Kapitola 11

Vzdálenost v grafech

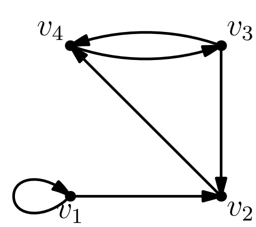
V každém grafu lze přirozeným způsobem definovat vzdálenost libovolné dvojice vrcholů. Hlavním výsledkem této kapitoly je překvapivé tvrzení, podle kterého lze vzdálenosti v grafu zjistit z mocnin jeho matice sousednosti.

11.1 Matice sousednosti a počty sledů

Definice 11.1 Nechť G je orientovaný graf na vrcholech $\{v_1, \ldots, v_n\}$. *Matice sousednosti* grafu G je reálná matice o rozměrech $n \times n$, definovaná předpisem $S(G) = (\sigma_{ij})$, kde

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{pokud } v_i v_j \in E(G), \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

pro $i, j = 1, \ldots, n$.



Obrázek 11.1: Orientovaný graf.

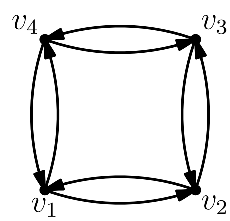
Například graf na obr. 11.1 má matici sousednosti

$$S(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Matice sousednosti *neorientovaného* grafu je definována jako matice sousednosti jeho symetrické orientace. (Připomeňme, že symetrická orientace je orientovaný graf, který vznikne, pokud každou hranu nahradíme dvojicí protichůdných orientovaných hran.)

Při počítání matice sousednosti například pro neorientovaný cyklus C_4 o délce 4 musíme tedy přejít k orientovanému grafu na obr. 11.2 a zjistíme, že matice sousednosti je

$$S(C_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$



Obrázek 11.2: Symetrická orientace cyklu délky 4.

Z matice $S(G)$ lze poměrně jednoduše zjistit počet všech sledů se zadaným začátkem, koncem a délkou v orientovaném grafu G. Pro $k > 0$ budeme symbolem $\sigma_{ij}^{(k)}$ označovat prvek na pozici (i, j) v k-té mocnině matice $S(G)$. Nultá mocnina této matice je definována jako jednotková matice E_n. Pro vrcholy $x, y \in V(G)$ budeme pojmem *xy-sled* rozumět sled z x do y v grafu G.

Věta 11.2 *Nechť G je orientovaný graf a $k \geq 0$. Prvek $\sigma_{ij}^{(k)}$ matice $(S(G))^k$ je roven počtu v_iv_j-sledů délky přesně k v grafu G.*

Důkaz. Označme počet v_iv_j-sledů délky k jako P_{ij}^k. Dokazujeme tedy, že $P_{ij}^k = \sigma_{ij}^{(k)}$. Pro stručnost budeme psát $E = E(G)$. Důkaz provedeme indukcí podle k.

Pro $k = 0$ je matice $(S(G))^k$ rovna jednotkové matici, takže $\sigma_{ij}^{(0)} = 1$, právě když $i = j$. Na druhou stranu sled délky 0 z v_i do v_j existuje, právě když $i = j$, a pak je právě jeden. Odtud $P_{ij}^0 = \sigma_{ij}^{(0)}$. Případ $k = 0$ je tedy probrán.

Nechť je tvrzení dokázáno pro $k' < k$. Uvažme libovolný v_iv_j-sled

$$(z_0, z_1, \ldots, z_{k-1}, z_k)$$

délky k (takže $z_0 = v_i$ a $z_k = v_j$). Vynecháme-li poslední vrchol, dostaneme v_iz_{k-1}-sled délky $k - 1$, z jehož posledního vrcholu vede hrana do v_j. Naopak každý sled délky $k - 1$, který začíná ve vrcholu v_i a končí ve vrcholu, ze kterého vede hrana do v_j, určuje v_iv_j-sled délky k. Jak lze snadno ověřit, jedná se o bijektivní vztah mezi sledy těchto dvou typů.

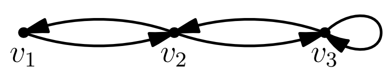
Počet v_iv_j-sledů délky k je tedy roven celkovému počtu v_iv_ℓ-sledů délky $k-1$, kde v_ℓ probíhá všechny vrcholy s vlastností $v_\ell v_j \in E$. Proto platí

$$\begin{aligned} P_{ij}^k &= \sum_{v_\ell\colon\ v_\ell v_j \in E} P_{i\ell}^{k-1} = \sum_{v_\ell\colon\ v_\ell v_j \in E} \sigma_{i\ell}^{(k-1)} \\ &= \sum_{\ell=1}^{n} \sigma_{i\ell}^{(k-1)} \cdot \sigma_{\ell j}^{(1)} \\ &= \sigma_{ij}^{(k)}, \end{aligned}$$

kde druhá rovnost plyne z indukčního předpokladu a poslední z definice násobení matic $(S(G))^{k-1}$ a $S(G)$. $\square$

Uvažme jako příklad sledy délky 3 v orientovaném grafu G na obr. 11.3. Jeho matice sousednosti a třetí mocnina této matice vypadají takto:

$$S(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (S(G))^3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$



Obrázek 11.3: Orientovaný graf na 3 vrcholech.

