

Содержание — Résumé — Inhalt — Summary

Распределение Вейбулля и конвенционная зависимость вероятности разряда. В статье указывается, что распределение Вейбулля суммарной вероятности разряда справедливо и в том случае, когда на объект с диэлектриком, восстанавливающим после разряда свою электрическую прочность, подается повторно коммутационная волна, пиковое значение которой повышается малыми скачками вплоть до разряда (метод Тецнера). В статье показано, как из распределения Вейбулля можно получить конвенционную зависимость вероятности разряда. В качестве иллюстрации приводится конкретный пример.

Distribution de Weibull et dépendance conventionnelle de la probabilité de décharge disruptive. Il s'avère que la distribution de Weibull pour la probabilité totale des décharges disruptives s'applique même lorsque sur l'objet avec diélectrique qui régénère sa rigidité électrique après décharge, on emploie plusieurs fois l'onde de manoeuvre avec valeur de crête augmentée par faibles degrés jusqu'à la décharge (méthode proposée par Tetzner). On montre dans l'ouvrage comment on peut obtenir de la distribution de Weibull la dépendance conventionnelle de la probabilité de la décharge. Le procédé est expliqué à l'aide d'un exemple.

Die Weibullsche Verteilung und die konventionelle Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit eines Überschalges. Es wurde gefunden, dass die Weibullsche Verteilung für die summarische Wahrscheinlichkeit des Überschalges auch dann gilt, wenn am Objekt mit einem Dielektrikum, das seine elektrische Festigkeit nach dem Überschlag regeneriert, mehrmal eine Schaltwelle mit einem Scheitelwert angewendet wird, der langsam bis zum Überschlag erhöht (von Tetzner vorgeschlagene Methode). In der Arbeit wird gezeigt, wie aus der Weibullschen Verteilung eine konventionelle Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeit eines Überschalges gewonnen werden kann. Die Methode wird an einem Beispiel erläutert.

The Weibull Distribution and the Conventional Dependence of the Probability of the Flash-Over. It is found that the Weibull distribution for a summary probability of flash-overs is valid even then when the object with a dielectric that regenerates its electric strength after a flash-over is several times subjected to the application of a switching wave with a peak value increased by low degrees up to the flash-over (method suggested by Tetzner). In the paper it is shown how it is possible to gain by the Weibull distribution the conventional dependence of the probability of the flash-over. The method is illustrated on an example.

## Analytické řešení přechodných jevů ve složitých lineárních elektrických obvodech

Prof. ing. DANIEL MAYER, CSc., ZDENĚK RYJÁČEK, prom. matem. a ing. BOHUŠ ULRYCH, CSc.,  
Vysoká škola strojní a elektrotechnická, Plzeň

### Vymezení problematiky

Přechodné jevy ve složitých lineárních elektrických obvodech jsou popsány lineárními integrodiferenciálními rovnicemi, jež se dříve matematicky řešily výhradně analyticky. Významným pokrokem bylo použití Laplaceovy transformace, jež se však ukázalo pro složité soustavy jako nedostatečně účinné. Rozvoj numerických metod a samočinných počítačů podstatně rozšířil možnosti řešit mnohem složitější soustavy rovnic, a spolu s formulačními postupy (např. metodou stavových proměnných), též i mnohem složitější obvody. Přitom si zpravidla klademe za cíl pro číselně zadané hodnoty parametrů obvodu získat odezvy ve tvaru tabulky, anebo přímo jejich grafy. Přes nespornou cenu těchto „čistě numericky“ vyšetřovaných odezev je třeba připomenout, že matematické zkoumání jejich analytického vyjádření dává mnohem obecnější pohled na řešený problém a možnosti účinněji dosahovat požadovaného cíle. Jde například o predikci chování sítě při změně jejich parametrů — např. při různých (zejm. havarijních) stavech, při vyšetřování vlastních kmitů a rezonančních jevů, při řešení různých optimalizačních úloh apod. Jiným příkladem je zkoumání přepětových jevů, kdy nás zpravidla zajímají jen maxima sledovaných odezev napětí. Zatímco při strojovém výpočtu musíme vyšetřit průběh odezev při „dostatečně“ malém časovém kroku v „dostatečně“ širokém časovém intervalu, z něhož pak využíváme jen nepatrnou část, můžeme z analyticky vyjádřených řešení přímo určit vyšetřovaná přepětí. Dalším příkladem vý-

hodného využití analyticky vyjádřeného řešení je poměrně snadné vyšetření ustáleného stavu obvodu napájeného neharmonickými zdroji. Cílem této práce je proto nalezení analyticky vyjádřených odezev stavových veličin libovolně složitěho lineárního obvodu, s využitím číslicového počítače.

### 2. Matematická teorie metody analýzy obvodu<sup>1)</sup>

#### 2.1. Stavová rovnice obvodu a její obecné řešení

Nechť je řešený obvod popsán stavovou rovnicí typu

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t), \text{ s počáteční podmínkou } x(0) = x_0 \quad (1)$$

kde  $x$  je sloupcový vektor stavových proměnných typu  $(s; 1)$ ,  $A$  je reálná čtvercová matice konstant typu  $(s; s)$  (její prvky jsou sestaveny z parametrů pasivních prvků obvodu) a  $f(t)$  je sloupcový vektor  $(s; 1)$  (jehož prvky obsahují parametry pasivních i aktivních prvků obvodu). Metoda formulace této rovnice je popsána např. v [1], [6], [7], [8], [11].

Charakteristickou rovnicí soustavy (1) nazýváme rovnici

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0 \quad (2)$$

<sup>1)</sup> Uvádíme jen hlavní matematické poznatky potřebné pro výpočet, bez nároků na úplnost a matematickou rigoróznost.

kde  $\mathbf{I}$  značí jednotkovou matici typu  $(s; s)$ . Je to algebraická rovnice řádu  $s$  a podle základní věty algebry má tudíž v komplexním oboru právě  $s$  kořenů  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ , které nazýváme *charakteristickými čísly* matice  $\mathbf{A}$  a také soustavy (1). V dalším textu se omezíme na případ, že  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  jsou vesměs jednoduchá, připustíme však, že mohou být komplexní. (Jelikož polynom  $p(\lambda)$  je reálný, budou vždy ve dvojicích komplexně sdružených.)

Již *charakteristická čísla*  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  okamžitě dávají některé důležité informace o vlastnostech řešeného obvodu:

a) V teorii obvodů zpravidla pracujeme jen s *asymptoticky stabilními obvody*, [9]. Nutnou a postačující podmínkou asymptotické stability obvodu je, aby všechna charakteristická čísla matice  $\mathbf{A}$  měla zápornou reálnou část:  $\operatorname{Re}[\lambda_i] < 0$ . (Poznamenejme, že je-li alespoň jedno z charakteristických čísel nulové, je matice  $\mathbf{A}$  singulární a naopak; obvod pak není asymptoticky stabilní.)

b) Jsou-li všechna charakteristická čísla  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  reálná, jsou veškeré odezvy aperiodické s časovými konstantami  $\tau_1 = -1/\lambda_1, \dots, \tau_s = -1/\lambda_s$ . Je-li  $r$  dvojice charakteristických čísel komplexně sdružených ( $2r \leq s$ ), pak svými reálnými částmi obdobně určují časové konstanty exponenciálních součinitelů harmonických funkcí, jejichž kruhové kmitočty jsou imaginárními částmi charakteristických čísel a vyjadřují vlastní kruhové kmitočty řešeného obvodu; zbývajících  $s - 2r$  reálných charakteristických čísel opět určuje záporné převrácené hodnoty časových konstant exponenciálních členů.

