# ELEKTROTECHNICKÝ ČASOPIS

SEPARÁTNY VÝTLAČOK

VEDA, VYDAVATEĽSTVO SLOVENSKEJ AKADÉMIE VIED
895 30 BRATISLAVA, KLEMENSOVA 27

# PŘÍSPĚVEK K MODELOVÁNÍ ELEKTRICKÝCH SYSTÉMŮ ELEKTRICKÝMI OBVODY

D. MAYER—Z. RYJÁČEK*

Elektrický obvod je modelem, jímž nahrazujeme pro teoretické úvahy fyzikálně reálnou elektrickou soustavu. Aby měly tyto teoretické úvahy smysl a aby vedly k přesným závěrům, je třeba pracovat s dostatečně adekvátním modelem. V práci jsou formulovány základní požadavky na fyzikální a topologickou strukturu, pro které zavádíme pojmy korektnost, asymptotická stabilita a konečnost výkonů. Uvádí se nová kriteria asymptotické stability obvodu. V závěru je pak provedena klasifikace všech lineárních obvodů z hlediska použitelnosti symbolicko-komplexního zobrazení, což dává směrnici pro volbu vhodné metody k sestavení matematického modelu obvodu v harmonickém ustáleném stavu.

## *Seznam hlavních symbolů a označení*

$\mathcal{T}$ — množina všech stromů grafu obvodu,
$\mathcal{N}$ — množina všech systémů nezávislých větví grafu obvodu,
$\mathcal{S}$ — množina všech smyček grafu obvodu,
$\mathcal{C}$ — množina všech cest grafu obvodu,
$\mathcal{R}$ — množina všech řezů grafu obvodu,
$\mathcal{V}$ — množina všech větví grafu obvodu,
$\mathcal{V}_R$ — množina všech odporových větví obvodu,
$\mathcal{V}_L$ — množina všech induktivních větví obvodu,
$\mathcal{V}_C$ — množina všech kapacitních větví obvodu,
$\mathcal{V}_U$ — množina všech napěťových větví obvodu,
$\mathcal{V}_I$ — množina všech proudových větví obvodu,
$\mathcal{T}_p$ — množina všech pravých stromů (tj. stromů obsahujících všechny zdroje napětí, všechny kondenzátory, libovolné odpory a žádné cívky a zdroje proudu),
$\mathcal{N}_p$ — množina všech pravých systémů nezávislých větví (tj. nezávislých větví obsahujících všechny zdroje proudu, všechny cívky, libovolné odpory a žádné kondenzátory a zdroje napětí),

* Prof. Ing. Daniel Mayer, CSc., Katedra teoretické a experimentální elektrotechniky; Zdeněk Ryjáček, prom. matematik, Katedra matematiky. Vysoká škola strojní a elektrotechnická, Nejedlého sady 14, 306 14 Plzeň 1.



$\mathcal{M}_U$ — množina všech napěťově asymptoticky stabilních obvodů,
$\mathcal{M}_I$ — množina všech proudově asymptoticky stabilních obvodů,
$\mathcal{M}_T$ — množina všech obvodů s pravým stromem,
$\emptyset$ — prázdná množina,
$\exp \mathcal{M}$ — množina všech podmnožin množiny $\mathcal{M}$.*

Ve vědomí elektrotechniků se vžívá názor, že teorie lineárních dynamických systémů — tedy i lineárních elektrických obvodů — je v podstatě dovršena, včetně používaného matematického aparátu. To se týká zejména lineárních obvodů se soustředěnými, časově neproměnnými parametry a z řešených problémů pak analýzy obvodů. Soudobý vývoj v této oblasti je zaměřen především na rozvoj a účinné využívání numerických metod a moderní výpočetní techniky a ovšem na řešení speciálních problémů motivovaných praktickými aplikacemi. Autoři tohoto příspěvku nechtějí zde polemizovat s uvedeným názorem, ale na prostých, téměř „školních" příkladech ukáží, že prakticky zaměřený elektrotechnik se při řešení i zcela jednoduchých lineárních obvodů může dostat do nesnází. Tyto mezery v dosavadní teorii lineárních obvodů souvisí se zavedením obvodu jakožto adekvátního modelu reálného fyzikálního systému.

## 1. Otevřené problémy v teorii lineárních obvodů?

Praktikům se může zdát zbytečné zabývat se otázkou existence a jednoznačnosti hledaného řešení rovnic obvodu. Vždyť z pouhého „fyzikálního názoru" je zřejmé, že každou větví obvodu musí procházet určitý (jediný) proud a musí na ní být určité (jediné) napětí. Tento intuitivní názor vychází z praktických poznatků o chování různých elektrotechnických zařízení, která nazýváme *lineárními,fyzikálně reálnými elektrickými obvody* — dále jen *reálnými obvody*. Ty totiž mají tu vlastnost, že v ustáleném stavu jsou jejich odezvy (tj. napětí a proudy) vždy jednoznačně určeny, nezávisle na počátečním stavu reálného obvodu. Abstrahováním od některých vlastností reálného obvodu, jež nejsou pro zkoumaný jev rozhodující, docházíme k jeho fyzikálnímu (či přesněji „obvodářskému") modelu, který nazýváme *ideálním elektrickým obvodem*, anebo prostě *obvodem*, sestaveným z aktivních a pasivních (ideálních) *prvků*. Obvody se zpravidla snažíme matematicky popsat, tj. sestavujeme jejich vhodný *matematický model*, na základě něhož pak vyšetřujeme chování obvodu. Při nevhodně zavedeném obvodu můžeme však (prostřednictvím jeho matematického modelu) dospět k odezvám, jež se silně liší od odpovídajících veličin reálného obvodu; odezvy obvodu dokonce ani nemusí

* Toto označení, pro techniky poněkud neobvyklé (nejedná se o exponenciální funkci!), je v teorii množin běžné; existují matematické důvody pro jeho používání.

existovat, anebo jich může existovat více. Nutným požadavkem na „správně" navržený obvod je kvalitativní soulad mezi chováním reálného obvodu a jemu přiřazeného obvodu. Zpravidla požadujeme, aby obvod byl *asymptoticky stabilní*, tj. pro každou dvojici jeho (proudových nebo napěťových) odezev $x_k(t)$ a $x_k^*(t)$, jež odpovídají různým počátečním podmínkám, platí

$$\lim_{t\to\infty} |x_k(t) - x_k^*(t)| = 0, \quad k = 1, \ldots, l$$

($l$ je počet větví obvodu). Důležitost této vlastnosti plyne mj. z toho, že pouze u asymptoticky stabilních obvodů buzených harmonickými zdroji (stejného kmitočtu), mají odezvy v ustáleném stavu harmonický průběh, nezávislý na počátečních podmínkách a lze tedy použít symbolicko-komplexní metodu.

