

# Kapitola 10

## Lineární prostory grafu

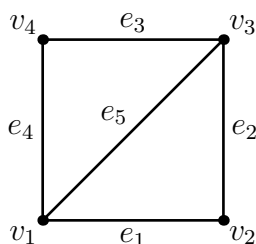
Metoda počítání koster pomocí determinantů není jediným pojítkem mezi teorií grafů a lineární algebrou. V této kapitole uvidíme, jak lze každému neorientovanému grafu přirozeným způsobem přiřadit dva lineární prostory nad tělesem  $\mathbf{Z}_2$  (prostor kružnic a prostor řezů) a prozkoumáme vlastnosti těchto prostorů.

### 10.1 Incidenční matice neorientovaného grafu

Podobně, jako jsme definovali incidenční matici pro orientované grafy, lze ji zavést i pro grafy neorientované. Vzhledem k tomu, že hrany těchto grafů nemají směr, vystačíme zde s hodnotami 0 a 1. Je-li tedy  $G$  neorientovaný graf s  $n$  vrcholy  $v_1, \dots, v_n$  a  $m$  hranami  $e_1, \dots, e_m$ , pak jeho *incidenční matice*  $M(G)$  je definována předpisem  $M(G) = (m_{ij})$ , kde

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } v_i \in e_j, \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

pro  $i = 1, \dots, n$  a  $j = 1, \dots, m$ .



Obrázek 10.1: Neorientovaný graf  $H$ .

Graf na obr. 10.1 má například následující incidenční matici ( $i$ -tý řádek od-

povídá vrcholu  $v_i$ ,  $j$ -tý sloupec hraně  $e_j$ ):

$$M(H) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Všimněme si, že každý sloupec incidenční matice nyní obsahuje právě dva prvky, které jsou rovny jedné. Stejně jako u orientovaných grafů tak dokážeme jednoznačně zrekonstruovat poslední řádek z řádků předcházejících. Asi bychom proto čekali, že řádky takovéto matice jsou opět lineárně závislé. Výše uvedená matice  $M(H)$  má však překvapivě hodnotu 4, tedy maximální možnou!

Záhada má jednoduché řešení:

*S incidenční maticí neorientovaného grafu  
je třeba pracovat nad tělesem  $\mathbf{Z}_2$ .*

Co to přesně obnáší, uvidíme v následujícím oddílu.

## 10.2 Hodnost nad $\mathbf{Z}_2$

Řádky matice  $M(G)$  jsou vektory složené z  $m$  nul a jedniček. Můžeme je tedy interpretovat jako prvky vektorového prostoru  $\mathbf{Z}_2^m$  dimenze  $m$  nad tělesem  $\mathbf{Z}_2$ . Veškerá aritmetika v tomto prostoru je prováděna ‘po složkách’ a modulo 2. Připomeňme, že množina vektorů  $\{w_1, \dots, w_k\} \subset \mathbf{Z}_2^m$  je *lineárně závislá nad  $\mathbf{Z}_2$* , pokud existují koeficienty  $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbf{Z}_2$  (ne všechny nulové), pro něž je

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i w_i = \mathbf{0},$$

přičemž samozřejmě stále počítáme nad tělesem  $\mathbf{Z}_2$ . Vzhledem k tomu, že koeficienty mohou být pouze 0 nebo 1 a nulové koeficienty součet neovlivní, je vidět, že množina vektorů je lineárně závislá nad  $\mathbf{Z}_2$ , právě když obsahuje neprázdnou podmnožinu s nulovým součtem.

*Hodnost matice  $M$  nad  $\mathbf{Z}_2$*  (budeme ji značit  $h_2(M)$ ) je definována jako maximální velikost množiny řádků, která je lineárně nezávislá nad  $\mathbf{Z}_2$ . Třebaže matice  $M(H)$  má hodnotu (nad tělesem reálných čísel) rovnou 4, nad  $\mathbf{Z}_2$  je součtem jejích řádků nulový vektor a podle očekávání platí  $h_2(M(H)) = 3$ .