Řešení stavové rovnice obvodu lze, jak známo z [3], [6], [8], napsat ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\xi)} \mathbf{f}(\xi) d\xi + e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

Podstatnou částí výpočtu vektoru odezev je tedy zřejmě určení matice

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{H}(t) = h_{ij}(t), \quad i, j = 1, \dots, s \quad (4)$$

Lze jej provést různými metodami (viz např. [6], [3], [5], [2], [4], [1]). V práci [6] je užito Lagrange-Sylvestrové věty, což je snadné, jsou-li charakteristická čísla matice  $\mathbf{A}$  vesměs reálná. Jsou-li komplexní, je výhodnější vycházet z Jordanova tvaru matice  $\mathbf{A}$ .

## 2.2. Jordanův tvar matice $\mathbf{A}$

Budiž dána matice  $\mathbf{A}$  typu  $(s; s)$ ; nechť  $\lambda_k$  ( $1 \leq k \leq s$ ) je její charakteristické číslo. Každý vektor  $\mathbf{y}$  typu  $(s; 1)$ , vyhovující rovnici

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (5)$$

kde  $\mathbf{I}$  je jednotková matice, nazýváme *charakteristickým vektorem* matice  $\mathbf{A}$  (příslušným charakteristickému číslu  $\lambda_k$ ). Protože podle předpokladu je  $\lambda_k$  jednoduché charakteristické číslo, plyne z rov. (5) ihned, že všechny příslušné charakteristické vektory tvoří lineární vektorový prostor dimenze 1. Můžeme v něm tedy zvolit libovolný pevný vektor  $\mathbf{y}_k$ . Pak z rov. (5) plyne vztah

$$\mathbf{A} \mathbf{y}_k = \lambda_k \mathbf{y}_k = \lambda_k \mathbf{y}_k \quad (6)$$

Označíme-li  $\mathbf{B}$  čtvercovou matici typu  $(s; s)$  jejíž  $k$ tý sloupec je tvořen vektorem  $\mathbf{y}_k$  ( $k = 1, \dots, s$ ), je výraz na levé straně vztahu (6)  $k$ tým sloupcem matice  $\mathbf{A} \mathbf{B}$ .

Podle vztahu (6) má matice  $\mathbf{A} \mathbf{B}$   $k$ tý sloupec rovný  $\lambda_k$ násobku  $k$ tého sloupce matice  $\mathbf{B}$ :

$$\mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{B} \mathbf{J}, \quad \text{kde } \mathbf{J} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_s) \quad (7)$$

Matice  $\mathbf{J}$  se nazývá *Jordanův tvar matice  $\mathbf{A}$* . Označíme-li  $\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{P}$ , dostáváme

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{J} \mathbf{P} \quad (8)$$

Nevýhodou tohoto vztahu je, že v případě, že některá charakteristická čísla matice  $\mathbf{A}$  jsou komplexní, jsou komplexní i matice  $\mathbf{J}$ ,  $\mathbf{P}$  a  $\mathbf{P}^{-1}$ , a to i když  $\mathbf{A}$  je reálná. To však lze odstranit tak, že místo matice  $\mathbf{P}^{-1}$  použijeme reálnou matici sestavenou níže popsáním způsobem. (Pro jednoduchost ji opět označíme  $\mathbf{P}^{-1}$ .)

Je-li  $\lambda$  komplexní charakteristické číslo matice  $\mathbf{A}$ , je též komplexně sdružené číslo  $\bar{\lambda}$  jejím charakteristickým číslem. Jelikož komplexně sdruženým charakteristickým číslem přísluší komplexně sdružené charakteristické vektory (jak plyne z rov. (6)), jsou komplexní sloupce matice  $\mathbf{P}^{-1}$  (tj. komplexní charakteristické vektory matice  $\mathbf{A}$ ) po dvojicích komplexně sdružené. Nechť je  $v$  charakteristických čísel  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  (a obdobně  $v$  charakteristických vektorech  $\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_s$ ) matice  $\mathbf{A}$  právě  $r$  komplexně sdružených dvojic; zbývajících  $s - 2r$  charakteristických čísel je reálných. Seřadíme je takto:

$r$  dvojic komplexně sdružených charakteristických čísel matice  $\mathbf{A}$

$$\begin{aligned} \lambda_{2i-1} &= \lambda'_{2i-1} + j \lambda''_{2i-1} \\ \lambda_{2i} &= \lambda'_{2i-1} - j \lambda''_{2i-1} \quad (i = 1, \dots, r) \end{aligned} \quad (9)$$

$s - 2r$  reálných charakteristických čísel matice  $\mathbf{A}$

$$\lambda_i \quad (i = 2r + 1, 2r + 2, \dots, s)$$

Charakteristické vektory matice  $\mathbf{A}$  seřadíme ve stejném pořadí jako charakteristická čísla, tj.:

komplexním charakteristickým číslem  $\lambda_{2i-1}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) odpovídají komplexní charakteristické vektory (o  $s$  komplexních prvcích)

$$\mathbf{y}_{2i-1} = \mathbf{y}'_{2i-1} + j \mathbf{y}''_{2i-1} \quad (i = 1, \dots, r) \text{ a}$$

reálným charakteristickým číslem  $\lambda_i$  ( $i = 2r + 1, 2r + 2, \dots, s$ ) odpovídají reálné charakteristické vektory (o  $s$  reálných prvcích)

$$\mathbf{y}_i \quad (i = 2r + 1, 2r + 2, \dots, s)$$

Nyní sestavíme matici  $\mathbf{P}^{-1}$ : jejím prvním sloupcem je vektor  $\mathbf{y}'_1$ , druhým sloupcem je vektor  $\mathbf{y}''_1$ , atd. Obecně:<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Při číslování charakteristických čísel podle vztahu (9) by se mohlo stát, že bychom nějakou dvojici komplexně sdružených charakteristických čísel očíslovali v obráceném pořadí. V tom případě by se změnilo i pořadí odpovídajících charakteristických vektorů. Při konstrukci matice  $\mathbf{P}^{-1}$  bychom pak vycházeli z komplexně sdruženého charakteristického vektoru, což by se projevilo změnou znaménka u některého sloupce matice  $\mathbf{P}^{-1}$ . Snadno však zjistíme, že tato „libovůle“ nemá vliv na konečný výsledek, neboť později — ve vztahu (13) — budeme násobit zleva maticí  $\mathbf{P}^{-1}$  a zprava maticí  $\mathbf{P} = (\mathbf{P}^{-1})^{-1}$ , a tam se tyto změny znaménka vyruší.

$$\left. \begin{aligned} (2i-1)\text{tý sloupec je reálnou částí} \\ \text{vektoru } \mathbf{y}_{2i-1} \\ 2i\text{tý sloupec je imaginární částí} \\ \text{vektoru } \mathbf{y}_{2i-1} \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, r$$

Další sloupce matice  $\mathbf{P}^{-1}$  jsou charakteristické vektory příslušné reálným charakteristickým číslem.