*Příklad.* Proveďme analýzu jednoduchého obvodu podle obr. 1; vypínač byl sepnut v čase $t = 0$, kdy kondenzátor o kapacitě $C_1$ má napětí $u_{C1}(0) = u_{10}$, zatímco kondenzátor o kapacitě $C_2$ je bez napětí, $u_{C2}(0) = 0$.

Řešení

a) Rovnice obvodu, formulovaná metodou smyčkových proudů,

$$Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i \,\mathrm{d}\xi + u_{10} = 0,$$

má řešení

$$i(t) = \frac{u_{10}}{R}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}, \qquad \text{kde } \tau = R\,\frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

b) Rovnici téhož obvodu, formulovanou metodou uzlových napětí, lze vyjádřit maticově ve tvaru

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{u},$$

kde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C_1 R}, & \frac{1}{C_1 R} \\ \frac{1}{C_2 R}, & -\frac{1}{C_2 R} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}.$$

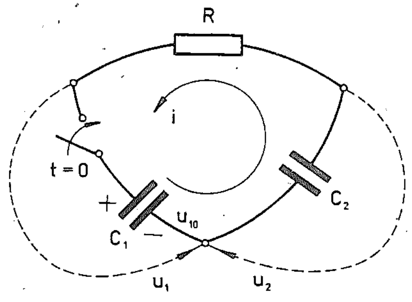
Charakteristická čísla matice $\mathbf{A}$ jsou: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)$ a tedy

$$u_1(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\,u_{10} + \frac{C_2}{C_1 + C_2}\,u_{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)t},$$

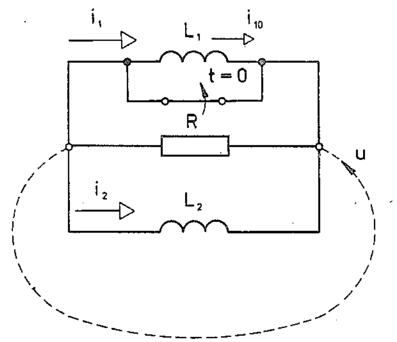
$$u_2(t) = \frac{C_1}{C_1 + C_2}\,u_{10} - \frac{C_2}{C_1 + C_2}\,u_{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{R}\left(\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}\right)t}.$$



Z uvedených řešení je patrno, že zatímco pro neznámý proud je obvod asymptoticky stabilní (řešení ad a) a tedy jako model je vyhovující, pro neznámá napětí na kondenzátorech není asymptoticky stabilní (řešení ad b) a tedy jako model je nevyhovující, neboť při analýze ustáleného stavu nelze použít symbolicko-komplexní metodu.




Obr. 1.




Obr. 2.

Analogickou úvahu lze provést pro duální obvod podle obr. 2: zatímco pro neznámé napětí $u(t)$ je tento obvod asymptoticky stabilní, není tomu tak, jsou-li neznámými proudy $i_1(t)$ a $i_2(t)$.

Z uvedených příkladů je patrno, že jeden a týž obvod může být jak „vhodným", tak „nevhodným" modelem, podle toho, jaké neznámé zavedeme. V dalším se pokusíme tuto otázku blíže objasnit, s cílem nalézt jednoduchá pravidla, podle nichž lze snadno rozhodnout, zda daný obvod a zvolená metoda jeho analýzy povedou k „rozumným" výsledkům. Kromě toho se zmíníme ještě o dalších požadavcích na obvody.

## 2. Definice a podmínky korektnosti, asymptotické stability a konečnosti výkonů

Korektnost, asymptotická stabilita a konečnost výkonů obvodu jsou pojmy, které vymezují jistý stupeň adekvátnosti mezi reálným obvodem a jeho modelem (= obvodem). Zatímco korektnost musí být vždy splněna, můžeme při řešení některých úloh pracovat s obvody, které nejsou asymptoticky stabilní a jejichž výkony nejsou konečné.

V této práci budeme vesměs předpokládat, že každá větev obvodu obsahuje jediný (aktivní nebo pasivní) prvek. Jinými slovy, budeme počítat s uzly 2. a vyššího stupně. Větev obsahující odpor nazveme *odporovou větví;* analogický význam má označení *kapacitní větev* a *induktivní větev*. Větev obsahující zdroj napětí (proudu) nazveme *napěťovou (proudovou) větví*.

I. ***Korektnost.*** Protože teorie obvodů postuluje platnost Kirchhoffových zákonů, budeme zásadně požadovat, aby žádný obvod nebyl s těmito zákony v rozporu.

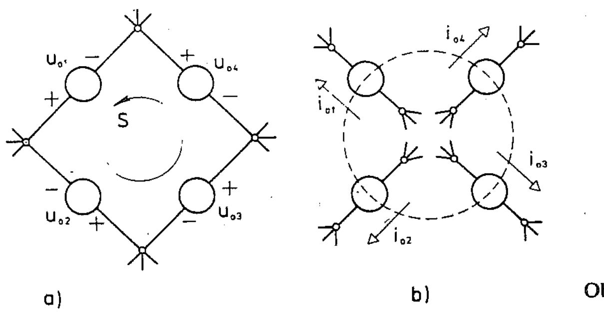
Definice 1. Obvod, který vyhovuje oběma Kirchhoffovým zákonům, nazveme *korektním*.

Korektnost obvodu je tedy podmínkou, již musí splňovat každý obvod, kterým se budeme zabývat. Z Kirchhoffových zákonů vyplývá, že obvod je korektním tehdy, neexistuje-li v něm ani jediná smyčka incidující vesměs s napěťovými větvemi, tj.

$$\mathscr{S} \cap \exp v_U = \emptyset$$

a neexistuje-li v něm ani jediný řez incidující vesměs s proudovými větvemi, tj.

$$\mathscr{R} \cap \exp v_I = \emptyset .$$




Obr. 3.