Z matice $(S(G))^3$ lze například vyčíst, že v grafu G existuje jeden v_3v_1-sled délky 3 (totiž $v_3v_3v_2v_1$) nebo tři v_2v_3-sledy délky 3: jsou to $v_2v_1v_2v_3$, $v_2v_3v_2v_3$ a $v_2v_3v_3v_3$.

Příklad 11.3 Uvažme neorientovanou kružnici C_4 délky 4 s vrcholy očíslovanými proti směru hodinových ručiček. Určeme počty sledů délky 4 mezi různými dvojicemi vrcholů v tomto grafu. Matici sousednosti grafu C_4 jsme našli na začátku kapitoly (přechodem k symetrické orientaci). Snadno spočítáme, že

$$(S(C_4))^4 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \\ 8 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 8 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že pro sousední vrcholy v_i, v_j neexistuje žádný v_iv_j-sled délky 4, zatímco pokud $i = j$ nebo v_i a v_j jsou protilehlé, pak počet takových sledů je 8. Například (uzavřené) sledy z v_1 do v_1 délky 4 jsou: $v_1v_2v_1v_2v_1$, $v_1v_4v_1v_4v_1$, $v_1v_2v_3v_4v_1$, $v_1v_4v_3v_2v_1$, $v_1v_2v_3v_2v_1$, $v_1v_4v_3v_4v_1$, $v_1v_2v_1v_4v_1$ a $v_1v_4v_1v_2v_1$.

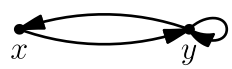
Cvičení

▶ **11.1** Nechť $L(G)$ je Laplaceova matice neorientovaného grafu G (viz kapitola 9). Určete součet $L(G) + S(G)$.

▶ **11.2** Kolik sledů délky 4 z v_2 do v_2 existuje v grafu na obr. 11.3? Najděte je.

▶▶ **11.3** Nechť F_k je počet xy-sledů délky k v grafu na obr. 11.4. Určete rekurentní vztah pro posloupnost $(F_1, F_2, \dots)$.

Nápověda: Tato posloupnost se nazývá *Fibonacciho posloupnost*, podrobnosti viz [8].



Obrázek 11.4: Určete počet xy-sledů.

11.2 Vzdálenost

Definice 11.4 *Vzdálenost* $d(x, y)$ vrcholů x, y orientovaného grafu G je délka nejkratší cesty z x do y. Pokud taková cesta neexistuje, položíme $d(x, y) = \infty$.

Pojem vzdálenosti je zde definován pro orientované grafy. Pro grafy neorientované jej můžeme definovat prostřednictvím symetrické orientace. Vzdálenost vrcholů v neorientovaném grafu G je tak jejich vzdálenost v symetrické orientaci tohoto grafu. (Podobně je tomu i u dalších pojmů v tomto oddílu, které nebudeme explicitně definovat pro neorientované grafy.)

Vzdálenost v neorientovaných grafech má vlastnosti metriky.

Tvrzení 11.5 *Nechť G je souvislý neorientovaný graf. Pak funkce $d(x, y)$ je* metrikou *na množině $V(G)$, tj. má následující vlastnosti:*

(1) $d(x, y) \geq 0$, *přičemž* $d(x, y) = 0$, *právě když* $x = y$,

(2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ *('trojúhelníková nerovnost').*

Důkaz. Cvičení 11.4. □

Definice 11.6 *Distanční matice* orientovaného grafu G s vrcholy $v_1, \dots, v_n$ je matice

$$D(G) = \Big(d(v_i, v_j)\Big)_{i,j=1}^{n}$$

o rozměrech $n \times n$.

Například distanční matice grafu G na obr. 11.1 je

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ \infty & 0 & 2 & 1 \\ \infty & 1 & 0 & 1 \\ \infty & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Distanční matice neorientovaného grafu je definována jako distanční matice jeho symetrické orientace.

Viděli jsme, že matice sousednosti a její mocniny umožňují zjistit počet sledů dané délky mezi dvěma vrcholy. Snadno odvodíme následující tvrzení, ve kterém symbol $\sigma_{ij}^{(k)}$ nadále představuje prvek na pozici (i,j) v k-té mocnině matice sousednosti $S(G)$.