Pro hodnotu matice  $M(G)$  nad  $\mathbf{Z}_2$  platí obdobné vztahy jako pro obyčejnou hodnotu v orientovaném případě, a také se velmi podobně dokazují. Shrňme je v následující větě, jejíž důkaz ponecháme jako cvičení.

**Věta 10.1** *Pro neorientovaný graf  $G$  platí:*

(i) *Hodnota  $h_2(M(G))$  je rovna  $n - k$ , právě když  $G$  má  $k$  komponent.*

- (ii) Je-li  $G$  souvislý, pak dokonce každých  $n - 1$  řádků tvoří lineárně nezávislou množinu nad  $\mathbf{Z}_2$ .  $\square$

## Cvičení

- 10.1 Dokažte větu 10.1.

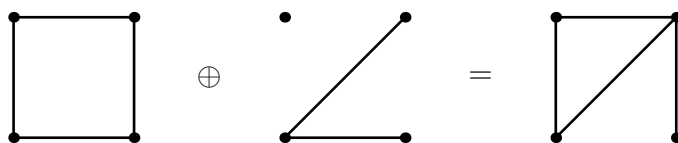
## 10.3 Vektory a faktory

Každý vektor z prostoru  $\mathbf{Z}_2^m$  odpovídá nějaké množině hran grafu  $G$ , a ta zase jednoznačně určuje faktor grafu  $G$ . Pro jednoduchost proto obvykle nebudeme rozlišovat mezi vektory ze  $\mathbf{Z}_2^m$ , faktory grafu  $G$  a množinami jeho hran. V případě potřeby budeme o vektoru, který odpovídá nějaké množině hran  $M$ , hovořit jako o jejím *charakteristickém vektoru*.

V prostoru  $\mathbf{Z}_2^m$  je definováno sčítání, které budeme značit symbolem  $\oplus$ . Co znamená toto sčítání v řeči faktorů? Jsou-li  $F, F' \in \mathbf{Z}_2^m$ , pak na  $i$ -tém místě v součtu  $F \oplus F'$  bude 0, právě když  $F$  a  $F'$  mají na tomto místě oba 0 nebo oba 1. Odtud snadno vidíme, že faktor  $F \oplus F'$  je *symetrický rozdíl* faktorů  $F$  a  $F'$ , tj. je definován předpisem

$$F \oplus F' = F \cup F' - (F \cap F').$$

Příklad ‘sčítání’ faktorů grafu  $H$  na obr. 10.1 ukazuje obr. 10.2.



Obrázek 10.2: Sčítání faktorů.

Řekneme, že faktor  $F \subset G$  je *sudý*, má-li v něm každý vrchol sudý stupeň. Tento pojem úzce souvisí s pojmem eulerovského grafu, studovaným v oddílu 6.6: každá komponenta sudého faktoru je totiž eulerovský graf. Bude nás zajímat mimo jiné následující otázka:

*Kolik má graf  $G$  sudých faktorů?*

Alespoň jeden sudý faktor existuje vždy: faktor s prázdnou množinou hran. Je-li ovšem graf  $G$  například stromem, pak už žádné další sudé faktory nemá. Každý jeho faktor je totiž sjednocením disjunktních stromů a my víme, že strom na alespoň dvou vrcholech obsahuje nějaký list, tj. vrchol stupně 1. Jediný sudý faktor stromu je tedy ten, ve kterém jsou všechny komponenty jednobodové.

Oproti tomu každá kružnice  $C$  v grafu  $G$  určuje sudý faktor s množinou hran  $E(C)$  (vrcholy na  $C$  mají stupeň 2, ostatní 0). Zdá se tedy, že čím více kružnic, tím více sudých faktorů.

Zásadní pozorování představuje následující věta.

