

G1 cviceni 21.10.08

1) jsou dány mimoběžky $p: X = [-1; 1; 5] + t(1; 1; 2)$ a $q: Y = [1; -2; 3] + s(1; 3; -1)$.
 Vraťte průsečíky přímky těchto mimoběžek, jejíž směrový vektor
 je $\vec{w} = (1; -2; 3)$, s průměrní p a q .

Rěšení: Hledám průsečík $P = [-1; 1; 5] + t(1; 1; 2)$, $Q = [1; -2; 3] + s(1; 3; -1)$, přímka PQ má mít
 směrový vektor $\vec{w}$, tedy musí být $\vec{PQ} \parallel \vec{w} \Rightarrow \vec{PQ} = \lambda \cdot \vec{w}$
 nebo vztah vede k soustavě:

$$\begin{aligned} \vec{PQ} &= \lambda \cdot \vec{w} \\ Q - P &= \lambda \cdot \vec{w} \\ 2 + s - t &= \lambda & s - t - \lambda &= -2 & \text{Tuto soustavu vyřešíme} &\Rightarrow s = 1 \Rightarrow Q = [2; 1; 2] \\ -3 + 3s - t &= -2\lambda & 3s - t + 2\lambda &= 3 & t = 2 \Rightarrow P = [1; 3; -1] \\ -8 - s - 2t &= 3\lambda & -s - 2t - 3\lambda &= 8 & \lambda = 1 \end{aligned}$$

dosadíme λ a s a
 řešíme
 $\downarrow$
 dosadíme λ
 a s a t a s a t

2) jsou dány mimoběžky $p: X = [3; -1; 4] + s(1; -1; 2)$ a $q: Y = [-1; 2; -2] + t(2; 0; 1)$. Vraťte
 průsečíky přímky těchto mimoběžek, která prochází bodem $\Pi = [1; 3; -2]$, s oběma průměrní:

Rěšení: $P = [3; -1; 4] + s(1; -1; 2)$, bod Π má ležet na přímce PQ , tedy
 $Q = [-1; 2; -2] + t(2; 0; 1)$ $\vec{P\Pi} \parallel \vec{Q\Pi} \Rightarrow \vec{P\Pi} = \lambda \cdot \vec{Q\Pi}$
 Před výpočtem ještě ověříme, zda bod Π neleží na některé z
 mimoběžek (pal by byla rovina přímá) - bod Π neleží ani na p ani na q
 $\vec{P\Pi} \parallel \vec{Q\Pi} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} -2 - s &= \lambda(2 - 2t) & -s - 2\lambda + 2\lambda t &= 2 & \text{řešíme} & \begin{cases} s = -2 \\ \lambda = 2 \end{cases} \\ 4 + s &= \lambda(1) & s - \lambda &= -4 & \Rightarrow & \\ -6 - 2s &= \lambda(0 - t) & -2s + \lambda t &= 6 & u = \lambda t = 2 & \Rightarrow \lambda = 1 \end{aligned}$$

při řešení musíme
 provést substituci $u = \lambda t$...

tedy $P = [1; 1; 0]$ a $Q = [1; 2; -1]$ (řešíme dosadíme λ a s ...

3) Napište rovnici přímky, která prochází bodem $A = [-1, -7, 4]$ a protíná mimoběžné přímky p a q , kde:

$$p: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -5 - 2t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$q: \begin{cases} x = 5 + 2s \\ y = -3 + 3s \\ z = 2 - 5s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Rěšení: Rěšíme stejně jako předchozí příklad.

$$P = [2, -3, 5] + t(3, -2, -1), \quad Q = [5, -3, 2] + s(2, 3, -5), \quad \text{ověříme, že bod } A \text{ leží na přímce } p \text{ a } q.$$

$$\vec{PA} = \lambda \cdot \vec{QA}$$

$$\begin{aligned} -3 - 3t &= \lambda(-6 - 2s) & -3t + 6\lambda + 2\lambda s &= 3 & \lambda &= 0 \\ -2 + 2t &= \lambda(-4 - 3s) & 2t + 4\lambda + 3\lambda s &= 2 & \lambda &= \frac{1}{2} \\ 1 + t &= \lambda(2 + 5s) & t - 2\lambda - 5\lambda s &= -1 & \lambda s &= 0 \Rightarrow s = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} P &= [2, -5, 3] \\ Q &= [5, -3, 2] \\ \vec{PQ} &= (3, 2, -1) \end{aligned}$$

hledaná přímka: $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = -7 + 2t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

4) Napište přímku mimoběžek p a q , která má daný směr $\vec{w} = (3, 1, 1)$, kde $p: X = [2, 1, 1] + t(1, 0, 1)$ a $q: Y = [-1, 1, 0] + s(1, 1, 0)$.

Rěšení: $\begin{aligned} P &= [2, 1, 1] + t(1, 0, 1) \\ Q &= [-1, 1, 0] + s(1, 1, 0) \end{aligned}$

$$\vec{PQ} = \lambda \cdot \vec{w}$$

$$\begin{aligned} -3 + s - t &= 3\lambda & s - t - 3\lambda &= 3 & s &= -2 \Rightarrow Q = [-3, -1, 0] \\ s &= \lambda & s - \lambda &= 0 & t &= 1 & P = [3, 1, 2] \\ -1 - t &= \lambda & -t - \lambda &= 1 & \lambda &= -2 \end{aligned}$$

hledaná přímka: $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

5) Napište přímku mimoběžek p a q , která prochází bodem $\Pi = [2, 0, 0]$, kde

$$p: X = [0, 0, 0] + t(1, 4, 2), \quad q: Y = [3, 1, 2] + s(1, 1, 2).$$

Rěšení: Π tomto případě leží bod Π na přímce q (pro $s = -1$), hledaný přímek bude nekonečně mnoho - každá přímka která prochází libovolným bodem na přímce p a tímto bodem Π . Tedy například i tato přímka:

$$m: Z = [0, 0, 0] + r(2, 0, 0)$$

↑
tento bod leží na p a $\Pi - [0, 0, 0] = (2, 0, 0)$...