Z rov. (7) plyne

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{y}_1 &= \mathbf{A}\mathbf{y}'_1 + j\mathbf{A}\mathbf{y}''_1 = (\lambda'_1 + j\lambda''_1)(\mathbf{y}'_1 + j\mathbf{y}''_1) \\ \mathbf{A}\mathbf{y}_2 &= \mathbf{A}\mathbf{y}'_1 - j\mathbf{A}\mathbf{y}''_1 = (\lambda'_1 - j\lambda''_1)(\mathbf{y}'_1 - j\mathbf{y}''_1) \end{aligned}$$

Odtud dostaneme pro prvou dvojici sloupců  $\mathbf{y}'_1, \mathbf{y}''_1$  matice  $\mathbf{P}^{-1}$  vztahy

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{y}'_1 &= \lambda'_1\mathbf{y}'_1 - \lambda''_1\mathbf{y}''_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{y}''_1 &= \lambda''_1\mathbf{y}'_1 + \lambda'_1\mathbf{y}''_1 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Obdobné vztahy platí pro zbývajících  $r - 1$  dvojic  $\mathbf{y}'_i, \mathbf{y}''_i$  ( $i = 2, \dots, r$ ) sloupců matice  $\mathbf{P}^{-1}$ . Platí tedy obecně vztahy

pro komplexní charakteristické vektory

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{y}'_{2i-1} &= \lambda'_{2i-1}\mathbf{y}'_{2i-1} - \lambda''_{2i-1}\mathbf{y}''_{2i-1} \\ \mathbf{A}\mathbf{y}''_{2i-1} &= \lambda''_{2i-1}\mathbf{y}'_{2i-1} + \lambda'_{2i-1}\mathbf{y}''_{2i-1} \end{aligned} \right\} \quad i = 1, \dots, r$$

a pro reálné charakteristické vektory

$$\mathbf{A}\mathbf{y}_{2r+i} = \lambda_{2r+i} \mathbf{y}_{2r+i} \quad i = 1, \dots, s - 2r$$

Tento vztah zapíšeme maticově

$$\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}_R$$

z čehož

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{J}_R\mathbf{P} \quad (11)$$

kde  $\mathbf{J}_R$  je kvazidiagonální matice

$$\mathbf{J}_R = \text{diag} \left[ \begin{array}{cc|cc|ccc} \lambda'_1 & \lambda''_1 & & & & & \\ -\lambda''_1 & \lambda'_1 & & & & & \\ \hline & & \lambda'_3 & \lambda''_3 & & & \\ & & -\lambda''_3 & \lambda'_3 & & & \\ \hline & & & & \dots & & \\ & & & & & \lambda'_{2r-1} & \lambda''_{2r-1} \\ & & & & & -\lambda''_{2r-1} & \lambda'_{2r-1} \\ \hline & & & & & & \lambda_{2r+1}, \dots, \lambda_s \end{array} \right] \quad (12)$$

submatice příslušející komplexním charakteristickým číslům

submatice příslušející reálným charakteristickým číslům

a nazývá se reálná forma Jordanova tvaru matice  $\mathbf{A}$ .

Z uvedeného je zřejmé, že pro každou reálnou čtvercovou matici  $\mathbf{A}$ , jež má vesměs jednoduchá charakteristická čísla, existuje příslušná matice  $\mathbf{J}_R$ .

### 2.3. Konstrukce matice $\mathbf{H}(t) = e^{\mathbf{A}t}$

Nejprve uvedeme dvě pomocné věty.

Věta 1. Jsou-li  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{P}$  matice takové, že

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$$

a je-li  $p(x)$  polynom, pak

$$p(\mathbf{A}) = \mathbf{P}^{-1}p(\mathbf{B})\mathbf{P}$$

Důkaz je zřejmý, uvědomíme-li si význam věty pro  $p(x) = x^n$  a použijeme-li asociativní a distributivní zákon pro maticové operace.

Věta 2. Je-li

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{P}$$

a je-li  $F$  maticová funkce, pak

$$F(\mathbf{A}) = \mathbf{P}^{-1}F(\mathbf{B})\mathbf{P}$$

Důkaz ihned plyne z věty 1 uvědomíme-li si, že  $F(\mathbf{A}) = r(\mathbf{A})$ , kde  $r(x)$  je příslušný Lagrangeův-Sylvestrův interpolační polynom.

Z věty 2 a rov. (4) plyne speciálně pro funkci  $e^{\mathbf{A}t}$  vztah

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{J}_R t}\mathbf{P} \quad (13)$$

Zbývá tedy určit matici  $e^{\mathbf{J}_R t}$ . Označíme-li  $\mathbf{L}_i$  nenulové submatice matice  $\mathbf{J}_R$ , je

$$\mathbf{J}_R = \text{diag} (\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \dots, \mathbf{L}_{s-r}) \quad (14)$$

přičemž prvních  $r$  submatic typu (2; 2) přísluší imaginárním charakteristickým číslům a zbývajících  $s - 2r$

„submatic“ typu (1; 1) reálným charakteristickým číslům. Je tedy

$$e^{\mathbf{J}_R t} = \text{diag} (e^{\mathbf{L}_1 t}, e^{\mathbf{L}_2 t}, \dots, e^{\mathbf{L}_{s-r} t}) \quad (15)$$

Pro reálná charakteristická čísla je zřejmé

$$e^{\mathbf{L}_i t} = e^{\lambda_i t} \quad (i = 2r + 1, \dots, s) \quad (16)$$

Pro imaginární charakteristická čísla snadno nalezneme, že je-li

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \lambda'_i & \lambda''_i \\ -\lambda''_i & \lambda'_i \end{bmatrix}$$

pak

$$e^{\mathbf{L}t} = e^{\lambda'_i t} \begin{bmatrix} \cos \lambda''_i t & \sin \lambda''_i t \\ -\sin \lambda''_i t & \cos \lambda''_i t \end{bmatrix} \quad (17)$$

čili

$$e^{\mathbf{L}t} = e^{\lambda'_i t} \cos \lambda''_i t \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + e^{\lambda'_i t} \sin \lambda''_i t \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Z rovnice (13) dostáváme hledaný vztah

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{H}(t) &= e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{P}^{-1}e^{\mathbf{J}_R t}\mathbf{P} = \\ &= \sum_{i=1}^r e^{\lambda'_{2i-1} t} \cos \lambda''_{2i-1} t \mathbf{C}_{2i-1} + \\ &+ \sum_{i=1}^r e^{\lambda'_{2i-1} t} \sin \lambda''_{2i-1} t \mathbf{S}_{2i-1} + \sum_{i=2r+1}^s e^{\lambda_i t} \mathbf{R}_i \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

kde

$$\mathbf{C}_{2i-1} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D}'_{2i-1} \mathbf{P}, \mathbf{S}_{2i-1} = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D}''_{2i-1} \mathbf{P}, \quad (i = 1, \dots, r) \quad (20)$$

přičemž

matice  $\mathbf{D}'_{2i-1}$  typu (s; s) jsou konstruovány tak, že jejich

prvky  $(2i-1; 2i-1)$  a prvky  $(2i; 2i)$  jsou rovny 1, ostatní prvky jsou rovny 0<sup>1)</sup>

matice  $\mathbf{D}_{2i-1}''$  typu  $(s; s)$  jsou konstruovány tak, že jejich prvky  $(2i-1; 2i)$  jsou rovny 1 a prvky  $(2i; 2i-1)$  jsou rovny -1, ostatní prvky jsou rovny 0.

