Výsledky cvičení

Kapitola 1

1.1.

$$\begin{aligned} X \cup Y &= \{z : z \in X \text{ nebo } z \in Y\}, \\ X \cap Y &= \{z : z \in X \text{ a } z \in Y\}, \\ X - Y &= \{z : z \in X \text{ a } z \notin Y\}. \end{aligned}$$

1.3. A má 2^n podmnožin, z toho 2^{n-1} sudých.

1.4. (a)

$$\begin{aligned} &\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \\ &\binom{6}{3} = 20, \binom{10}{6} = 210, \binom{10}{0} = 1, \binom{0}{0} = 1. \end{aligned}$$

1.5. (a) 2^n. (b) 0.

1.8. Pro rovnost neplatí, např. když $A = C = \emptyset$ a B, D jsou různé. Pro inkluzi tvrzení platí.

1.9. $L(R) = P(R) = \{3, 4\}$.

1.10.

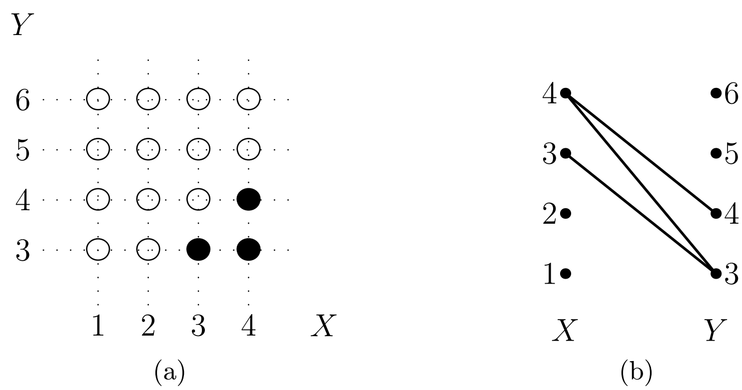
$$\begin{aligned} R \cup T &= \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,b),(3,a),(3,b),(4,a),(4,b),(4,c),(4,d)\}, \\ R \cap T &= \{(1,c),(3,a)\}, \\ R - T &= \{(1,a),(2,b),(3,b),(4,b),(4,c),(4,d)\}, \\ R \bigtriangleup T &= \{(1,a),(1,b),(2,b),(3,b),(4,a),(4,b),(4,c),(4,d)\}. \end{aligned}$$

1.11. 2^{mn}.

1.12. R implikuje S, právě když $R \subset S$.

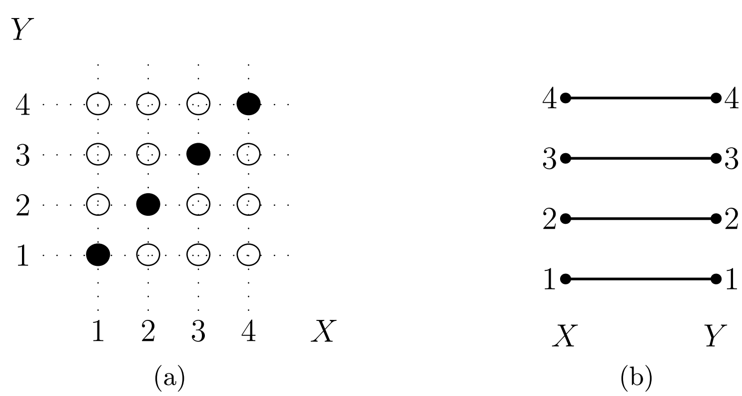
1.13. Obr. 1.1a: např. prvky $L(R)$ odpovídají sloupcům obsahujícím alespoň jeden vyznačený prvek. Na obr. 1.1b odpovídají bodům z množiny X, ze kterých vede alespoň jedna spojnice.

1.14. Viz obr. 12.9.



Obrázek 12.9: Řešení cvičení 1.14.

1.15. Např. pro $X = \{1, 2, 3, 4\}$ viz obr. 12.10.



Obrázek 12.10: Řešení cvičení 1.15.

1.16. Obě složení jsou rovna R.

1.17. (a) Například relace $R = \{(1,2),(1,3),(2,3)\}$ na množině $\{1,2,3\}$. (b) Relace E_X na libovolné množině X.

