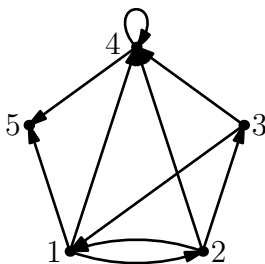


Kapitola 8

Orientované grafy

V této kapitole se budeme zabývat grafy, v nichž má každá hrana určený směr — tzv. orientovanými grafy. Směr (orientace) hran se obvykle znázorňuje šipkami jako na obr. 8.1.



Obrázek 8.1: Orientovaný graf.

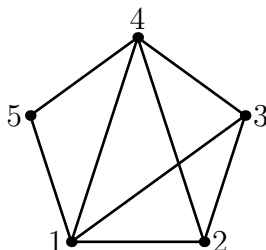
8.1 Definice orientovaných grafů

Definice 8.1 *Orientovaný graf* je dvojice (V, E) , kde V je množina vrcholů a $E \subset V \times V$ je množina hran.

Všimněme si, že hrany jsou nyní prvky kartézského součinu $V \times V$, a tedy *uspořádané* dvojice vrcholů. (Orientovaný graf je tedy vlastně totéž, co binární relace na množině V .) Dvojici (u, v) interpretujeme jako hranu, která začíná ve vrcholu u a končí ve vrcholu v . Podle definice může být hranou i dvojice (v, v) . Naše orientované grafy tedy mohou mít smyčky. Násobné hrany ve shodném směru nadále nepovolujeme (graf ale může obsahovat dvojici ‘protichůdných’ hran mezi dvěma vrcholy). Podobně jako u neorientovaných grafů budeme dvojici (u, v) zapisovat prostě jako uv . Nyní ovšem symboly uv a vu označují dvě různé hrany.

Pojmy *podgraf* a *indukovaný podgraf* jsou definovány jako u neorientovaných grafů. Z orientovaného grafu G můžeme snadno vyrobit neorientovaný graf

(tzv. *symetrizaci* grafu G) tak, že ‘zapomeneme’ orientace všech hran. Případné smyčky odstraníme a násobné hrany nahradíme jednoduchými. (Viz obr. 8.2.) Některé pojmy týkající se neorientovaných grafů tak lze přímo aplikovat na grafy orientované. Řekneme například, že orientovaný graf G je (*slabě*) *souvislý*, je-li jeho symetrizace souvislá. *Komponenty* orientovaného grafu G jsou (analogicky k situaci u neorientovaných grafů) maximální slabě souvislé podgrafy. Přesněji řečeno, komponenta je slabě souvislý indukovaný podgraf s vlastností, že žádný indukovaný podgraf na větší množině vrcholů není slabě souvislý.



Obrázek 8.2: Symetrizace grafu z obr. 8.1.

V opačném směru, u přechodu od neorientovaného grafu k orientovanému, máme řadu možností, jak hrany opatřit šipkami. Řekneme, že orientovaný graf G je *orientací* grafu H , je-li H symetrizací orientovaného grafu G . Každý neorientovaný graf má tedy řadu orientací. Orientovaný graf na obr. 8.1 je například jednou z orientací grafu na obr. 8.2.

Definice 8.2 *Vstupní stupeň* $d_G^+(u)$ vrcholu u orientovaného grafu $G = (V, E)$ je počet hran, které končí ve vrcholu u , tedy počet dvojic xu (kde $x \in V$) v množině hran E . Podobně *výstupní stupeň* $d_G^-(u)$ je počet dvojic ux v množině hran.

Cvičení

► **8.1** Dokažte, že v orientovaném grafu $G = (V, E)$ s m hranami platí

$$\sum_{v \in V} d_G^+(v) = \sum_{v \in V} d_G^-(v) = m.$$

8.2 Silná souvislost

Pro orientované grafy lze snadno upravit definice pojmů sled, cesta v grafu a kružnice v grafu. Znění definic je vlastně téměř stejné, jediný rozdíl je v tom, že každý krok sledu musí nyní respektovat orientaci příslušné hrany. Místo pojmu ‘kružnice’ používáme u orientovaných grafů termínu ‘cyklus’.

