# Kapitola 9

# Matice a počet koster

Graf (orientovaný i neorientovaný) lze popsat maticí, a to hned několika různými způsoby. Tématem této kapitoly jsou incidenční matice orientovaných grafů a souvislosti mezi jejich algebraickými vlastnostmi a vlastnostmi příslušných grafů.

Ukážeme si především pozoruhodnou, až spektakulární aplikaci incidenčních matic, při které spočítáme všechny kostry libovolného neorientovaného grafu pomocí determinantu jisté jednoduše definované matice. Mimo jiné dostaneme odpověď na následující otázku:

> Kolik existuje různých stromů na pevně dané $n$-prvkové množině vrcholů?

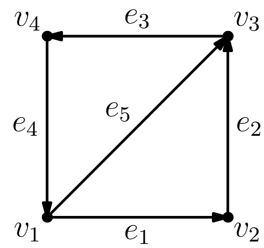
Zdůrazněme, že se jedná o *různé*, nikoli *neisomorfní* stromy. Na tříprvkové množině vrcholů například existují 3 různé stromy, ale všechny jsou navzájem isomorfní. (Viz také cvičení 7.1.)

## 9.1 Incidenční matice

Nechť $G$ je v celém tomto oddílu orientovaný graf s vrcholy $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ a hranami $E = \{e_1, \dots, e_m\}$. Budeme také předpokládat, že graf $G$ neobsahuje smyčky.

**Definice 9.1** *Incidenční matice* $M(G)$ orientovaného grafu $G$ je reálná matice o rozměrech $n \times m$, definovaná vztahem $M(G) = (m_{ij})$, kde

$$m_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{pokud hrana } e_j \text{ vychází z vrcholu } v_i, \\ -1 & \text{pokud hrana } e_j \text{ vchází do vrcholu } v_i, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$




Obrázek 9.1: Orientovaný graf.

Graf na obr. 9.1 má tedy následující incidenční matici:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

v níž řádky odpovídají po řadě vrcholům $v_1, \dots, v_4$ a sloupce hranám $e_1, \dots, e_5$.

Všimněme si, že kdyby graf $G$ obsahoval smyčky, nebyla by jeho incidenční matice dobře definována — smyčka totiž z příslušného vrcholu vchází, ale zároveň z něj vychází. Proto náš předpoklad, že $G$ je bez smyček.

Zdůrazněme ještě jednu důležitou vlastnost incidenčních matic, jejímž důsledkem jsou různé jejich speciální vlastnosti, které uvidíme v následujících oddílech (např. Věta 9.6).

*V každém sloupci matice $M(G)$ jsou právě dva nenulové prvky, z nichž jeden je $+1$ a druhý je $-1$.*

Důvodem je samozřejmě fakt, že každá hrana obsahuje právě dva vrcholy, přičemž v prvním začíná a ve druhém končí.

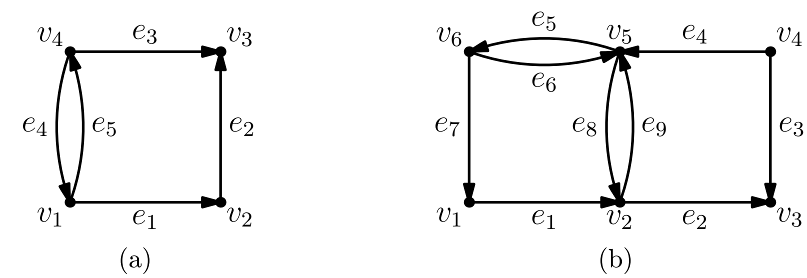
### Cvičení

▶ **9.1** Určete incidenční matice grafů na obr. 9.2 (s daným označením vrcholů a hran).

▶ **9.2** V jakém vztahu jsou matice $M(G)$ a $M(H)$, jsou-li grafy $G$ a $H$ isomorfní?