1.18. Jedno je zrcadlovým obrazem druhého podle diagonály.

1.19. Například: (a) prázdná relace na neprázdné množině, (b) relace

$$R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

na $X = \{1,2\}$.

1.20. Ne, např. pro $R = \{(1,1),(1,2),(2,2)\}$ a $S = \{(1,2),(2,1)\}$ na $X = \{1,2\}$.

1.21. Vztah (b) v platnosti nezůstane, viz např. relace $R = \{(2,2)\}$, $S = \{(2,1)\}$ a $T = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$ na $X = \{1,2\}$.

1.24. (a) m^n. (b) $m(m-1)\dots(m-n+1) = \binom{m}{n} \cdot n!$. (c) $n!$ pokud $m = n$, jinak 0.

1.25. (a) Například $f(n) = 2n$. (b) Například $f(0) = 0$, $f(n) = n-1$ pro $n \geq 1$.

1.26. (a) Je-li $f \circ g$ na, pak g je na, f ne nutně. (b) Je-li $f \circ g$ prostá, pak f je prostá, g ne nutně.

1.27. 'Analogický fakt' je $f \circ p = g \circ p \Rightarrow f = g$.

1.31. Například: (a) $n \mapsto n/2$. (b) $n \mapsto 2n$ pro $n > 0$ a $n \mapsto -2n+1$ pro $n \leq 0$.

1.33. Slabě antisymetrická zobrazení jsou charakterizována např. podmínkou

$$\text{pokud } f(f(x)) = x, \text{ pak } f(x) = x.$$

1.35. Uvádíme zkratky vlastností daných relací (R = reflexívní, A = slabě antisymetrická atd.): (a) RAT, (b) AT, (c) RS, (d) RST, (e) S, (f) RAT, (g) RT, (h) SAT (platí totiž $S = \{(0,0)\}$!), (i) T, (j) RT, (k) nic, (l) RST.

1.36. Ne, viz například prázdná relace.

1.37. Jde právě o podmnožiny identické relace.

1.38. Matice reflexívní relace má na diagonále samé jedničky, matice symetrické relace je symetrická.

1.41. Ano.

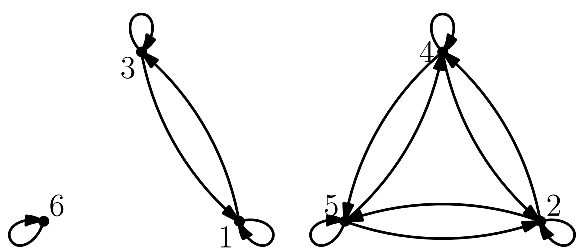
1.42. Relace $\sim$ není ekvivalence, protože $p \sim -p$, ale není $-p \sim p$.

1.44. (a) Ne, viz relace $R = \{(1,2),(2,1)\} \cup \Delta$ a $S = \{(2,3),(3,2)\} \cup \Delta$ na množině $\{1,2,3\}$, kde $\Delta = \{(1,1),(2,2),(3,3)\}$. (b) Ne, není reflexívní. (c) Ne, viz cvičení 1.45.

1.46. (a) Ano, přímky rovnoběžné s $y = x$. (b) Ano, přímky rovnoběžné s $y = kx$. (c) Ano, soustředné elipsy.

1.47. Ekvivalence $\approx$ má $n+1$ tříd, ekvivalence $\simeq$ nekonečně mnoho.

1.48. Viz obr. 12.11.



Obrázek 12.11: Řešení cvičení 1.48.

1.49. Matice M je v 'blokovém tvaru', pokud

$$M = \begin{bmatrix} B_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & B_k \end{bmatrix},$$

kde 'bloky' B_i jsou čtvercové matice složené ze samých jedniček, jejichž diagonály leží na diagonále matice M. V matici $M(R)$ v blokovém tvaru bloky odpovídají třídám ekvivalence R.