Definice 8.3 *Orientovaný sled* z vrcholu x do vrcholu y v orientovaném grafu G je posloupnost vrcholů ($x = v_0, v_1, \dots, v_k = y$), ve které je pro každé $i = 1, \dots, k$ dvojice $v_{i-1}v_i$ hranou grafu G . *Orientovaná cesta* v G je orientovaný sled, který obsahuje každý vrchol nejvýše jednou. *Cyklus* v G je orientovaný sled, ve kterém je $v_0 = v_k$, tento vrchol je v něm obsažen právě dvakrát a všechny ostatní nejvýše jednou.

Graf G na obr. 8.1 obsahuje například sled $(3, 1, 2, 3, 4, 4)$, naopak posloupnost $(4, 3, 2, 1)$ sledem není. Tento graf obsahuje také cykly $(1, 2, 3, 1)$, $(4, 4)$ (délka tohoto cyklu je 1) a $(1, 2, 1)$.

Slabá souvislost nám neříká mnoho o existenci orientovaných cest v daném grafu. U orientovaných grafů je proto často přirozenější pracovat se silnější variantou pojmu souvislost.

Definice 8.4 Orientovaný graf G je *silně souvislý*, pokud v něm pro každou dvojici vrcholů x, y existuje orientovaná cesta z x do y i orientovaná cesta z y do x .

Následující věta charakterizuje silně souvislé grafy. Jak je asi zřejmé, říkáme, že hrana xy je obsažena v cyklu $(v_0, v_1, \dots, v_k = v_0)$, pokud pro nějaké i je $x = v_i$ a $y = v_{i+1}$.

Věta 8.5 *Slabě souvislý orientovaný graf je silně souvislý, právě když každá jeho hrana je obsažena v nějakém cyklu.*

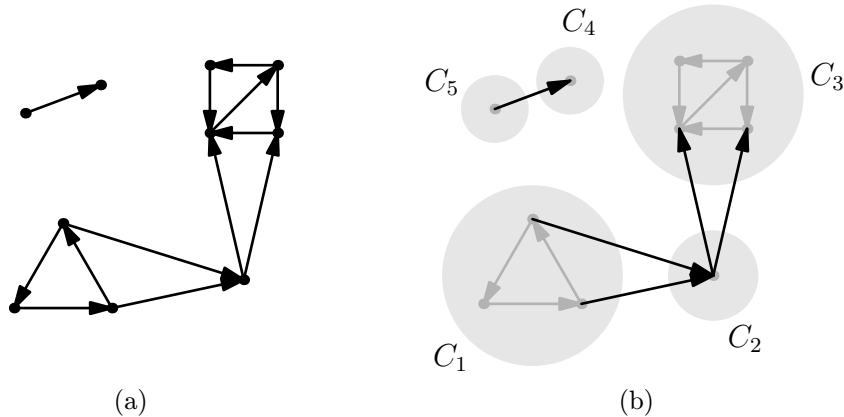
Důkaz. ‘ \Rightarrow ’: Uvažme hranu xy orientovaného grafu G . Ze silné souvislosti plyne existence cesty P z y do x . Připojením hrany xy za tuto cestu vznikne cyklus, který hranu xy obsahuje.

‘ \Leftarrow ’: Nechť x, y je libovolná dvojice vrcholů a nechť Q je cesta z x do y v symetrizaci slabě souvislého orientovaného grafu G . Cesta Q je tedy posloupnost vrcholů ($x = q_0, q_1, \dots, q_k = y$), kde pro $i = 1, \dots, k$ je buď $q_{i-1}q_i \in E(G)$ (a řekneme, že jde o dobře orientovanou hranu cesty Q) nebo $q_{i-1}q_i \notin E(G)$ a $q_iq_{i-1} \in E(G)$ (špatně orientovaná hrana). Každá špatně orientovaná hrana q_iq_{i-1} je obsažena v cyklu; speciálně existuje orientovaná cesta R_i z q_{i-1} do q_i . Nahradíme-li v cestě Q každou špatně orientovanou hranu příslušnou cestou R_i , získáme orientovaný sled z x do y . Podle cvičení 8.3 tedy existuje orientovaná cesta z x do y . Vzhledem k tomu, že dvojice x, y byla libovolná, graf je silně souvislý. \square