Platí tudíž například

$$\mathbf{D}_1' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_1'' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ -1 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D}_3' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_3'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Obdobně platí

$$\mathbf{R}_i = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{D}_i \mathbf{P}, \quad (i = 2r+1, 2r+2, \dots, s) \quad (21)$$

přičemž matice  $\mathbf{D}_i$  typu  $(s; s)$  jsou konstruovány tak, že prvek  $(i; i)$  je roven 1, ostatní prvky jsou rovny 0. Platí tudíž například

$$\mathbf{D}_{s-1} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#### 2.4. Analytické vyjádření odezev stavových veličin

Řešení (3) stavové rovnice obvodu (1) lze vyjádřit ve tvaru

$$x_1(t) = h_{11}(t)x_{01} + \dots + h_{1s}(t)x_{0s} + \int_0^t [h_{11}(t-\xi)f_1(\xi) + \dots + h_{1s}(t-\xi)f_s(\xi)]d\xi$$

$$x_s(t) = h_{s1}(t)x_{01} + \dots + h_{ss}(t)x_{0s} + \int_0^t [h_{s1}(t-\xi)f_1(\xi) + \dots + h_{ss}(t-\xi)f_s(\xi)]d\xi$$

Předpokládejme, že vektor  $\mathbf{f}(x) = \mathbf{f}$  je konstantní. Za tohoto předpokladu lze integrály na pravé straně vztahů (22) vypočítat, neboť prvky  $h_{ij}(t)$  matice  $\mathbf{H}(t) = e^{\mathbf{A}t}$  známe. Po provedení tohoto výpočtu (jde vesměs o integrály typu  $\int_0^t e^{\alpha\tau} \cos\beta\tau d\tau$  a  $\int_0^t e^{\alpha\tau} \sin\beta\tau d\tau$ ) dostaneme řešení  $\mathbf{x}(t)$  ve tvaru

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{M}\mathbf{V}(t) \quad (23)$$

kde konstantní matice  $\mathbf{M} = [m_{kl}]$  je obdélníková typu  $(s; s+1)$  a  $\mathbf{V}(t)$  je sloupcový vektor typu  $(s+1; 1)$ . Pro sloupce matice  $\mathbf{M}$  platí:

<sup>1)</sup> prvkem  $(k; l)$  rozumíme prvek umístěný v  $k$ tém řádku a  $l$ tém sloupci dané matice.

prvních  $r$  dvojic sloupců tj. sloupcových vektorů  $m_{2i-1}'$ ,  $m_{2i-1}''$  ( $i = 1, \dots, r$ ) typu  $(s; 1)$  je

$$m_{2i-1}' = \mathbf{C}_{2i-1} \mathbf{x}_0 + \frac{\lambda_{2i-1}'}{\lambda_{2i-1}'^2 + \lambda_{2i-1}''^2} \mathbf{C}_{2i-1} \mathbf{f} - \frac{\lambda_{2i-1}''}{\lambda_{2i-1}'^2 + \lambda_{2i-1}''^2} \mathbf{S}_{2i-1} \mathbf{f} \quad (24)$$

$$m_{2i-1}'' = \mathbf{S}_{2i-1} \mathbf{x}_0 + \frac{\lambda_{2i-1}''}{\lambda_{2i-1}'^2 + \lambda_{2i-1}''^2} \mathbf{C}_{2i-1} \mathbf{f} - \frac{\lambda_{2i-1}'}{\lambda_{2i-1}'^2 + \lambda_{2i-1}''^2} \mathbf{S}_{2i-1} \mathbf{f}$$

dalších  $s-2r$  sloupců tj. sloupcových vektorů  $\mathbf{m}_i$  ( $i = 2r+1, \dots, s$ ) typu  $(s; 1)$  je

$$\mathbf{m}_i = \mathbf{R}_i \mathbf{x}_0 + \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{R}_i \mathbf{f} \quad (25)$$

poslední sloupec (tj. sloupcový vektor  $\mathbf{m}_{s+1}$  typu  $(s; 1)$ ) je

$$\mathbf{m}_{s+1} = - \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_{2i-1}'}{\lambda_{2i-1}'^2 + \lambda_{2i-1}''^2} \mathbf{C}_i \mathbf{f} + \sum_{i=1}^r \frac{\lambda_{2i-1}''}{\lambda_{2i-1}'^2 + \lambda_{2i-1}''^2} \mathbf{S}_i \mathbf{f} - \sum_{i=2r+1}^s \frac{1}{\lambda_i} \mathbf{R}_i \mathbf{f} \quad (26)$$

Sloupcový vektor  $\mathbf{V}$  typu  $(s+1; 1)$  je tvořen prvky, pro něž platí:

prvních  $r$  dvojic prvků [tj.  $v_{2i-1}'$ ,  $v_{2i-1}''$  ( $i = 1, \dots, r$ )] je

$$\left. \begin{aligned} v_{2i-1}' &= e^{\lambda_{2i-1}' t} \cos \lambda_{2i-1}'' t \\ v_{2i-1}'' &= e^{\lambda_{2i-1}'' t} \sin \lambda_{2i-1}' t \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

dalších  $s-2r$  prvků, tj.  $v_i$  ( $i = 2r+1, \dots, s$ ) je

$$v_i = e^{\lambda_i t} \quad (28)$$

poslední prvek je

$$v_{s+1} = 1 \quad (29)$$

Jestliže vektor  $\mathbf{f}$  závisí na čase tak, aby integrály ve vztazích (22) bylo možno analyticky vypočítat (např. pro harmonický průběh), lze matici  $\mathbf{M}$  zkonstruovat obdobným způsobem, pouze výrazy (24) až (26) budou složitější.

### 3. Algoritmus analýzy obvodu

#### 3.1. Algoritmus výpočtu $\mathbf{H}(t) = e^{\mathbf{A}t}$

1. Zkonstruujeme charakteristickou rovnici (2), odpovídající soustavě (1).

2. Vyřešíme charakteristickou rovnici (2); nalezená charakteristická čísla  $\lambda_i'$ ,  $\lambda_i''$ ,  $\lambda_j$  ( $i = 1, \dots, r$ ;  $j = r+1, \dots, s$ ) seřadíme podle rov. (9).

3. Vypočítáme charakteristické vektory  $\mathbf{y}_k$ . Jelikož charakteristická čísla jsou (podle předpokladu) vesměs jednoduchá, je hodnota soustavy (5) rovna  $s-1$ , tj. jedna rovnice je závislá. Můžeme ji tedy vypustit a nahradit rovnicí, již zavádíme volbu jedné složky vektoru  $\mathbf{y}$ .

3a) íté charakteristické číslo  $\lambda_i$  ( $i = r+1, r+2, \dots, s$ ) je reálné. Nechť první rovnice soustavy (5) je lineární kombinací ostatních rovnic. Nahradíme ji rovnicí  $y_i = 1$ , ( $y_i$  je první prvek ítého vlastního vektoru  $\mathbf{y}_i$ , odpovídajícího ítemu reálnému charakteristickému

číslu  $\lambda_i$ ), čímž dostaneme soustavu  $s$  algebraických rovnic (vektor  $\mathbf{y}_i$  má  $s$  prvků):

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots, \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda_i, & a_{23}, & \dots, \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - \lambda_i, & \dots, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ y_{i3} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{bmatrix} \quad (30)$$

Byl-li oprávněně předpoklad, že první rovnice je závislá, má soustava (30) právě jedno řešení — charakteristický vektor  $\mathbf{y}_i$ , příslušný charakteristickému číslu  $\lambda_i$ . V opačném případě je soustava (30) singulární. Místo popsané metody 1. řádku nahradíme tedy 2. řádek matice soustavy (5) řádkem

$$0, 1, 0, \dots, 0$$

a pravou stranu bude tvořit sloupcová matice

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Je-li  $i$  tato soustava singulární, provedeme obdobnou náhradu třetího řádku, atd., až nalezneme onen závislý řádek a soustava bude mít právě jedno řešení.

