Kapitola 5

Grafy

Touto kapitolou začíná druhá část našeho textu, která je věnována teorii grafů. Seznámíme se v ní s některými základními grafovými pojmy.

5.1 Definice

Definice 5.1 *Graf* G je dvojice $G = (V, E)$, kde V je konečná množina a $E \subset \binom{V}{2}$, přičemž

$$\binom{V}{2} = \{\{x, y\} : x, y \in V \text{ a } x \neq y\}$$

je množina všech dvouprvkových množin (*neuspořádaných dvojic*) prvků množiny V. Prvky množiny[1] V nazýváme *vrcholy* (často také *uzly*), prvky množiny E pak *hrany* grafu G. Vrcholy $x, y \in V$ jsou *sousední*, pokud $\{x, y\} \in E$.

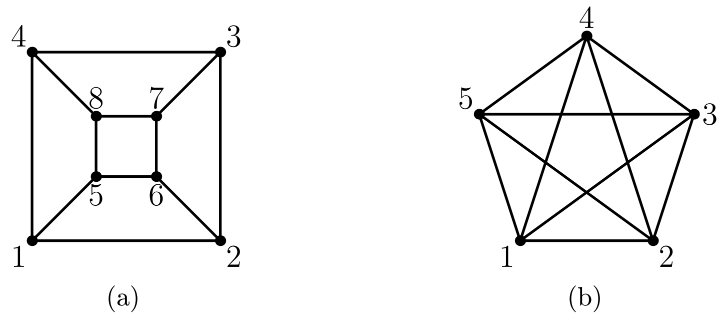
V obvyklém znázornění grafu jsou vrcholy zastoupeny body v rovině a každá hrana $\{x, y\}$ čarou spojující příslušnou dvojici bodů jako na obr. 5.1.

Potřebujeme-li se odkázat na množinu vrcholů resp. hran nějakého grafu G, použijeme zápis $V(G)$ resp. $E(G)$.

Všimněme si, že naše definice grafu neumožňuje, aby mezi dvěma vrcholy vedla více než jedna hrana (tzv. *násobné hrany*). Nepovoluje také tzv. *smyčky*, tj. hrany, které spojují vrchol se sebou samým. V některých situacích je vhodnější uvažovat grafy, které násobné hrany nebo smyčky mají. My se však zatím přidržíme naší jednoduché definice.

Další důležité zjištění je, že naše grafy jsou *neorientované*, jejich hrany nemají směr, protože jsou definovány jako *neuspořádané* dvojice vrcholů. Někdy budeme pro jednoduchost zapisovat hranu $\{x, y\}$ prostě jako xy; je ale třeba mít na paměti, že v neorientovaném grafu není rozdíl mezi hranami xy a yx.

[1] Ustálené označení V, E pochází z anglické terminologie: anglický termín pro vrchol je *vertex*, pro hranu *edge*.



Obrázek 5.1: Příklady grafů.

Budeme také uvažovat především o *konečných* grafech, tedy takových, jejichž množina vrcholů je konečná. (Musí pak být konečná i množina hran?)

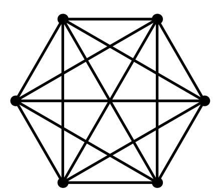
Pojem neorientovaného grafu je velice blízko pojmu symetrické relace. Je-li R antireflexívní[2] symetrická relace na množině X, pak jí lze přiřadit neorientovaný graf G s množinou vrcholů $V(G) = X$, ve kterém prvky $x, y \in X$ jsou spojeny hranou (tedy $\{x, y\} \in E(G)$), pokud $x\,R\,y$. Tato korespondence platí i opačně. Lze dokonce i odstranit požadavek antireflexivity, pokud ovšem v grafu G povolíme smyčky.

5.2 Některé základní grafy

Ukážeme si příklady grafů, které jsou natolik důležité, že si zasloužily vlastní jména a označení. Nechť n je přirozené číslo a označme $[n] = \{1, \ldots, n\}$. Všechny dále definované grafy mají množinu vrcholů $[n]$.

