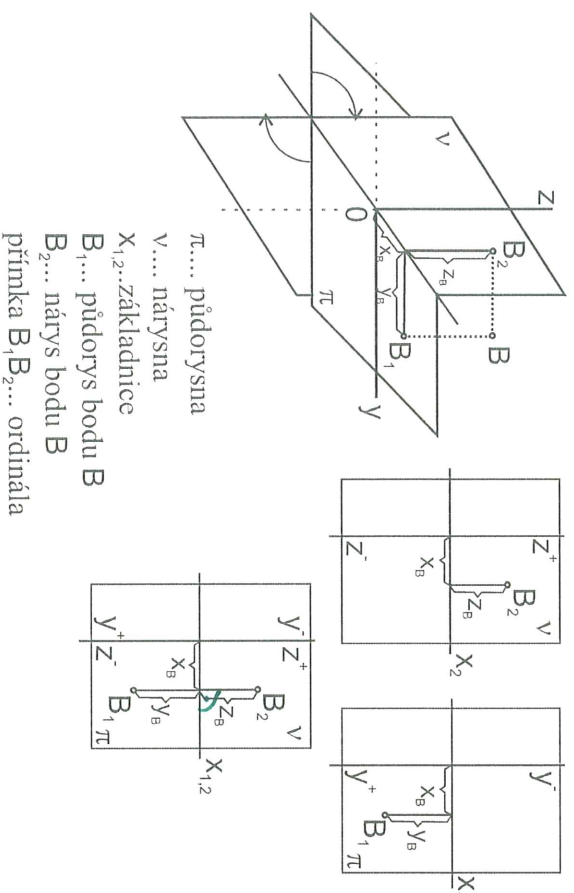
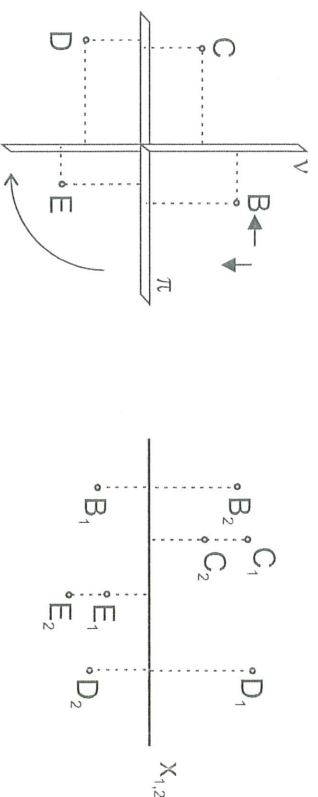


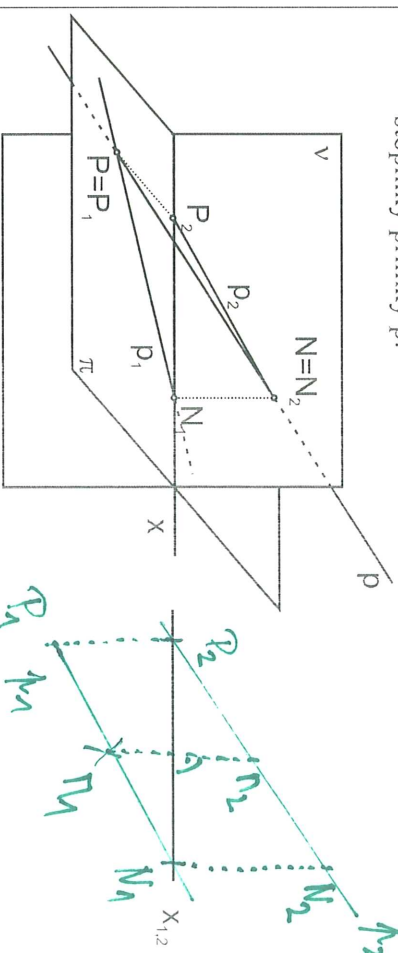
Mongeovo promítání (pravouhlé promítání na dvě navzájem kolmé průmětny)



Obraz bodu

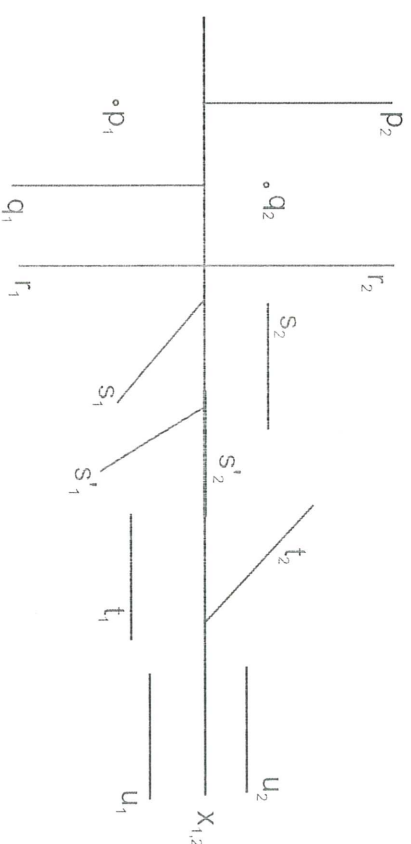


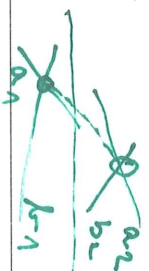
Př.: Načrtněte nárys a půdorys přímky p, bod M, který na ní leží, a stopníky přímky p.



Bod M leží na přímce $p \Rightarrow M_1 \in p_1 \wedge M_2 \in p_2$
Stopník ... bod, ve kterém protne přímka průmětnu
 P ... půdorysný stopník $P_1 \in p_1 \wedge P_2 \in p_2 \wedge P_2 \in X_{1,2}$
 N ... nárysný stopník $N_1 \in p_1 \wedge N_2 \in p_2 \wedge N_1 \in X_{1,2}$

Př.: Rozhodněte, jakou mají přímky polohu vzhledem k průmětnám.