3b)  $(2i-1)$ vé charakteristické číslo  $\lambda_{2i-1} = \lambda'_{2i-1} + j\lambda''_{2i-1}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) je komplexní. Pak je  $i$  charakteristický vektor  $\mathbf{y}_{2i-1}$  komplexní, tj. pro jeho  $k$ tý prvek platí  $y_{(2i-1)k} = y'_{(2i-1)k} + jy''_{(2i-1)k}$  ( $k = 1, \dots, s$ ) a (30) je soustavou  $s$  komplexních lineárních rovnic. Protože řada počítačů nemá komplexní aritmetiku, převedeme ji na reálnou soustavu  $2s$  rovnic o  $2s$  neznámých [12]. Ze soustavy (30), jež nabývá tvar

$$\begin{bmatrix} 1, & 0, & 0, & \dots, \\ a_{21}, & a_{22} - \lambda'_{2i-1} - j\lambda''_{2i-1}, & a_{23}, & \dots, \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} - \lambda'_{2i-1} - j\lambda''_{2i-1}, & \dots, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'_{(2i-1)1} + jy''_{(2i-1)1} \\ y'_{(2i-1)2} + jy''_{(2i-1)2} \\ y'_{(2i-1)3} + jy''_{(2i-1)3} \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \end{bmatrix} \quad (31)$$

Rozkladem na reálnou a imaginární část dostaneme

$$\mathbf{N}_{2i-1} \bar{\mathbf{y}}_{2i-1} = \mathbf{B} \quad (32)$$

kde

$$\bar{\mathbf{y}}_{2i-1} = \begin{bmatrix} y'_{2i-1} \\ y''_{2i-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y'_{(2i-1)1} \\ y'_{(2i-1)2} \\ y'_{(2i-1)3} \\ \dots \\ y''_{(2i-1)1} \\ y''_{(2i-1)2} \\ y''_{(2i-1)3} \\ \dots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

a  $\mathbf{N}_{2i-1}$  je čtvercová bloková matice typu  $(2s; 2s)$  vzniklá z matice

$$\left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \lambda'_{2i-1} \mathbf{I} & \lambda''_{2i-1} \mathbf{I} \\ \hline -\lambda''_{2i-1} \mathbf{I} & \mathbf{A} - \lambda'_{2i-1} \mathbf{I} \end{array} \right]$$

náhradou prvního řádku řádkem

$$1, 0, \dots, 0$$

a  $(s+1)$ vého řádku řádkem

$$0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0$$

(v němž prvek 1 je v  $(s+1)$ ním sloupci).

Je-li tato soustava singulární, ponecháme 1. a  $(s+1)$ vý řádek matice  $\mathbf{N}_{2i-1}$  v původním tvaru a nahradíme její 2. a  $(s+2)$ hý řádek řádkem

$$0, 1, 0, \dots, 0$$

a

$$0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0$$

(prvek 1 je v  $(s+2)$ hém sloupci). Vektor  $\mathbf{B}$  nabývá tvaru

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

atd., až některá soustava bude mít právě jedno řešení  $\mathbf{y}_i$ .

4. Sestavíme matici  $\mathbf{P}^{-1}$ . Vypočítáme charakteristické vektory  $\mathbf{y}$  pro všechna charakteristická čísla matice  $\mathbf{A}$ . Sloupce matice  $\mathbf{P}^{-1}$  vytvoříme z těchto charakteristických vektorů následujícím způsobem:

$(2i-1)$ vý resp.  $2i$ tý sloupec matice  $\mathbf{P}^{-1}$  je tvořen reálnou  $\mathbf{y}'_{2i-1}$  (resp. imaginární  $\mathbf{y}''_{2i-1}$ ) částí charakteristického vektoru  $\mathbf{y}_{2i-1}$ , příslušného charakteristickému číslu  $\lambda_{2i-1}$  ( $i = 1, \dots, s-r$ ).

5. Provedeme inverzi

$$(\mathbf{P}^{-1})^{-1} = \mathbf{P} \quad (33)$$

6. Podle vztahů (20) a (21) určíme matice  $\mathbf{C}_{2i-1}$ ,  $\mathbf{C}_{2i-1}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) a  $\mathbf{R}_i$  ( $i = 2r+1, \dots, s$ ).

7. Podle rovnice (19) lze určit — je-li to požadováno — matici  $\mathbf{H}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ .

3.2. Algoritmus výpočtu vektoru odezev stavových proměnných  $\mathbf{x}(t)$

1. Určíme charakteristická čísla matice  $\mathbf{A}$  [viz odst. 3.1, ad 2], ze vztahů (20) určíme matice  $\mathbf{C}_{2i-1}$ ,  $\mathbf{S}_{2i-1}$  ( $i = 1, \dots, r$ ) a  $\mathbf{R}_i$  ( $i = 2r+1, \dots, s$ ) [viz odst. 3.1, ad 6] a posléze podle rovnic (24) až (26) stanovíme sloupce matice  $\mathbf{M}$ .

2. Ze vztahů (27) až (29) stanovíme prvky vektoru  $\mathbf{V}$ .  
3. Z matice  $\mathbf{M}$  a vektoru  $\mathbf{V}$  určíme podle vztahu (23) hledaný vektor odezev  $\mathbf{x}(t)$ .

4. Dva příklady

Popsanou metodu budeme ilustrovat dvěma příklady. Na prvním, „matematickém“, podrobně předvedeme

všechny důležité kroky výpočtového algoritmu. V dalším příkladu naznačíme postup při analýze jednoduchého obvodu. K jednoduchosti řešeného obvodu jsme byli vedeni snahou o dobrou přehlednost výpočtů, avšak pro popisovanou metodu není typická; tato nalézá uplatnění

především u složitějších obvodů, které prakticky již nelze analyticky vyřešit klasickými prostředky.

#### 4.1. První příklad

Hledejme analytické řešení stavové rovnice<sup>1)</sup>

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3,342\ 558 \cdot 10^1 & 7,821\ 551 \cdot 10^{-1} & 8,043\ 319 \cdot 10^0 \\ -3,927\ 425 \cdot 10^1 & -0,011\ 872 \cdot 10^0 & 1,466\ 161 \cdot 10^0 \\ -6,128\ 669 \cdot 10^1 & 3,156\ 450 \cdot 10^1 & -8,562\ 550 \cdot 10^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1,757\ 135 \cdot 10^2 \\ 6,922\ 750 \cdot 10^2 \\ 3,915\ 925 \cdot 10^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 28,1 \\ 68,0 \\ 68,3 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Výpočet  $\mathbf{H}(t) = e^{\mathbf{A}t}$

1. Charakteristická rovnice matice  $\mathbf{A}$  je

$$\lambda^3 + 5 \cdot 10^1 \lambda^2 + 1,1 \cdot 10^3 \lambda + 1,5 \cdot 10^4 = 0 \quad (35)$$

2. Řešením rov. (35) nalézáme charakteristická čísla matice  $\mathbf{A}$ :

$$\lambda_1 = \lambda'_1 + j\lambda''_1 = -10 + j\ 20;$$

$$\lambda_2 = \bar{\lambda}_1 = \lambda'_1 - j\lambda''_1 = -10 - j\ 20; \quad \lambda_3 = -30$$

3. Stanovíme charakteristické vektory matice  $\mathbf{A}$ :

a) pro  $\lambda_3 = -30$  dostáváme ve smyslu soustavy (30)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3,827\ 425 \cdot 10^1 & 2,198\ 813 \cdot 10^0 & 1,466\ 161 \cdot 10^0 \\ -6,128\ 669 \cdot 10^1 & 3,156\ 450 \cdot 10^1 & 2,143\ 745 \cdot 10^1 \end{bmatrix} \mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

odkud

$$\mathbf{y}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1,769\ 231 \cdot 10^0 \\ 2,538\ 461 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (36)$$

b) pro  $\lambda_1 = -10 + j\ 20$  dostáváme ve smyslu soustavy (31), rozepsané do reálného tvaru