Definujme na vrcholech orientovaného grafu G *relaci oboustranné dosažitelnosti* \sim : pro vrcholy x, y platí $x \sim y$, pokud v G existuje orientovaná cesta z x do y i naopak. S použitím cvičení 8.3 je snadné dokázat, že tato relace je ekvivalencí. Tento fakt můžeme použít v definici tzv. kvazikomponent, které jsou obdobou komponent pro silnou souvislost. K jejímu pochopení může pomoci vrátit se k definici pojmu komponenta v kapitole 5.

Definice 8.6 *Kvazikomponenta* orientovaného grafu G je každý jeho indukovaný podgraf na množině vrcholů, která tvoří některou z tříd ekvivalence \sim .

Definici ilustruje graf na obr. 8.3(a) s 2 komponentami a celkem 5 kvazikomponentami, znázorněnými na obr. 8.3(b). Podobně orientovaný graf na obr. 8.1 má tři kvazikomponenty, jejichž množiny vrcholů jsou $\{1, 2, 3\}$, $\{4\}$ a $\{5\}$.



Obrázek 8.3: Orientovaný graf a jeho kvazikomponenty.

Cvičení

- **8.2** Najděte příklad slabě souvislého orientovaného grafu na 6 vrcholech, který má 3 kvazikomponenty.
- **8.3** Dokažte, že v orientovaném grafu existuje orientovaná cesta z vrcholu x do vrcholu y , právě když v něm existuje orientovaný sled z x do y .
- **8.4** Dokažte, že kvazikomponenty orientovaného grafu G jsou právě jeho maximální silně souvislé podgrafy — jinými slovy, jsou to právě ty podgrafy H , pro které platí, že je-li H vlastním podgrafem jiného grafu $K \subset G$, pak K není silně souvislý.
- **8.5** Formulujte algoritmus na nalezení kvazikomponent orientovaného grafu.

8.3 Acyklické orientované grafy

Definice 8.7 Orientovaný graf je *acyklický*, pokud neobsahuje žádný cyklus.

Slabě souvislé acyklické orientované grafy jsou tedy z jistého hlediska obdobou stromů, tj. souvislých grafů, které neobsahují žádnou kružnici.

Definice 8.8 *Vstupní vrchol* orientovaného grafu G je vrchol, jehož vstupní stupeň $d_G^+(v)$ je nulový. Podobně *výstupní vrchol* je vrchol, pro který je $d_G^-(v) = 0$.

Acyklické grafy lze charakterizovat z hlediska existence vstupních vrcholů v jejich podgrafech.

Věta 8.9 *Orientovaný graf G s konečnou množinou vrcholů je acyklický, právě když každý jeho neprázdný podgraf $H \subset G$ obsahuje vstupní vrchol.*

Důkaz. ‘ \Rightarrow ’: Zvolme vrchol v_0 . Není-li vstupní, vede do něj nějaká hrana, dejme tomu z vrcholu v_1 . Opakováním této úvahy získáme nejvýše po $n + 1$ krocích (kde n je počet vrcholů) buďto vstupní vrchol, nebo posloupnost $n + 1$ vrcholů (v_0, v_1, \dots, v_n) , ve které se musí některý vrchol vyskytovat dvakrát, řekněme $v_i = v_j$ a $i < j$. Ve druhém případě by ale podposloupnost v_j, v_{j-1}, \dots, v_i byla cyklem v acyklickém grafu G .

‘ \Leftarrow ’: Předpokládejme existenci vstupních vrcholů a dokažme, že orientovaný graf G je acyklický. Nechť obsahuje cyklus C . Tento cyklus určuje podgraf H grafu G , sestávající z hran a vrcholů, kterými C prochází. Všechny vstupní i výstupní stupně v podgrafu H jsou rovny jedné. To je spor. \square

Lze očekávat, že podobný výsledek platí i pro výstupní vrcholy.