**Věta 10.2** *Sudé faktory tvoří podprostor vektorového prostoru  $\mathbf{Z}_2^m$ .*

**Důkaz.** Vzhledem k tomu, že pracujeme nad tělesem  $\mathbf{Z}_2$ , stačí ověřit, že součet (=symetrický rozdíl) sudých faktorů  $F_1, F_2$  je sudým faktorem, tj. že stupeň každého vrcholu  $v \in V(G)$  ve faktoru  $F_1 \oplus F_2$  je sudý. Nechť  $A_i$  je množina hran obsahujících  $v$  ve faktoru  $F_i$  ( $i = 1, 2$ ). Víme, že ve faktoru  $F_1 \oplus F_2$  je vrchol  $v$  obsažen právě ve hranách ze symetrického rozdílu  $A_1 \oplus A_2$ . Jeho stupeň je tak

$$\begin{aligned} d_{F_1 \oplus F_2}(v) &= |A_1 \oplus A_2| = |A_1 \cup A_2 - (A_1 \cap A_2)| \\ &= |A_1| + |A_2| - 2|A_1 \cap A_2|, \end{aligned}$$

a protože  $A_i$  jsou množiny sudé velikosti, je i tento stupeň sudý. Vrchol  $v$  byl libovolný, takže  $F_1 \oplus F_2$  je sudý faktor.  $\square$

Podprostoru z věty 10.2 se říká *prostor kružnic* nebo *prostor cyklů* grafu  $G$ . Označuje se  $\mathcal{C}(G)$ . Název ‘prostor kružnic’ může být zavádějící, neboť tento prostor obecně obsahuje i sudé faktory, které nejsou kružnicemi (viz cvičení 10.2). Tuto terminologii ospravedlňuje následující pojem, který také umožňuje alternativní, možná intuitivnější pohled na prostor  $\mathcal{C}(G)$ .

*Matice kružnic*  $C(G)$  sestává z řádků, které vzájemně jednoznačně odpovídají kružnicím v grafu  $G$ . Řádek příslušný kružnici  $C$  je charakteristický vektor její množiny hran  $E(C)$ . Matice  $C(G)$  má tedy  $m$  sloupců a tolik řádků, kolik je kružnic v grafu  $G$ . Je určena jednoznačně až na pořadí řádků a sloupců.

**Tvrzení 10.3** *Řádky matice  $C(G)$  generují prostor kružnic  $\mathcal{C}(G)$ .*

**Důkaz.** Stačí ukázat, že libovolný sudý faktor  $F$  je součtem kružnic. Použijeme indukci podle počtu hran faktoru  $F$ . Můžeme předpokládat, že  $F$  obsahuje nějaké hrany, jinak je totiž součtem prázdné množiny řádků matice  $C(G)$ . Zvolme komponentu  $F_0$  faktoru  $F$ , která obsahuje aspoň jednu hranu. Potom  $F_0$  je souvislý graf, ve kterém všechny vrcholy mají sudý stupeň, takže podle věty 6.18 má graf  $F_0$  eulerovský tah  $T = (v_0, \dots, v_k = v_0)$ . Pro nejmenší index  $i > 0$  s vlastností  $v_i = v_0$  je počáteční úsek  $K = (v_0, \dots, v_i)$  tahu  $T$  nutně kružnicí. Označme množinu hran této kružnice symbolem  $E(K)$ . Faktor  $F' = E(F) \oplus E(K)$  získáme ‘odečtením’ kružnice  $K$  z faktoru  $F$ . Je to tedy sudý faktor a má méně hran než  $F$ . Z indukce plyne, že  $F'$  je součtem kružnic (řekněme)  $C_1, \dots, C_\ell$ . Proto také faktor

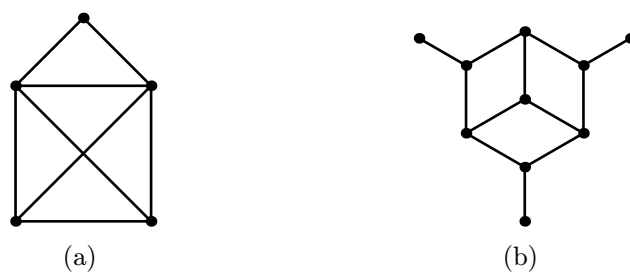
$$F = C_1 \oplus \dots \oplus C_\ell \oplus K$$

je součtem kružnic, což jsme chtěli dokázat.  $\square$

## Cvičení

► **10.2** Najděte příklad grafu, jehož prostor kružnic obsahuje i sudé faktory, které nejsou kružnicemi.