Úplný graf na n vrcholech (značí se K_n) obsahuje jako hrany všechny neuspořádané dvojice prvků $[n]$, takže

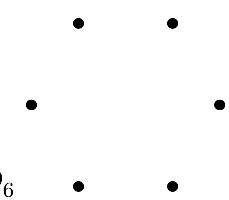
$$V(K_n) = [n],$$
$$E(K_n) = \binom{[n]}{2}.$$



K_6

Diskrétní graf D_n na n vrcholech nemá žádné hrany:

$$V(D_n) = [n],$$
$$E(D_n) = \emptyset.$$

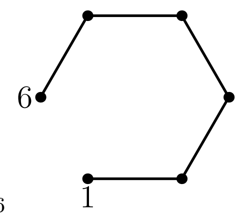


D_6

[2] Relace R je *antireflexívní*, pokud pro žádné x neplatí $x\,R\,x$.

Cesta P_n na n vrcholech je definována takto:

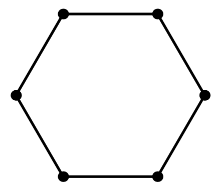
$$V(P_n) = [n],$$
$$E(P_n) = \{\{i, i+1\} : 1 \leq i < n\}.$$



P_6

Kružnice C_n na $n \geq 3$ vrcholech vznikne přidáním jedné hrany:

$$V(C_n) = [n],$$
$$E(C_n) = E(P_n) \cup \{\{1, n\}\}.$$



C_6

5.3 Isomorfismus a podgrafy

Podívejme se na dvojici grafů G, H, znázorněných na obr. 5.2. Jsou to rozhodně různé grafy. Nejde ani tak o to, že se liší způsob nakreslení — každý graf lze nakreslit mnoha způsoby, a nezáleží na tom, zda jsou čáry představující hrany rovné či zda se třeba kříží.

Grafy G, H jsou nicméně různé už proto, že mají různé množiny vrcholů

$$V(G) = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{a} \quad V(H) = \{a, b, c, d, e\}.$$

Nemůže tedy jít o *totožné* grafy.

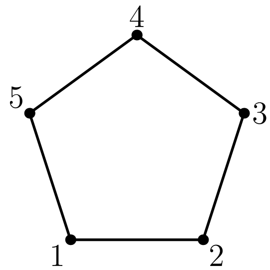
Je to ale jediný rozdíl? Jinými slovy, bylo by možné vrcholy grafu H 'přeznačit' tak, abychom dostali přesně graf G? Tato otázka směřuje k pojmu isomorfismu grafů. Čtenáře, který zná definici isomorfismu grup (kap. 2) nebo uspořádaných množin (kap. 4) by definice pro grafy neměla překvapit.

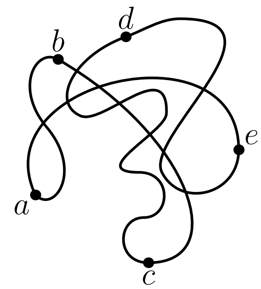
Definice 5.2 *Isomorfismus* grafů G a H je bijekce $f : V(G) \to V(H)$, pro kterou platí, že dvojice $\{x, y\}$ je hranou grafu G, právě když dvojice $\{f(x), f(y)\}$ je hranou grafu H. Grafy G, H, mezi kterými existuje isomorfismus, jsou *isomorfní* (psáno $G \simeq H$).

Grafy na obr. 5.2 isomorfní jsou: stačí uvážit bijekci, která prvky $1, 2, 3, 4, 5$ zobrazí po řadě na prvky a, b, c, d, e. (Ověřte podmínku v definici isomorfismu.) Tyto grafy ovšem nejsou isomorfní s žádným z grafů na obr. 5.1.

Následující definice popisuje situaci, kdy je jeden graf 'obsažen' v grafu jiném.

Definice 5.3 Graf H je *podgrafem* grafu G (psáno $H \subset G$), pokud $V(H) \subset V(G)$ a $E(H) \subset E(G)$.





Obrázek 5.2: Různé, ale isomorfní grafy.

Silnější variantou pojmu podgrafu je pojem indukovaného podgrafu, u kterého vyžadujeme, aby obsahoval všechny hrany, které ve ‘větším’ grafu na dané množině vrcholů existují:

Definice 5.4 Graf H je *indukovaným podgrafem* grafu G, pokud $V(H) \subset V(G)$ a $E(H) = E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$. Každá množina $X \subset V(G)$ tedy určuje právě jeden indukovaný podgraf H grafu G takový, že $V(H) = X$. Tomuto podgrafu říkáme *indukovaný podgraf na množině* X.

Graf na obr. 5.2a je například podgrafem grafu na obr. 5.1b, ale není jeho indukovaným podgrafem.

Cvičení

▶ **5.1** Dokažte, že konečné grafy s různým počtem vrcholů nemohou být isomorfní.