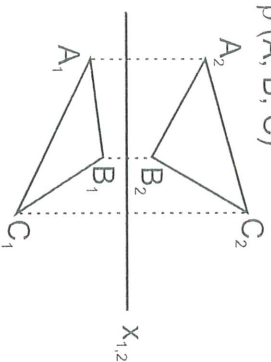


Obraz roviny

Určení roviny:

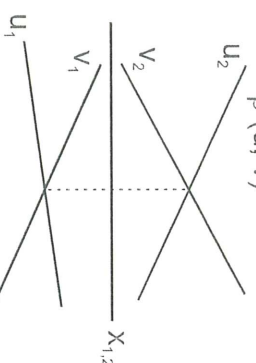
a) třemi nekolineárními body

$\rho(A, B, C)$



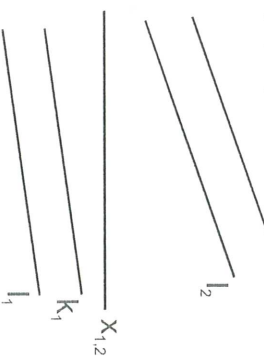
b) dvěma různoběžkami

$\rho(u, v)$



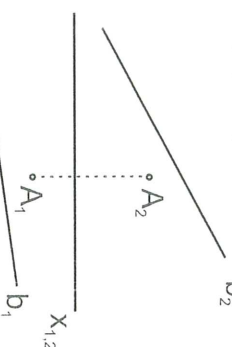
c) dvěma rovnoběžkami

$\rho(k, l)$

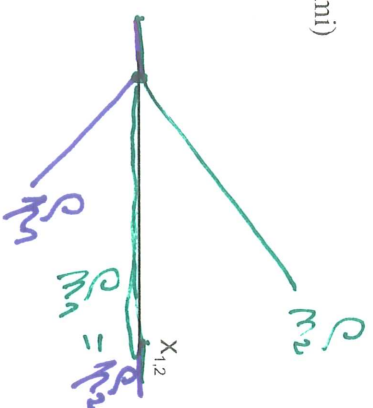
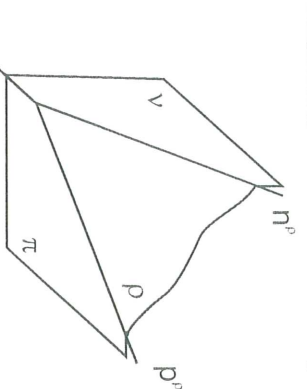


d) přímkou a bodem

$\rho(A, b), A \notin b$

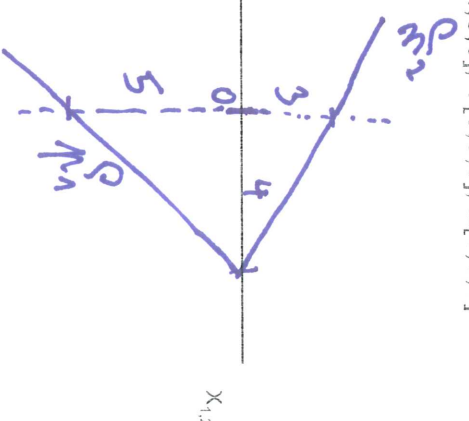


e) stopami (jde o určení dvěma přímkami)

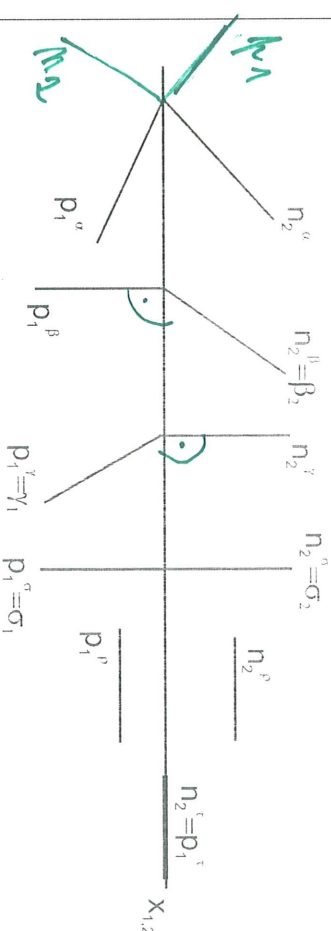


stopa ... přímka, ve které protne rovina průmětnu
 n^p ... nárysna stopa
 p^p ... půdorysná stopa

e) trojici $\rho(4, 5, 3)$
 tzn. body $X[4, 0, 0]$, $Y[0, 5, 0]$, $Z[0, 0, 3]$

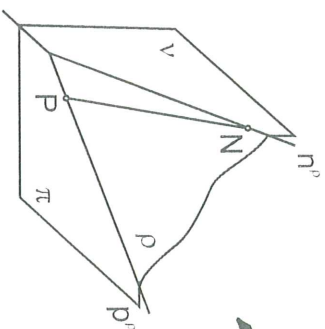


Př.: Rozhodněte, jakou polohu mají roviny vzhledem k průmětnám.



Polohové úlohy

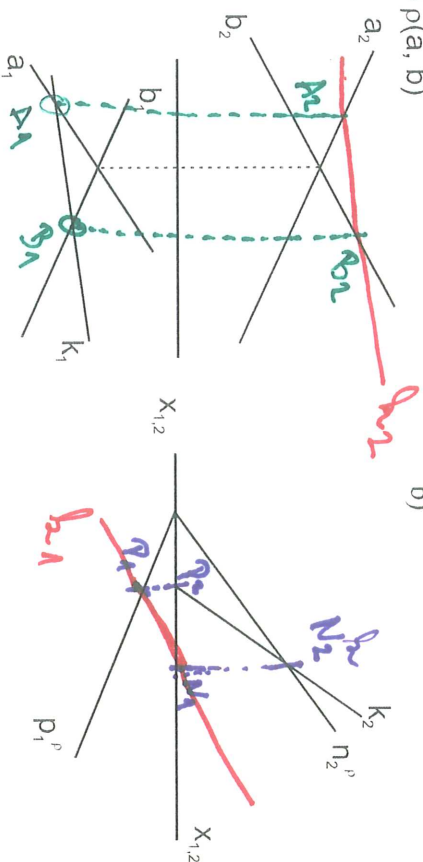
1) Přímka v rovině



Stopník přímky ležící v rovině, leží na její stopě.
(Půdorysný stopník na půdorysné stopě, nárysny stopník na nárysne stopě)

Př.: Je dána rovina ρ a jeden průmět přímky k ležící v rovině ρ .

a) $\rho(a, b)$



b)

Postup:

- 1) Sestrojíme průsečík A_1 přímky a_1 a k_1 .
- 2) Sestrojíme průsečík B_1 přímky b_1 a k_1 .
- 3) Odvodíme body A a B po ordinále do nárysu, na přímce a_2 dostaneme bod A_2 , na přímce b_2 dostaneme bod B_2 .
- 4) Přímka k_2 je spojnici bodů A_2 a B_2 .