Kapitola 2

2.1. Grupa na množině $\{0, a, b, c\}$ s operací $\star$:

$\star$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	0	c	b
b	b	c	0	a
c	c	b	a	$0.$

2.3. Nejmenší příklad tvoří grupa ze cvičení 2.1 spolu s grupou určenou tabulkou

$\star$	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	a	b	c	0
b	b	c	0	a
c	c	0	a	b,

což je v podstatě grupa $\mathbf{Z}_4$, definovaná v oddílu 2.2.

2.4. Když se x a y v i-té souřadnici shodují.

2.5. 25.

2.6. Množina řešení je

$$\{(4t + 2, 2, t + 1, t) : t \in \mathbf{Z}_5\}.$$

2.7. Těleso $\mathbf{Z}_2$:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\otimes$	1
1	1

Těleso $\mathbf{Z}_7$:

$\oplus$	0	1	2	3	4	5	6
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	0
2	2	3	4	5	6	0	1
3	3	4	5	6	0	1	2
4	4	5	6	0	1	2	3
5	5	6	0	1	2	3	4
6	6	0	1	2	3	4	5

$\otimes$	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

2.12. Nechť z je reprezentant třídy a. Pokud p dělí z, pak $a = 0$ a inverzní prvek neexistuje. Jinak $(z, p) = 1$, protože p je prvočíslo, a stačí najít koeficient x v rovnosti $zx + py = (z, p)$. Třída $[x]_p$ je inverzní ke třídě a.

2.15. Jde o kritéria: (a) x je dělitelné 3 (resp. 9), právě když má součet cifer dělitelný 3 (resp. 9). (b) Číslo x je dělitelné 8, právě když má poslední trojčíslí dělitelné 8. (c) Číslo x je dělitelné 11, právě když je rozdíl součtu cifer na lichých pozicích a součtu cifer na sudých pozicích dělitelný 11.

Kapitola 3

3.1. (a) ne, (b) ano, neporovnatelné dvojice jsou $\{1, 2\}$ a $\{4, 5\}$.

3.2. Nechť X je abeceda (množina symbolů) s lineárním uspořádáním $\leq$. Pro slova $a = a_1 \dots a_m$ a $b = b_1 \dots b_n$ (kde symboly a_i, b_j jsou z X) položíme $a \preceq b$, právě když existuje $k \leq \min(m, n)$ s vlastnostmi:

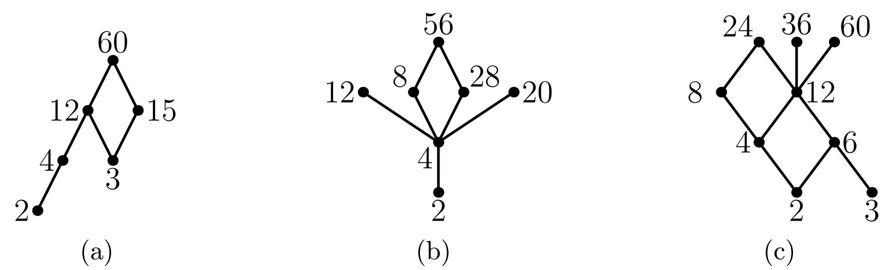
(1) pro každé $j \leq k$ je $a_j \leq b_j$, a dále

(2) buď $k < \min(m, n)$ a $a_{k+1} \leq b_{k+1}$, nebo $k = m$.

Relace $\preceq$ je tzv. *lexikografické uspořádání* na množině slov nad abecedou X.

3.3. Je to prázdná relace.

3.4. Viz obr. 12.12. V příkladu (a) existuje jen největší prvek (60), v příkladu (b) největší (56) i nejmenší (2), v příkladu (c) ani jeden.



Obrázek 12.12: Řešení cvičení 3.4.

3.5. (b) Například množina reálných čísel se standardním uspořádáním (viz cvičení 3.3).

3.6. Například množina všech celých čísel se standardním uspořádáním a s přidaným prvkem $*$, který je menší než 0 a neporovnatelný se všemi zápornými čísly. Prvek $*$ je jediný minimální prvek, ale nejmenší prvek neexistuje.

3.7. (a) Ne, protože $(d, a) \notin R$. (b) Ano, minimální prvky jsou b, e, maximální a, d.

