

# Kapitola 6

## Cesty v grafu

Tématem této kapitoly jsou cesty v grafech a různé jejich modifikace. Pomocí cest zavedeme souvislé grafy a odvodíme některé jejich vlastnosti. Představíme rovněž eulerovské a hamiltonovské grafy a prozkoumáme překvapivý rozdíl v obtížnosti algoritmického rozpoznávání grafů z těchto dvou tříd.

### 6.1 Sled, cesta a tah

**Definice 6.1** *Sled* (z vrcholu  $u$  do vrcholu  $v$ ) v grafu  $G$  je libovolná posloupnost  $(u = v_0, v_1, \dots, v_k = v)$ , kde  $v_i$  jsou vrcholy grafu  $G$  a pro každé  $i = 1, \dots, k$  je  $v_{i-1}v_i$  hranou grafu  $G$ . Číslo  $k$  je *délka* tohoto sledu. Říkáme, že sled *prochází* vrcholy  $v_0, \dots, v_k$  nebo že na něm tyto vrcholy *leží*.

Sled je tedy jakási procházka po grafu, při které v každém kroku přecházíme po hraně mezi sousedními vrcholy. V rámci této procházky můžeme libovolný vrchol navštívit vícekrát, můžeme dokonce i projít vícekrát po téže hraně.

**Definice 6.2** *Cesta* z  $u$  do  $v$  v grafu  $G$  je sled  $(u = v_0, v_1, \dots, v_k = v)$ , ve kterém se každý vrchol  $v_i$  objevuje pouze jednou.

Za zmínku stojí triviální případ uvedených definic, totiž sled  $(u)$ , kde  $u \in V$ . Jedná se o sled nulové délky z  $u$  do  $u$ , který je zároveň i cestou.

### Cvičení

► **6.1** Uvažme libovolnou cestu  $(v_0, \dots, v_k)$  v grafu  $G$ . Nechť  $V' = \{v_0, \dots, v_k\}$  je množina vrcholů, kterými tato cesta prochází, a  $E' = \{v_{i-1}v_i : i = 1, \dots, k\}$  je množina hran, které používá. Dokažte, že podgraf  $(V', E')$  grafu  $G$  je isomorfní s grafem  $P_{k+1}$  definovaným v oddílu 5.2.

## 6.2 Homomorfismy

Alternativní definice sledu a cesty je založena na pojmu homomorfismus.

**Definice 6.3** *Homomorfismus* grafu  $G$  do grafu  $H$  je zobrazení  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  s vlastností, že pro každou hranu  $xy$  grafu  $G$  je  $f(x)f(y)$  hranou grafu  $H$ . (Zápis  $f(x)f(y)$  samozřejmě označuje dvojici  $\{f(x), f(y)\}$ .)

Všimněme si, že oproti pojmu isomorfismus z oddílu 5.3 nemusí  $f$  být bijekce a že namísto ekvivalence je zde vyžadována jediná implikace.

Nyní již můžeme podat alternativní definici sledu v grafu  $G$ : je to libovolný homomorfismus nějaké cesty  $P_k$  (viz oddíl 5.2) do  $G$ . Rozdíl oproti definici 6.1 je jen formální: posloupnost vrcholů a hran je tu nahrazena zobrazením.

Každý homomorfismus  $f$  grafu  $G$  do grafu  $H$  indukuje zobrazení  $f^* : E(G) \rightarrow E(H)$  předpisem

$$f^*(xy) = f(x)f(y) \in E(H).$$

**Definice 6.4** Nechť  $f$  je homomorfismus grafu  $G$  do grafu  $H$ . Řekneme, že  $f$  je

- *vrcholový monomorfismus*, pokud  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  je prosté zobrazení,
- *vrcholový epimorfismus*, pokud  $f$  je zobrazení na,
- *hranový monomorfismus*, pokud  $f^*$  je prosté,
- *hranový epimorfismus*, pokud  $f^*$  je na.

Cestu v grafu  $G$  nyní můžeme ekvivalentně definovat jako vrcholový monomorfismus nějaké cesty  $P_k$  do grafu  $G$ . Později, např. v oddílu 6.5, se seznámíme s dalšími pojmy, které se dají definovat pomocí homomorfismů.

### Cvičení

► **6.2** Najděte příklad homomorfismu mezi dvěma grafy, který je vrcholovým monomorfismem a hranovým epimorfismem, ale není isomorfismem.