*Příklady.* Obvody na obr. 3ab nejsou korektní, jestliže zdroje napětí $u_{01}, \ldots, u_{04}$ a zdroje proudu $i_{01}, \ldots, i_{04}$ jsou libovolné. Pak totiž pro smyčku $S$ a pro řez $R$ obecně neplatí Kirchhoffovy zákony. Korektními jsou speciálně obvody, jejichž smyčky incidující s $n$ větvemi obsahují vesměs zdroje napětí tvořící symetrickou $n$-fázovou soustavu a jejichž řezy incidující s $n$ větvemi obsahují vesměs zdroje proudu tvořící symetrickou $n$-fázovou proudovou soustavu.

II. ***Asymptotická stabilita.*** Do lineárního* obvodu bez induktivních vazeb zavedeme $m$ neznámých odezev $x_1, \ldots, x_m$ $(m \leqq l)$, jimiž jsou buďto proudy, nebo napětí, anebo proudy a napětí. Formulací rovnic pro tyto neznámé, spolu s počátečními podmínkami, získáme matematický model obvodu. Zavedeme tuto terminologii: matematický model, v němž neznámými jsou vesměs proudy (napětí), nazveme *proudovým (napěťovým) matematickým modelem*; jsou-li neznámými proudy a napětí, jde o *smíšený matematický model*. Obvod, jehož proudový (napěťový, smíšený) matematický model je asymptoticky stabilní, nazveme *proudově (napěťově, smíšeně) asymptoticky stabilním obvodem*.

* O asymptotické stabilitě nelineárních obvodů pojednáváme v práci [3].



*Příklad.* Obvod podle obr. 1 je proudově asymptoticky stabilní, není však napěťově asymptoticky stabilní. Naproti tomu obvod podle obr. 2 je napěťově asymptoticky stabilní, není však proudově asymptoticky stabilní.

Významnou vlastnost asymptoticky stabilních obvodů, důležitou zejména s ohledem na aplikabilitu symbolicko-komplexní metody, vyjadřuje

Věta 1. Při harmonických zdrojích má proudově (napěťově, smíšeně) asymptoticky stabilní obvod v ustáleném stavu proudové (napěťové, proudové i napěťové) odezvy, jež jsou harmonickými funkcemi o kmitočtech zdrojů. Tyto odezvy jsou nezávislé na počátečních podmínkách.

*Důkaz* plyne z obecně známých vlastností soustav lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty.

Nyní prozkoumejme podmínky asymptotické stability obvodu. Jak známo, platí

Věta 2. Nutnou a postačující podmínkou proudové (napěťové, smíšené) asymptotické stability obvodu je, aby charakteristická čísla soustavy diferenciálních rovnic, jež je jeho proudovým (napěťovým, smíšeným) matematickým modelem, měla vesměs zápornou reálnou část.

*Poznámka.* Má-li matematický model obvodu tvar stavové rovnice

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t),$$

pak matice $\mathbf{A}$ musí být regulární, má-li být obvod asymptoticky stabilní. Obrácené tvrzení však neplatí. Je-li totiž $\mathbf{A}$ singulární, pak některé její vlastní číslo je nulové — v odezvách mu odpovídá člen $K\,e^{0t} = K$, kde $K$ je konstanta závislá na volbě počátečních podmínek; matematický model — a tedy ani obvod — není asymptoticky stabilní (viz též [4]).

Nedostatkem věty 2 je, že neumožňuje bezprostředně rozhodnout o asymptotické stabilitě daného obvodu, a proto byla hledána výhodnější kritéria. Prvním, jenž se touto problematikou u nás zabýval, byl V. Knichal v [5]. Kritérium, které nalezl, je pro technickou praxi příliš silné, a proto řada autorů (např. [6], [7], [9], [10]; odkazy jsou též v [1], [8]) hledala slabší podmínky. Uvedeme jejich výsledky a pokusíme se o zobecnění.

Věta 3a. Postačující podmínkou proudové asymptotické stability obvodu je existence alespoň jednoho systému nezávislých větví, z nichž každá obsahuje odpor. Čili: obvod je proudově asymptoticky stabilní, jestliže

$$\mathscr{N} \cap \exp v_R \neq \emptyset .$$

Ekvivalentní s touto větou je

Věta 3b. Postačující podmínkou proudové asymptotické stability obvodu je, aby každá jeho smyčka incidovala alespoň s jednou odporovou větví. Čili: obvod je proudově asymptoticky stabilní, jestliže

$$\forall\, S \in \mathscr{S}\ \exists\ v \in \gamma_R, \qquad v \in S.$$

*Příklad.* Na obvodu podle obr. 4 ukážeme, že věty 3a a 3b vyjadřují podmínku postačující, nikoliv však nutnou. Rovnice obvodu jsou

$$\frac{1}{C}\int_0^t i_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_1 - i_2) = 0,$$

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1) + Ri_2 = 0.$$

Po úpravě dostaneme

$$\frac{1}{C}\int_0^t i_1(\tau)\,\mathrm{d}\tau + Ri_2 = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{C}i_1 + Ri_2' = 0,$$

$$L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(i_2 - i_1) + Ri_2 = 0,$$

neboli

$$Li_1' - Li_2' = Ri_2,$$

$$Ri_2' = -\frac{1}{C}i_1,$$

čili

$$i_1' = -\frac{1}{RC}i_1 + \frac{R}{L}i_2,$$

$$i_2' = -\frac{1}{RC}i_1.$$

Snadným výpočtem zjistíme, že kořeny charakteristické rovnice jsou

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{RC} \pm \sqrt{\frac{1}{R^2C^2} - \frac{4}{LC}}\right).$$

Pro $R > 0$, $L > 0$, $C > 0$ lze snadno dokázat, že $\lambda_{1,2}$ jsou vždy buďto záporná reálná čísla, nebo komplexní čísla se zápornou reálnou částí. Tím jsme dokázali asymptotickou stabilitu uvažovaného obvodu, který nevyhovuje předpokladům vět 3a a 3b.