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3,927\ 425 \cdot 10^1 & 1,988\ 128 \cdot 10^0 & 1,466\ 161 \cdot 10^0 & 0 & 0 & 0 \\ -6,128\ 669 \cdot 10^1 & 3,156\ 450 \cdot 10^1 & 1,437\ 450 \cdot 10^0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & -3,927\ 425 \cdot 10^1 & 1,988\ 128 \cdot 10^0 & 1,466\ 161 \cdot 10^0 \\ 0 & 0 & -20 & -6,128\ 669 \cdot 10^1 & 3,156\ 450 \cdot 10^1 & 1,437\ 450 \cdot 10^0 \end{bmatrix} \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (37)$$

odkud

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3,408\ 856 \cdot 10^{-1} + j\ 1,718\ 752 \cdot 10^0 \\ 2,879\ 278 \cdot 10^0 + j\ 2,319\ 399 \cdot 10^0 \end{bmatrix}$$

4. Z vektorů  $\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}'_1 + j\mathbf{y}''_1, \mathbf{y}_3$  zkonstruujeme matici  $\mathbf{P}^{-1}$

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3,408\ 856 \cdot 10^{-1} & 1,718\ 752 \cdot 10^0 & 1,769\ 231 \cdot 10^0 \\ 2,879\ 278 \cdot 10^0 & 2,319\ 399 \cdot 10^0 & 2,538\ 461 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (38)$$

5. Provedeme inverzi matice  $\mathbf{P}^{-1}$

$$\mathbf{P} = (\mathbf{P}^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} 4,686\ 366 \cdot 10^{-1} & -2,963\ 948 \cdot 10^{-1} & 2,196\ 385 \cdot 10^{-1} \\ -6,399\ 155 \cdot 10^{-1} & 3,355\ 026 \cdot 10^{-1} & 1,825\ 275 \cdot 10^{-1} \\ 5,313\ 634 \cdot 10^{-1} & 2,963\ 948 \cdot 10^{-1} & -2,196\ 385 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix} \quad (39)$$

6. Výpočet matic  $\mathbf{C}_1$  (tj. koeficienty u  $e^{\lambda'_1 t} \cos \lambda''_1 t$ ),  $\mathbf{S}_1$  (tj. koeficienty u  $e^{\lambda'_1 t} \sin \lambda''_1 t$ ) a  $\mathbf{R}_1$  (tj. koeficienty u  $e^{\lambda_3 t}$ )

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 4,686\ 366 \cdot 10^{-1} & -2,963\ 948 \cdot 10^{-1} & 2,196\ 385 \cdot 10^{-1} \\ -9,401\ 046 \cdot 10^{-1} & 4,756\ 090 \cdot 10^{-1} & 3,885\ 911 \cdot 10^{-1} \\ -1,348\ 843 \cdot 10^{-1} & -7,523\ 863 \cdot 10^{-2} & 1,055\ 754 \cdot 10^0 \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$\mathbf{S}_1 = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -6,399\ 155 \cdot 10^{-1} & 3,355\ 026 \cdot 10^{-1} & 1,825\ 275 \cdot 10^{-1} \\ -1,023\ 608 \cdot 10^0 & 6,237\ 972 \cdot 10^{-1} & -3,152\ 831 \cdot 10^{-1} \\ -2,929\ 450 \cdot 10^0 & 1,653\ 463 \cdot 10^0 & 1,611\ 810 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \quad (41)$$

<sup>1)</sup> Abychom mohli provést kontrolu, že popsaná metoda vede ke správným výsledkům, je třeba předem znát tato řešení. V našem případě jsme zvolili analytická řešení

$$x_1(t) = 1,1 e^{-10t} \cos 20t + 12 e^{-10t} \sin 20t + 13 e^{-30t} + 14$$

$$x_2(t) = 21 e^{-10t} \cos 20t + 2,2 e^{-10t} \sin 20t + 23 e^{-30t} + 24$$

$$x_3(t) = 31 e^{-10t} \cos 20t + 32 e^{-10t} \sin 20t + 3,3 e^{-30t} + 34$$

a pro tato řešení jsme zkonstruovali rov. (34).

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} 5,313\,634 \cdot 10^{-1}; & 2,963\,948 \cdot 10^{-1}; & -2,196\,385 \cdot 10^{-1} \\ 9,401\,046 \cdot 10^{-1}; & 5,243\,909 \cdot 10^{-1}; & -3,889\,912 \cdot 10^{-1} \\ 1,348\,845 \cdot 10^{-1}; & 7,523\,866 \cdot 10^{-2}; & -5,575\,438 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Výpočet řešení  $\mathbf{x}(t)$

- 1) Pomocí rovnic (24) až (26) stanovíme matici  $\mathbf{M}$ .
- 2) Pomocí rovnic (27) až (29) stanovíme vektor  $\mathbf{V}$ .
- 3) Podle rovnice (23) je hledaný vektor řešení:

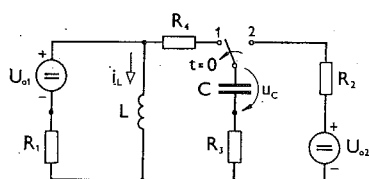
$$\underbrace{\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1,100\,006; & 12,000\,002; & 12,999\,996; & 13,999\,998 \\ 20,999\,991; & 2,199\,991; & 22,999\,991; & 24,000\,000 \\ 31,000\,003; & 31,999\,996; & 3,299\,996; & 33,999\,984 \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-10t} \cos 20t \\ e^{-10t} \sin 20t \\ e^{-30t} \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{V}}$$

Rozdíl mezi tímto výsledkem a přesným řešením daného problému je způsoben zaokrouhlovacími chybami.

#### 4.2. Druhý příklad

Provedeme analýzu obvodu podle obr. 1 pro  $t \geq 0$ ; v čase  $t = 0$  přepneme přepínač z polohy 1 do polohy 2. ( $U_{01} = 60\text{ V}$ ,  $U_{02} = 100\text{ V}$ ,  $R_1 = 20\ \Omega$ ,  $R_3 = 50\ \Omega$ ,  $R_4 = 30\ \Omega$ ,  $L = 0,1\text{ H}$ ,  $C = 10^{-4}\text{ F}$ ). Metodou stavových proměnných snadno formulujeme stavovou rovnici obvodu (podrobnosti viz [6]) ve tvaru

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -100; & -2\,000 \\ 2; & -160 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6\,000 \\ 480 \end{bmatrix}$$



Obr. 1.

s počáteční podmínkou

$$\begin{bmatrix} u_C(0) \\ i_L(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Výpočet  $\mathbf{H}(t) = e^{\mathbf{A}t}$

1. Charakteristická rovnice matice  $\mathbf{A}$  je

$$\lambda^2 + 2,6 \cdot 10^2 \lambda + 2 \cdot 10^4 = 0$$

2. Charakteristická čísla matice  $\mathbf{A}$  jsou

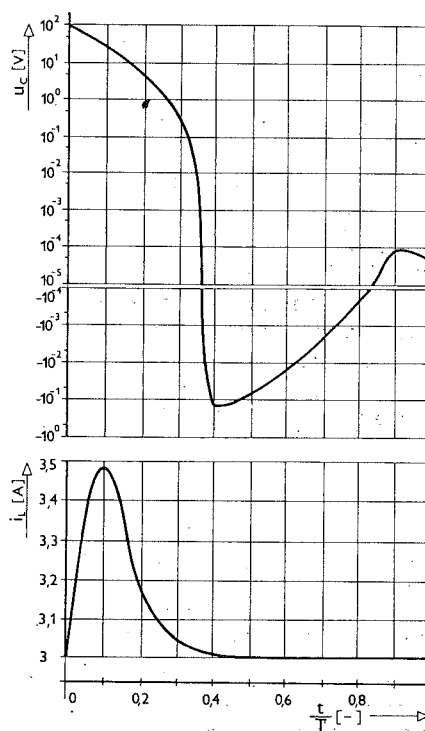
$$\lambda_{1,2} = -1,3 \cdot 10^2 \pm j 5,567\,764 \cdot 10^1$$