Důsledek 8.10 *Orientovaný graf G je acyklický, právě když v každém jeho neprázdném podgrafu $H \subset G$ existuje výstupní vrchol.*

Důkaz. Otočíme-li směr každé hrany grafu G , acykličnost zůstane zachována a vstupní vrcholy přecházejí na výstupní a naopak. \square

Následující věta charakterizuje acyklické grafy jako takové, na nichž existuje uspořádání vrcholů konzistentní se směry všech hran.

Věta 8.11 *Orientovaný graf G je acyklický, právě když jeho vrcholy lze seřadit do posloupnosti (v_1, \dots, v_n) tak, že pro každou hranu $v_i v_j$ grafu G platí $i < j$.*

Důkaz. ‘ \Rightarrow ’: Položme $G_1 = G$. Podle věty 8.9 existuje vstupní vrchol v_1 acyklického orientovaného grafu G_1 . Nechť $G_2 = G_1 - v_1$ je orientovaný graf vzniklý odstraněním vrcholu v_1 (a všech hran, které ho obsahují). To je podgraf grafu G , a má tedy vstupní vrchol v_2 . Opakováním tohoto postupu dostaneme posloupnost vrcholů (v_1, \dots, v_n) . Dejme tomu, že $v_i v_j \in E(G)$, ale přitom $i > j$. Pak ale $v_i \in V(G_j)$ a kvůli hraně $v_i v_j$ nemůže v_j být vstupním vrcholem grafu G_j , což je spor.

‘ \Leftarrow ’: Mějme vrcholy seřazené do posloupnosti s uvedenou vlastností a předpokládejme, že G obsahuje cyklus $(v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}, v_{i_k} = v_{i_0})$. Pak platí, že $v_{i_0} v_{i_1} \in E(G)$ a tedy $i_0 < i_1$. Obecněji dostáváme

$$i_0 < i_1 < i_2 < \dots < i_{k-1} < i_0,$$

což není možné. Tím je důkaz hotov. \square

V důkazu věty 8.11 se vlastně skrývá efektivní algoritmus pro test acykličnosti orientovaného grafu $G = G_1$. V jeho i -tém kroku postupujeme následovně:

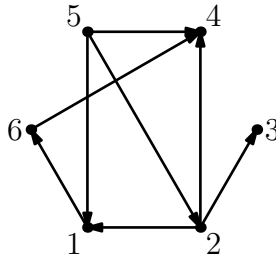
- (1) Je-li G_i graf na jediném vrcholu, algoritmus končí. Graf G je acyklický.
- (2) Pokud graf G_i obsahuje nějaký vstupní vrchol v_i , položíme $G_{i+1} = G_i - v_i$ a pokračujeme krokem $i + 1$.
- (3) V opačném případě graf G není acyklický a algoritmus končí.

V každém z $O(n)$ kroků tohoto algoritmu je potřeba najít vstupní vrchol v grafu o nejvýše n vrcholech. Při použití postupu, který plyne z důkazu věty 8.9, lze vstupní vrchol najít v čase $O(n)$. Celková časová složitost popsaného algoritmu je tedy $O(n^2)$.

Cvičení

► **8.6** Najděte pro acyklický orientovaný graf na obr. 8.4 posloupnost vrcholů splňující podmínku věty 8.11.

► **8.7** Najděte (nekonečný) acyklický orientovaný graf, který neobsahuje vstupní vrchol.



Obrázek 8.4: Acyklický orientovaný graf.

8.4 Tranzitivní uzávěr

Víme již, že orientované grafy s množinou vrcholů V jednoznačně odpovídají binárním relacím na množině V (viz cvičení 8.8).

Definice 8.12 *Tranzitivní uzávěr* orientovaného grafu G je orientovaný graf G^+ takový, že $V(G^+) = V(G)$ a

$$xy \in E(G^+), \text{ pokud } \begin{cases} x \neq y & \text{a v } G \text{ existuje orientovaná cesta z } x \text{ do } y, \\ x = y & \text{a vrchol } x \text{ leží na nějakém cyklu v } G. \end{cases}$$

Všimněme si, že graf G je podgrafem grafu G^+ a že G je acyklický, právě když G^+ neobsahuje žádnou smyčku. Následující věta charakterizuje acyklické grafy jako grafy, jejichž (mírně rozšířený) tranzitivní uzávěr je grafem uspořádání na $V(G)$.