## 6.3 Souvislé grafy

**Definice 6.5** Graf  $G$  je *souvislý*, pokud pro každé dva vrcholy  $x, y$  existuje v grafu  $G$  cesta z  $x$  do  $y$ . V opačném případě je graf  $G$  *nesouvislý*.

Nechť  $G$  je graf s množinou vrcholů  $V$ . Definujme na  $V$  relaci  $\sim$  předpisem

$$x \sim y, \quad \text{pokud v } G \text{ existuje cesta z } x \text{ do } y.$$

Jedná se o ekvivalenci? Určitě je to relace reflexivní (díky existenci cesty délky 0) a symetrická (protože přečteme-li cestu pozpátku, bude to podle definice zase cesta). Pokud jde o tranzitivitu, máme-li cestu z  $x$  do  $y$  a cestu z  $y$  do  $z$ , zdá se jako přirozená idea ‘složením’ těchto cest získat cestu z  $x$  do  $z$ . Potíž je ovšem v tom, že výsledkem složení nemusí být cesta, protože původní dvě cesty se mohou libovolně protínat. Pomůže nám však následující tvrzení.

**Tvrzení 6.6** *Existuje-li v grafu  $G$  sled z vrcholu  $x$  do vrcholu  $y$ , potom  $x \sim y$ .*

**Důkaz.** Chceme ukázat, že existuje-li sled z  $x$  do  $y$ , pak existuje také cesta z  $x$  do  $y$ . Nechť tedy  $(x = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = y)$  je sled z  $x$  do  $y$ , a zvolme jej tak, aby  $k$  bylo nejmenší možné (tj. aby žádný sled z  $x$  do  $y$  neměl menší délku). Tvrdíme, že takovýto minimální sled (označme jej  $S$ ) již musí být cestou.

Dejme tomu, že není. Pak se v něm musí nějaký vrchol opakovat, tj. pro nějaké  $i \neq j$  musí být  $v_i = v_j$ . Pokud z našeho sledu

$$(x = v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \dots, v_k = y)$$

vypustíme část od  $v_{i+1}$  do  $v_j$  včetně, dostaneme posloupnost

$$(x = v_0, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k = y),$$

která je podle definice rovněž sledem (vrcholy  $v_i$  a  $v_{j+1}$  jsou totiž sousední). Navíc jde o sled z  $x$  do  $y$ , který je kratší než  $S$ . To je spor.  $\square$

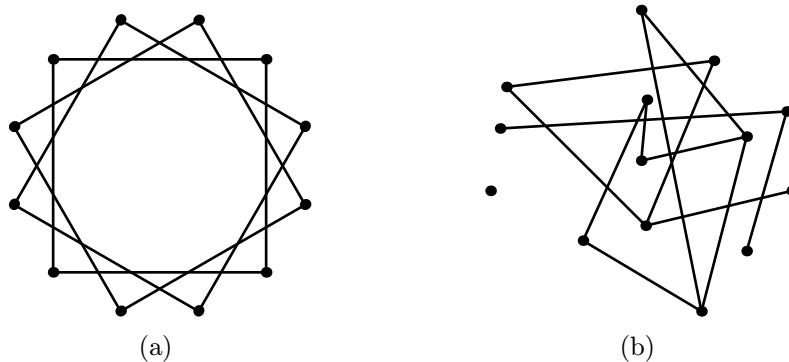
**Důsledek 6.7** *Relace  $\sim$  na množině  $V$  je ekvivalence.*

**Důkaz.** Povšimli jsme si, že reflexivita a symetričnost platí z jednoduchých důvodů. Dokažme tranzitivitu. Předpokládejme  $x \sim y$  a  $y \sim z$ . Nechť  $(x = v_0, \dots, v_k = y)$  je cesta z  $x$  do  $y$  a  $(y = w_0, \dots, w_\ell = z)$  je cesta z  $y$  do  $z$ . Potom posloupnost

$$(x = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = w_0, w_1, \dots, w_{\ell-1}, w_\ell = z)$$

je sled z  $x$  do  $z$  (třebaže to nemusí být cesta) a podle tvrzení 6.6 je  $x \sim z$ .  $\square$

**Definice 6.8** *Komponenty grafu  $G$  jsou všechny indukované podgrafy grafu  $G$  na jednotlivých třídách ekvivalence  $\sim$ .*



Obrázek 6.1: Určete počet komponent.