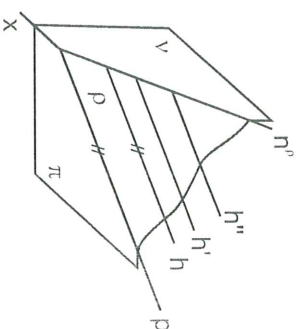
Hlavní přímky roviny

Hlavní přímka roviny je přímka ležící v rovině a je rovnoběžná s průmětnou.

Horizontální hlavní přímka

(hlavní přímka první osnovy) je rovnoběžná s půdorysnou.

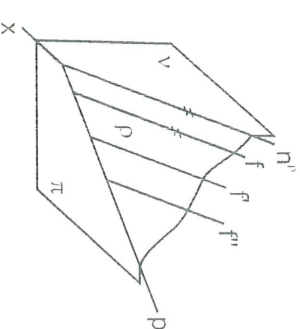
Speciálním případem horizontální hlavní přímky je půdorysná stopa.



Frontální hlavní přímka

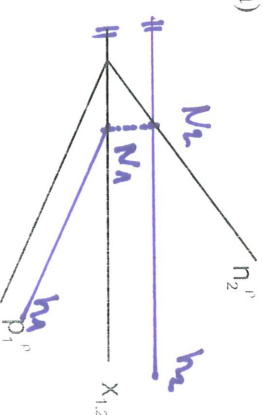
(hlavní přímka druhé osnovy) je rovnoběžná s nárysnu.

Speciálním případem frontální hlavní přímky je nárysna stopa.

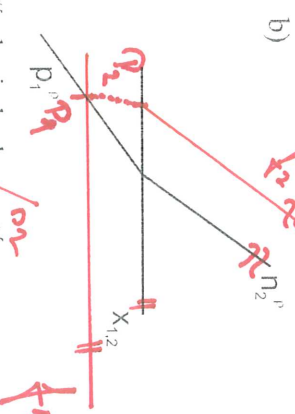


Př.: Sestrojte a) horizontální, b) frontální hlavní přímku roviny ρ .

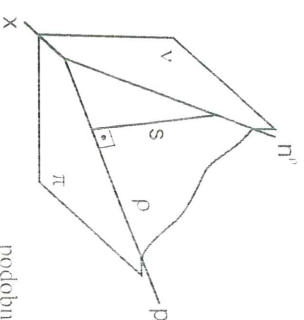
a)



b)



Spádová přímka je kolmá na hlavní přímky jednoho systému.

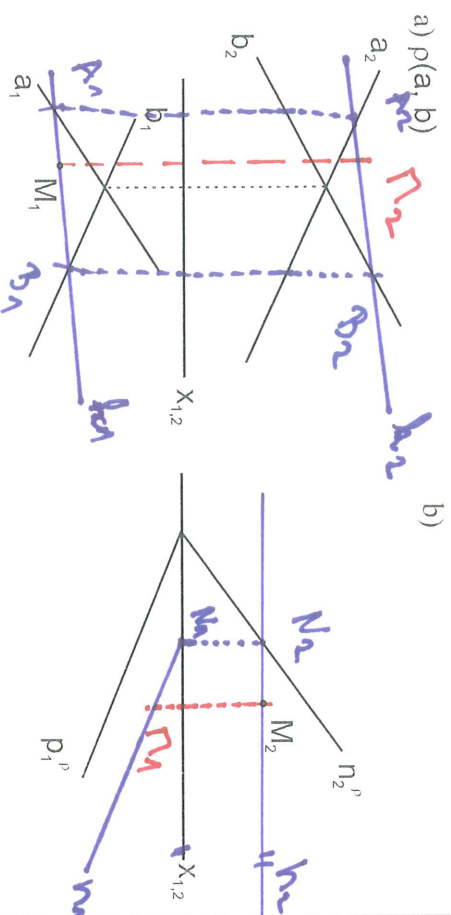


podobně spádová přímka kolmá na frontální hlavní přímky

2) Bod v rovině

 Bod leží v rovině, právě když leží na některé přímce p .

Př.: Je dána rovina p a jeden průmět bodu M ležící v rovině p .
Sestrojte druhý průmět bodu M .



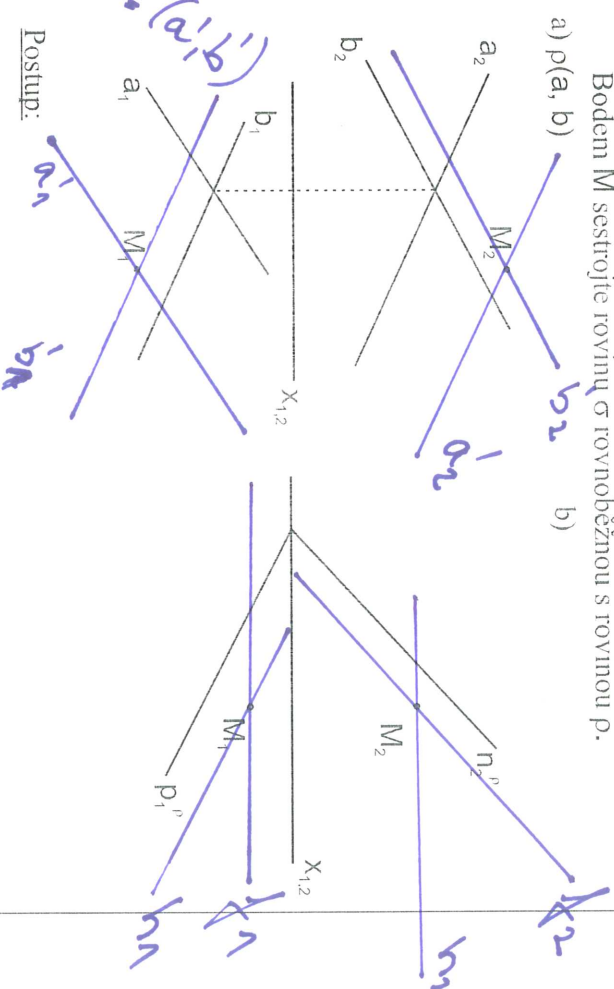
Postup:

- 1) Bodem M_1 vedeme přímku k_1 , tím jsme úlohu převedli na úlohu 1
- 2) Sestrojíme průsečík A , přímky a_1, a_2 a k_1 .
- 3) Sestrojíme průsečík B , přímky b_1, a_2 a k_1 .
- 4) Odvodíme body A a B po ordinále do nánysu, na přímce a_2 dostaneme bod A_2 na přímce b_2 dostaneme bod B_2 .
- 5) Přímka k_2 je spojnicí bodů A_2 a B_2 .
- 5) Bod M_2 najdeme na přímce k_2 a na ordinále vedené bodem M_1 .

3) Rovnoběžné roviny

? Kdy je přímka rovnoběžná s rovinou? (kritérium rovnoběžnosti)

Př.: Je dána rovina p a bod M .
Bodem M sestrojíte rovinu σ rovnoběžnou s rovinou p .



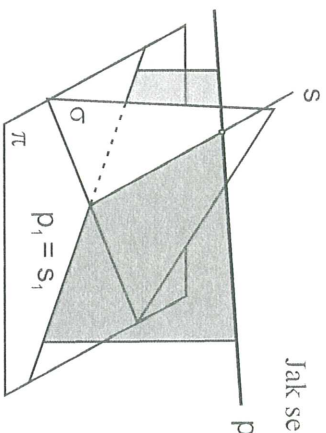
Postup:

- 1) $a_1', n_a \in a_1' \parallel a_1$
- 2) $a_2', n_a \in a_2' \parallel a_2$
- 3) $k_1, n_a \in k_1' \parallel k_1$
- 4) $k_2, n_a \in k_2' \parallel k_2$

 Stopy roviny σ neprocháží body M_1, M_2 .
Rovnoběžné roviny mají rovnoběžné stopy.

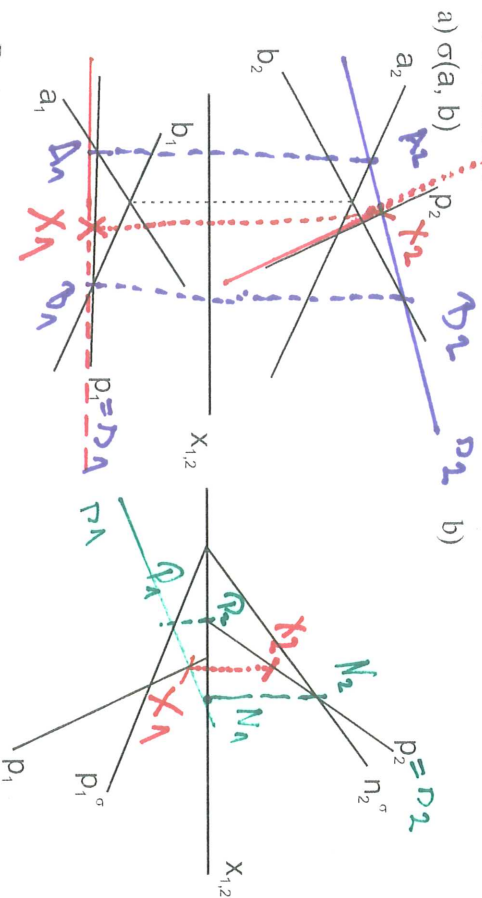
4) Průsečík přímky s rovinou

Jak se promítají dvě různoběžky?



KRYCÍ PŘÍMKA

Př.: Je dána rovina σ a přímka p . Sestrojte průsečík přímky p s rovinou σ .



Postup:

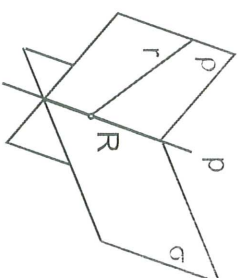
Pomocí půdorysné krycí přímky.

- 1) Zvolíme krycí přímku s , tak aby $s_1 = p_1$ a $s \subset \sigma$.
- 2) Odvodíme nárys s_2 přímky s . (Úloha 1)
- 3) Najdeme průsečík X_2 přímek s_2 a p_2 .
- 4) Odvodíme bod X do půdorysu na přímku p_1 . (X_1)

Podobně můžeme volit nárysné krycí přímku.