▶ **5.2** Dokažte, že relace ‘býti isomorfní’ na množině všech konečných grafů je ekvivalence.

▶ **5.3** Najděte isomorfismus mezi grafy na obr. 5.3. (Poznamenejme, že graf, který je s nimi isomorfní, se obvykle označuje symbolem $K_{3,3}$.)

▶ **5.4** Kolik hran mají grafy K_n, D_n, P_n a C_n?

▶▶ **5.5** Buď G neorientovaný graf (bez smyček a násobných hran) na 6 vrcholech. Dokažte, že G obsahuje množinu U tří vrcholů takovou, že indukovaný podgraf na U je buď diskrétní nebo úplný graf. (Jde o velmi speciální případ slavné *Ramseyovy věty*.)

Obrázek 5.3: Dva isomorfní grafy.

5.4 Stupně

Definice 5.5 *Stupeň* vrcholu v grafu G je počet hran grafu G, které obsahují vrchol v. Značí se $d_G(v)$.

V grafu G_1 na obr. 5.1a je například $d_{G_1}(v) = 3$ pro každý vrchol v.

Pozorování 5.6 *V grafu o n vrcholech je stupeň každého vrcholu nejvýše $n-1$.*

Následující zajímavá věta říká, že žádný graf nemůže mít lichý počet vrcholů lichého stupně. V angličtině se jí někdy říká *Handshaking lemma*, lemma o podání ruky, protože ji můžeme parafrázovat následovně. Dejme tomu, že na nějaké oslavě se hosté navzájem vítají podáním ruky, ne však nutně každý s každým (třeba proto, že se všichni neznají). Pak počet lidí, kteří si potřesou rukou s lichým počtem osob, bude za všech okolností sudý.

Věta 5.7 *Počet vrcholů lichého stupně je v každém grafu sudý.*

Důkaz. Nechť S je součet stupňů všech vrcholů v grafu G:

$$S = \sum_{v \in V(G)} d_G(v).$$

Každá dvojice (v, e), kde e je hrana obsahující vrchol v, k číslu S přispěje jedničkou. Každá hrana má ovšem dva konce a přispívá tak právě dvakrát. Jinak řečeno,

$$S = 2m,$$

kde m je počet hran grafu G. Číslo S je tedy sudé a z toho už plyne tvrzení věty. $\square$

Cvičení

► **5.6** Určete stupně vrcholů v grafech K_n, D_n, P_n a C_n.

5.5 Soubor stupňů

Nechť G je graf (i nadále bez smyček a násobných hran). *Soubor stupňů* nebo také *skóre* grafu G je posloupnost čísel, kterou získáme, když seřadíme stupně všech vrcholů v grafu G od největšího k nejmenšímu. Například skóre grafu na obr. 7.1(a) je $(3, 1, 1, 1)$ a graf na obr. 7.1(b) má skóre $(2, 2, 2, 1, 1)$.

Budeme se zabývat především otázkou, které nerostoucí posloupnosti čísel jsou *grafové*, tj. mají tu vlastnost, že jsou souborem stupňů nějakého grafu. Je totiž jasné, že některé nerostoucí posloupnosti čísel grafové nejsou, třeba $(6, 6, 6)$ nebo $(2, 3)$. Na druhou stranu, jak ukazuje cvičení 5.8, jedné grafové posloupnosti může obecně odpovídat několik neisomorfních grafů.

Při letmém pohledu na cvičení 5.10 se ukazuje, že zodpovězení této otázky metodou pokusu a omylu může být náročný úkol (zkuste to!). Účinným nástrojem je však následující věta.

Věta 5.8 *Nechť* $\mathbf{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ *je nerostoucí posloupnost a* $n \geq 2$. *Posloupnost* $\mathbf{d}$ *je grafová, právě když je grafová posloupnost*

$$\mathbf{d}' = (d_2 - 1, d_3 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n).$$

Důkaz. '$\Leftarrow$': Nechť je dána posloupnost $\mathbf{d}$ a nechť $\mathbf{d}'$ je skóre grafu G'. Přidejme ke grafu G' nový vrchol v a spojme jej hranami s d_1 vrcholy nevyšších stupňů. Výsledný graf má skóre $\mathbf{d}$.

'$\Rightarrow$': Dejme tomu, že $\mathbf{d}$ je skóre grafu G. Přímočarým odstraněním vrcholu w s nejvyšším stupněm bohužel nemusíme dostat graf se skóre $\mathbf{d}'$ — k tomu bychom potřebovali, aby sousedy vrcholu w bylo d_1 vrcholů, jejichž stupně jsou nejvyšší hned po w. Naší strategií proto bude upravit G na graf se stejným skóre, který tuto vlastnost má.