## 9.2 Řádky jako vektory

Incidenční matice $M(G)$ má $n$ řádků a $m$ sloupců. Na každý řádek se tak můžeme dívat jako na *vektor* o $m$ složkách, přesněji prvek vektorového prostoru $\mathbf{R}^m$. Řádky odpovídají vrcholům grafu $G$, a my budeme řádek odpovídající vrcholu $v_i$ označovat jako $\mathbf{v}_i$. (Sloupec odpovídající hraně $e_j$ budeme značit jako $\mathbf{e}_j$.)




Obrázek 9.2: Určete incidenční matice.

Jako v každém vektorovém prostoru, i v prostoru $\mathbf{R}^m$ je definován pojem lineární závislosti. Pro připomenutí:

> Množina vektorů $w_1, \ldots, w_k$ z vektorového prostoru $W$ (nad tělesem reálných čísel) je *lineárně závislá*, pokud existují reálné koeficienty $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ tak, že
>
> $$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i w_i = \mathbf{0}$$
>
> a přitom ne všechny koeficienty $\alpha_i$ v této *lineární kombinaci* vektorů $w_i$ jsou rovny nule.

Jaký má význam, je-li určitá množina řádků matice $M(G)$ lineárně závislá? Co to říká o odpovídající množině *vrcholů* grafu $G$? Klíčem k odpovědím na tyto otázky je následující nenápadné tvrzení.

**Tvrzení 9.2** *Nechť $K$ je komponenta orientovaného grafu $G$, a nechť*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

*je nulová lineární kombinace vektorů $\mathbf{v}_i$. Potom pro všechny vrcholy $v_k$ z komponenty $K$ jsou si koeficienty $\alpha_k$ navzájem rovny.*

**Důkaz.** Nejsou-li na komponentě $K$ všechny koeficienty $\alpha_k$ shodné, pak (díky slabé souvislosti) musí existovat *hrana* $e_j \in E(K)$ taková, že její počáteční vrchol $v_p$ a koncový vrchol $v_q$ mají různé koeficienty $\alpha_p \neq \alpha_q$.

Vzpomeňme si, že $M(G)$ obsahuje v $j$-tém sloupci (ve sloupci hrany $e_j$) jen dva nenulové prvky: $+1$ v $p$-tém řádku a $-1$ v $q$-tém řádku. Odtud plyne, že $j$-tá složka vektoru $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$ je rovna rozdílu $\alpha_p - \alpha_q$. O zmíněném vektoru ale předpokládáme, že je nulový, takže i $\alpha_p = \alpha_q$. To je spor. $\square$

### Cvičení

▶ **9.3** Jsou reálné vektory $(0, 1, -2)$, $(1, -1, 1)$ a $(2, -1, 0)$ lineárně závislé? Jak to lze poznat pomocí determinantu matice?

## 9.3 Hodnost incidenční matice

*Hodnost* $h(M)$ matice $M$ je maximální velikost lineárně nezávislé množiny jejích řádků. Lze hodnost incidenční matice $M(G)$ určit z vlastností grafu $G$?

Především si všimněme, že matice $M(G)$ nikdy nemůže mít plnou hodnost $n$. Sečteme-li totiž všechny řádky, dva nenulové prvky v každém sloupci se vzájemně vyruší a vyjde nulový vektor. Jedná se tedy o nulovou lineární kombinaci řádků matice $M(G)$ (v níž jsou všechny koeficienty rovny jedné). Množina *všech* řádků matice $M(G)$ je lineárně závislá.

**Věta 9.3** *Pro slabě souvislý graf $G$ má matice $M(G)$ hodnost $n-1$. Platí dokonce, že* každá *množina $n-1$ řádků matice $M(G)$ je lineárně nezávislá.*

**Důkaz.** Nechť $G$ je slabě souvislý a $S$ je množina $n-1$ řádků matice $M(G)$. Ukážeme, že $S$ je lineárně nezávislá. Dejme tomu, že $\sum_{\mathbf{v}_i \in S} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ je nulová lineární kombinace řádků z $S$ a rozšiřme tuto kombinaci na všechny řádky $M(G)$ tím, že pro (jediný) řádek $\mathbf{v}_k \notin S$ položíme $\alpha_k = 0$. Dostaneme lineární kombinaci