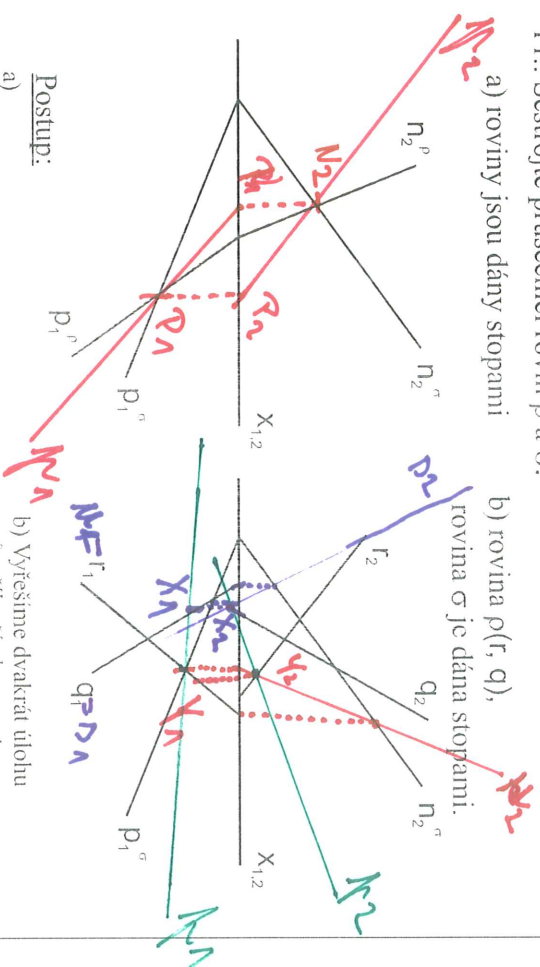
5) Průsečnice dvou rovin

Průsečnice rovin je přímka ležící v obou rovinách tj. její stopník leží na stopách obou rovin.



Polkad přímka r leží v rovině ρ , pak průsečík R přímky r s rovinou σ leží na průsečnici p rovin ρ a σ .

Př.: Sestrojte průsečnici rovin ρ a σ .



Postup:

a) Nárysný stopník průsečnice leží na nárysné stopě roviny ρ i roviny σ .

$N_1 \in n_1' \cap n_2'$, $N_1 \in X_{1,2}$

2) Půdorysný stopník průsečnice leží na půdorysné stopě roviny ρ i roviny σ .

$P_1 \in p_1' \cap p_2'$, $P_1 \in X_{1,2}$

3) Přímka NP je hledanou průsečnicí.

b) Vyřešíme dvakrát úlohu průsečík přímky s rovinou.

1) Zvolíme krycí přímku s , tak aby $s_1 = q_1$ a $s \subset \sigma$.

2) Odvodíme nárys s_2 přímky s . (Úloha 1)

3) Najdeme průsečík X_2 přímek s_2 a q_2 .

4) Odvodíme bod X do půdorysu na přímku q_1 . (X_1)

5) Zvolíme krycí přímku u , tak aby $u_1 = r_1$ a $u \subset \sigma$.

6) Odvodíme nárys u_2 přímky u . (Úloha 1)

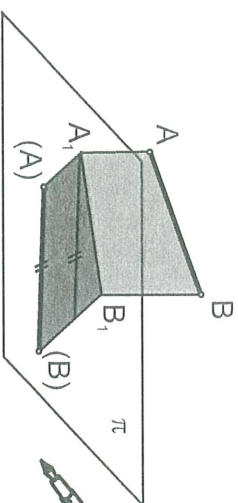
7) Najdeme průsečík Y_2 přímek u_2 a r_2 .

8) Odvodíme bod X do půdorysu na přímku r_1 . (Y_1)

9) Přímka XY je hledaná průsečnice.

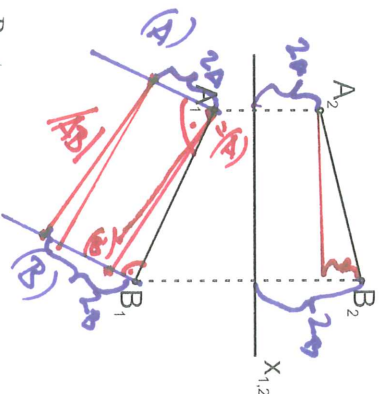
Metrické úlohy

6) Skutečná velikost úsečky



Sklopíme lichoběžník ABA_1B_1 do průmětny.

Př.: Sestrojte skutečnou velikost úsečky AB .
a) pokud je zadána osa X .

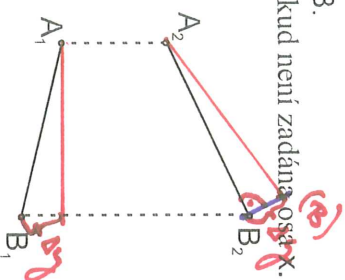


Postup:

- 1) z_A (zetovou souřadnici bodu A) nanese na kolnici vedenou bodem A_1 , získaný bod označíme (A) .
- 2) z_B (zetovou souřadnici bodu B) nanese na kolnici vedenou bodem B_1 , získaný bod označíme (B) .
- 3) Spojnice bodů (A) , (B) je sklopená přímka b . Vzdálenost bodů (A) , (B) je skutečná velikost úsečky AB .

Podobně můžeme sklápati do nárysu použitím y_A, y_B .

b) pokud není zadána osa X .



Postup:

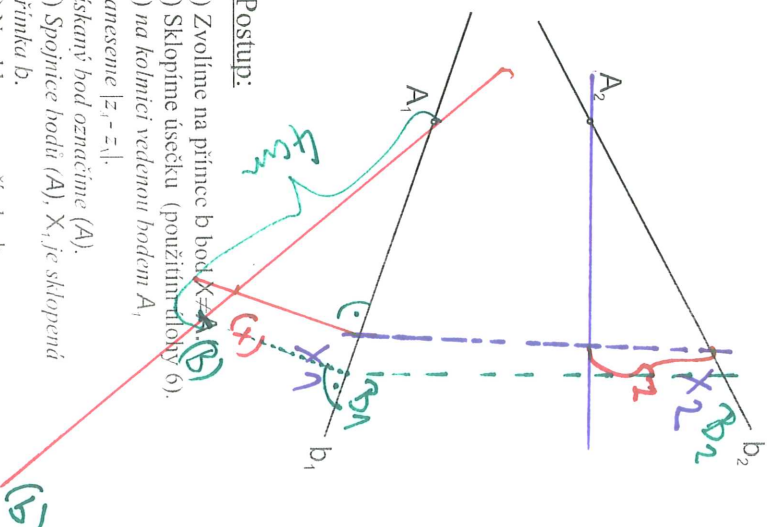
- Pomocí rozdílového trojúhelníka.
- 1) na kolnici vedenou bodem A_1 nanese $|z_A - z_B|$, získaný bod označíme (A) .
 - 2) Spojnice bodů (A) , B_1 je sklopená přímka b a vzdálenost bodů (A) , B_1 je skutečná velikost úsečky AB .