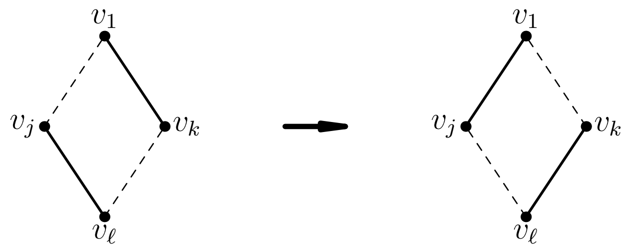
Nechť H je libovolný graf se skóre $\mathbf{d}$. Seřaďme jeho vrcholy do posloupnosti $(v_1, \ldots, v_n)$ tak, že stupeň vrcholu v_i je d_i (jinak na výběru seřazení nezáleží). Definujme *kvalitu* $q(H)$ grafu H jako největší i, pro které platí, že vrchol v_1 sousedí se všemi vrcholy $v_2, \ldots, v_i$. (Pokud jsou nesousední již vrcholy v_1, v_2, položíme $q(H) = 1$.) Nechť H_0 je graf s nejvyšší možnou kvalitou mezi všemi grafy se skóre $\mathbf{d}$.

Předpokládejme, že $q(H_0)$ je nejvýše d_1. Mezi d_1 vrcholy $v_2, \ldots, v_{d_1+1}$ je tedy vrchol v_j, který nesousedí s vrcholem v_1. Protože stupeň vrcholu v_1 je d_1, musí nutně existovat nějaký jeho soused v_k, kde $k > d_1 + 1$. Tvrdíme, že existuje vrchol v_ℓ s vlastností

$$v_j v_\ell \in E(H), \quad \text{ale} \quad v_k v_\ell \notin E(H). \tag{5.1}$$

Jinak by totiž každý soused vrcholu v_j byl i sousedem vrcholu v_k a s ohledem na vrchol v_1 bychom dostali $d_j < d_k$. To je nemožné, protože $j < k$ a posloupnost $\mathbf{d}$ je nerostoucí. Vrchol v_ℓ s vlastností (5.1) tedy existuje.

Vrcholy v_1, v_j, v_k a v_ℓ tvoří 'konfiguraci' na levé straně obr. 5.4. Pokud hrany $v_1 v_k$ a $v_j v_\ell$ nahradíme v grafu H_0 hranami $v_1 v_j$ a $v_k v_\ell$, stupně vrcholů (a tedy



Obrázek 5.4: Zvýšení kvality grafu v důkazu věty 5.8. Hrany jsou znázorněny plně, 'nehrany' čárkovaně.

ani skóre) se nezmění, ale kvalita výsledného grafu bude vyšší. To je spor s maximalitou $q(H_0)$.

Dokázali jsme, že $q(H_0) > d_1$, takže vrchol v_1 sousedí s vrcholy $v_2, \ldots, v_{d_1+1}$. Nyní ovšem graf vzniklý odstraněním vrcholu v_1 z grafu H_0 má skóre $\mathbf{d}'$. Posloupnost $\mathbf{d}'$ je tedy grafová, což jsme chtěli dokázat. $\square$

Cvičení

▶ **5.7** Zjistěte skóre grafů:

(a) úplný bipartitní graf $K_{p,q}$ (p červených a q modrých vrcholů, každé dva různobarevné jsou spojeny hranou),

(b) Hasseův diagram Booleovy algebry 2^X, kde $X = \{1, \ldots, k\}$.

▶ **5.8** Najděte dvojici neisomorfních grafů se stejným skóre.

▶ **5.9** Pro která n existuje graf se skóre $(n, n-1, \ldots, 1)$?

▶ **5.10** Rozhodněte, zda následující posloupnost je souborem stupňů nějakého grafu, a případně takový graf najděte:

(a) $(5, 5, 4, 4, 3, 3)$,

(b) $(5, 5, 5, 4, 4, 3, 2)$.

(c) $(7, 6, 6, 5, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 2)$,

▶▶ **5.11** Graf je *k-regulární*, pokud všechny jeho vrcholy mají stupeň k.

(a) Dokažte, že na n vrcholech existuje 3-regulární graf, právě když n je sudé.

(b) Charakterizujte dvojice (n, k) s vlastností, že existuje nějaký k-regulární graf na n vrcholech.