Dualizací vět 3a a 3b získáme tato vzájemně ekvivalentní tvrzení:

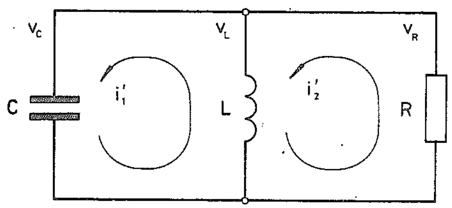
Věta 4a. Postačující podmínkou napěťové asymptotické stability obvodu je existence alespoň jednoho stromu, jehož každá větev obsahuje odpor. Čili: obvod je napěťově asymptoticky stabilní, jestliže



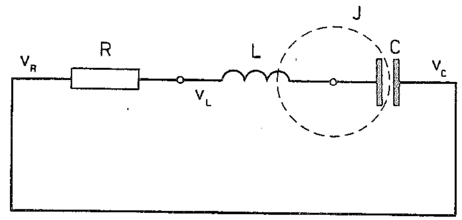
$$\mathscr{T} \cap \exp \gamma_R \neq \emptyset.$$

Věta 4b. Postačující podmínkou napěťové asymptotické stability obvodu je, aby každý jeho řez incidoval alespoň s jednou odporovou větví. Čili: obvod je napěťově asymptoticky stabilní, jestliže

$$\forall\, R \in \mathscr{R}\ \exists\quad v \in \gamma_R, \qquad v \in R.$$




Obr. 4.




Obr. 5.

*Příklad.* Obvod podle obr. 5 zřejmě nevyhovuje předpokladům vět 4a a 4b, avšak přesto je napěťově asymptoticky stabilní. (Zdůvodnění: obvod je duální k obvodu podle obr. 4.)

Oba poslední příklady motivují následující dvě tvrzení, jež oslabují věty 3a, 3b a věty 4a, 4b.

Věta 5. Postačující podmínkou proudové asymptotické stability obvodu je existence systému nezávislých větví $N \in \mathscr{N}$, jehož každá větev $v_0 \in N$ má tyto vlastnosti:

a) buďto je $v_0$ odporovou větví, $v_0 \in \gamma_R$,

b) anebo je $v_0$ kapacitní větví, $v_0 \in \gamma_C$, a přitom existuje smyčka $S \in \mathscr{S}$ incidující s větví $v_0$, jejíž zbývající větve jsou odporové. Jinými slovy: existuje cesta $C_0 \in \mathscr{C}$ incidující vesměs s odporovými větvemi, $C_0 \in \exp \gamma_R$, taková, že spolu s větví $v_0$ tvoří smyčku: $C_0 \cup v_0 \in \mathscr{S}$.

*Důkaz.* Nechť $i(t)$ a $i^*(t)$ jsou dvě řešení obvodu při různých počátečních podmínkách a stejných zdrojích. Podle principu superpozice je jejich rozdíl $i(t) - i^*(t)$ řešením téhož obvodu při nulových zdrojích s nenulovými počátečními podmínkami (získanými jako rozdíl počátečních podmínek $i(0)$ a $i^*(0)$). Pak stačí dokázat, že $\lim_{t\to\infty} [i(t) - i^*(t)] = 0$, tj. že v ustáleném stavu a při nulových zdrojích jsou proudy ve všech větvích obvodu nulové. S užitím známých vět z teorie obvodů (viz např. [1]) postačí dokázat toto tvrzení pro všechny větve $v \in N$. Důkaz provedeme sporem. Nechť tedy $v_0 \in N$; nechť v ustáleném stavu není proud ve větvi $v_0$ nulový. Pak buďto

a) $v_0 \in \gamma_R$. Protože podle předpokladu jsou zdroje v obvodu nulové, musí být celková energie obvodu konečná, je tedy konečný i integrál

$$\int_0^\infty R_0 i_0^2(t)\,\mathrm{d}t \qquad (*)$$

(kde $R_0$ je odpor větve $v_0$ a $i_0$ je proud v této větvi) a odtud nutně $\lim_{t\to\infty} i_0(t) = 0$,* což je spor. Anebo

b) $v_0 \in \mathscr{V}_C$. V ustáleném stavu je, v důsledku předpokladu, na větvi $v_0$ nenulové napětí. Podle 2. Kirchhoffova zákona se toto napětí rozloží na odporové větve tvořící cestu $c_0$; těmito větvemi tedy prochází nenulový proud. Z konečnosti integrálu

$$\int_0^\infty R_i i_i^2(t)\,\mathrm{d}t$$

(kde $R_i$ je odpor a $i_i$ proud $i$-té větve cesty $C_0$), analogického k integrálu $(*)$, pak obdobnou úvahou vyplývá $\lim_{t\to\infty} i_i(t) = 0$, což je však opět spor.

*Příklad* části obvodu, jež nevyhovuje podmínkám vět 3a, 3b, avšak vyhovuje větě 5 — a je tedy asymptoticky stabilní — je na obr. 6.

Duální k větě 5 je toto tvrzení:

Věta 6. Postačující podmínkou napěťové asymptotické stability obvodu je existence stromu $T \in \mathscr{T}$, jehož každá větev $v_0 \in T$ má tyto vlastnosti:

a) buďto je $v_0$ odporovou větví, $v_0 \in \mathscr{V}_R$,

b) anebo je $v_0$ induktivní větví, $v_0 \in \mathscr{V}_L$, a přitom existuje řez $R \in \mathscr{R}$, takový, že větev $v_0$ je v něm jedinou neodporovou větví.

*Důkaz* lze provést formální dualizací postupu použitého v důkazu věty 5.

*Příklad* části obvodu, jež nevyhovuje předpokladům vět 4a a 4b, avšak vyhovuje předpokladům věty 6 — a je tedy napěťově asymptoticky stabilní — je na obr. 7.

Podmínky proudové a napěťové asymptotické stability obvodu, vyjádřené větami 5 a 6, lze ještě dále oslabit. Tvrzení věty 5 oslabuje

Věta 7. Aby byl obvod proudově asymptoticky stabilní, postačí, jsou-li současně splněny tyto podmínky:

a) Každá smyčka obvodu obsahuje odporovou nebo kapacitní větev,

$\forall S \in \mathscr{S}$ je $S \cap (\mathscr{V}_R \cup \mathscr{V}_C) \neq \emptyset$.

