1) Určete příčku mimoběžek AB a CD, která je rovnoběžná s rovinami ρ a σ, kde

AB $A=[-5,2,2]$, $B=[3;2,6]$ $\quad \rho: x-4y-3z+12=0$

CD $C=[-6,11,2]$, $D=[10;21,2]$ $\quad \sigma \quad X=(3+3r-2s,\ 2r,\ -4s)$

Nejdříve určíme neparametrickou rovnici roviny σ

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-0 & z-0 \\ 3 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{aligned} -8(x-3)+12y+4z&=0 \\ -8x+12y+4z+24&=0 \\ 2x-3y-z-6&=0 \end{aligned}$$

Teď určíme parametrickou rovnici průsečnice p rovin ρ a σ

$$\begin{aligned} 2x-3y-z-6&=0 \\ x-4y-3z+12&=0 \\ \hline x-4y-3z&=-12 \\ 5y+5z&=30 \Rightarrow y+z=6 \ \ldots \end{aligned}$$

$z=t$
$y=6-t$
$x=-12+4(6-t)+3t=12-t$

Směrový vektor průsečnice $\vec{s}=(-1,-1,1)$

Rovnice přímky AB $\quad X=[-5;2;2]+t(8,0,4)$
Rovnice přímky CD $\quad Y=[-6,11,2]+s(16,10;0)$

Budeme hledat body P a Q na přímkách AB a CD tak aby $\vec{PQ} \parallel \vec{s}$

$$P-Q=k\cdot\vec{s}$$

$$\underbrace{[-5,2,2]+t(8,0,4)}_{P}-\underbrace{([-6,11,2]+s(16,10,0))}_{Q}=k\cdot(-1,-1,1)$$

$$[1,-9,0]+t(8,0,4)-s(16,10,0)=k(-1,-1,1)$$

$$\begin{aligned} 8t-16s+k&=-1 \\ -10s+k&=9 &&\Rightarrow 10s=k-9 &&\Rightarrow s=\frac{k-9}{10} \\ 4t\qquad -k&=0 &&\Rightarrow k=4t &&\Rightarrow t=\frac{k}{4} \end{aligned}$$

$$2k-\frac{8}{5}(k-9)+k=-1$$

$$\frac{7}{5}k=-\frac{77}{5}$$

$\underline{k=-11} \Rightarrow \quad s=-2;\ t=-\frac{11}{4} \qquad P=[-27,2,-9]$, $Q=[-38,-9,2]$

Rovnice příčky je: $X=[-27,2,-9]+k(-1,-1,1)$

2) Určete příčku mimoběžek p, q o daném směru $\vec{w}(1,2,3,1)$, E_4

$p: X = [1,0,1,0] + s(1,1,2,3)$

$q: Y = [2,2,1,4] + t(0,-3,1,2)$

$P \in p \qquad P = [1,0,1,0] + s(1,1,2,3)$

$Q \in q \qquad Q = [2,2,1,4] + t(0,-3,1,2)$

$\overrightarrow{PQ} \parallel \vec{w}$

$Q - P = r \cdot \vec{w}$

$[2,2,1,4] + t(0,-3,1,2) - [1,0,1,0] - s(1,1,2,3) = r \cdot (1,2,3,1)$

$$\begin{aligned}
& -s - r = -1 \\
-3t\ & -s - 2r = -2 \\
t\ & -2s - 3r = 0 \\
2t\ & -3s - r = -4
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ -3 & -1 & -2 & -2 \\ 2 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -7 & -11 & -2 \\ 0 & +1 & +5 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 5 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{4} & \cancel{-5} \end{array}\right) \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} r &= -\tfrac{5}{4} \\ s &= \tfrac{9}{4} \\ t &= \tfrac{3}{4} \end{aligned}}$$

$P = \left[\frac{13}{4}, \frac{9}{4}, \frac{11}{2}, \frac{27}{4}\right]$

$Q = \left[2, -\frac{1}{4}, \frac{7}{4}, \frac{11}{2}\right]$

Rovnice příčky je $\quad X = \left[\frac{13}{4}, \frac{9}{4}, \frac{11}{2}, \frac{27}{4}\right] + t\,(1, 2, 3, 1)$

3) Určete příčku mimoběžné přímky p a roviny ρ. Příčka prochází bodem $M = [1;1;2,1]$.

$$p = \quad X = [2,3,4,2] + s(1,2,1,2)$$

$$\rho \quad Y = [1,0,0,0] + t_1(2,2,0,2) + t_2(0,0,1,3)$$

$P \in p \quad P = [2,3,4,2] + s(1,2,1,2)$

$R \in \rho : \quad R = [1,0,0,0] + t_1(2,2,0,2) + t_2(0,0,1,3)$

$$\overrightarrow{PM} \parallel \overrightarrow{MR}$$

$$M - P = k \cdot (R - M)$$

$$[-1,-2,-2,-1] - s(1,2,1,2) = k\{[0,-1,-2,-1) + t_1(2,2,0,2) + t_2(0,0,1,3)\}$$

Označme $k \cdot t_1 = x$, $k \cdot t_2 = y$

$-1 = s + 2x \Rightarrow 2x = -1 - s$

$$y = 1/3 \Leftarrow \begin{cases} -2 = 2s - k + 2x \\ -2 = s - 2k + y \\ -1 = 2s - k + 2x + 3y \end{cases}$$

$-2 = 2s - k - 1 - s$

$-2 = s - 2k + 1/3$

$s - k = -1$

$s - 2k = -\frac{7}{3}$

$k = \frac{4}{3}$

$s = \frac{1}{3}$

$x = \frac{-1-\frac{1}{3}}{2}$

$x = -\frac{2}{3}$

$P = [\frac{7}{3}, \frac{11}{3}, \frac{13}{3}, \frac{8}{3}]$

$M - P = (-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, -\frac{5}{3}) = -\frac{1}{3}(4,8,7,5)$

$\Downarrow$

Rovnice přímky je

$$X = [\tfrac{7}{3}, \tfrac{11}{3}, \tfrac{13}{3}, \tfrac{8}{3}] + t(4,8,7,5).$$