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

a podle tvrzení 9.2 musí být všechny koeficienty $\alpha_i$ shodné (protože slabě souvislý graf $G$ má jedinou komponentu). Kvůli koeficientu $\alpha_k$ jsou tedy všechny nulové. Dokázali jsme, že množina $S$ je lineárně nezávislá, a speciálně také $h(M(G)) = n-1$. $\square$

Toto tvrzení lze zobecnit i na grafy, které nejsou slabě souvislé:

**Věta 9.4** *Orientovaný graf $G$ má přesně $k$ komponent, právě když $h(M(G)) = n-k$.*

**Důkaz.** '$\Rightarrow$': Nechť $G$ má $k$ komponent $C_1, \ldots, C_k$. Nejprve dokážeme, že hodnost matice $M(G)$ je nejvýše $n-k$. Nechť $S$ je množina alespoň $n-k+1$ řádků. Musí existovat komponenta $C_p$ s vlastností, že $S$ obsahuje všechny řádky odpovídající vrcholům $C_p$, protože kdyby $S$ z každé komponenty aspoň jeden řádek vynechala, obsahovala by jich nejvýše $n-k$. Sečteme-li nyní všechny řádky $\mathbf{v}_i$ pro $v_i \in V(C_p)$, dostaneme nulový vektor: každá hrana $e_j$ má v $C_p$ buď oba konce (a příslušný součet je $1+(-1)$), nebo ani jeden (a pak sčítáme samé nuly). Tato nulová lineární kombinace řádků z $S$ ukazuje, že množina $S$ je lineárně závislá. Proto $h(M(G)) \leq n-k$.

Vyberme nyní nějakou množinu řádků $S$ o velikosti $n-k$, která pro každou komponentu $L_i$ obsahuje všechny řádky odpovídající vrcholům $L_i$ kromě jediného. Tvrdíme, že $S$ je lineárně nezávislá. Kdyby tomu tak nebylo, rozšiřme lineární závislost $\sum_{\mathbf{v}_i \in S} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ na všechny řádky matice $M(G)$ položením $\alpha_i = 0$ pro všechny $\mathbf{v}_i \notin S$:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}.$$

Podle tvrzení 9.2 jsou všechny koeficienty na každé komponentě $L_i$ shodné. Protože pro každou komponentu existuje vrchol s nulovým koeficientem, musí být $\alpha_i = 0$ pro každé $i$, takže $S$ je vskutku lineárně nezávislá. Hodnost matice $M(G)$ je tedy právě $n-k$.

'$\Leftarrow$': Nechť $h(M(G)) = n-k$. Podle dokázané implikace je hodnost incidenční matice grafu s $i$ komponentami rovna $n-i$. Graf $G$ tedy musí mít přesně $k$ komponent. $\square$

## Cvičení

► **9.4** Určete hodnost incidenční matice orientovaného grafu na $3k$ vrcholech, tvořeného $k$ disjunktními cykly délky 3. Jak vypadají lineárně nezávislé množiny řádků o maximální velikosti?

# 9.4 Faktory jako množiny sloupců

Víme, že sečtením všech řádků matice $M(G)$ dostaneme nulový vektor. Lze ji tedy rekonstruovat z matice $M_R(G)$, vzniklé vypuštěním posledního řádku matice $M(G)$. Jinak řečeno, matice $M_R(G)$ (kterou nazýváme *redukovaná incidenční matice* grafu $G$) poskytuje o orientovaném grafu $G$ úplnou informaci.

Sloupce incidenční matice $M(G)$ odpovídají hranám grafu $G$. Pro nás bude důležité, že množiny sloupců této matice odpovídají určitým podgrafům grafu $G$.