Tvrzení 11.7 *Prvek $d(v_i, v_j)$ distanční matice $D(G)$ je roven nejmenšímu k, pro které $\sigma_{ij}^{(k)} \neq 0$ (případně ∞, pokud takové k neexistuje).*

Důkaz. Nechť M je množina všech k, pro které $\sigma_{ij}^{(k)} \neq 0$. Cesta z v_i do v_j existuje právě tehdy, když existuje nějaký sled z v_i do v_j. Řečeno obráceně, $d(v_i, v_j) = \infty$, právě když $M = \emptyset$. Jsou-li splněny tyto podmínky, tvrzení platí.

Nechť tedy délka nejkratšího sledu z v_i do v_j je k_0. Je jasné, že k_0 je nejmenší prvek množiny M. Z cvičení 8.3 víme, že nejkratší sled z v_i do v_j je nutně cestou, takže také $d(v_i, v_j) = k_0$. Důkaz je hotov. □

Z uvedeného tvrzení dostáváme horní odhad časové složitosti nalezení distanční matice (připomeňme, že o časové složitosti jsme hovořili v oddílu 6.7). Vzhledem k tomu, že vzdálenost libovolných dvou vrcholů je buď menší než n, nebo nekonečná (graf na n vrcholech neobsahuje žádnou cestu délky $\geq n$), stačí pro zjištění matice $D(G)$ spočítat $n-1$ mocnin matice sousednosti $S(G)$. Výpočet každé mocniny spočívá ve vynásobení dvou matic o rozměrech $n \times n$, které vyžaduje $O(n^3)$ aritmetických operací. Celková doba výpočtu tak bude $O(n^4)$.

Ukažme si aplikaci tvrzení 11.7 na grafu G z obr. 11.1. Jeho distanční matici jsme sice odvodili i přímo z definice, u větších grafů je však mnohem jednodušší použít následující obecný postup. Spočítáme první čtyři mocniny matice sousednosti (včetně nulté). Jednotlivé prvky jsou zvýrazněny v nejnižší mocnině, kde jsou nenulové:

$$(S(G))^0 = \begin{bmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \end{bmatrix}, \qquad (S(G))^1 = \begin{bmatrix} 1 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{1} \\ 0 & \underline{1} & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$(S(G))^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \underline{1} \\ 0 & 0 & \underline{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad (S(G))^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \underline{1} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pro každý prvek nyní zapíšeme, ve které mocnině je zvýrazněn; dostaneme distanční matici $D(G)$. Všimněme si, že u prvků, které jsou nulové ve všech $(S(G))^k$ pro $k < n$, můžeme psát ∞.

$$D(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 2 \\ \infty & 0 & 2 & 1 \\ \infty & 1 & 0 & 1 \\ \infty & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Z mocnin matice sousednosti lze algebraickým způsobem určit, zda je daný graf acyklický.

Tvrzení 11.8 *Orientovaný graf G je acyklický, právě když nějaká mocnina jeho matice sousednosti je nulová.*

Důkaz. '$\Rightarrow$': V acyklickém grafu je každý sled cestou. Má-li graf n vrcholů, pak v něm neexistuje cesta na $n+1$ vrcholech (cesta délky n), a tedy ani žádný sled délky n. Podle věty 11.2 je $(S(G))^n = \mathbf{0}$.

'$\Leftarrow$': Nechť $(S(G))^k = \mathbf{0}$. Podle věty 11.2 v grafu G neexistuje žádný sled délky k. Pokud ovšem G obsahuje nějaký cyklus C, obsahuje také sledy všech délek (stačí obcházet C kolem dokola). Graf G tedy musí být acyklický. □

Časová složitost testování acykličnosti grafu s využitím tvrzení 11.8 je zhruba n^4 (každé z n násobení matic vyžaduje přibližně n^3 operací), takže tento postup je pomalejší než algoritmus popsaný v oddílu 8.3. Tvrzení je zajímavé spíše z opačného hlediska: umožňuje použít grafy ke zjištění, zda matice s prvky 0 a 1 má nějakou nulovou mocninu, a to rychleji než pomocí násobení matic.

Cvičení

▶ **11.4** Dokažte tvrzení 11.5.

▶ **11.5** Určete distanční matici neorientované kružnice C_n a orientovaného cyklu $\vec{C}_n$ na n vrcholech.

▶ **11.6** Dokažte, že leží-li vrcholy v_i, v_j v různých kvazikomponentách orientovaného grafu G, pak $d(v_i, v_j) = \infty$ nebo $d(v_j, v_i) = \infty$.

▶ **11.7** Jak lze z distanční matice orientovaného grafu poznat, zda je graf silně souvislý?