► **10.3** Určete matici kružnic grafů na obr. 10.3.

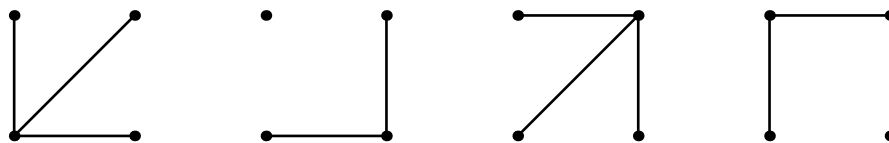


Obrázek 10.3: Grafy k cvičení 10.3.

## 10.4 Hvězdy, separace a řezy

Od tohoto oddílu dále budeme předpokládat, že graf  $G$  je souvislý. K nesouvislým grafům se vrátíme na konci kapitoly.

Jak vypadají faktory určené řádky incidenční matice grafu  $G$ ? Pokud se jedná o řádek, který přísluší vrcholu  $v_i$ , pak do daného faktoru náleží pouze hrany obsahující vrchol  $v_i$ . Tomuto faktoru říkáme *hvězda vrcholu  $v_i$*  a označujeme jej  $H_i$ . Všechny hvězdy grafu na obr. 10.1 jsou znázorněny na obr. 10.4.



Obrázek 10.4: Hvězdy v grafu na obr. 10.1.

Všimněme si, že hvězdy typicky obsahují izolované vrcholy (vrcholy stupně 0) — konkrétně ve hvězdě vrcholu  $v_i$  bude izolovaný každý vrchol, který s ním nesousedí. Všechny tyto vrcholy však do hvězdy patří (je to faktor)!

Pojem hvězda lze zobecnit následujícím způsobem. Pro množinu vrcholů  $X \subset V(G)$  nechť  $\partial X$  označuje faktor složený ze všech hran, které mají v množině  $X$  právě jeden koncový vrchol (tj. z hran, které vedou ‘mezi’  $X$  a  $V(G) - X$ ). Každý faktor tohoto tvaru označíme termínem *separace*. Například každá hvězda je separace, protože platí  $\partial\{v_i\} = H_i$ . Separací je i faktor bez hran.

**Věta 10.4** *Množina všech separací je podprostorem prostoru  $\mathbf{Z}_2^m$ .*

**Důkaz.** Stačí ověřit uzavřenost na součty. Dokazujeme, že pro každé  $X, Y \subset V(G)$  je faktor  $\partial X \oplus \partial Y$  separací. Všimněme si, že hrana  $e$  patří do faktoru  $\partial X \oplus \partial Y$ , právě když  $e \in \partial X$  a  $e \notin \partial Y$  nebo naopak. To zase platí právě tehdy, když  $e$  má v jedné z množin  $X, Y$  jeden konec a v té druhé buď žádný nebo oba konce. Jak lze snadno ověřit, ekvivalentní podmínkou je, že  $e$  má právě jeden konec v množině  $X \oplus Y$ . Dokázali jsme tedy, že

$$\partial(X \oplus Y) = \partial X \oplus \partial Y$$

a z toho plyne tvrzení věty.  $\square$

Nechť  $S$  je separace, dejme tomu  $S = \partial X$ . Odstraněním hran faktoru  $S$  z grafu  $G$  dostaneme jistě nesouvislý graf, protože z žádného vrcholu v množině  $X$  v grafu  $G - E(S)$  nevede hrana do žádného vrcholu mimo  $X$ . Speciálním případem separace je řez, který je definován následovně.