3.8. Například množina $\{1, \dots, 7\}$ s uspořádáním

$$R = \{(i, j) : i \leq 2, j \geq 3\} \cup \{(i, i) : i = 1, \dots, 7\}.$$

3.9. Existují, infimum odpovídá největšímu společnému děliteli, supremum nejmenšímu společnému násobku.

3.12. Jediný minimální prvek je prázdné uspořádání, maximální prvky jsou lineární uspořádání.

3.14. Dokážeme jen neplatnost vztahu (3.1) ve svazu M_5. Nechť x, y, z jsou všechny tři prvky svazu M_5 různé od 0, 1, přičemž $y \leq z$. Potom $z \wedge (x \vee y) = z \wedge 1 = z$, zatímco $(z \wedge x) \vee (z \wedge y) = 0 \vee x = x$, takže distributivita neplatí. U svazu N_5 je rovněž třeba uvážit tři prvky různé od 0, 1.

3.15. Vlastnost neplatí např. pro prvky svazu N_5 různé od $0, 1$.

3.16. Ano.

3.17. Nejmenší prvek je 1, největší 0. Svaz je distributivní: podle cvičení 3.9 infimum čísel a, b odpovídá nejmenšímu společnému děliteli $\mathrm{nsd}(a, b)$, supremum nejmenšímu společnému násobku $\mathrm{nsn}(a, b)$. Protože platí

$$a \cdot b = \mathrm{nsd}(a, b) \cdot \mathrm{nsn}(a, b),$$

podle cvičení 3.15 snadno dostáváme distributivitu daného svazu.

3.18. (b) Ne, například pro $X = \{1, 2, 3, 5, 30\}$ jde o svaz N_5.

3.19.

případ	minimální	maximální	nejmenší	největší	svaz	distributivní
(a)	2	4, 42	2	—	ne	—
(b)	2,3,7	42	—	42	ne	—
(c)	1	30	1	30	ano	ne
(d)	1	36	1	36	ne	—
(e)	1	60	1	60	ano	ne
(f)	1	30	1	30	ano	ano

3.20. Jsou to množiny $\{1, 2, 3, 12\}$, $\{1, 2, 3, 4, 12\}$, $\{1, 4, 6, 12\}$, $\{1, 3, 4, 6, 12\}$.

3.25. Ano.

Kapitola 4

4.1.

případ	svaz	distributivní	komplementární	Booleova algebra
(a)	ne	—	—	—
(b)	ano	ne	ano	ne
(c)	ano	ano	ano	ano
(d)	ano	ano	ne	ne

4.2. Uspořádaná množina $D(n)$ je Booleova algebra, právě když n není dělitelné druhou mocninou žádného prvočísla. (Pokud totiž p^2 dělí n, pak p nemá komplement.)

4.7. Zkratky: R = reflexívní, S = symetrická, A = slabě antisymetrická, T = tranzitivní

případ	R	S	A	T	ekvivalence	uspořádání
(a)	ne	ne	ano	ano	ne	ne
(b)	ne	ano	ne	ne	ne	ne
(c)	ne	ano	ne	ne	ne	ne

4.8. Např. prvek a nemá inverzní prvek vzhledem k násobení.

4.9. Uvedeme pouze tabulku operace + (v obvyklém zápisu, takže např. množinu $\{b, c\}$ označujeme bc).

$+$	0	a	b	c	ab	ac	bc	1
0	0	a	b	c	ab	ac	bc	1
a	a	a	ab	ac	ab	ac	bc	1
b	b	ab	b	bc	ab	1	bc	1
c	c	ac	bc	c	1	ac	bc	1
ab	ab	ab	ab	1	ab	1	1	1
ac	ac	ac	1	ac	1	ac	1	1
bc	bc	1	bc	bc	1	1	bc	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

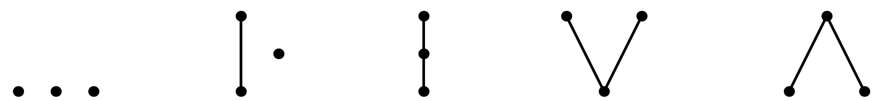
4.12. Atomy jsou: (a) množiny $\{a\}, \{b\}, \{c\}$, (b) jednoprvkové podmnožiny množiny X, (c) prvky 2, 3 a 5.