* Jak známo, funkce $i_0(t)$ má tvar

$$i_0(t) = \sum_{k=1}^{n} P_k(t)\, e^{-\alpha_k t} \sin(\beta_k t + \varphi_k),$$

kde $P_k(t)$ jsou mnohočleny a $\alpha_k \geqq 0$, $\beta_k \geqq 0$, $\varphi_k \in \langle 0;\ 2\pi)$ jsou konstanty. (Pro libovolnou spojitou funkci $i_0(t)$ z konečnosti integrálu $(*)$ vztah $\lim_{t\to\infty} i_0(t) = 0$ obecně nevyplývá.)



b) Každá smyčka obvodu obsahuje odporovou nebo induktivní větev,

$\forall S \in \mathscr{S}$ je $S \cap (\mathscr{V}_R \cup \mathscr{V}_L) \neq \emptyset$.

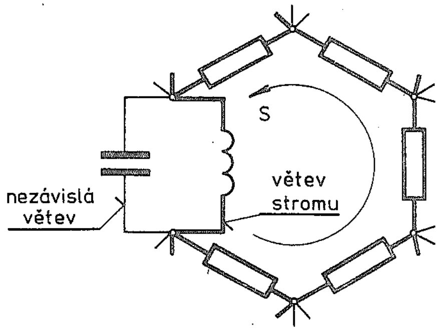
c) Jestliže smyčka obvodu $S_1$ neobsahuje odporovou větev, pak existuje smyčka $S_2$ taková, že

— smyčky $S_1$ a $S_2$ mají společnou kapacitní větev,

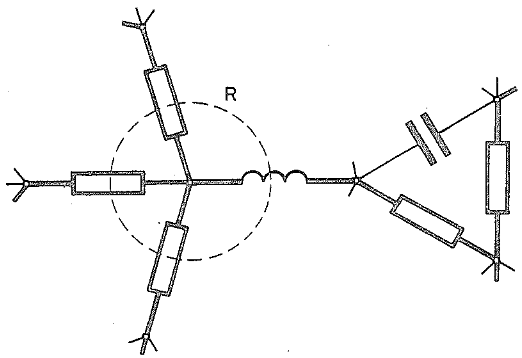
$S_1 \cap S_2 \cap \mathscr{V}_C \neq \emptyset$;

— smyčky $S_1$ a $S_2$ nemají žádnou společnou induktivní větev,

$S_1 \cap S_2 \cap \mathscr{V}_L = \emptyset$.




Obr. 6.




Obr. 7.

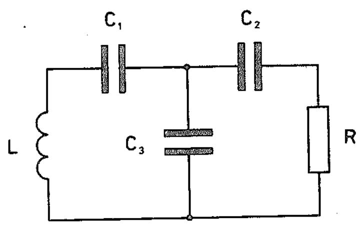
*Důkaz* věty 7 je proveden v [6].

Z uvedených podmínek proudové asymptotické stability je věta 7 nejobecnější; věty 3a, 3b a věta 5 jsou jejím speciálním případem. Praktické aplikace věty 7 jsou však u složitějších obvodů pracné, a proto ani nebudeme uvádět větu k ní duální, vyjadřující podmínku napěťové asymptotické stability obvodu.

Nevýhodou doposud uvedených vět je, že vesměs vyjadřují postačující podmínky asymptotické stability obvodu, a proto jimi nelze rozhodnout, zda obvod není asymptoticky stabilní. Z tohoto hlediska mají význam následující dvě věty:

Věta 8. Existuje-li v obvodu smyčka, která inciduje vesměs s induktivními a napěťovými větvemi, pak tento obvod není proudově asymptoticky stabilní.

*Důkaz.* V uvažované smyčce může při nulových zdrojích (viz začátek důkazu věty 5) procházet v ustáleném stavu konstantní proud libovolné velikosti, neboť na větvích smyčky nevznikne jeho průchodem napětí a výkon je tedy nulový. To znamená, že proud v ustáleném stavu je závislý na počátečních podmínkách — obvod tedy není proudově asymptoticky stabilní.




Obr. 8.

Věta 9. Existuje-li v obvodu řez, který inciduje vesměs s kapacitními a proudovými větvemi, pak tento obvod není napěťově asymptoticky stabilní.

*Příklad.* Stanovme, zda obvod podle obr. 8 je proudově a napěťově asymptoticky stabilní. Nejprve vyšetříme proudovou asymptotickou stabilitu. Předpoklady věty 5 zřejmě tedy nejsou splněny: pro větev s kondenzátorem $C_3$ existuje cesta, která sice inciduje s odporovou větví ($R$), ale též s kapacitní větví ($C_2$). Naproti tomu předpoklady věty 7 jsou splněny: v obvodu existují celkem tři smyčky, jež splňují podmínky věty. Obvod je tedy proudově asymptoticky stabilní. Není však napěťově asymptoticky stabilní (viz větu 9): existuje řez obsahující vesměs kapacitní větve ($C_1$, $C_2$, $C_3$).

Je-li obvod proudově asymptoticky stabilní (speciálně např. vyhovuje-li předpokladům vět 3a, 3b, věty 5 nebo věty 7) a neznámými jsou proudy, lze jej bez problémů řešit např. metodou smyčkových proudů; není-li přitom obvod zároveň napěťově asymptoticky stabilní, během výpočtu se to neprojeví. Podobně obvod, který je napěťově asymptoticky stabilní (tj. speciálně vyhovuje-li předpokladům vět 4a, 4b, nebo věty 6), lze bez obtíží řešit např. metodou řezových napětí, nebo metodou uzlových napětí; neprojeví se rušivě, není-li obvod zároveň proudově asymptoticky stabilní. Složitější situace nastane u smíšeného matematického modelu, s nímž pracujeme např. při metodě stavových proměnných. Sjednocením podmínek proudové a napěťové asymptotické stability plyne ihned

Věta 10. Postačující podmínkou, aby obvod byl smíšeně asymptoticky stabilní ve všech svých větvových proudech a napětích, je současné splnění podmínek proudové a napěťové asymptotické stability.

*Důkaz.* Jsou-li současně splněny podmínky proudové i napěťové asymptotické



stability, je obvod proudově i napěťově asymptoticky stabilní, tj. je smíšeně asymptoticky stabilní.