Je-li tedy  $K$  komponenta grafu  $G$ , pak  $V(K)$  je jednou ze tříd ekvivalence  $\sim$ . Je jasné, že  $K$  je souvislý graf, protože prvky téže třídy libovolné ekvivalence jsou každý s každým v relaci. Na druhou stranu je  $K$  maximální souvislý podgraf grafu  $G$ : nejde jej rozšířit o další vrchol, nemá-li ztratit souvislost. Ze žádného vrcholu komponenty  $K$  totiž nevede hrana do žádného vrcholu mimo ni (cvičení 6.3).

Mohlo by se zdát, že komponenty grafu lze snadno určit ‘na první pohled’, ale u větších nebo nepřehledně zadaných grafů to tak triviální být nemusí (viz cvičení 6.5). Přesto je pravda, že z algoritmického hlediska je určení komponent a testování souvislosti grafu snadným problémem. K oběma účelům lze použít např. Dijkstrův algoritmus, který popíšeme v oddílu 12.2 (viz ale také cvičení 6.7).

## Cvičení

- ▶ **6.3** Dokažte, že je-li  $K$  komponenta grafu  $G$ ,  $u \in V(K)$  a  $v \notin V(K)$ , pak mezi  $u$  a  $v$  není hrana.
- ▶ **6.4** Dokažte, že graf je souvislý právě tehdy, když má jedinou komponentu.
- ▶ **6.5** Určete počet komponent grafů na obr. 6.1.
- ▶▶ **6.6** Cesta  $P$  v grafu  $G$  je *nejdelší*, pokud  $G$  neobsahuje cestu s více vrcholy. Ukažte, že dvě nejdelší cesty v souvislém neorientovaném grafu  $G$  mají společný alespoň jeden vrchol.
- ▶ **6.7** Formulujte algoritmus, který zjistí, zda je zadaný graf souvislý, a případně určí jeho komponenty. Vstupem algoritmu je seznam vrcholů a hran grafu.

## 6.4 Vlastnosti souvislých grafů

**Definice 6.9** Nechť  $v$  je vrchol grafu  $G$ . Graf  $G-v$ , vzniklý *odstraněním* vrcholu  $v$ , je definován jako indukovaný podgraf grafu  $G$  na množině  $V(G) - \{v\}$ .

Následující věta ukazuje, že souvislý graf vždy obsahuje vrchol, jehož odstraněním neztratí souvislost. Její důkaz vtipně používá předpoklad maximality.

**Věta 6.10** *Každý souvislý graf  $G$  obsahuje vrchol  $v$  s vlastností, že  $G-v$  je souvislý graf.*

**Důkaz.** Nechť  $P = (v_0, \dots, v_k)$  je cesta maximální možné délky v grafu  $G$ . Tvrdíme, že vrchol  $v_0$  má požadovanou vlastnost. Dejme tomu, že  $G-v_0$  je nesouvislý graf. Cesta  $P-v_0$  musí zjevně celá ležet v jedné komponentě grafu  $G-v_0$ . Kromě této komponenty existuje alespoň jedna další komponenta  $C$ . Z vrcholu  $v_0$  musí vést do komponenty  $C$  nějaká hrana, což nám umožňuje prodloužit cestu  $P$ . Tím dostáváme spor s maximalitou.  $\square$

Všimněme si, že místo vrcholu  $v_0$  jsme stejně tak mohli zvolit druhý konec cesty  $P$ , vrchol  $v_k$ . Pokud má tedy graf  $G$  více než jeden vrchol, pak existují dokonce alespoň dva vrcholy splňující podmínku věty 6.10.

Zaveďme nyní následující konvenci: bude-li z kontextu jasné, o kterém grafu se hovoří, bude  $n$  označovat *počet jeho vrcholů* a  $m$  *počet jeho hran*.

**Věta 6.11** *V souvislém grafu je  $m \geq n - 1$ .*

**Důkaz.** Větu dokážeme indukcí. Pro  $n = 1$  se jedná o graf na jednom vrcholu, a ten je souvislý. Předpokládejme, že věta platí pro všechny grafy s méně než  $n$  vrcholy, kde  $n > 1$ , a dokažme ji pro libovolný graf  $G$  s  $n$  vrcholy. Nechť  $G$  má  $m$  hran. Podle věty 6.10 v grafu  $G$  existuje vrchol  $v$ , který lze odstranit bez porušení souvislosti. Graf  $G-v$  má  $n' = n - 1$  vrcholů a počet  $m'$  jeho hran je nejvýše  $m - 1$  (do vrcholu  $v$  vedla alespoň jedna hrana). Z indukčního předpokladu je  $m' \geq n' - 1$ , a tedy

$$m \geq m' + 1 \geq (n' - 1) + 1 = n - 1,$$

což jsme chtěli dokázat.  $\square$

Jaký je vztah souvislosti grafu a počtu jeho hran? Intuitivně je zřejmé, že se zvyšujícím se počtem hran roste šance, že graf bude souvislý. Na druhou stranu: přidáme-li k úplnému grafu na  $n - 1$  vrcholech jeden izolovaný vrchol, získáme nesouvislý graf s velmi vysokým počtem hran.