Připomeňme z definice 7.5, že faktor grafu $G$ je libovolný podgraf $H \subset G$, pro který je $V(H) = V(G)$. Každý faktor grafu $G$ je tedy jednoznačně určen svou množinou hran. Tím je také dán vzájemně jednoznačný vztah mezi těmito faktory a množinami sloupců matice $M_R(G)$: faktor $F_S$, přiřazený množině sloupců $S$, obsahuje právě ty hrany $e_j$, jejichž sloupec $\mathbf{e}_j$ patří do $S$.

V následující větě figurují čtvercové podmatice matice $M_R(G)$ řádu $n-1$. Vzhledem k tomu, že $M_R(G)$ má právě $n-1$ řádků, je každá taková podmatice určena $n-1$-prvkovou množinou sloupců. Pro množinu sloupců $S$ označíme příslušnou podmatici jako $A_S$.

Pro neorientované grafy jsme definovali pojem kostry. Do oblasti orientovaných grafů jej přeneseme takto: podgraf $H$ orientovaného grafu $G$ je jeho *kostrou*, pokud symetrizace grafu $H$ je kostrou symetrizace grafu $G$ a navíc $H$ neobsahuje smyčky ani protichůdné hrany.

**Věta 9.5** *Nechť $G$ je slabě souvislý orientovaný graf bez smyček. Potom čtvercová podmatice $A_S$ matice $M_R(G)$ řádu $n-1$ je regulární, právě když odpovídající faktor $F_S$ je kostrou grafu $G$.*

**Důkaz.** '$\Rightarrow$': Nechť matice $A_S$ je regulární. Z definice plyne, že $A_S$ je redukovanou maticí incidence faktoru $F_S$, tedy $A_S = M_R(F_S)$. Protože $h(A_S) = n-1$, musí mít (neredukovaná) matice $M(F_S)$ maximální možnou hodnost $n-1$. Podle věty 9.4 je $F_S$ slabě souvislý. Navíc určitě neobsahuje protichůdné hrany, protože příslušné sloupce by byly až na znaménko shodné a $A_S$ by nebyla regulární matice. Symetrizace faktoru $F_S$ je tedy souvislý graf s $n-1$ hranami. Podle věty 7.4 se musí jednat o strom. Odtud dostáváme tvrzení věty.

'$\Leftarrow$': Nechť faktor $F_S$ je kostrou grafu $G$. Je tedy slabě souvislý a podle věty 9.3 tvoří prvních $n-1$ řádků matice $M(F_S)$ lineárně nezávislou množinu. Proto $h(M_R(F_S)) = n-1$ a matice $A_S = M_R(F_S)$ je regulární. $\square$

### Cvičení

▶ **9.5** Kolik faktorů má graf o $n$ vrcholech a $m$ hranách?

## 9.5 Počítání koster

Čtvercové podmatice matice incidence mají zajímavou vlastnost, které se říká *totální unimodularita*:

**Věta 9.6** *Je-li $M(G)$ incidenční matice orientovaného grafu $G$ (bez smyček) a je-li $B$ její čtvercová podmatice řádu $r$ (kde $1 \leq r \leq n$), potom determinant matice $B$ je* 0 *nebo* $\pm 1$.

**Důkaz.** Indukcí podle $r$. Pro $r = 1$ je tvrzení jasné z definice incidenční matice. Předpokládejme, že $r > 1$. Pokud matice $B$ obsahuje nulový sloupec, je $\det B = 0$. Pokud obsahuje sloupec s jedinou nenulovou hodnotou $b_{ij}$, pak z rozvoje podle tohoto sloupce dostáváme

$$\det B = \pm \det B',$$

kde $B'$ vznikne z $B$ odstraněním $i$-tého řádku a $j$-tého sloupce. Podle indukčního předpokladu je $\det B' \in \{0, 1, -1\}$, takže totéž musí platit pro matici $B$.

Můžeme tedy předpokládat, že každý sloupec matice $B$ obsahuje právě dvě nenulové hodnoty (tj. 1 a $-1$). Sečtením všech řádků nutně dostaneme nulový vektor; to znamená, že matice $B$ je singulární a $\det B = 0$. I v tomto posledním případě tvrzení platí. $\square$

Při počítání koster grafu se neobejdeme bez Cauchy–Binetovy[1] věty, kterou nebudeme dokazovat. Její zhruba dvoustránkový důkaz lze najít např. v knize [5].