Věta 8.13 *Orientovaný graf $G = (V, E)$ bez smyček je acyklický, právě když graf G^* , vzniklý přidáním všech smyček k tranzitivnímu uzávěru G^+ , je grafem uspořádání (tj. $E(G^*)$ je relace uspořádání na $V(G^*) = V(G)$).*

Důkaz. ‘ \Rightarrow ’: Nechť G je acyklický. Díky přidaným smyčkám je $E(G^*)$ reflexivní relace. Je také slabě antisymetrická, neboť $xy \in E(G^*)$ a $yx \in E(G^*)$ by pro různé x, y znamenalo, že G obsahuje orientovaný sled z x do y i naopak. Uvažme podgraf H složený z vrcholů a hran obou těchto sledů; v tomto podgrafu je vstupní stupeň každého vrcholu aspoň 1. Neobsahuje tedy vstupní vrchol, což je ve sporu s větou 8.9.

‘ \Leftarrow ’: Nechť $E(G^*)$ je uspořádání. Pro názornost zapisujeme $xy \in E(G^*)$ jako $x \leq y$. Předpokládejme, že G obsahuje cyklus $C = (x_0, x_1, \dots, x_k = x_0)$. Pak pro každé $i = 0, \dots, k-1$ platí $x_i x_{i+1} \in E(G)$, jinak řečeno $x_i \leq x_{i+1}$. Z tranzitivity je tedy $x_0 \leq x_{k-1}$. Víme však, že také $x_{k-1} x_0 \in E(G)$, takže $x_{k-1} \leq x_0$. Z antisymetričnosti relace $E(G^*)$ musí být $x_0 = x_{k-1}$. Cyklus C má tedy délku 1 a musí to být smyčka. To je spor s předpokladem, že G je bez smyček. \square

Cvičení

► **8.8** Nechť $G = G(R)$ je orientovaný graf binární relace R na množině V . Jak z grafu G poznáme, zda je relace R :

- (a) reflexivní,
- (b) symetrická,
- (c) antisymetrická?

► **8.9** Formulujte algoritmus pro nalezení tranzitivního uzávěru orientovaného grafu.

8.5 Kondenzace

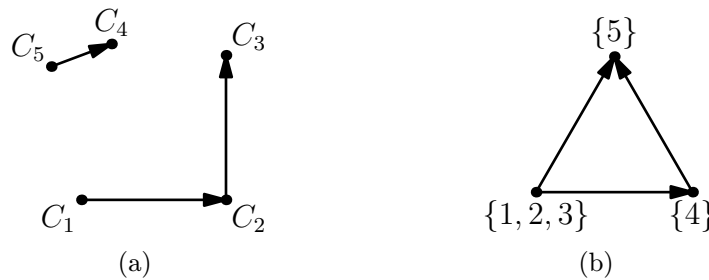
Definice 8.14 *Kondenzace orientovaného grafu G je orientovaný graf G_c , jehož vrcholy jsou kvazikomponenty grafu G , a pro různé kvazikomponenty $Q_1, Q_2 \in V(G_c)$ platí*

$$Q_1 Q_2 \in E(G_c), \text{ pokud pro nějaké } x_1 \in V(Q_1), x_2 \in V(Q_2) \text{ je } x_1 x_2 \in E(G).$$

Kondenzaci si lze představit také tak, že každou kvazikomponentu grafu G ‘stáhneme’ do jediného vrcholu; hrany, které vedly mezi různými kvazikomponentami, nyní povedou mezi těmito novými vrcholy. Vynecháme ovšem smyčky. V případě, že mezi dvěma vrcholy povede více hran v témže směru, nahradíme je jedinou hranou.

Vezměme jako příklad opět graf na obr. 8.3. Víme, že má pět kvazikomponent C_1, \dots, C_5 . Jeho kondenzací je orientovaný graf na obr. 8.5a.