Tomuto příkladu bychom se vyhnuli, kdybychom požadovali, aby každý vrchol měl dostatečně velký stupeň. Zde je extrémním (v teorii grafů se říká také extrémálním) příkladem disjunktní sjednocení dvou úplných grafů na  $n/2$  vrcholech; to je nesouvislé a každý vrchol má stupeň  $n/2 - 1$ . Tento příklad ukazuje, že následující větu není možné zlepšit:

**Věta 6.12** *Jsou-li stupně všech vrcholů v grafu  $G$  alespoň  $n/2$ , pak je  $G$  souvislý graf.*

**Důkaz.** Dejme tomu, že věta neplatí a  $G$  je nesouvislý. Má tedy aspoň dvě neprázdné komponenty  $A, B$ . Alespoň jedna z těchto komponent (dejme tomu  $A$ ) má nejvýše  $n/2$  vrcholů, jinak by počet vrcholů v celém grafu nemohl být  $n$ . Z libovolného vrcholu  $v$  komponenty  $A$  vedou hrany jen do ostatních vrcholů této komponenty, kterých je nejvýše  $n/2 - 1$ . Stupeň vrcholu  $v$  tedy musí být menší než  $n/2$ , což je spor s naším předpokladem.  $\square$

## Cvičení

► **6.8** Dokažte, že v grafu s  $k$  komponentami platí  $m \geq n - k$ .

►► **6.9** Dokažte, že graf, ve kterém jsou stupně všech vrcholů alespoň  $\delta$ , má méně než  $n/\delta$  komponent.

## 6.5 Kružnice

**Definice 6.13** *Uzavřený sled* v grafu  $G$  je sled  $(v_0, \dots, v_k)$ , ve kterém platí  $v_0 = v_k$ . *Kružnice* v grafu  $G$  je uzavřený sled délky alespoň 3, ve kterém se vrchol  $v_0$  objevuje právě dvakrát a každý ostatní vrchol grafu nejvýše jednou. Číslo  $k$  je *délka* dané kružnice.

Kružnici a uzavřený sled v grafu  $G$  můžeme ekvivalentně definovat pomocí pojmů z oddílu 6.2: uzavřený sled v grafu  $G$  není nic jiného než homomorfismus nějaké kružnice  $C_k$  (viz oddíl 5.2) do  $G$ . Takový homomorfismus je kružnicí v grafu  $G$ , právě když je to vrcholový monomorfismus.

Ve cvičení 6.1 jsme viděli, že cesty délky  $k$  v grafu  $G$  lze ztotožnit s podgrafy isomorfními s grafem  $P_{k+1}$ . Podobně ztotožníme kružnice délky  $k$  v grafu  $G$  s podgrafy isomorfními s grafem  $C_k$ . Můžeme tak mluvit o množině hran nějaké kružnice v grafu  $G$  a podobně.

V minulém oddílu jsme definovali operaci odstranění vrcholu z grafu. Její přirozenou obdobou je operace odstranění hrany. Jedná se o pouhé smazání hrany se zachováním jejích koncových vrcholů.

**Definice 6.14** Je-li  $e$  hrana grafu  $G = (V, E)$ , potom graf  $G - e$  vzniklý *odstraněním hrany*  $e$  je definován jako graf  $(V, E - \{e\})$ .

**Věta 6.15** *Je-li  $e$  hrana souvislého grafu  $G$ , která leží na nějaké kružnici, potom  $G - e$  je souvislý graf.*

**Důkaz.** Nechť  $e = xy$  je hranou kružnice  $C$ . V kružnici  $C$  existují dvě cesty z vrcholu  $x$  do vrcholu  $y$ ; tu z nich, která má délku větší než 1, označme  $P$ .