4.13. Atomy jsou jednoprvkové podmnožiny množiny přirozených čísel.

4.14. (d) Spojení, průsek a komplement lze popsat následovně:

$$\begin{aligned} [A] \wedge [B] &= [A \cap B], \\ [A] \vee [B] &= [A \cup B], \\ \overline{[A]} &= [\mathbf{N} - A]. \end{aligned}$$

4.20. (a) Hasseovy diagramy těchto uspořádaných množin jsou na obr. 12.13. (c) Např. následující uspořádání S, T: uspořádání S je standardní uspořádání přirozených čísel, uspořádání T se s ním shoduje na množině $\{1, 2, \ldots\}$, ale číslo 0 je v něm větší než všechna ostatní čísla.



Obrázek 12.13: Pět neisomorfních tříprvkových uspořádaných množin.

4.21. Množinou atomů direktního součinu $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ je kartézský součin $\mathrm{At}(\mathcal{A}_1) \times \mathrm{At}(\mathcal{A}_2)$.

4.22. Hodnoty získáme, pokud v tabulce 4.2 provedeme následující nahrazení:

$$0 \to 00, \qquad a \to 10, \qquad b \to 01, \qquad 1 \to 11.$$

4.23. Výsledkem jsou tyto pravdivostní tabulky:

x	y	$x \to y$	$y + x\bar{y}$
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

4.24. Je to booleovský polynom rovný polynomu x_2.

4.25. Supremum funkcí f, g je funkce, jejíž hodnota v každé n-tici $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathcal{B}_2^n$ je supremem hodnot $f(a_1, \ldots, a_n)$ a $g(a_1, \ldots, a_n)$. Podobně infimum a komplement.

4.26. $|F_2| = 16$, $|F_n| = 2^{2^n}$.

4.28. Platí

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x \,|\, x, \\ x + y &= \bar{x} \,|\, \bar{y} = (x \,|\, x) \,|\, (y \,|\, y), \\ x \cdot y &= \overline{x \,|\, y} = (x \,|\, y) \,|\, (x \,|\, y). \end{aligned}$$

4.29. (a) Ani v jednom, (b) jen v součinovém, (c) v obou, (d) v obou.

4.30.

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= \bar{x}y\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z + xyz \\ &= (x+y+z)(x+y+\bar{z})(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z), \\ g(x,y,z) &= \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z + xyz \\ &= (x+y+\bar{z})(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+\bar{y}+z). \end{aligned}$$

4.31. Například $x\bar{y}\bar{z}$ a $x\bar{y}\bar{z} + x\bar{x}$.

4.32. Věta neplatí, konstantní 1 má vyjádření v úplném součtovém, ale nikoli v úplném součinovém tvaru.

4.33.

$$\begin{aligned} x \to (y \to x) &= xyz + xy\bar{z} + x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\ &\quad \text{(vyjádření v úplném součinovém tvaru neexistuje)}, \\ x \oplus (y \to z) &= xy\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\ &= (x+\bar{y}+z)(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}), \\ \overline{y(x+\bar{y}z)} &= x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\ &= (x+y+z)(x+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z), \\ ((\bar{x}y) \oplus z)((xz) \to y) &= xyz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z \\ &= (x+y+z)(x+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+y+z)(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+\bar{y}+z). \end{aligned}$$

4.34.

$$\begin{aligned} x \to ((y+\bar{x}z) \oplus \bar{z}) &= xyz + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} \\ &= (\bar{x}+\bar{y}+z)(\bar{x}+y+\bar{z}), \\ ((x\bar{y}) \oplus (y\bar{z})) \oplus (z\bar{x}) &= xy\bar{z} + x\bar{y}z + xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + \bar{x}yz + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z \\ &= (x+y+z)(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z}). \end{aligned}$$

4.35. 2^n.

