

1) Vyšleďte vzájemnou polohu dvou rovin $\alpha = [A, \vec{u}, \vec{v}]$, $\beta = [B, \vec{w}, \vec{r}]$. $A = [1, 2, 3, 0]$, $\vec{u} = (1, 2, 0, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, 1, 0)$, $B = [-6, 3, -2, 3]$, $\vec{w} = (1, 0, 2, 0)$, $\vec{r} = (0, 1, 0, 1)$

• jsou vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ $\perp$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \perp N \Rightarrow \perp \neq \beta \quad (*)$$

• $\vec{AB} = B - A = (-7, 1, -5, 3)$

Nejprve určíme dimenzi prostoru $\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle \vee \langle \vec{w}, \vec{r} \rangle$ (tedy počet protibáží), vyjádříme-li (*) musí být dim 3 nebo 4.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Vektory } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ a } \vec{r} \text{ jsou lineárně nezávislé a jsou tedy bází prostoru.}$$

μ -litos $\vec{AB}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{r} \in V_4$, musí být nutně $\perp 2$.

Roviny α a β jsou různoběžné a mají 1 společný bod, který hledáme:

$$A + t_1 \vec{u} + t_2 \vec{v} = B + t_3 \vec{w} + t_4 \vec{r}$$

$$t_1 \vec{u} + t_2 \vec{v} - t_3 \vec{w} - t_4 \vec{r} = B - A$$

$$t_1 + 2t_2 - t_3 = -7$$

$$2t_1 + t_2 - t_4 = 1$$

$$t_2 - 2t_3 = -5$$

$$t_1 - t_4 = 3$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & -7 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & 1 & -4 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 13 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$t_1 = 3, t_2 = -3, t_3 = t_4 = 0. \Rightarrow B + t_3 \vec{w} + t_4 \vec{r} = B.$$

Báze rovin α a β je bod $B = [-6, 3, -2, 3]$.

2) Vysvětlete vzájemnou polohu dvou rovin $P: X = [3; 2; 2] + s_1(2; 1; 3) + s_2(0; 1; 1)$ a $\sigma: -x + 2y + z - 3 = 0$. V případě rovnoběžnosti uveďte příklad rovin.

• Jedná se o nadrovinu, tedy nemůže nastat mimoběžná poloha, nejde o uveďte nelineární rovnici roviny P

$$P: \begin{vmatrix} x-3 & y-2 & z-2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-3) \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + (z-2) \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2(x-3) - 2(y-2) + 2(z-2) = 0$$

$$-2x - 2y + 2z + 6 = 0$$

$$P: x + y - z - 3 = 0$$

$$\sigma: -x + 2y + z - 3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{LN} \Rightarrow P \neq \sigma \Rightarrow \text{mají společnou přímku.}$$

$$x + y - z - 3 = 0$$

$$-x + 2y + z - 3 = 0$$

$$3y - 6 = 0$$

$$y = 2$$

$$x = z$$

$$z = x + y - 3$$

$$z = z + 2 - 3$$

$$z = z - 1$$

Rovnice přímky je: $\begin{matrix} x = t \\ y = 2 \\ z = t - 1 \end{matrix} \quad t \in \mathbb{R}.$

3) Vysvětlete vzájemnou polohu rovin $P: X = [4; -4; 6; 2] + s_1(1; 3; 3; 1) + s_2(2; 1; 1; -3)$ a $\sigma: Y = [1; -12; 9; 9] + t_1(1; 3; -2; 0) + t_2(2; 2; -1; -4)$ v afinním prostoru A_4 . V případě rovnoběžnosti uveďte příklad.

Tedy $P: X_0 = [4; -4; 6; 2]$

$$\vec{u} = (1; 3; 3; 1)$$

$$\vec{v} = (2; 1; 1; -3)$$

$$\sigma: Y_0 = [1; -12; 9; 9]$$

$$\vec{w} = (1; 3; -2; 0)$$

$$\vec{r} = (2; 2; -1; -4)$$

• $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in L_2?$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{LN} \Rightarrow P \text{ a } \sigma \text{ nejsou rovnoběžné}$$

$$\vec{X_0 Y_0} = Y_0 - X_0 = (-3, -8, 3, 7)$$

pro vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{r} \in N$ a jejich 'pro bázi' $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{r} \rangle$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -1 \\ 0 & -4 & -7 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \angle N$$

$$\Rightarrow \vec{X_0 Y_0} \in \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{r} \rangle \text{ nebo } \vec{X_0 Y_0} \notin V_4$$

Přímice je opět 1 bod. false

$$X + D_1 \vec{u} + D_2 \vec{v} = Y + t_1 \vec{w} + t_2 \vec{r}$$

$$D_1 = -\frac{48}{35}$$

$$D_2 = \frac{123}{35}$$

$$t_1 = -\frac{5}{7}$$

$$t_2 = \frac{34}{7}$$

$$\text{Společný bod } Z = Y + \frac{34}{7} \vec{r} - \frac{5}{7} \vec{w} = \left[10, -\frac{31}{7}, \frac{39}{7}, \frac{73}{7} \right]$$

4) Přímka $p = [A, \vec{u}]$ a přímka $q = [B, \vec{v}]$. $A = [1, -2, -1, 2]$, $\vec{u} = (2, 3, 1, 2)$, $B = [5, 5, 2, 1]$, $\vec{v} = (1, 2, 1, 3)$. Ukažte 1 bod aby přímky p a q byly různoběžky.

• Přímky mají společný bod $\Rightarrow A + t \cdot \vec{u} = B + s \cdot \vec{v}$

$$1 + 2s = 5 + t$$

$$-2 + 3s = 5 + 2t$$

$$-1 + s = 2 + t$$

$$2 + 2s = 1 + 3t$$

$$2s - t = 4$$

$$3s - 2t = 7$$

$$s - t = 3$$

$$2s - 3t = 1 - 2$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & -2 & 7 \\ 1 & -1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 - 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 - 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 - 8 \end{pmatrix} \Rightarrow 1 - 8 = 2$$

$$\underline{\underline{1 = 10}}$$

Přímky jsou různoběžky pro $1 = 10$.

5) Vyjádřete vzájemnou polohu rovin $L: X = [1; 1; 2; 0] + s_1 \vec{u} + s_2 \vec{v}$
 a roviny $B: Y = [2; -2; 2; -4] + t_1 \vec{w} + t_2 \vec{z}$. Kde $\vec{u} = (1; 2; 1; 2)$,
 $\vec{v} = (3; 1; 3; 2)$, $\vec{w} = (3; 1; -2; -1)$, $\vec{z} = (1; 12; 1; 10)$

• Najděte rovnoběžnost

$\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$? $\perp$?

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{LN}} \quad L \parallel B \quad (*)$$

$$\vec{x}_0 = Y_0 - X_0 = (1; -3; 0; -4)$$

? báze? $\langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \rangle =$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 12 & 1 & 10 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & 10 & 0 & 8 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{L2}} \quad \text{tedy báze}$$

jsou jen $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ vř (*), neboť $\vec{z}$ je LN .

$$X_0 Y_0 \in \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \vec{z} \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \rangle$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -5 & -3 \\ 0 & -5 & -1 & -6 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array} \right) \Rightarrow \underline{\underline{LN}}$$

Roviny jsou mimoběžné.