Dokazujeme, že  $G - e$  je souvislý graf. K tomu stačí najít sled mezi libovolnými dvěma vrcholy  $u, v$ . Nechť  $S$  je cesta z  $u$  do  $v$  v (souvislém) grafu  $G$ . Pokud  $S$  nepoužívá hranu  $e$ , je cestou i v grafu  $G - e$ . Pokud ji používá, můžeme tuto hranu nahradit cestou  $P$ . Přesněji řečeno, pokud  $S = (u = s_0, s_1, \dots, s_i = x, s_{i+1} = y, \dots, s_k = v)$  a  $P = (x = p_0, p_1, \dots, p_\ell = y)$ , vezmeme

$$S' = (u = s_0, s_1, \dots, s_{i-1}, x = p_0, p_1, \dots, p_\ell = y, s_{i+2}, \dots, s_k = v),$$

což je sled v grafu  $G - e$ . (V případě, že  $S$  hranu  $e$  používá v opačném směru, tedy  $s_i = y, s_{i+1} = x$ , vložíme i cestu  $P$  obráceně.) Důkaz je hotov.  $\square$

Implikace ve větě 6.15 se dokonce dá zesílit na ekvivalenci (viz cvičení 6.10).

## Cvičení

► **6.10** Dokažte, že je-li  $G - e$  souvislý graf, pak hrana  $e$  grafu  $G$  leží na nějaké kružnici.

## 6.6 Eulerovské a hamiltonovské grafy

Již v 18. století zkoumal LEONHARD EULER (1707–1803) následující problém<sup>1</sup>: za jakých podmínek existuje sled, který používá každou hranu daného grafu právě jednou? Touto otázkou se dostáváme k pojmu tah.

**Definice 6.16** *Tah z  $u$  do  $v$  v grafu  $G$  je sled  $(u = v_0, v_1, \dots, v_k = v)$ , ve kterém se mohou opakovat vrcholy, ale hrany  $v_{i-1}v_i$  jsou pro různá  $i$  různé. Uzavřený tah je tah, který je uzavřeným sledem. Uzavřený tah je *eulerovský*, pokud používá každou hranu grafu  $G$ .*

Podobně jako sledy, cesty a kružnice v grafu, i tah se dá snadno ekvivalentně definovat pomocí pojmu homomorfismus (viz cvičení 6.11). V dalším textu se nám bude hodit následující pozorování.

**Lemma 6.17** *Nechť  $T$  je tah z vrcholu  $x$  do vrcholu  $y$  v grafu  $G$ . Označme počet hran tahu  $T$ , obsahujících vrchol  $z \in V(G)$ , symbolem  $d_T(z)$ . Pak platí, že  $d_T(z)$  je sudé, právě když  $T$  je uzavřený tah nebo  $z \notin \{x, y\}$ .*

<sup>1</sup>Euler ilustroval své výsledky na slavném příkladu: ukázal, že není možné přejít během jediné procházky právě jednou přes každý z mostů ve městě Královci (Königsberg, dnešní Kaliningrad) a vrátit se na stejné místo.

**Důkaz.** Nechť  $T = (v_0, \dots, v_k)$ , kde  $x = v_0$  a  $y = v_k$ . Opatřeme každou hranu  $v_i v_{i+1}$  tahu  $T$  šipkou z vrcholu  $v_i$  do vrcholu  $v_{i+1}$ . Kolik šipek směřuje do vrcholu  $z$  a kolik ven?

Každému výskytu vrcholu  $z$  v tahu  $T$  odpovídá nějaký index  $i$  s vlastností  $z = v_i$ . Označme výskyt jako *vnitřní*, je-li  $0 < i < k$ . Každý vnitřní výskyt přispívá jednu šipku směrem do  $z$  (na hraně  $v_{i-1}v_i$ ) a jednu šipku ven (hrana  $v_i v_{i+1}$ ). Vnitřní výskyty zachovávají rovnováhu mezi počty šipek v obou směrech a je při nich tedy použit sudý počet hran. Tyto hrany nemají na paritu čísla  $d_T(z)$  vliv a můžeme je tedy ignorovat; ostatní hrany označíme jako *podstatné* (pro  $z$ ).

Pokud  $z \notin \{x, y\}$ , pak vrchol  $z$  není obsažen v žádné podstatné hraně, takže  $d_T(z)$  je sudé. Můžeme tedy předpokládat, že  $z = x$  (případ  $z = y$  je symetrický a nemusíme jej uvažovat zvlášť). Je-li tah  $T$  uzavřený, pak podstatné hrany obsahující vrchol  $z$  jsou  $v_0 v_1$  a  $v_k v_0$ , takže i v tomto případě je  $d_T(z)$  sudé číslo. Konečně pokud tah  $T$  není uzavřený, pak jedinou podstatnou hranou obsahující vrchol  $z$  je hrana  $v_0 v_1$ , takže  $d_T(z)$  je liché. Složením všech tří případů dostaneme požadovanou ekvivalenci.  $\square$

Eulerova odpověď na otázku, které grafy mají eulerovský tah, je obsažena v následující větě.