Kapitola 5

5.3. Jeden z isomorfismů například přiřazuje vrcholům $1, 2, \ldots, 6$ po řadě vrcholy b, e, f, c, a, d.

5.4. Po řadě $\binom{n}{2}$, 0, $n - 1$ a n.

5.6. Všechny vrcholy grafu K_n mají stupeň $n-1$, v grafu D_n jsou všechny stupně 0. V grafu P_n jsou pro $n \geq 2$ dva vrcholy stupně 1, ostatní mají stupeň 2. Graf P_1 má jeden vrchol stupně 0. Všechny stupně v grafu C_n jsou 2.

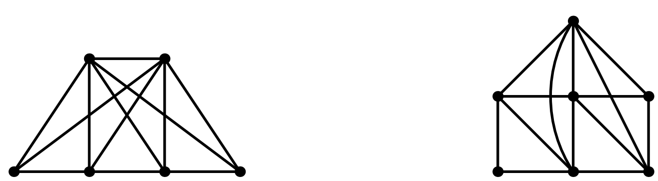
5.7. (a) Pro $p \geq q$ je skóre $(p, p, \ldots, p, q, q, \ldots, q)$, přičemž p se opakuje q-krát a q se opakuje p-krát. (b) $(k, k, \ldots, k)$, kde k se opakuje 2^k-krát.

5.8. Například kružnice C_6 a disjunktní sjednocení dvou kružnic C_3.

5.9. Pro žádné. Graf s n vrcholy nemůže mít vrchol stupně n.

5.10. (a) Viz obr. 12.14a. (b) Viz obr. 12.14b. (c) Neexistuje (součet stupňů je lichý).

5.11. (b) Jde o následující charakterizaci: k-regulární graf na n vrcholech existuje právě tehdy, když $k - 1$ dělí n.



(a) (b)

Obrázek 12.14: Příklady řešení cvičení 5.10.

Kapitola 6

6.2. Např. každé prosté zobrazení množiny X do množiny Y je homomorfismus diskrétního grafu s množinou vrcholů X do diskrétního grafu s množinou vrcholů Y a má požadované vlastnosti.

6.5. (a) 3, (b) 4.

6.11. Tah je hranový monomorfismus z cesty P_k do grafu G, uzavřený tah je hranový monomorfismus z kružnice C_k do G.

6.12. Např. $(1, 2, 3, 1, 4, 2, 5, 3, 6, 4, 5, 6, 1)$.

Kapitola 7

7.1. Počet různých stromů je 16, počet neisomorfních 2.

7.2. (a) 1, (b) n, (c) $n^2 + 2n$.

7.3. 3^n.

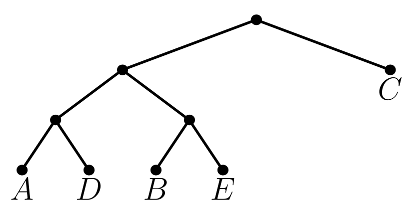
7.4. (a) $n \cdot 2^{n-1}$, (b) $2^{n-1}(n+2)$.

7.7. Průměrná vážená hloubka je 2.36.

7.8. ELEGIE: 10101001000111, LILIE: 010001101000111. Huffmanův kód se 'vyplatí' u prvního slova (má délku 14, zatímco při zakódování každého symbolu trojicí bitů bychom potřebovali 18 bitů. U druhého slova je délka v obou případech stejná.

7.9. LIGA.

7.10. Huffmanův strom je na obr. 12.15. Jeho průměrná vážená hloubka je 2.6.



Obrázek 12.15: Huffmanův strom ve cvičení 7.10.

Kapitola 8

8.2. Například sjednocení orientovaného cyklu na vrcholech a, b, c, d a orientované cesty na vrcholech d, e, f.

8.6. Například $(5, 2, 3, 1, 6, 4)$ nebo $(5, 2, 1, 3, 6, 4)$.

8.7. Například graf G, jehož množinou vrcholů je množina všech celých čísel, a hrany jsou všechny dvojice $(k, k+1)$, kde $k \in \mathbf{Z}$.

8.8. (a) R je reflexívní, právě když u každého vrcholu je smyčka. (b) R je symetrická, právě když ke každé hraně mezi různými vrcholy existuje protichůdná hrana. (c) R je antisymetrická, právě když graf G neobsahuje žádnou dvojici protichůdných hran.