U metody stavových proměnných však nevolíme za neznámé proudy a napětí všech větví obvodu, ale jen jeho stavové proměnné,* jimiž jsou (při existenci pravého stromu)** napětí na kapacitních větvích a proudy v induktivních větvích. Zdálo by se tedy, že při použití metody stavových proměnných postačí zabývat se asymptotickou stabilitou ve stavových proměnných. Následující věta však ukazuje, že by toto zobecnění nepřineslo žádný užitek, neboť pro obvody s pravým stromem z jejich asymptotické stability ve stavových proměnných již vyplývá smíšená asymptotická stabilita.

Věta 11. Je-li obvod, pro který existuje pravý strom $T_p$, smíšeně asymptoticky stabilní ve stavových proměnných, je smíšeně asymptoticky stabilní (tj. je asymptoticky stabilní ve všech větvových proudech a napětích).

Lemma 1. Za předpokladů věty 11 je na každé větvi $v_0 \in T_P$ (resp. $v_0 \in N_p$) napěťová (proudová) odezva asymptoticky stabilní.

Důkaz lemmatu

a) Nechť $v_0 \in T_P$. Podle definice pravého stromu je buďto $v_0 \in \mathscr{V}_U$, nebo $v_0 \in \mathscr{V}_C$, anebo $v_0 \in \mathscr{V}_R$. V prvém případě je napěťová asymptotická stabilita zřejmá, ve druhém případě je napětí na větvi $v_0$ stavovou proměnnou a tvrzení lemmatu plyne přímo z předpokladu a ve třetím případě dokážeme asymptotickou stabilitu úvahami zcela obdobnými jako v důkazu věty 5.

b) Pro $v_0 \in N_p$ je důkaz duální k důkazu uvedeném ad a).

*Důkaz věty 11*

a) Nechť $v_0 \in T_p$. Podle lemmatu 1 je napěťová odezva na $v_0$ asymptoticky stabilní; dokážeme asymptotickou stabilitu proudové odezvy. Zvolme řez $R \in \mathscr{R}$, takový, že $R \cap T_p = v_0$. Podle zobecněného 1. Kirchhoffova zákona je pak proud ve větvi $v_0$:

$$i_0 = \sum_k \pm i_k\,, \tag{**}$$

kde $i_k$ jsou proudy ve větvích řezu $R$ vyjma větve $v_0$. Tyto větve patří do $N_p$ a podle lemmatu 1 jsou příslušné proudové odezvy — a tedy též jejich součet $i_0$ — asymptoticky stabilní.

b) Nechť $v_0 \in N_p$. Podle lemmatu 1 je proudová odezva ve $v_0$ asymptoticky stabilní. Dualizací předchozí části důkazu ad a) získáme důkaz asymptotické stability napěťové odezvy na větvi $v_0$.

* *Stavovými veličinami (proměnnými)* lineárních obvodů jsou napětí na kapacitních větvích a proudy v induktivních větvích (podrobněji viz např. [1], [2]).

** Připomeňme, že *pravými stromy* $T_p$ obvodu nazýváme takové jeho stromy, které obsahují všechny napěťové a kapacitní větve, libovolné odporové větve a žádné proudové a induktivní větve. V obvodu, pro který neexistuje pravý strom, nazýváme větve, jež brání svým fyzikálním charakterem sestavení pravého stromu, *redundantními* (viz též [1], [2]).

Proudové i napěťové odezvy všech větví obvodu jsou tedy asymptoticky stabilní, a tedy také obvod je smíšeně asymptoticky stabilní.

III. ***Konečnost výkonů.*** V reálném obvodu jsou veškeré výkony vždy konečné. Tuto vlastnost někdy požadujeme i od jeho modelu.

Definice 2. Obvod v němž všechny výkony (dodané i spotřebované) jsou omezenými funkcemi času, nazveme *obvody s konečnými výkony.*

U obvodů, jejichž výkony nejsou konečné, nejsou odezvy stavových veličin spojitými funkcemi času — kromě spojitých funkcí obsahují δ-distribuce. Energie akumulovaná v jeho cívkách a kondenzátorech se pak mění nespojitě. K posouzení, zda jde o obvod s konečnými výkony mohou posloužit tyto známé věty (viz např. [1], [5], [7], [8], [9], [10]):

Věta 12a

a) Jestliže v obvodu neexistuje

— smyčka incidující pouze s napěťovými a kapacitními větvemi, tj.

$$\mathscr{S} \cap \exp(\mathscr{r}_U \cup \mathscr{r}_C) = \emptyset$$

a současně ani

— řez incidující pouze s proudovými a induktivními větvemi, tj.

$$\mathscr{R} \cap \exp(\mathscr{r}_I \cup \mathscr{r}_L) = \emptyset,$$

pak se jedná o obvod s konečnými výkony.

b) Jestliže v obvodu nejsou induktivní vazby, pak platí i obrácené tvrzení.

Větu 12a lze jednodušeji vyjádřit pomocí pravého stromu:

Věta 12b

a) Jestliže v obvodu existuje pravý strom, pak má obvod konečné výkony.

b) Jestliže v obvodu nejsou induktivní vazby, pak platí i obrácená implikace, tj. existence pravého stromu je ekvivalentní s konečností výkonů.

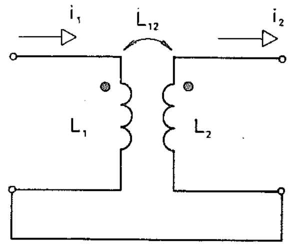
*Poznámky*

a) Elementárním příkladem obvodu, v němž výkon není konečný, je obvod tvořený kondenzátorem, který v čase $t=0$ připojíme ke zdroji napětí. Proudová odezva $i(t)$ na kondenzátoru je pak nulová, s vyjímkou okamžiku $t=0$, kdy dosahuje nekonečné hodnoty. Jelikož náboj na kondenzátoru $q = \int_{-\infty}^{\infty} i(t)\,\mathrm{d}t$ je konečný, lze proud $i(t)$ přibližně vyjádřit Diracovou funkcí. (Duální úvahu lze provést pro napětí na cívce, v níž se skokem mění proud.)