**Věta 6.18** *Souvislý graf  $G$  má eulerovský tah, právě když všechny jeho vrcholy mají sudý stupeň.*

**Důkaz.** ‘ $\Rightarrow$ ’: Eulerovský tah je uzavřený, takže tvrzení plyne z lemmatu 6.17.

‘ $\Leftarrow$ ’: Nechť  $M$  je uzavřený tah maximální možné délky. Dokážeme, že  $M$  obsahuje každou hranu grafu  $G$ . Pro důkaz sporem předpokládejme, že neobsahuje hranu  $e = xy$ . Nejprve najdeme hranu  $e_0$ , která rovněž není obsažena v tahu  $M$ , ale tento tah prochází alespoň jedním z jejích koncových vrcholů. Jak ji najít? Můžeme předpokládat, že tah  $M$  neprochází vrcholem  $x$ , jinak stačí vzít  $e_0 = e$ . Ze souvislosti grafu  $G$  existuje cesta z  $x$  do nějakého vrcholu, kterým prochází tah  $M$ . Nejkratší taková cesta (označme ji  $P$ ) jistě neobsahuje žádnou hranu tahu  $M$ , jinak bychom ji mohli zkrátit. Na druhou stranu je délka cesty  $P$  alespoň 1 (protože tah  $M$  neobsahuje vrchol  $x$ ). Zvolme tedy za hranu  $e_0$  poslední hranu cesty  $P$ . Ta má požadované vlastnosti: neleží na tahu  $M$ , ale ten prochází jedním z jejích koncových vrcholů.

Najdeme nyní uzavřený tah  $T$ , který neobsahuje žádnou hranu tahu  $M$ . Zkonstruujeme jej postupným přidáváním hran. Nechť  $z_0$  je koncový vrchol hrany  $e_0$ , který leží na tahu  $M$ . Označme druhý koncový vrchol symbolem  $z_1$  a definujme výchozí (neuzavřený) tah  $T_1 = (z_0, z_1)$ . Podle lemmatu 6.17 je počet hran tahu  $M$ , obsahujících vrchol  $z_1$ , sudý. Celkový stupeň tohoto vrcholu je rovněž sudý, takže kromě hrany  $e_0 = z_0 z_1$  musí existovat ještě nějaká hrana  $e_1$  obsahující vrchol  $z_1$ , kterou tah  $M$  neprochází. Položme  $T_2 = (z_0, z_1, z_2)$ , kde  $z_2$  je druhý koncový vrchol hrany  $e_1$ .



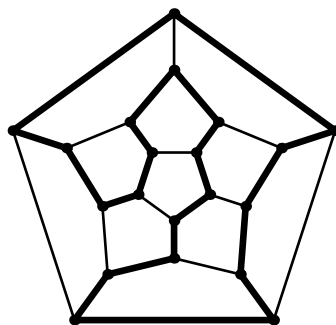
V  $i$ -tém kroku konstrukce máme zkonstruován tah  $T_i$ , který končí ve vrcholu  $z_i$ . Je-li  $z_i = z_0$ , jsme hotovi, protože  $T_i$  je uzavřený tah s požadovanou vlastností. Jinak podle lematu 6.17 je z hran obsahujících vrchol  $z_i$  sudý počet obsažen v tahu  $M$  a lichý počet v tahu  $T_i$ . Protože stupeň vrcholu  $z_i$  je sudý, existuje hrana  $e_{i+1}$ , která z něj vychází a není obsažena z žádném z tahů  $M$  a  $T_i$ . Přidáním druhého koncového vrcholu  $z_{i+1}$  hrany  $e_{i+1}$  k tahu  $T_i$  získáme delší tah  $T_{i+1}$ .

Graf  $G$  obsahuje konečný počet hran, a tak po konečném počtu kroků musí nastat situace  $z_i = z_0$ . Tím je existence tahu  $T$  dokázána. Zbývá si všimnout, že tah  $T$  lze použít k prodloužení tahu  $M$ . Stačí procházet po tahu  $M$  až k nějakému výskytu vrcholu  $z_0$ , projít celý uzavřený tah  $T$ , a poté projít zbývající část tahu  $M$ . Výsledný uzavřený tah  $M'$  má větší délku než  $M$  (víme totiž, že délka tahu  $T$  je nenulová!) a to je spor.  $\square$

Graf, který má nějaký eulerovský tah, se nazývá *eulerovský graf*. Podle věty 6.18 je snadné poznat, zda je daný graf eulerovský: stačí zkontrolovat, zda je souvislý a zda všechny stupně jsou sudé. Není tedy potřeba např. zkoušet všechny možné tahy a zjišťovat, zda některý náhodou není eulerovský.