Kondenzace grafu G z obr. 8.1 je znázorněna na obr. 8.5b. U každého vrcholu je zde uvedena množina vrcholů příslušné kvazikomponenty grafu G .



Obrázek 8.5: Kondenzace (a) grafu z obr. 8.3, (b) grafu z obr. 8.1.

Věta 8.15 (Věta o kondenzaci) *Pro orientovaný graf G platí:*

- (i) G_c je acyklický orientovaný graf.
- (ii) G je silně souvislý, právě když G_c má jediný vrchol.
- (iii) G je acyklický, právě když $G = G_c$.

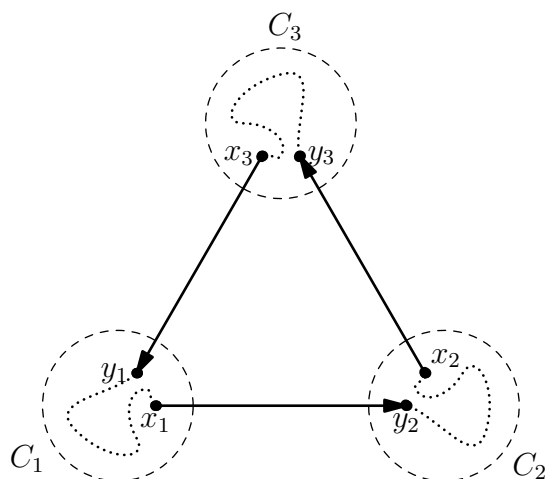
Důkaz. (i) Nechť L je cyklus v G_c , procházející po řadě vrcholy $C_1, C_2, \dots, C_k, C_{k+1} = C_1$ grafu G_c (viz obr. 8.6). Pro $1 \leq i \leq k$ uvažme hranu $C_i C_{i+1}$ cyklu L . Vrcholy C_i, C_{i+1} odpovídají kvazikomponentám grafu G . Z definice kondenzace existují vrcholy $x_i \in V(C_i)$ a $y_{i+1} \in V(C_{i+1})$ tak, že $x_i y_{i+1}$ je hrana grafu G . Položme pro jednoduchost $y_1 := y_{k+1}$.

Máme tedy k -tici hran, které vedou postupně z kvazikomponenty C_1 do C_2 , z C_2 do C_3 atd., a nakonec z C_k do C_1 . Tyto hrany na sebe nemusí navazovat, ale v každé kvazikomponentě C_i jistě existuje cesta P_i z vrcholu y_i do x_i . Následující posloupnost hran a cest tedy tvoří cyklus L' v grafu G :

$$x_1 y_2, P_2, x_2 y_3, P_3, \dots, P_k, x_k y_1, P_1.$$

Všimněme si, že po cyklu L' lze v grafu G dojít z vrcholu y_2 do vrcholu x_1 . V opačném směru přitom mezi těmito vrcholy vede hrana. Oboustranná dosažitelnost těchto vrcholů je ve sporu s tím, že vrcholy leží v různých kvazikomponentách.

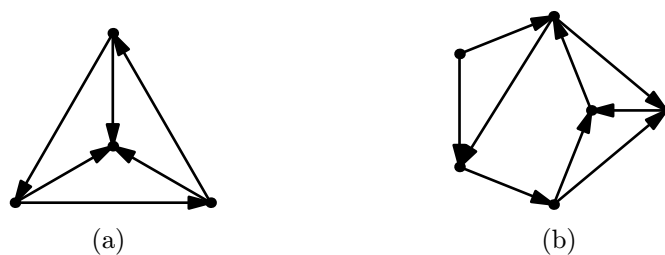
- (ii) a (iii): Snadný důkaz přímo z definic ponecháváme jako cvičení 8.10. \square



Obrázek 8.6: Konstrukce cyklu L' v grafu G . Čárkované oblasti jsou kvazikomponenty C_1, C_2, C_3 grafu G (vrcholy cyklu L v G_c).

Cvičení

- **8.10** Dokažte body (ii) a (iii) věty 8.15.
- **8.11** Najděte kondenzaci grafů na obr. 8.7.



Obrázek 8.7: Grafy ke cvičení 8.11.