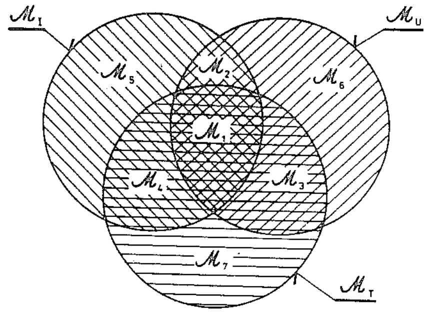
b) U obvodů s induktivními vazbami mohou být výkony konečné i při nespojitých stavových veličinách. Příkladem takového obvodu je transformátor (obr. 9) s cívkami o indukčnostech $L_1 = L_2$, s proudy $i_1 = i_2$ a při dokonalé induktivní vazbě ($L_{12} = \sqrt{L_1 L_2}$): Magnetická energie transformátoru je totiž: $W_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 - L_{12} i_1 i_2 = 0$.



IV. ***Shrnutí.*** Vlastností obvodů, prozkoumaných v předchozích odstavcích, využijeme k vymezení zásad pro vhodnou volbu metody sestavení matematického modelu obvodu. Při analýze obvodu v harmonickém ustáleném stavu (s použitím symbolicko-komplexního zobrazení) požadujeme jeho asymptotickou stabilitu vzhledem ke zvoleným neznámým. Volba těchto neznámých — a s tím úzce související volba metody formulace rovnic obvodu — bude tedy záviset na tom,




Obr. 9.




Obr. 10.

vzhledem ke kterým neznámým (tj. proudům, napětím, smíšeně) je uvažovaný obvod asymptoticky stabilní. Uvažujeme-li navíc ještě obvody s pravým stromem (jejich souvislost s obvody s konečnými výkony vyjadřuje věty 12b), dostaneme tři množiny obvodů: $\mathscr{M}_I$, $\mathscr{M}_U$ a $\mathscr{M}_T$ (viz seznam symbolů a označení na začátku článku). Tyto tři množiny, jež tvoří množinu $\mathscr{M}$ všech korektních obvodů,

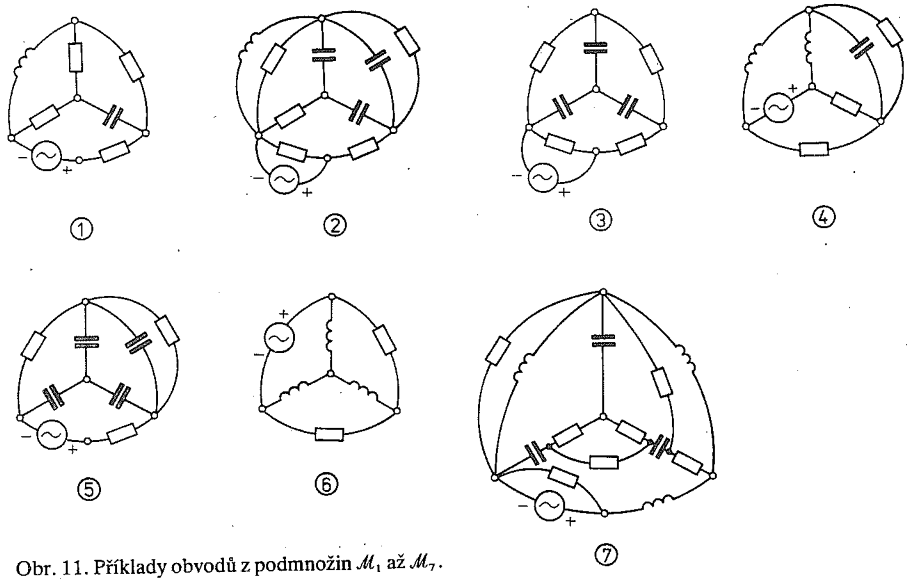
$$\mathscr{M} = \mathscr{M}_I \cup \mathscr{M}_U \cup \mathscr{M}_T,$$

mají zřejmě neprázdný průnik

$$\mathscr{M}_T \cap \mathscr{M}_I \cap \mathscr{M}_U \neq \emptyset.$$

Tento průnik — označíme jej $\mathscr{M}_1$ — představuje množinu všech obvodů, které jsou „rozumné ze všech hledisek“. Z obr. 10, na němž jsou schematicky znázorněny tyto množiny a jejich vzájemný vztah, je patrno, že množinu $\mathscr{M}$ můžeme považovat za sjednocení podmnožin $\mathscr{M}_1$ až $\mathscr{M}_7$. Tyto podmnožiny jsou vesměs neprázdné; snadno se o tom přesvědčíme tím, že pro každou z nich zkonstruujeme obvod, který do ní patří. (Příklady těchto obvodů jsou na obr. 11.) Odtud pak například speciálně vyplývá, že označíme-li množinu všech smíšeně asymptoticky stabilních obvodů $\mathscr{M}_I \cap \mathscr{M}_U = \mathscr{M}_S$, pak není $\mathscr{M}_S \subset \mathscr{M}_T$, ani $\mathscr{M}_T \subset \mathscr{M}_S$, tj. mezi asymptotickou stabilitou a konečností výkonů není žádný vztah.

Vzhledem k tomu, že — jak již bylo řečeno — při volbě metody pro sestavení matematického modelu obvodu v harmonickém ustáleném stavu je třeba přihlížet k tomu, do které z neprázdných podmnožin $\mathscr{M}_1$ až $\mathscr{M}_7$ patří zkoumaný obvod,



Obr. 11. Příklady obvodů z podmnožin $\mathcal{M}_1$ až $\mathcal{M}_7$.
(K tabulce 1.)

