5x + 3y - z - 2u - 19 = 0$$

Nyní ověříme, zda jsou vektor z vektorového
rovnoběžného rovin P rovnoběžné s nadrovinou
 G :

1) vektor $(0; 1; 1; 1)$

$$5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 0 + 3 - 1 - 2 = 0 \dots \text{je rovnoběžný}$$

2) vektor $(1; -2; -1; 0)$

$$5 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) - 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 0 = 5 - 6 + 1 = 0 \dots \text{je rovnoběžný}$$

Tedy rovina P je s nadrovinou rovnoběžná!

Můžeme ověřit, zda rozdělujeme pomocí
lib. bodu rovin P např. $A = [3; 3; -1; 3]$

? $A \in L$?

$$5 \cdot 3 + 3 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 - 19 = 15 + 9 + 1 - 6 - 19 = 0 \dots \underline{A \in L}$$

⇒ Rovina P leží v nadrovině L .

11) Vypočítejte vzájemnou polohu přímky $p: X = [1; 1; 1; 1; 1] + s(2; -8; 3; -5; 9)$ a roviny $P: [1; 1; 2; -1; 3] + t_1(1; -10; 2; 3) + t_2(0; 2; -1; 3; 5)$ v afinním prostoru A_5 . V případě rovnoběžnosti vráťte jejich průnik.

Rěšení: Nejprve zjistíme rovnost či nerovnost jejich vedlových znaménků:

$$\begin{pmatrix} 2 & -8 & 3 & -5 & 9 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -8 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -9 & -15 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & 3 & -9 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ vedlové znaménko jsou rovnoběžné.

$P \in p$ např. $P = [1; 1; 1; 1; 1]$ otázka zda $P \in p$?

$R \in p$ např. $R = [1; 1; 2; -1; 3]$

Otázka lze také přeformulovat následovně: leží $\vec{PR}$ ve vedlovém znaménku roviny P ?

$$\vec{PR} = R - P = (0; 0; 2; -1; 3)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \dots \text{ jsou } \angle N \Rightarrow \text{Vektor v znaménku vedlovém,}$$

tedy přímka p a rovina P jsou rovnoběžné.

12) Vypočítejte vzájemnou polohu dvou rovin $P: X = [4; 2; 2; 2] + t_1(1; 0; 0; -1) + t_2(1; 0; 3; 2)$ a $G: Y = [-2; -2; 2; 0] + s_1(-1; 0; 5; 0) + s_2(2; 2; 1; 0)$ v afinním prostoru A_4 . V případě rovnoběžnosti vráťte jejich průnik.

Rěšení: Nejprve určíme $\angle 2$ vedlových znaménků:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \angle N \Rightarrow \text{Roviny mají společný bod.}$$

$\Rightarrow$ Rěšíme soustavu:

$$\begin{aligned} 4 + t_1 + t_2 &= -2 - s_1 + 2s_2 \\ 2 &= -2 + 2s_2 \Rightarrow s_2 = 2 \\ 2 + 3t_2 &= 2 + 5s_1 + s_1 \\ 2 - t_1 + 2t_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 4 + t_1 + t_2 &= -s_1 + 2 \\ 2 + 3t_2 &= 4 + 5s_1 \\ 2 - t_1 + 2t_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$2 - t_1 + 2t_2 = 0 \Rightarrow t_1 = 2t_2 + 2$$

Obrana 5

$$4 + 2t_2 + 2 + t_2 = -s_1 + 2$$

$$2 + 3t_2 = 4 + 5s_1$$

$$3t_2 + s_1 = -4$$

$$3t_2 - 5s_1 = 2$$

$$18t_2 = -18$$

$$t_2 = -1$$

$$s_1 = -4 - 3t_2 = -4 - 3(-1) = -4 + 3 = -1$$

$$t_1 = 2 + 2t_2 = 2 + 2(-1) = 0$$

$$s_2 = 2$$

$$P = [4; 2; 2; 2] + 0 \cdot (1; 0; 0; -1) - 1 \cdot (1; 0; 3; 2)$$

$$P = [3; 2; -1; 0]$$