7) Nanese úsečky na přímku



Sklopením (použijeme úlohu 6).

Př.: Je dána přímka b . Naneste na přímku b od bodu A vzdálenost 4 cm.

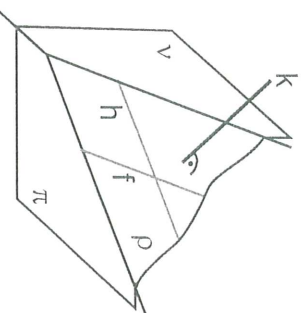


Postup:

- 1) Zvolíme na přímce b bod $X \neq A$.
- 2) Sklopíme úsečku (použijeme úlohu 6).
- 3) na kolnici vedenou bodem A_1 nanese $|z_X - z_A|$, získaný bod označíme (A) .
- 4) Spojnice bodů (A) , X_1 je sklopená přímka b .
- 5) Na sklopenou přímku b nanese požadované 4 cm, získaný bod označíme (B) .
- 6) Bod (B) sklopíme zpět na přímku b_1 pomocí kolnice vedené bodem (B) k přímce b . Dostáváme bod B_1 .
- 7) Bod B_2 odvodíme po ordinále na přímku b_2 .
- 8) Úsečka AB má skutečnou velikost 4 cm.

Můžeme také použít sklopení do nárysu.

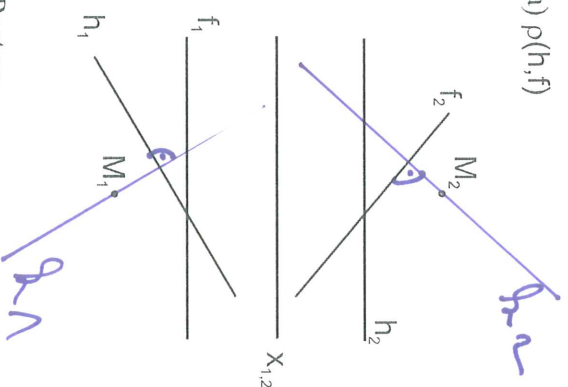
8) Přímka kolmá k rovině



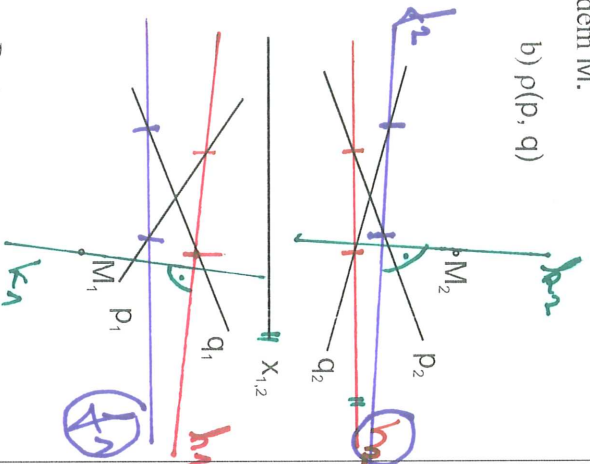
$$\begin{aligned} h \parallel \pi &\Rightarrow k_1 \perp h_1 \perp k_2 \\ f \parallel v &\Rightarrow k_2 \perp f_2 \perp n_2 \end{aligned}$$

Př.: Sestrojte kolnici k rovině ρ bodem M .

a) $\rho(h, f)$



b) $\rho(p, q)$



Postup:

- 1) Bodem M_1 vedeme kolnici k h_1 , dostaneme k_1 .
- 2) Bodem M_2 vedeme kolnici k f_2 , dostaneme k_2 .

Postup:

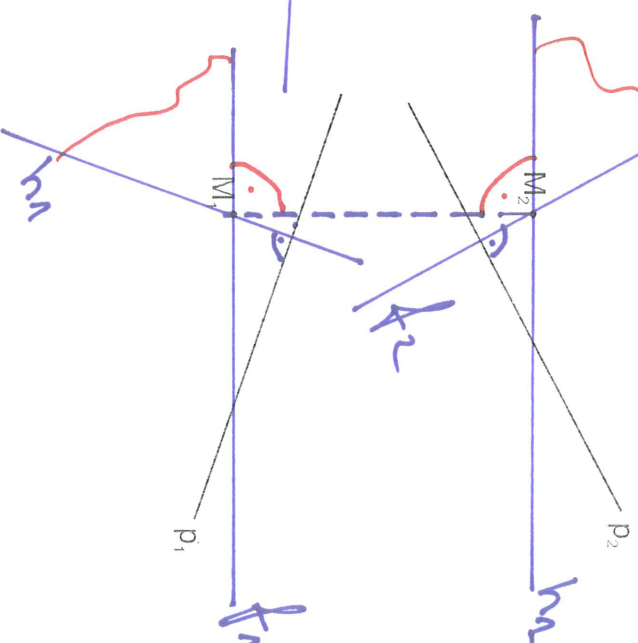
- 1) Sestrojíme hlavní přímkou roviny ρ .
- 2) Postupujeme jako v úloze a)
- 3) Bodem M_1 vedeme kolnici k h_1 , dostaneme k_1 .
- 2) Bodem M_2 vedeme kolnici k f_2 , dostaneme k_2 .

9) Rovina kolmá k přímce



$$\begin{aligned} h_1 \perp p_1 \text{ a } h_2 \parallel x_{1,2} \\ f_2 \perp p_2 \text{ a } f_1 \parallel x_{1,2} \end{aligned}$$

Př.: Je dána přímka p . Sestrojte bodem M rovinu kolmou k přímce p .



Postup:

- 1) Sestrojíme hlavní přímkou hledané roviny ρ .
- 2) $h_1 \perp p_1$ a $h_2 \parallel x_{1,2}$ a $M_1 \in h_1$, $M_2 \in h_2$.
- 3) $f_2 \perp p_2$ a $f_1 \parallel x_{1,2}$ a $M_1 \in f_1$, $M_2 \in f_2$.