[1] Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) a Jacques Philippe Marie Binet (1786–1856).

**Věta 9.7 (Cauchy–Binetova věta)** *Nechť $B$ je matice o rozměrech $r \times s$, kde $r \le s$. Potom platí, že*

$$\det(B \cdot B^T) = \sum_I (\det B_I)^2,$$

*kde $I$ probíhá všechny $r$-prvkové množiny sloupců a $B_I$ je čtvercová podmatice matice $B$, určená sloupci z množiny $I$.* □

Nyní již můžeme vyslovit větu, která dává do souvislosti determinanty a počet koster.

**Věta 9.8** *Nechť $G$ je slabě souvislý orientovaný graf bez smyček a $A = M_R(G)$. Potom počet koster grafu $G$ je roven determinantu matice $A \cdot A^T$.*

**Důkaz.** Podle Cauchy–Binetovy věty je

$$\det(A \cdot A^T) = \sum_S (\det A_S)^2, \tag{9.1}$$

kde $S$ probíhá $(n-1)$-tice sloupců matice $A$. Podle věty 9.5 (ve které má symbol $A_S$ stejný význam jako zde) je $\det A_S \neq 0$ přesně pro ty množiny $S$, pro něž je faktor $F_S$ kostrou. Ostatní množiny $S$ součet v (9.1) neovlivní.

Je-li $F_S$ kostra, pak podle věty 9.6 je $\det A_S = \pm 1$, takže $(\det A_S)^2 = 1$. Každá kostra tedy v součtu (9.1) přispěje jedničkou a vidíme, že $\det(A \cdot A^T)$ skutečně počítá kostry grafu $G$. □

**Příklad 9.9** Jako aplikaci věty 9.8 spočítejme kostry grafu $G$, který je definován jako cyklus délky 3. Jeho redukovaná incidenční matice je

$$M_R(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

takže

$$\det\Big(M_R(G) \cdot (M_R(G))^T\Big) = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = 3.$$

Graf $G$ má tedy 3 kostry (což nás asi příliš nepřekvapí).

## Cvičení

▶ **9.6** Spočítejte pomocí věty 9.8 kostry grafu na obr. 9.1.

## 9.6 Počítání koster: neorientované grafy

Nechť je dán *neorientovaný* graf $G$. Chceme-li 'v praxi' počítat jeho kostry pomocí determinantů, lze to zařídit snadněji než pomocí věty 9.8. K jejímu použití bychom nejprve museli graf $G$ libovolně zorientovat a získat tak orientovaný graf $\vec{G}$, dále spočítat součin $M_R(\vec{G}) \cdot (M_R(\vec{G}))^T$ a konečně zjistit jeho determinant.

Uvedený součin však (jak uvidíme) závisí pouze na grafu $G$, nikoli na zvolené orientaci, a lze jej navíc snadno odvodit přímo z grafu $G$. Tím se vyhneme nutnosti násobení matic.

**Věta 9.10** *Nechť $G$ je neorientovaný graf s vrcholy $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ a $\vec{G}$ nějaká jeho orientace bez smyček a násobných hran. Dále položme*

$$L = M(\vec{G}) \cdot (M(\vec{G}))^T \qquad \text{(tzv. Laplaceova matice grafu } G\text{).}$$

*Potom pro prvky čtvercové matice $L = (\ell_{ij})$ řádu $n$ platí:*

$$\ell_{ij} = \begin{cases} d_G(v_i) & \text{pokud } i = j, \\ -1 & \text{pokud } v_i v_j \in E(G), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

*Navíc platí, že matici $L' = M_R(\vec{G}) \cdot (M_R(\vec{G}))^T$ získáme vypuštěním posledního řádku a sloupce z matice $L$.*