3. Charakteristické vektory matice  $\mathbf{A}$  jsou

$$\mathbf{y}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & \pm j \cdot 0 \\ 1,5 \cdot 10^{-2} \pm j \cdot (-2,783\,882 \cdot 10^{-2}) \end{bmatrix}$$

4) 5) Matice  $\mathbf{P}^{-1}$  a matice k ní inverzní  $\mathbf{P}$  jsou

$$\mathbf{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1; & 0; \\ 1,5 \cdot 10^{-2}; & -2,783\,882 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}$$



Obr. 2.

a

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1; & 0; \\ 5,388\,159 \cdot 10^{-1}; & -3,592\,106 \cdot 10^1 \end{bmatrix}$$

6. Matice  $\mathbf{C}_1$  a  $\mathbf{S}_1$

$$\mathbf{C}_1 = \begin{bmatrix} 1; & 0 \\ 0; & 1 \end{bmatrix}$$

a

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 5,388\,159 \cdot 10^{-1}; & -3,592\,105 \cdot 10^{-1} \\ 3,592\,105 \cdot 10^{-2}; & -5,388\,159 \cdot 10^{-1} \end{bmatrix}$$

Výpočet odezev stavových proměnných

- 1), 2) Sestavíme matici  $\mathbf{M}$  a vektor  $\mathbf{V}$ , z čehož
- 3) Vektor stavových proměnných je

$$\begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 9,999\,998 \cdot 10^1; & 5,388\,159 \cdot 10^1; & 2 \cdot 10^{-5} \\ -1 \cdot 10^{-7}; & 3,592\,105 \cdot 10^0; & 2,999\,999 \cdot 10^0 \end{bmatrix}}_M \underbrace{\begin{bmatrix} e^{-130t} \cos 55,677\,64\,t \\ e^{-130t} \sin 55,677\,64\,t \\ 1 \end{bmatrix}}_V$$

Hledané odezvy jsou tedy (obr. 2)

$$u_C(t) = e^{-130t} (53,9 \sin 55,7t + 100 \cos 55,7t) \quad [\text{V}]$$

$$i_L(t) = 3,592 e^{-130t} \sin 55,7t + 3 \quad [\text{A}]$$

## 5. Závěr

Rozvoj samočinných počítačů, spolu s efektivními numerickými metodami vede často k tomu, že daný problém řešíme čistě numericky. Takto získané řešení je však zpravidla omezeno na zcela konkrétní případy a neumožňuje hlubší pohled na chování řešeného systému. Naproti tomu analytické řešení obsahuje více informací o charakteru řešeného jevu, leč klasickými metodami matematické analýzy lze prakticky zvládnout jen jednodušší případy. V předložené práci jsou na příkladu analýzy lineárních elektrických obvodů se soustředěnými parametry spojeny přednosti obou koncepcí; s využitím číselného počítače lze i pro velmi složité obvody vyjádřit časový průběh odezvy stavových veličin. Omezili jsme se na případ časově konstantních zdrojů; popisovanou metodu by však bylo možno rozšířit i na případ časově proměnných zdrojů, jejichž časový průběh je takový, že konvoluntní integrál v rovnici (3) je integrovatelný v uzavřeném tvaru. Sem patří zejména často se vyskytující případ harmonických zdrojů.

Pokud se předložená metoda posuzuje jen z hlediska stanovení odezvy, lze namítnout, že efektivnost výpočtů je srovnatelná s použitím metody Laplaceovy transformace, již by bylo možno též algoritmovat a programovat pro číslicový počítač. Popsaná metoda však navíc,

jako mezivýsledek, poskytuje matici  $e^{At}$ , již můžeme použít při hlubším zkoumání vyšetřovaného obvodu (např. přepětové jevy, ustálený stav při periodických neharmonických zdrojích apod.).

Uvedená výpočtová metoda je ilustrována dvěma příklady, které jsou pro jednoduchost pouze naznačeny. Jejich podrobné numerické řešení, spolu s příslušnou procedurou naleznou zájemci v práci [10].

## Literatura

- [1] Balabanian, N., Bickart, T. A.: Electrical network theory. J. Wiley, New York 1969.
- [2] Cahiel, L. W.: Computation of the transient response of linear systems to step and ramp inputs. Proc. IEEE, 58 (1970), str. 1169—1171.
- [3] Gantmacher, F. R.: Teorija matric. Gos. izdat. techn.-teor. lit. Moskva 1953.
- [4] Goertzel, G., Tralli, N.: Některé matematické metody fyziky. SNTL, Praha 1970.
- [5] Liou, M. L.: A novel method of evaluating transient response. Proc. IEEE, 54 (1966), č. 1, str. 20—23.
- [6] Mayer, D.: Úvod do teorie elektrických obvodů. SNTL, Praha 1978 (tč. v tisku).
- [7] Mayer, D.: Formulating state equations of electric networks by a simple method. Acta Technica ČSAV, 20 (1975), č. 4, str. 275—300.
- [8] Mayer, D.: The state-variable method of electric network analysis. Acta Technica ČSAV 15 (1970), č. 6, str. 761—789.
- [9] Mayer, D., Ryjáček, Z.: Příspěvek k modelování elektrických systémů elektrickými obvody. Elektrotechnický časopis. 29 (1978), tč. v tisku.
- [10] Mayer, D., Ryjáček, Z., Ulrych, B.: Maticová forma analytického vyjádření odezvy stavových veličin lineárních elektrických obvodů. Výzkumná zpráva č. 01—77 délho státního úkolu III-5-1/7; VŠSE, Plzeň 1977.
- [11] Mayer, D., Ulrych, B.: Numerická analýza nelineárních elektrických obvodů metodou stavových proměnných. Elektrotechnický obzor 65 (1976), č. 1, str. 30—38.
- [12] Schmidtmayer, J.: Maticový počet a jeho použití v elektrotechnice. SNTL Praha, 1974.

537.313  
621.372

## Содержание — Résumé — Inhalt — Summary

Аналитическое решение переходных процессов в сложных линейных электрических цепях. В статье описан метод исследования аналитического выражения зависимости переменных по времени величин состояния в сложных линейных электрических цепях с сосредоточенными параметрами, описанными дифференциальным уравнением состояния (1), с применением ЭВМ. По сравнению с числовым решением уравнения (1) аналитически выраженные зависимости по времени дают больше информации о характере решаемого процесса, и тем самым более общее представление о поведении цепи. Следовательно, метод сочетает преимущества обеих концепций: позволяет решать с помощью ЭВМ даже сложные цепи и вместе с тем дает аналитически выраженные зависимости по времени.

При анализе цепи с помощью описанного метода определяют характеристические числа матрицы  $A$  (которые вообще и действительные и комплексные), устанавливаются характеристические векторы матрицы  $A$  и наконец действительная форма матрицы  $A^t$  по вычислению Жордана, что позволит выразить матрицу  $A$ . Оттуда находится аналитическое выражение решения дифференциального уравнения состояния решаемой цепи, выражения для зависимости по времени величин состояния, которые подробно формулированы для специального случая, когда элементы вектора  $f$  уравнения состояния (1) постоянные величины (т. е. в решаемой цепи имеются лишь источники постоянного тока). Метод, конечно, можно распространить и на переменные по времени источники (напр. гармонические); требуется только, чтобы интеграл в уравнении (3) можно было решить в ограниченной форме. Формулируются два вычислительных алгоритма, а именно так для определения матрицы  $e^{At}$ , так и для определения зависимостей по времени  $x(t)$ . Метод демонстрируется на двух численных примерах.