Tabulka 1. Klasifikace korektních obvodů z hlediska použitelnosti symbolicko-komplexního zobrazení

| Podmnožina obvodů (obr. 10) | Vlastnosti korektních obvodů | | | Vhodná metoda pro analýzu v harmonickém ustáleném stavu | Příklad (obr. 11) |
|---|---|---|---|---|---|
| | existuje pravý strom $\mathcal{M}_I$ | asymptoticky stabilní napěťově $\mathcal{M}_U$ | asymptoticky stabilní proudově $\mathcal{M}_I$ | | |
| $\mathcal{M}_1$ | ano | ano | ano | jakákoliv | 1 |
| $\mathcal{M}_2$ | ne | ano | ano | jakákoliv | 2 |
| $\mathcal{M}_3$ | ano | ne | ano | metoda smyčkových proudů | 3 |
| $\mathcal{M}_4$ | ano | ano | ne | metoda uzlových napětí<br>metoda řezových napětí | 4 |
| $\mathcal{M}_5$ | ne | ne | ano | metoda smyčkových proudů | 5 |
| $\mathcal{M}_6$ | ne | ano | ne | metoda uzlových napětí<br>metoda řezových napětí | 6 |
| $\mathcal{M}_7$ | ano | ne | ne | — (nelze použít symbolicko-komplexní zobrazení) | 7 |



docházíme k závěru, že dosavadní poměrně široký sortiment těchto metod má stále své plné oprávnění, neboť volba metody je libovolná jen pro obvody z podmnožin $\mathcal{M}_1$ a $\mathcal{M}_2$, zatímco u ostatních obvodů musíme přihlížet k jejich charakteru. Zásady pro správné použití těchto metod, vyplývající z provedeného rozboru, jsou spolu se stručnými charakteristikami jednotlivých podmnožin z obr. 10 shrnuty v tabulce 1.

## 3. Závěr

V předložené práci jsou zavedeny pojmy korektnost, asymptotická stabilita a konečnost výkonů lineárního obvodu, jež charakterizují způsob idealizace reálného obvodu. Korektnost obvodů musí být dodržena vždy — jiné modely nejsou přípustné. Asymptotická stabilita má význam např. pro rozhodnutí o použití symbolicko-komplexního zobrazení: obvod musí být asymptoticky stabilní v těch proměnných, s nimiž pracuje použitá metoda pro sestavení matematického modelu, pro jiné proměnné není jeho asymptotická stabilita nutná. V předložené práci se podařilo rozšířit dosavadní teorii lineárních obvodů zejména tím, že jsou formulovány oslabené podmínky asymptotické stability obvodu. Obvody s konečnými výkony neobsahují odezvy s δ-distribucemi. Nakonec je zhodnocena použitelnost známých metod analýzy obvodů v harmonickém ustáleném stavu.

Lektor: J. Schilder Rukopis dodaný 15. 4. 1977

## LITERATURA

[1] MAYER, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. Praha, SNTL 1978. — [2] MAYER, D.: Formulating state equations of electric networks by a simple method. Acta technica ČSAV, *20*, 1975, č. 3, s. 275—300. — [3] MAYER, D.—RYJÁČEK, Z.: On weak non-linearity of models of physical systems. Aplikace Mat., *22*, 1977, č. 4, s. 301—310. — [4] MAYER, D.—RYJÁČEK, Z.—ULRYCH, B.: Analytické řešení přechodných jevů ve složitých lineárních elektrických obvodech. Elektrotech. Obz., v tisku. — [5] KNICHAL, V.: O Kirchhoffových zákonech. Mat.-fyz. sborník Slovenskej akadémie vied a umení, *2*, 1952, č. 3—4, s. 13—27. — [6] RYJÁČEK, Z.: Kriterium asymptotické stability lineárních elektrických obvodů. Aplikace Mat., v tisku. — [7] RYJÁČEK, Z.: Existence a stabilita řešení lineárních elektrických obvodů. Report R 33 VŠSE, Plzeň 1974. — [8] MAYER, D.: Analýza elektrických obvodů maticovým počtem. Praha, Academia 1966. — [9] DOLEŽAL, V.—VOREL, Z.: Theory of Kirchhoff's networks. Čas. pro Pěst. Mat., *87*, 1962, č. 4, s. 440—476. — [10] ČULÍK, K.—DOLEŽAL, V.—FIEDLER, M.: Kombinatorická analýza v praxi. Praha, SNTL 1967.

**Статья по моделированию электрических систем при помощи электрических цепей.** Электрическая цепь является моделью, которой заменяют для теоретических рассуждений реальную электрическую систему. Чтобы теоретические рассуждения имели смысл и чтобы вели к достаточно точным заключениям, нужно работать с достаточно соответствующей моделью. В работе формулируются основные требования к физической и топологической структуре цепи, для которых вводятся понятия допустимость, асимптотическая устойчивость и окончательность мощностей. Для асимптотической устойчивости цепи приводятся новые критерии, являющиеся ослаблением пока известных достаточных условий. В заключении приводится классификация всех линейных цепей с точки зрения возможности применения символически-комплексного отображения, в резултате чего дается характеристика для выбора подходящего метода к составлению математической модели цепи в гармоническом установившемся состоянии.

**Beitrag zur Modellierung elektrischer Systeme durch elektrische Kreise.** Der elektrische Kreis ist ein Modell, durch das wir für theoretische Erwägungen das reale elektrische System ersetzen. Damit diese theoretischen Erwägungen einen Sinn haben und zu hinreichend genauen Schlüssen führen, ist es notwendig, mit einem genügend adäquaten Modell zu arbeiten. In der Arbeit werden die Grundforderungen an die physikalische und topologische Struktur des Kreises formuliert, für die wir die Begriffe Korrektheit, asymptotische Stabilität und Endlichkeit der Leistungen einführen. Für die asymptotische Stabilität des elektrischen Kreises werden neue Kriterien angeführt, die eine Abschwächung der bisher bekannten genügenden Bedingungen bedeuten. Zum Schluss wird eine Klassifizierung aller linearen Kreise hinsichtlich der Brauchbarkeit der symbolisch-komplexen Darstellung durchgeführt, wodurch eine Richtlinie für die Wahl der entsprechenden Methode für die Zusammenstellung des mathematischen Modells des elektrischen Kreises im harmonischen stabilisierten Zustand gegeben wird.

**A contribution to the modelling of electric systems by electric networks.** An electric network is a model which replaces a real electric system in theoretical considerations. In order to guarantee that the theoretical considerations have sense and lead to sufficiently accurate conclusions, the choice of a sufficiently adequate model is necesary. In the paper, basic requirements on the physical and topological structure of the network are formulated in terms of the notions correctness, asymptotic stability and finitness of powers of the network. In particular, some new criteria of asymptotic stability are presented, which are weaker the sufficient conditions know until now. In the end, a classification of all linear networks from the viwe-point of the applicability of the symbolic-complex method is given, which suggests the choice of a suitable approach of constructing the mathematical model of the network in the harmonic steady state.