*Řezem* v souvislém grafu  $G$  je množina hran  $A$  s vlastností, že graf  $G - A$  (vzniklý odstraněním hran v  $A$  z grafu  $G$ ) je nesouvislý, ale přitom žádná vlastní podmnožina množiny  $A$  tuto vlastnost nemá.

Podprostor z věty 10.4 se nazývá *prostor řezů* grafu  $G$  a označuje se  $\mathcal{R}(G)$ . Víme, že každá hvězda je jeho prvkem. Platí dokonce následující:

**Tvrzení 10.5** *Hvězdy generují celý prostor řezů.*

**Důkaz.** Musíme ukázat, že každou separaci  $\partial X$  lze vyjádřit jako součet hvězd. Tvrdíme, že platí

$$\sum_{v_i \in X} H_i = \partial X.$$

Tato rovnost plyne z faktu, že má-li hrana  $e_j$  v množině  $X$  oba koncové vrcholy, započítali jsme ji v součtu na levé straně dvakrát; nemá-li v  $X$  ani jeden vrchol, nezapočítali jsme ji vůbec. V obou případech vyjde na  $j$ -tém místě výsledného vektoru 0. Hodnota 1 tedy na tomto místě vyjde právě tehdy, když  $e_j$  je hranou faktoru  $\partial X$ .  $\square$

**Věta 10.6** *Dimenze prostoru řezů je právě  $n - 1$ .*

**Důkaz.** Podle předchozího tvrzení je prostor řezů generován hvězdami. Podle věty 10.1(ii) je dimenze tohoto prostoru přesně  $n - 1$ .  $\square$

Stejně jako většina prvků prostoru kružnic nejsou kružnice (ale sudé faktory), také prostor řezů je z větší části tvořen faktory, které nejsou řezy (ale separacemi, viz cvičení 10.4).

Podobně jako u prostoru kružnic můžeme definovat *matici řezů*  $R(G)$  grafu  $G$ , jejíž každý řádek je charakteristický vektor množiny hran některého řezu v grafu  $G$  (a každému řezu odpovídá jeden řádek). Následující fakt je analogií tvrzení 10.3.

**Tvrzení 10.7** Řádky matice  $R(G)$  generují celý prostor  $\mathcal{R}(G)$ .

**Důkaz.** Podle tvrzení 10.5 víme, že prostor  $\mathcal{R}(G)$  je generován hvězdami. Třebaže ne každá hvězda je řez, není těžké nahlédnout, že různé řezy obsažené v jedné hvězdě  $H$  jsou navzájem disjunktní a  $H$  je tedy jejich součtem. Všechny hvězdy tak leží v lineárním obalu množiny řádků matice  $R(G)$  a z toho plyne dokazované tvrzení.  $\square$

## Cvičení

- **10.4** Najděte příklad separace v nějakém grafu, která není řezem. Najděte příklad hvězdy s touto vlastností.
- **10.5** Dokažte, že je-li  $A$  řez v souvislém grafu  $G$ , pak graf  $G - A$  má právě dvě komponenty. Rozhodněte, zda platí opačná implikace.
- **10.6** Dokažte, že graf, který obsahuje nějaký řez o velikosti 1, nemůže být eulerovský ani hamiltonovský.

## 10.5 Ortogonalita

Připomeňme, že ve vektorovém prostoru  $\mathbf{R}^n$  je pro každou dvojici vektorů  $u, v$  definován skalární součin. Od něj se odvozuje pojem ortogonality vektorů. Podobné pojmy mají smysl i v prostoru  $\mathbf{Z}_2^m$ .