La solution analytique des régimes transitoires dans les réseaux électriques linéaires complexes. Dans l'article, les auteurs présentent la méthode d'évaluation de l'expression analytique des cours des grandeurs d'état dans les réseaux linéaires compliqués avec des éléments concentrés décrits par l'équation d'état (1). Cette méthode est appliquée sur l'ordinateur digital. En comparaison avec la solution numérique de l'équation (1), les expressions analytiques du cours des courants et des tensions présentent plus d'informations sur le caractère des phénomènes analysés et par conséquent donnent les idées plus générales du comportement de réseau. La méthode donc relie les avantages de toutes les deux conceptions: elle permet de résoudre des réseaux compliqués à l'aide de l'ordinateur et fournit en en même temps les expressions analytiques des grandeurs d'état.

En analysant un réseau par la méthode décrite, on détermine les valeurs propres de la matrice  $A$  (qui sont en général soit réelles soit complexes), les vecteurs propres de  $A$  et enfin la forme réelle de la forme Jordan de  $A$  ce qui rend possible d'exprimer la matrice  $e^{At}$ . De là, on va trouver la solution analytique de l'équation d'état du réseau analysé, c'est-à-dire les expressions des grandeurs d'état qui sont exprimées en détail pour le cas spécial si les éléments du vecteurs  $f$  de l'équation d'état (1) sont des constantes (c'est-à-dire, dans le réseau analysé il y a seulement des sources à courant continu). On peut, certes, répandre la méthode pour des sources variables avec le temps (par ex. sinusoïdales); il est nécessaire seulement que l'intégrale dans l'équation (3) soit résoluble à la façon exacte. Les auteurs présentent aussi la formulation des algorithmes — d'une part pour la détermination de la matrice  $e^{At}$ , d'autre part pour la détermination du vecteur des grandeurs d'état  $x$ . La méthode est complétée par deux exemples numériques.



**Analytische Lösung der Ausgleichsvorgänge in den komplizierten linearen elektrischen Netzen.** In dem Aufsatz ist die Berechnungsmethode für die analytische Ausdrückung des Zeitverlaufs der Zustandsgrößen in den komplizierten linearen elektrischen Netzen mit den mittels einer Zustandsgleichung (1) beschrieben konzentrierten Parametern mit Verwendung des Digitalrechners beschrieben. Im Vergleich mit der numerischen Lösung der Gleichung (1) geben die analytisch ausgedrückten Spannungs- und Stromverläufe mehr Informationen über den Charakter der gelösten Erscheinung und dadurch auch eine allgemeinere Ansicht auf das Verhalten des Kreises. Die Methode enthält also die Vorteile beider Konzeptionen: sie ermöglichen mittels des Rechners auch komplizierte Kreise zu lösen und dabei gibt sie die analytisch ausgedrückten Spannungs- und Stromverläufe.

Bei der mittels der beschriebenen Methode durchgeführten Analyse des Kreises werden die Eigenwerte der Matrix **A** (die allgemein einerseits real, andererseits komplex sind), die Eigenvektoren der Matrix **A** und zuletzt die Realform der Jordans Form der Matrix **A** ermittelt, was die Matrix  $e^{At}$  auszudrücken ermöglicht. Daraus findet man dann die analytische Lösung der Zustandsgleichung des gelösten Kreises, d. h. die Ausdrücke für den Zeitverlauf der Zustandsgrößen, die ausführlich für den Spezialfall ausgedrückt sind, wenn die Elemente des Vektors **f** der Zustandsgleichung (1) Konstanten sind (d. h. in dem gelösten Kreis gibt es nur konstante Erregung). Die Methode kann natürlich auch für die zeitveränderlichen Quellen (z. B. sinusförmige Erregung) erweitert werden; man verlangt nur, dass das Integral in der Gleichung (3) in der abgeschlossenen Form lösbar sei. Es sind zwei Berechnungsalgorithmen formuliert, und zwar einerseits für die Ermittlung der Matrix  $e^{At}$ , andererseits für die Bestimmung des

Vektors der Zustandsgrößen **x**. Die Methode ist auf zwei numerischen Beispielen vorgeführt.

**Analytic solution of transient phenomena in complicated linear electric networks.** A method of investigating the analytic form of the responses of state variables in complicated linear networks with lumped parameters described by the state equation (1) is suggested. The method makes use of a digital computer. In comparison to the numerical solution of the equation (1), the analytic representation of the responses offers more information about the character of the phenomena under investigation and thus also a more general view of the behaviour of the network. In this way the method comprises the merits of both approaches: it makes it possible to solve by a computer even complicated networks and at the same time provides analytic representation of the responses.

The analysis of a network by the method presented consists in finding the characteristic numbers of the matrix **A** (which are generally both real and complex), determining the characteristic vectors of the matrix and finally its real Jordan form. This makes it possible to find matrix  $e^{At}$ . Hence we find the analytic solution to the state equation of the network considered, i. e., the expressions for the responses of the state variables, which are given in detail for the special case of the vector **f** of the state equation (1) having all components constant (i. e., there are only d. c. drives in the network). Evidently, the method can be extended to time-variable drives (e. g. sine drives). It is only required that the integral in the equation (3) be solvable in closed form. Two computational algorithms are formulated: one for the computation of the matrix  $e^{At}$  other for the vector of responses **x**. The method is illustrated by two numerical examples.

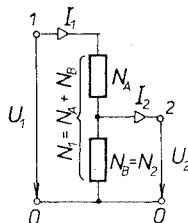
## Náhradní obvod autotransformátoru

Ing. JIŘÍ KULDA, DrSc.

Pro vyšetřování úbytků napětí v transformátoru při symetrickém zatížení se používá náhradního zapojení, které má tolik svorek, kolik má transformátor vinutí. Pro ideální transformátor s nulovým magnetizačním proudem, odporem vinutí a ztrátami v železe, budou mezi nimi zapojeny pouze reaktance, jejichž velikost lze určit např. postupem uvedeným v [1, 2, 3].

### Autotransformátor

U ideálního autotransformátoru je odvození náhradního obvodu zkomplikováno okolností, že část vinutí je společná pro stranu vyššího a nižšího napětí (obr. 1).



Obr. 1.

Tato část je označována jako vinutí společné (s počtem závitů  $N_3$ ) a je protékána rozdílem proudů na straně nižšího ( $I_2$ ) a vyššího ( $I_1$ ) napětí. Část vinutí s počtem

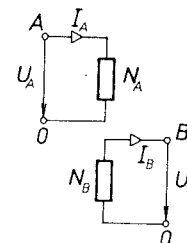
závitů  $N_1 - N_2$ , zapojená do série se společným vinutím se nazývá sériové vinutí.

Převod autotransformátoru označme

$$k = \frac{N_1}{N_2} \quad (1)$$

Svorkou 1 vyššího napětí  $U_1$  přitéká proud  $I_1$ , na straně nižšího napětí  $U_2$  vystupuje ze svorky 2 proud  $I_2$  (obr. 1). Pro ně platí

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = k \quad (2)$$



Obr. 2.

Rozptylovou reaktancí autotransformátoru lze odvodit z rovnic popisujících jeho napěťové poměry [4] nebo z energie magnetického rozptylového pole. Lze ji ale názorně stanovit, jestliže odpojíme sériové vinutí od