Nabízí se malá modifikace uvažovaného pojmu. Eulerovský tah je uzavřený sled, používající každou hranu právě jednou. Co se změní, budeme-li požadovat, aby daný uzavřený sled obsahoval každý *vrchol* právě jednou? Takový sled musí být kružnicí. Kružnice, která prochází všemi vrcholy grafu, se nazývá *hamiltonovská*, a graf obsahující nějakou takovou kružnici je *hamiltonovský graf*.

Název je odvozen od jména irského matematika WILLIAMA ROWANA HAMILTONA (1805–1865). Ten v roce 1857 vynalezl hlavolam, jehož zadáním bylo najít ‘cestu’ po hranách tzv. dvanáctistěnu (trojrozměrného mnohostěnu o 20 vrcholech), která navštíví každý vrchol právě jednou a vrátí se na výchozí místo. Úloha je ekvivalentní s nalezením hamiltonovské kružnice v grafu na obr. 6.2, kterému se rovněž říká dvanáctistěn.



Obrázek 6.2: Dvanáctistěn s vyznačenou hamiltonovskou kružnicí.

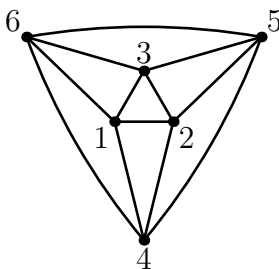
Existuje nějaké kritérium ve stylu věty 6.18, které by nám umožňovalo snadno a rychle poznat hamiltonovské grafy? Vzhledem k podobnosti pojmů eulerovský tah a hamiltonovská kružnice by se to mohlo zdát pravděpodobné. Odpověď na

tuto otázku však poněkud překvapivě není známa a vše nasvědčuje tomu, že takové kritérium neexistuje. Na druhou stranu je známa celá řada postačujících podmínek pro existenci hamiltonovské kružnice. Lze například ukázat, že hamiltonovský je každý graf, pro který je splněn předpoklad věty 6.12 (toto zesílení věty 6.12, tzv. *Diracova věta*, patří ke klasickým výsledkům teorie grafů).

Abychom mohli přesněji popsat rozdíl mezi problémy rozpoznávání hamiltonovských a eulerovských grafů, potřebujeme se stručně zmínit o výpočetní složitosti.

## Cvičení

- ▶ **6.11** Definujte tah a uzavřený tah pomocí pojmů z oddílu 6.2.
- ▶ **6.12** Najděte eulerovský tah v grafu na obr. 6.3. Formulujte algoritmus na nalezení eulerovského tahu v grafu se sudými stupni vrcholů.
- ▶ **6.13** Dokažte, že souvislý graf  $G$  má (uzavřený nebo neuzavřený) tah obsahující každou hranu přesně jednou, právě když  $G$  má nejvýše dva vrcholy lichého stupně.



Obrázek 6.3: Graf ve cvičení 6.12.

## 6.7 Časová složitost algoritmu

Představme si nějaký algoritmus  $A$ , který pro libovolný graf  $G$  (*vstupní graf*) rozhodne, zda má  $G$  určitou vlastnost (třeba zda je eulerovský). Takový algoritmus sestává z množství *elementárních operací* jako je sečtení dvou čísel nebo zjištění, zda mezi určitými dvěma vrcholy grafu  $G$  vede hrana.<sup>2</sup> Počet elementárních operací, které si provedení algoritmu vyžádá, samozřejmě závisí na vstupním grafu  $G$ ;

<sup>2</sup>Přesné vymezení elementárních operací, tvaru vstupních dat atd. je obecně velmi důležité, nám však bude stačit tento intuitivní pohled na věc.

označme tento počet  $f(G)$ . Časová složitost algoritmu  $A$  je funkce  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ , definovaná vztahem

$$f(n) = \max_G f(G),$$

kde  $G$  probíhá všechny grafy na  $n$  vrcholech. Jde tedy o počet elementárních operací, nutných ‘v nejhorším případě’ pro zpracování grafu na  $n$  vrcholech. Časová složitost může být vyjádřena i pomocí jiných parametrů vstupního grafu, než je počet vrcholů, a lze ji analogicky definovat i pro algoritmy, které pracují s jinými strukturami než s grafy.