Jsou-li  $u = (u_1 \dots u_m)$  a  $v = (v_1 \dots v_m)$  prvky prostoru  $\mathbf{Z}_2^m$ , pak jejich *skalární součin*<sup>1</sup>  $u \cdot v$  je definován předpisem

$$u \cdot v = \sum_{i=1}^m u_i v_i,$$

kde sčítání provádíme v tělese  $\mathbf{Z}_2$  (výsledek je tedy 0 nebo 1). Vektory  $u, v$  jsou *ortogonální* nebo *kolmé* (značíme  $u \perp v$ ), pokud  $u \cdot v = 0$ . Tento pojem lze rozšířit na množiny vektorů: množiny  $U, V \subset \mathbf{Z}_2^m$  jsou *ortogonální* ( $U \perp V$ ), pokud  $u \perp v$  pro každé  $u \in U, v \in V$ .

Jaký význam má skalární součin při našem ztotožnění vektorů a faktorů? Kdy jsou dva faktory navzájem kolmé? Přímo z definice plyne jednoduchá odpověď: jsou kolmé, právě když se shodují v sudém počtu hran (tj. jejich průnik má sudou velikost).

Je-li  $W$  podprostor prostoru  $\mathbf{Z}_2^m$ , definujeme jeho *ortogonální doplněk*  $W^\perp$  (v prostoru  $\mathbf{Z}_2^m$ ) jako množinu všech vektorů, které jsou kolmé na každý prvek

<sup>1</sup>Pro přesnost upozorníme, že naše definice je v mírném rozporu s obecnou definicí skalárního součinu ve vektorových prostorech. Ta totiž mj. požaduje, aby vztah  $x \cdot x = 0$  platil pouze pro nulový vektor. V našem případě ale bude platit pro každý vektor se sudým počtem jedniček.

podprostoru  $W$ . Z bilinearity skalárního součinu snadno plyne, že  $W^\perp$  je opět podprostorem (viz cvičení 10.7). Pro nás bude velmi důležitá následující věta.

**Věta 10.8** *Je-li  $W$  podprostor prostoru  $\mathbf{Z}_2^m$ , pak platí*

$$\dim W + \dim W^\perp = m.$$

**Důkaz.** Označme  $\dim W = k$ . Nechť  $M$  je matice o rozměrech  $k \times m$ , jejíž řádky jsou prvky nějaké pevné báze podprostoru  $W$ . K tomu, aby vektor  $x \in \mathbf{Z}_2^m$  byl kolmý na každý vektor z  $W$ , stačí, aby byl kolmý na každý prvek zvolené báze. Jinými slovy,  $x \in W^\perp$ , právě když  $x$  je řešením soustavy  $Mx = \mathbf{0}$ .

Standardní eliminací (a případným přeskupením sloupců) upravíme  $M$  na matici  $M'$ , ve které prvních  $k$  sloupců tvoří jednotkovou matici, tedy

$$M' = \left[ I_k \mid B \right],$$

kde  $B$  je nějaká matice o rozměrech  $k \times (m-k)$ . Je jasné, že libovolně zvolená čísla  $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_m$ , lze *jednoznačně* doplnit na řešení  $x = (x_1 \dots x_m)$  soustavy  $Mx = \mathbf{0}$ . Dimenze prostoru, tvořeného řešeními této soustavy (kterým je shodou okolností prostor  $W^\perp$ ), je tedy  $m - k$ . Věta je dokázána.  $\square$

Dokončíme nyní výpočet dimenzí prostoru kružnic a prostoru řezů. Nechť  $F$  je nějaký faktor grafu  $G$ . Podle toho, co bylo řečeno o ortogonalitě faktorů, je stupeň vrcholu  $v_i$  ve faktoru  $F$  sudý, právě když je  $F$  kolmý na hvězdu  $H_i$ . To znamená, že  $F$  je sudý faktor, právě když je kolmý na všechny hvězdy. Jinak řečeno:

**Věta 10.9** *Prostor kružnic  $\mathcal{C}(G)$  je ortogonálním doplňkem prostoru řezů  $\mathcal{R}(G)$ .*

**Důkaz.** Prvky prostoru  $\mathcal{C}(G)$  jsou právě sudé faktory. Víme, že  $F \in \mathcal{C}(G)$ , právě když  $F$  je kolmý na každou hvězdu. Protože prostor řezů  $\mathcal{R}(G)$  je hvězdami generován, platí, že  $F \in \mathcal{C}(G)$ , právě když  $F \perp S$  pro každou separaci  $S \in \mathcal{R}(G)$ . Jinými slovy  $\mathcal{C}(G) = \mathcal{R}(G)^\perp$ .  $\square$

Podle věty 10.6 je  $\dim \mathcal{R}(G) = n - 1$ . Podle věty 10.8 platí  $\dim \mathcal{C}(G) + \dim \mathcal{R}(G) = m$ . V důsledku dostáváme:

**Věta 10.10** *Dimenze prostoru kružnic je  $m - n + 1$ .*  $\square$

**Důsledek 10.11** *Souvislý graf  $G$  má  $2^{m-n+1}$  sudých faktorů.*  $\square$

## Cvičení

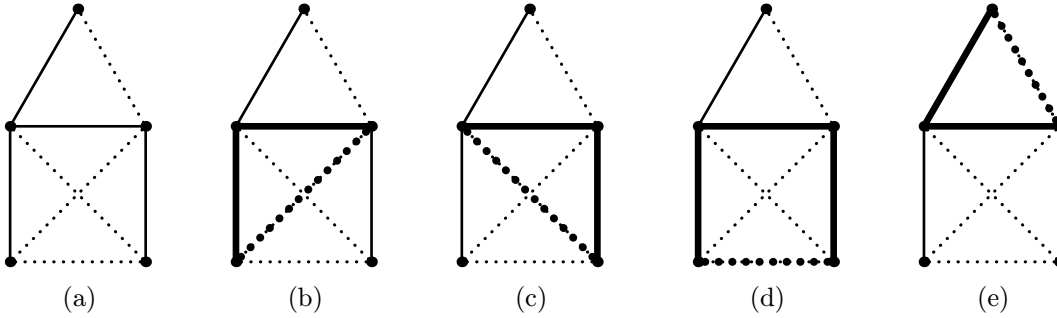
► **10.7** Dokažte, že ortogonální doplněk  $W^\perp$  podprostoru  $W \subset \mathbf{Z}_2^m$  je rovněž podprostorem.



## 10.6 Fundamentální soustavy kružnic a řezů

Určili jsme přesně dimenzi prostoru kružnic a prostoru řezů. V tomto odstavci ukážeme způsob, jak snadno najít báze těchto prostorů, navíc v pěkném speciálním tvaru. Nechť  $G$  je souvislý graf. Zvolme pevně nějakou jeho kostru  $T$ . Hrany  $e \in E(G) - E(T)$  se nazývají *tětivy* kostry  $T$ . Je jich  $m - n + 1$ , protože každý strom na  $n$  vrcholech má  $n - 1$  hran, přičemž počet všech hran grafu  $G$  je  $m$ .

Víme, že stromy jsou charakterizovány vlastností, že každé dva jejich vrcholy jsou spojeny právě jednou cestou. Odtud plyne, že přidáme-li ke kostře  $T$  tětivu  $e_j$ , výsledný graf  $T + e_j$  bude obsahovat právě jednu kružnici. Označme tuto kružnici  $C_j$ . Soubor všech kružnic  $C_j$ , kde  $e_j$  probíhá tětivy kostry  $T$ , se nazývá *fundamentální soustava kružnic* grafu  $G$  vzhledem ke kostře  $T$ . Příklad takové soustavy je na obr. 10.5.



Obrázek 10.5: (a) Graf s plně vyznačenou kostrou, (b)–(e) jeho fundamentální soustava kružnic (kružnice tučně).