8.11. V obou případech jde o orientovaný graf se dvěma vrcholy spojenými jednou hranou.

Kapitola 9

9.1. (a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

(b)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

9.2. Liší se jen pořadím řádků a sloupců.

9.3. Ano. Vektory $v_1, \dots, v_n \in \mathbf{R}^n$ jsou lineárně závislé, právě když matice s řádky $v_1,\dots,v_n$ má nulový determinant.

9.4. Hodnost je $2k$, hledané množiny obsahují pro každou komponentu právě dva řádky odpovídající jejich vrcholům.

9.5. Počet faktorů je 2^m.

9.6. Je jich 8 (viz také cvičení 7.2c).

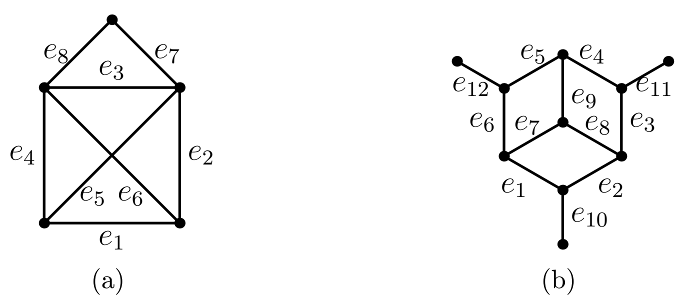
9.7. (a) 12. (b) 21. (c) 75. (d) 384.

Kapitola 10

10.2. Například sjednocení dvou trojúhelníků se společným vrcholem. Faktor obsahující všechny hrany je sudý, ale není to kružnice.

10.3. Při očíslování hran jako na obr. 12.16 dostaneme matice, které se od následujících liší jen pořadím řádků:

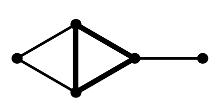
$$
\text{(a)} \begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1
\end{bmatrix}, \qquad
\text{(b)} \begin{bmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}.
$$



Obrázek 12.16: Označení hran grafů z cvičení 10.3.

10.4. Např. hvězda vrcholu stupně 3 v grafu na obr. 7.1a není řez.

10.5. Opačná implikace neplatí, např. tučně označená množina hran A na obrázku 12.17 není řezem.



Obrázek 12.17: Příklad k cvičení 10.5.

10.8. Řešení je na obr. 12.18 a 12.19.

Kapitola 11

11.1. Na diagonále jsou stupně vrcholů, jinde 0.

11.2. Pět: $v_2v_1v_2v_1v_2$, $v_2v_3v_2v_1v_2$, $v_2v_1v_2v_3v_2$, $v_2v_3v_2v_3v_2$, $v_2v_3v_3v_3v_2$.

11.3. Jde o vztah

$$\begin{aligned} F_1 &= F_2 = 1, \\ F_{i+2} &= F_i + F_{i+1}, \end{aligned}$$

kde $i \geq 1$.

11.5. Pro sudé n je

$$D(C_n) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & \frac{n}{2}-1 & \frac{n}{2} & \frac{n}{2}-1 & \dots & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & \frac{n}{2}-2 & \frac{n}{2}-1 & \frac{n}{2} & \dots & 3 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{n}{2} & \frac{n}{2}-1 & \frac{n}{2}-2 & \dots & 1 & 0 & 1 & \dots & \frac{n}{2}-2 & \frac{n}{2}-1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & \frac{n}{2} & \frac{n}{2}-1 & \frac{n}{2}-2 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

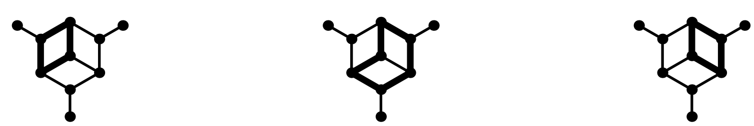
(pro liché n jsou nutné malé změny). Dále je

$$D(\vec{C_n}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & \dots & n-2 & n-1 \\ n-1 & 0 & 1 & \dots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & 0 \end{bmatrix}.$$