Vraťme se k rozpoznávání eulerovských grafů. Navržený algoritmus prochází jeden vrchol po druhém a testuje, zda jeho stupeň je sudý. Pokud jde o vstupní graf  $G$ , předpokládejme, že pro každý vrchol grafu  $G$  je zadán seznam jeho sousedů. Jaká je časová náročnost tohoto algoritmu? Pro každý z  $n$  vrcholů je třeba spočítat stupeň, a to obnáší zjistit existenci nebo neexistenci každé z  $n - 1$  potenciálních hran vedoucích z tohoto vrcholu. Časová složitost je tedy  $n(n - 1)$ . Je to tedy *kvadratická* funkce proměnné  $n$ ; pokud nám stačí odhadnout ‘řádovou’ závislost časové složitosti na  $n$ , řekneme, že časová složitost je  $O(n^2)$ . (Obecně pro dvě funkce  $g, h : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  píšeme  $g = O(h)$ , pokud existuje konstanta  $c$  tak, že pro všechna  $n$  větší než nějaké číslo  $n_0$  platí  $g(n) < c \cdot h(n)$ .) Náš algoritmus je tedy *polynomiální*, jeho časová složitost je určena polynomem.

Jak testovat, zda je daný graf hamiltonovský? Nejsou k dispozici o mnoho lepší metody než ‘hrubá síla’, např. zkoušet hamiltonovskou kružnici vybudovat postupným prodlužováním cesty, v případě neúspěchu se vracet zpět a probírat další možnosti (tzv. *backtracking*). Příklad podobného postupu uvidíme v oddílu 12.5. V každém vrcholu máme obvykle několik možností, jak postupovat dále, takže počet všech situací, které je třeba probrat, se s každým dalším vrcholem alespoň zdvojnásobuje. Časová složitost takového algoritmu je katastrofální: je vyšší než libovolný polynom, je to *exponenciální* funkce  $n$ , jako je např. funkce  $2^n$  (nebo ještě horší). Zde z teoretického hlediska vede dělicí čára mezi rychlými a pomalými algoritmy: ‘rychlý’ (neboli *efektivní*) je algoritmus s polynomiální časovou složitostí, ‘pomalé’ jsou ty ostatní<sup>3</sup>. Rozdíl mezi polynomiální a exponenciální časovou složitostí ilustruje tabulka 6.1, ve které je uvedena doba provádění algoritmu s časovou složitostí  $n^3$  resp.  $2^n$  pro různé velikosti vstupních dat  $n$  a za předpokladu, že provedení jedné operace trvá 1 mikrosekundu.

Přestože se obě úlohy popsané v oddílu 6.6 (rozhodování, zda je graf eulerovský resp. hamiltonovský) zdají velmi podobné, náročnost jejich algoritmického řešení je dramaticky rozdílná. Problém zjišťování hamiltonovskosti totiž patří do velké třídy tzv. *NP-úplných problémů*. Jde o velmi obtížné problémy, pro

<sup>3</sup>Může se samozřejmě stát, že je exponenciální algoritmus pro ‘rozumné’ hodnoty  $n$  rychlejší než třeba polynomiální algoritmus se složitostí  $1000000n^8$ . Na druhou stranu praxe ukazuje, že se pro úlohy řešitelné efektivním algoritmem zpravidla daří postupně snížit časovou složitost algoritmu do ‘rozumných’ mezí. Ke vzácným výjimkám zatím patří tzv. *problém lineárního programování*.

	10	20	50	100	200
$n^3$	1 ms	8 ms	125 ms	1 s	8 s
$2^n$	1 ms	1 s	36 let	$4 \cdot 10^{16}$ let	$5 \cdot 10^{46}$ let

Tabulka 6.1: Polynomiální a exponenciální časová složitost.

které není znám efektivní algoritmus, ale zároveň není dokázána jeho neexistence. Otázka, zda takový algoritmus existuje, patří k největším otevřeným problémům současné matematiky.

O časové složitosti algoritmů se lze dozvědět více např. v přednášce [9] nebo v knize [3]. My se k tomuto tématu vrátíme především v oddílu 12.2, kde budeme analyzovat časovou složitost tzv. Dijkstrova algoritmu. S dalším NP-úplným problémem, tzv. problémem obchodního cestujícího, se seznámíme v oddílu 12.5.