**Tvrzení 10.12** *Fundamentální soustava kružnic vzhledem ke kostře  $T$  tvoří bázi prostoru kružnic  $\mathcal{C}(G)$ .*

**Důkaz.** Nechť  $\mathcal{F}$  je fundamentální soustava kružnic vzhledem ke kostře  $T$ . Všimněme si, že každá tětiva  $e_j$  kostry  $T$  je obsažena v jediném prvku systému  $\mathcal{F}$  (totiž ve faktoru  $C_j$ ). Množina  $\mathcal{F}$  tedy musí být lineárně nezávislá, protože pro každý člen  $C_k$  v součtu  $\sum_j C_j$  (kde  $e_j$  probíhá některé tětivy) je  $k$ -tá složka výsledného vektoru nenulová.

Našli jsme tedy  $m - n + 1$  lineárně nezávislých prvků prostoru  $\mathcal{C}(G)$ , a protože víme, že dimenze tohoto prostoru je  $m - n + 1$ , musí jít o bázi.  $\square$

Podobný postup lze aplikovat v případě prostoru řezů. Nechť  $e_j$  je některá z hran kostry  $T$ . Odstraníme-li ji, výsledný graf  $T - e_j$  bude nesouvislý (to snadno plyne z vlastností stromů) a bude mít právě 2 komponenty. Definujme  $R_j$  jako faktor sestávající ze všech hran grafu  $G$ , které vedou mezi komponentami grafu  $T - e_j$ . Snadno se nahlédne, že jeho množina hran je řez. Kostra  $T$  má  $n - 1$

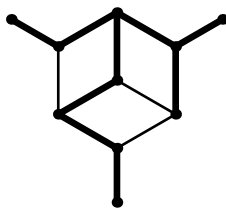
hran, takže tímto způsobem dostaneme  $n - 1$  faktorů, které dohromady tvoří *fundamentální soustavu řezů* vzhledem ke kostře  $T$ .

Každá hrana  $e_j \in E(T)$  je hranou jediného faktoru z této fundamentální soustavy řezů, totiž faktoru  $R_j$  (cvičení 10.9). Odtud opět plyne, že fundamentální soustava řezů je lineárně nezávislá, a protože  $\dim \mathcal{R}(G) = n - 1$ , dostáváme:

**Tvrzení 10.13** *Fundamentální soustava řezů vzhledem ke kostře  $T$  tvoří bázi prostoru řezů  $\mathcal{R}(G)$ .*

## Cvičení

► **10.8** Určete fundamentální soustavu kružnic a fundamentální soustavu řezů grafu na obr. 10.6 vzhledem k vyznačené kostře.



Obrázek 10.6: Graf ke cvičení 10.8 s tučně vyznačenou kostrou.

► **10.9** Dokažte, že každá hrana kostry  $T$  je obsažena v právě jednom faktoru z příslušné fundamentální soustavy řezů.

## 10.7 Nesouvislé grafy

Doposud jsme se zabývali souvislými grafy. Naše úvahy lze uplatnit i na grafy nesouvislé. Nechť graf  $G$  má  $k$  komponent  $C_1, \dots, C_k$ . Zvolme v každé z nich nějakou její kostru  $T_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ). Graf  $G$  tak bude obsahovat  $n - k$  hran, které patří do nějakého  $T_i$ , a  $m - n + k$  hran, které do žádné ze zvolených ‘koster’ nepatří. Stejně jako dříve obdržíme fundamentální soustavu kružnic o  $m - n + k$  prvcích a fundamentální soustavu řezů o  $n - k$  prvcích. (Ta již není tvořena řezy, které jsme definovali jen v souvislých grafech, ale obecněji separacemi.)

Protože věta 10.9 platí beze změny, dostáváme, že naše fundamentální soustavy jsou i zde bázemi příslušných prostorů.

**Věta 10.14** *Má-li graf  $G$   $k$  komponent, pak  $\dim \mathcal{C}(G) = m - n + k$  a  $\dim \mathcal{R}(G) = n - k$ . □*

## Cvičení

- **10.10** Provedte podrobně důkaz věty 10.14.