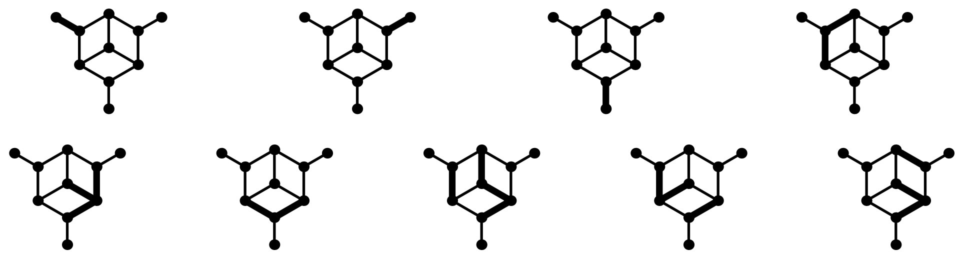
11.7. Graf je silně souvislý, právě když jeho distanční matice neobsahuje položky ∞.

12.1. Čtvercové symetrické nezáporné reálné matice.

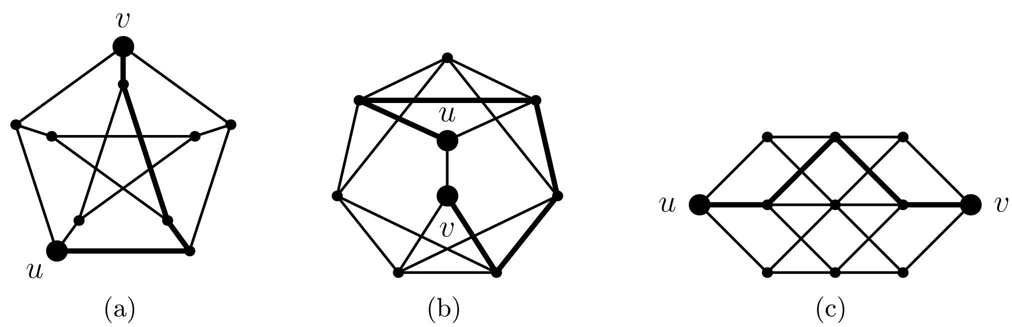
12.2. Příklady řešení jsou na obr. 12.20. Váhy minimálních cest jsou: (a) 22, (b) 21, (c) 21.



Obrázek 12.18: Fundamentální soustava kružnic ve cvičení 10.8 (tučně).



Obrázek 12.19: Fundamentální soustava řezů ve cvičení 10.8 (tučně).



Obrázek 12.20: (Některé) minimální cesty v příkladu 12.2.

12.3. Označme vrcholy zleva doprava $u, x_1, x_2, \dots, x_6, v$. Potom minimální cesta je: (a) (u, x_3, x_2, x_5, v), váha 29, (b) $(u, x_2, x_1, x_4, x_3, x_6, v)$, váha 28.

12.4. Matice vážených vzdáleností jsou:

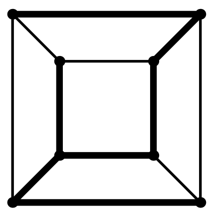
$$\text{(a)}\quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 8 & 7 & 6 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{(b)}\quad \begin{bmatrix} 0 & 8 & 1 & 5 & 7 \\ 9 & 0 & 5 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 0 & 4 & 10 \\ 6 & 5 & 2 & 0 & 8 \\ 6 & 6 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

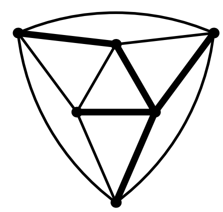
$$\text{(c)}\quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{(d)}\quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 6 & 6 \\ 6 & 0 & 1 & 4 & 5 \\ 8 & 2 & 0 & 3 & 4 \\ 9 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 8 & 5 & 6 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kapitola 12

12.5. Tvrzení neplatí, stačí uvážit trojúhelník s hranami ohodnocenými 2, 2, 3, přičemž u a v jsou koncové vrcholy hrany o váze 3.

12.6. Minimální kostry mají váhu (a) 8, (b) 11. Jejich příklady jsou na obrázku 12.21.


(a)


(b)

Obrázek 12.21: Minimální kostry v cvičení 12.6.

12.8. Optimální kružnice je (A, D, E, B, C, A) a má váhu 16.