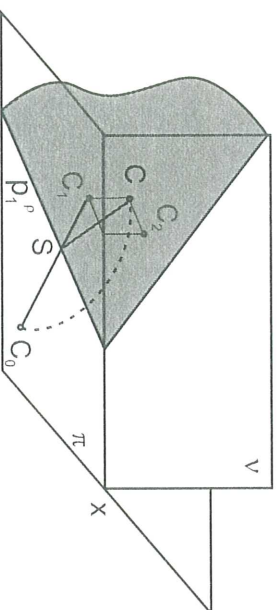
10) Otočení roviny do polohy rovnoběžné s průmětnou

Jak se zobrazí v rovnoběžném promítání objekty, které leží v rovině rovnoběžné s průmětnou?

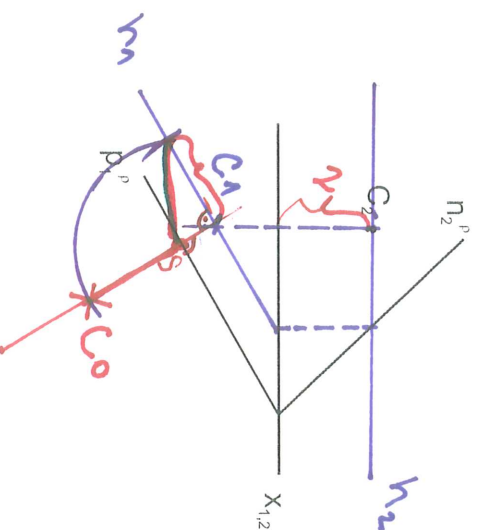


Rovinu otáčíme kolem přímky rovnoběžné s průmětnou, tj. kolem **hlavní přímky**.

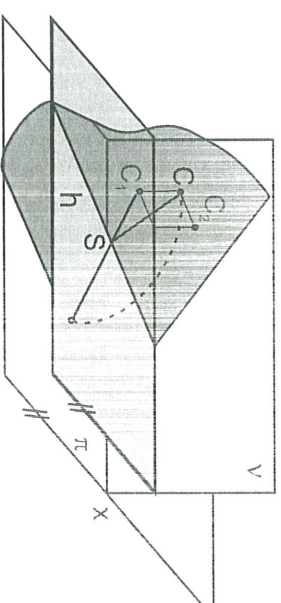
Speciálním případem hlavní přímky je stopa. Rovinu můžeme otáčet kolem stopy do průmětny.



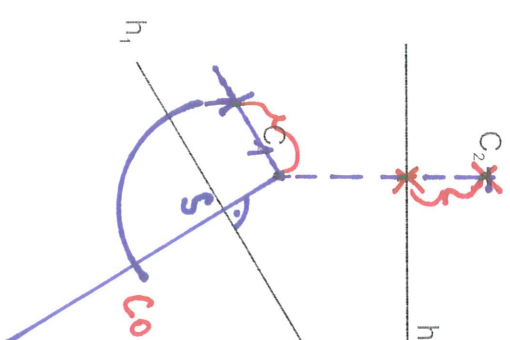
Př.: Otočte rovinu ρ kolem stopy do průmětny. (Otočte bod C)



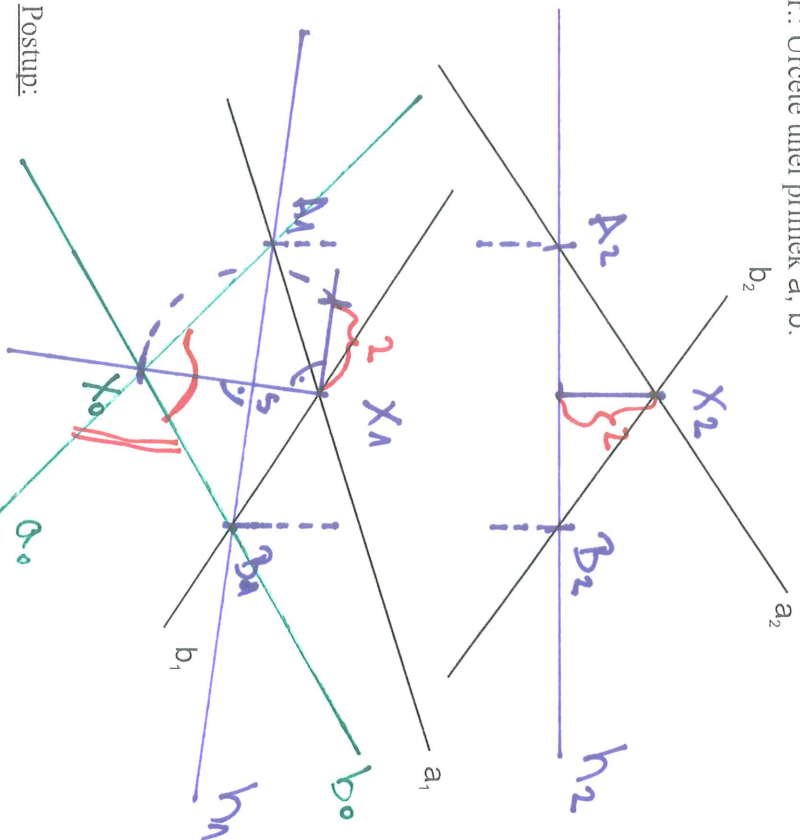
Pokud nemáme stopu, otáčíme kolem hlavní přímky do polohy rovnoběžné s průmětnou.



Př.: Otočte rovinu $\rho(C, h)$ kolem hlavní přímky do roviny rovnoběžné s průmětnou. (Otočte bod C)



Př.: Určete úhel přímek a, b .