**Důkaz.** Položku $\ell_{ij}$ matice $L$ získáme jako skalární součin $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$, tedy součin $i$-tého a $j$-tého řádku matice $M(\vec{G})$. Pokud $i = j$, pak každá hrana obsahující vrchol $v_i$ (nezávisle na směru) přispěje k tomuto skalárnímu součinu 1, takže $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = d_G(v_i)$. Pro $i \neq j$ jsou vrcholy $v_i, v_j$ spojeny nejvýše jednou hranou, tj. vektory $\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j$ jsou nejvýše v jedné souřadnici oba nenulové. Snadno vidíme, že součin $\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j$ je $-1$ resp. 0 podle toho, zda $v_i v_j$ je hranou nebo ne.

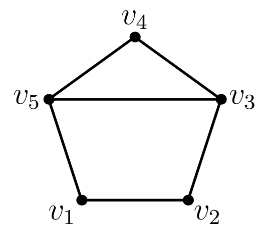
Druhá část věty přímo plyne z definice násobení matic. □

Rychlejší postup počítání koster neorientovaného grafu, založený na této větě, si ukážeme na následujícím příkladu.

**Příklad 9.11** Uvažme neorientovaný graf $G$ na obr. 9.3. Napišme přímo jeho Laplaceovu[2] matici:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

[2] Pierre-Simon Laplace (1749–1827).




Obrázek 9.3: Graf z příkladu 9.11.

Podle vět 9.10 a 9.8 stačí z matice $L$ vynechat poslední řádek a sloupec, a determinant výsledné matice $L'$ je počet koster grafu $G$. Přímým výpočtem zjistíme, že

$$\det L' = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 11.$$

Graf $G$ má tedy 11 koster.

Vraťme se k otázce, kterou jsme tuto kapitolu zahájili: kolik existuje různých stromů na $n$-prvkové množině vrcholů? Lze ji formulovat také takto: kolik různých koster má úplný graf na $n$ vrcholech?

**Věta 9.12** *Úplný graf na $n \geq 2$ vrcholech má $n^{n-2}$ různých koster.*

**Důkaz.** Laplaceova matice $L_n$ grafu $K_n$ je čtvercová matice řádu $n$ a vypadá takto:

$$L_n = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{bmatrix}.$$

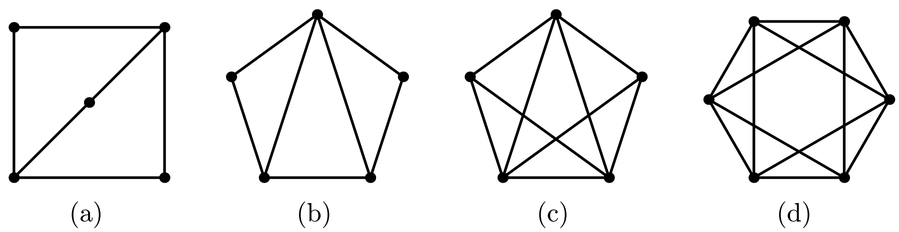
Determinant matice $L_n'$, která vznikne odstraněním posledního řádku a sloupce, je hledaný počet koster. Přičtěme k prvnímu řádku matice $L_n'$ všechny ostatní řádky, a následně přičtěme tento nový první řádek ke všem ostatním. Determinant se nezmění, takže

$$\det L_n' = \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{bmatrix}.$$

Matice na pravé straně má $n-1$ řádků, takže rozvojem podle prvního sloupce dostáváme $\det L_n' = n^{n-2}$. $\square$

## Cvičení

▶ **9.7** Určete počet koster grafů na obr. 9.4.



Obrázek 9.4: Určete počet koster.

▶ **9.8** Osvěžte si potřebné pojmy z lineární algebry a ukažte, že pro Laplaceovu matici $L(G)$ neorientovaného grafu $G$ platí:

(a) $L(G)$ je pozitivně semidefinitní,

(b) vlastní vektor příslušný vlastnímu číslu 0 je vektor s jednotkovými složkami,

(c) je-li $G$ souvislý, pak vlastní číslo 0 má násobnost 1.