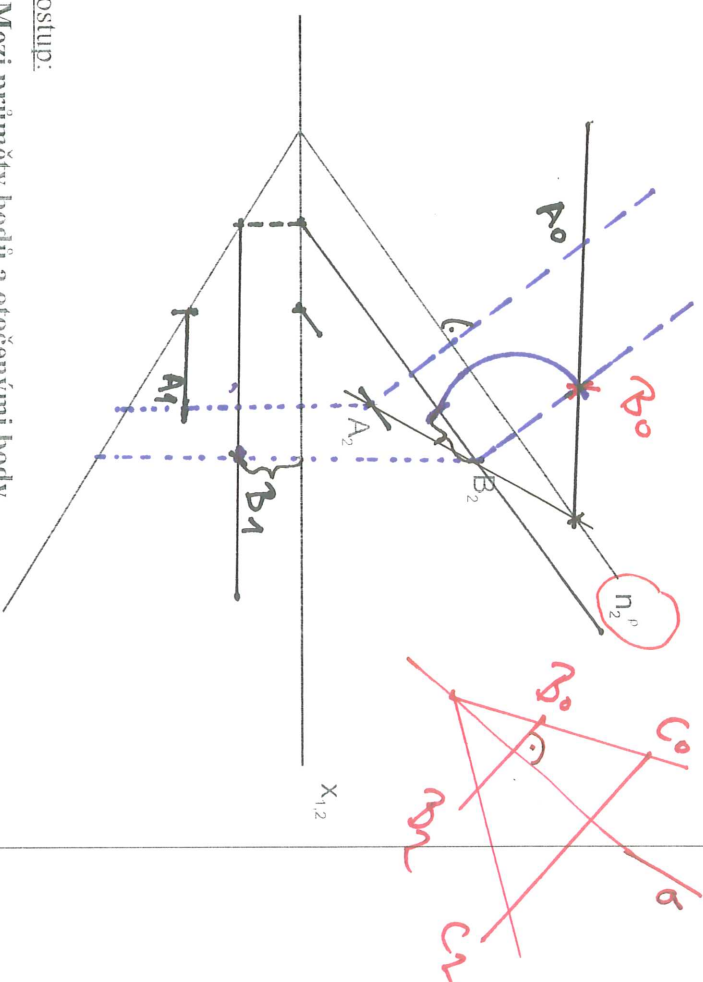


Postup:

V rovině umíme zjistit úhel různoběžek, proto tuto úlohu vyřešíme pomocí otočení do polohy rovnoběžné s průmětnou.

- 1) Zvolíme hlavní přímku h , neprocházející průsečíkem přímek a, b . (h_2 je kolmá na ordinálu, h_1 odvodíme pomocí průsečíků $s(a, b)$)
- 2) Otočíme přímky a, b okolo h do polohy rovnoběžné s průmětnou π : V půdorysu otočíme průsečík X přímek a, b . Dostáváme bod X_0 . Průsečík A přímek a, h zůstane při otáčení na místě, protože otáčíme kolem h . $A_0 = A_1$
Průsečík B přímek b, h zůstane při otáčení na místě, protože otáčíme kolem h . $B_0 = B_1$
- 3) Úhel přímek $a_0 = A_0X_0, b_0 = B_0X_0$ je hledaný úhel.

Př.: Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC v rovině ρ , jsou-li zadány stopy roviny a nárysy bodů A, B .



Postup:

Mezi průměty bodů a otočenými body existuje afinita jejíž osou je osa otáčení.

P_1

V rovině umíme sestrojit rovnostranný trojúhelník, proto tuto úlohu vyřešíme pomocí otočení do polohy rovnoběžné s průmětnou.

- 1) Otočíme body A, B kolem nárysne stopy π_2' do nárysny.
- 2) V otočení sestrojíme rovnostranný trojúhelník $A_0B_0C_0$.
- 3) Pomocí **afinity** otočíme trojúhelník zpět do nárysny. (afinita je určena osou otáčení π_2' a párem odpovídajících si bodů např. A_0, A_2)
- 4) Body A, B, C odvodíme do půdorysny (např. pomocí hl. přímek)

11) Obraz kružnice

 **Obrazem kružnice** v rovnoběžném promítání je v obecném případě **elipsa**.

? Jak se zobrazí kružnice ležící v rovině kolmé k průmětně?

? Jak se zobrazí kružnice ležící v rovině rovnoběžné s průmětnou?

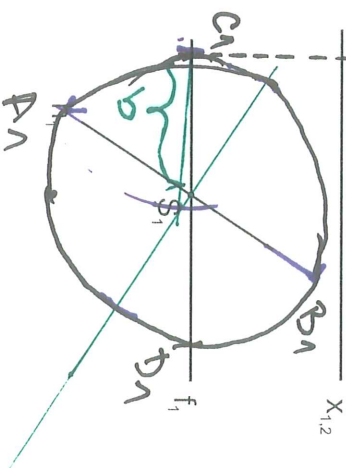
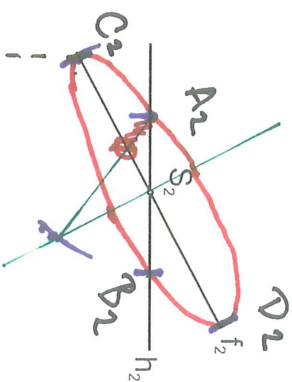
? Jaký je vztah velikosti vzoru a obrazu úsečky v pravoúhlém promítání?

Kdy se velikost úsečky zachovává?

 Velikost průměru kružnice, který leží na **hlavní přímce**, se při pravoúhlém promítání zachová, ostatní průměry se zmenší.

Průměr na **hlavní přímce** bude **hlavní osou** elipsy, do které se kružnice zobrazí.

Př.: V rovině $\rho(h, f)$ sestrojte kružnici $k(S, r=3\text{cm})$.



Postup:

1) na h_1 naneseme
společnou velikost

A_1B_1

2) odvedeme A_2B_2

3) na f_2 C_2D_2

4) odvedeme A_2B_2 a C_2D_2

5) v případě A_1B_1 a C_1D_1 $\Rightarrow$ průměry

6) C_2D_2 hl. osa

A_2B_2 $\Rightarrow$ průměry

Př.: V rovině $\rho(A, B, C)$ sestrojte kružnici k opsanou trojúhelníku ABC.

B_2

C_2

A_2

$X_{1,2}$

C_1

A_1

B_1

Postup: