

1. Relační struktury

1.1. Binární relace

Pojem "binární relace" patří k základním matematickým pojmům. Intuitivně každý jistě chápe, co binární relace je, neboť s příklady různých relací (vztahů) se setkáváme i v běžném životě, a to doslova na každém kroku. Zde nám jde jednak o zavedení vhodného množinového popisu binární relace, jednak o přehledné zpracování některých dalších nezbytných pojmů.

Uvažujme například následující binární relace (dále jen relace):

(osoba)	x je členem y	(společenská organizace);
(signál)	x je odezva y	(impulsu);
(součástka)	x je nutno demontovat před y	(součástkou);
(číslo)	x je menší než y	(číslo).

Každá uvedená relace a každá relace vůbec je zřejmě dána výrokovou formou typu $x \varrho y$, kde x je proměnná z dané množiny A a y je proměnná z dané množiny B . Prvek $a \in A$ je pak v relaci s prvkem $b \in B$ právě když výrok $a \varrho b$ je pravdivý. Relace ϱ je zřejmě určená, právě když jsou dány množiny A, B a všechny uspořádané dvojice (a, b) z množiny $R = \{ (x, y) \mid (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge (\text{výrok } x \varrho y \text{ je pravdivý}) \}$.

Definice. Necht A, B jsou neprázdné množiny. Binární relace z množiny A do množiny B je uspořádaná trojice (R, A, B) , kde $R \subset A \times B$.

Dvě relace ρ_1, ρ_2 jsou totožné, jestliže jim odpovídající trojice $(R_1, A_1, B_1), (R_2, A_2, B_2)$ si jsou rovny, tj platí-li zároveň $R_1 = R_2, A_1 = A_2$ a $B_1 = B_2$.

Je-li $A_1 = A_2 = A, B_1 = B_2 = B$ a $R_1 \subset R_2$, pak říkáme, že relace $\rho_1 = (R_1, A, B)$ implikuje relaci $\rho_2 = (R_2, A, B)$.

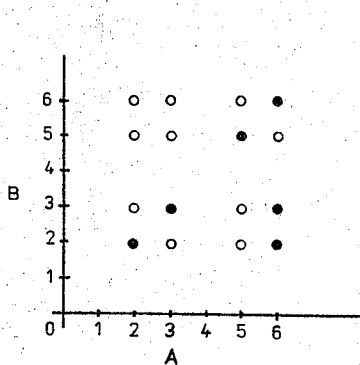
Je-li $A = B$, pak říkáme, že relace $\rho = (R, A, A)$ je relace na množině A.

Je-li z kontextu zřejmé, s jakými množinami A, B pracujeme, pak pro relaci $\rho = (R, A, B)$ místo $(a, b) \in R$ krátce píšeme $a \rho b$. Zřejmým způsobem zavádíme pro relace pojmy inkluze, sjednocení a průniku: je-li $\rho_1 = (R_1, A, B)$ a $\rho_2 = (R_2, A, B)$, pak $\rho_1 \subset \rho_2 \Leftrightarrow \Leftrightarrow R_1 \subset R_2, \rho_1 \cap \rho_2 = (R_1 \cap R_2, A, B)$ a $\rho_1 \cup \rho_2 = (R_1 \cup R_2, A, B)$.

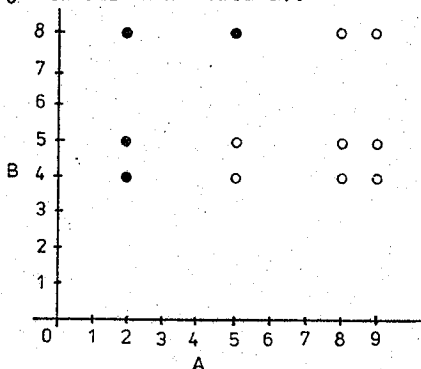
Příklad. Uvažujme relaci určenou výrokovou formou:

(číslo $x \in A$) je dělitelné (číslem $y \in B$), kde $A = B = \{2, 3, 5, 6\}$.

V tomto případě je $R = \{(2,2), (3,3), (5,5), (6,2), (6,3), (6,6)\}$ příslušná podmnožina kartézského součinu $A \times B$ a grafické znázornění této relace je na obrázku 1.1.1 a).



obr. 1.1.1 a)



obr. 1.1.1 b)

Příklad. Uvažujme relaci, které odpovídá podmnožina $R = \{(2,4), (2,5), (2,8), (5,8)\}$ kartézského součinu množin A, B , kde $A = \{2, 5, 8, 9\}$, $B = \{4, 5, 8\}$.

Zřejmě jde o relaci určenou výrokovou formou:

(číslo $x \in A$) je menší než (číslo $y \in B$).

Grafické znázornění je na obrázku 1.1.1 b).

Příklad. Uvažujme průnik a sjednocení následujících relací:

$\rho_1 \equiv$ (číslo $x \in A$) je menší nebo rovno (číslo $y \in B$),

$\rho_2 \equiv$ (číslo $x \in A$) je menší než (číslo $y \in B$)

$\rho_3 \equiv$ (číslo $x \in A$) je větší nebo rovno (číslo $y \in B$),

kde $A = \langle 1,3 \rangle = B$.

Pak zřejmě platí:

ρ_1, ρ_2, ρ_3 jsou relacemi na množině $A = \langle 1,3 \rangle$,

$\rho_2 \subset \rho_1$, tj. relace ρ_2 implikuje relaci ρ_1 ,

$\rho_1 \cap \rho_3 = \{(x,x) \mid x \in A\}$; tato relace se nazývá identita na A a značí se E ,

$\rho_1 \cup \rho_3 = \rho_2 \cup \rho_3 = A \times A$; taková relace se nazývá úplná relace na A,

$\rho_2 \cap \rho_3 = \emptyset$, tj. $\rho_2 \cap \rho_3$ je prázdná relace.

Poznamenáváme ještě, že všech relací (R, A, B) je tolik, kolik je podmnožin kartézského součinu $A \times B$. Je-li $|A| = m$ a $|B| = n$, je $|A \times B| = m \cdot n$ a tudíž počet všech podmnožin kartézského součinu $A \times B$ je roven $2^{m \cdot n}$ (symbolem $|M|$ zde značíme počet prvků konečné množiny M). Je-li tedy např. $A = B$ a $|A| = 4$, je počet všech různých relací na množině A roven číslu $2^{16} = 65.536$.

Je-li dána relace (R, A, B) , pak ovšem pro daný prvek $a \in A$ obecně nemusí existovat žádný $b \in B$, s nímž je a v relaci.

Definice. Nechť $R \subset A \times B$ je binární relace. Pak množinu

$L_R = \{ a \mid a \in A \wedge \exists b \in B : (a,b) \in R \}$ nazýváme levým oborem relace a množinu

$P_R = \{ b \mid b \in B \wedge \exists a \in A : (a,b) \in R \}$ nazýváme pravým oborem relace R .

Příklad. Uvažujme relaci $R \subset A \times B$, která je průnikem relací

$R_1 = \{ (x,y) \mid x \in A \wedge y \in B : x \text{ je dělitelné } (číslem } y \in B) \}$ a

$R_2 = \{ (x,y) \mid x \in A \wedge y \in B : x \text{ je větší než } (číslo } y \in B) \}$,

kde $A = \{ 2, 3, 6, 8, 10 \}$, $B = \{ 2, 3, 4, 5, 7, 10 \}$.

V tomto případě: $R = \{ (6,2), (6,3), (8,2), (8,4), (10,2), (10,5) \}$,

$L_R = \{ 6, 8, 10 \} \subset A$,

$P_R = \{ 2, 3, 4, 5 \} \subset B$.

Definice. Nechť (R, A, B) je binární relace. Potom inverzní relací k této relaci rozumíme binární relaci (R^{-1}, B, A) , kde

$$R^{-1} = \{ (b,a) \mid b \in B \wedge a \in A \wedge (a,b) \in R \}.$$

Z definice inverzní relace okamžitě vyplývá, že $(R^{-1})^{-1} = R$.

Příklad. Inverzní relací k relaci R z předcházejícího příkladu je relace $R^{-1} = \{ (2,6), (3,6), (2,8), (4,8), (2,10), (5,10) \}$, kde

$$L_{R^{-1}} = \{ 2, 3, 4, 5 \} = P_R,$$

$$P_{R^{-1}} = \{ 6, 8, 10 \} = L_R.$$

Relace R^{-1} je průnikem inverzních relací k relacím R_1 a R_2 z předcházejícího příkladu. Tím jsme zároveň ilustrovali první tvrzení následující věty, kterou uvádíme bez důkazu.

Věta 1.1.1. Jsou-li (R, A, B) , (R_1, A, B) a (R_2, A, B) binární relace, pak platí:

(i) je-li $R = R_1 \cap R_2$, pak $R^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$;

(ii) je-li $R = R_1 \cup R_2$, pak $R^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.

Definice. Nechť $R \subset A \times B$ je binární relace a $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$.

Množinu $R(A_1) = \{ b \mid b \in B \wedge \exists a \in A_1 : (a, b) \in R \}$ nazýváme obrazem podmnožiny A_1 v relaci R ;

množinu $R^{-1}(B_1) = \{ a \mid a \in A \wedge \exists b \in B_1 : (a, b) \in R \}$ nazýváme vzorem podmnožiny B_1 v relaci R .

Definice. Nechť $R_1 \subset A \times B$ a $R_2 \subset B \times C$ jsou binární relace. Potom binární relaci $R \subset A \times C$, kde

$$R = \{ (a, c) \mid a \in A \wedge c \in C \wedge \exists b \in B : ((a, b) \in R_1 \wedge (b, c) \in R_2) \}$$

nazýváme složením (součinem) relací R_1 a R_2 a píšeme $R = R_1 R_2$.

Je nutné zdůraznit, že nelze skládat libovolné dvojice binárních relací a že složení je v obecném případě závislé na pořadí, ve kterém se relace skládají. Pro složení tří binárních relací dokazujeme následující tvrzení, které lze samozřejmě zobecnit na libovolný počet relací.

Věta 1.1.2. Skládání binárních relací je asociativní, tj. pro binární relace $R_1 \subset A \times B$, $R_2 \subset B \times C$ a $R_3 \subset C \times D$ platí:

$$(R_1 R_2) R_3 = R_1 (R_2 R_3).$$

Důkaz. $a(R_1 R_2) R_3 d \Leftrightarrow \exists c \in C: (a R_1 R_2 c \wedge c R_3 d)$
 $\Leftrightarrow \exists c \in C: (\exists b \in B: (a R_1 b \wedge b R_2 c \wedge c R_3 d))$
 $\Leftrightarrow \exists b \in B: (a R_1 b \wedge \exists c \in C: (b R_2 c \wedge c R_3 d))$
 $\Leftrightarrow \exists b \in B: (a R_1 b \wedge b (R_2 R_3) d)$
 $\Leftrightarrow a R_1 (R_2 R_3) d.$

U relací na množině A ($R \subset A \times A$) lze vyšetřovat celou řadu vlastností, z nichž zde uvedeme definici těch nejběžnějších, které mají jistý význam i v aplikacích. Pro lepší porozumění uvádíme vždy oba ekvivalentní zápisy vlastností.

Definice. O relaci ($\varrho \equiv R$) na množině A řekneme, že je:

- (1) reflexivní, je-li $a \varrho a$, tj. $(a, a) \in R$ pro všechna $a \in A$;
- (2) symetrická, platí-li implikace ($a \varrho b \Rightarrow b \varrho a$), tj.
 $((a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R)$;
- (3) tranzitivní, platí-li implikace ($a \varrho b \wedge b \varrho c \Rightarrow a \varrho c$),
tj. $((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R)$;
- (4) antisymetrická, platí-li implikace ($a \varrho b \wedge b \varrho a \Rightarrow a = b$),
tj. $((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \Rightarrow a = b)$;
- (5) asymetrická, platí-li implikace ($a \varrho b \Rightarrow \text{non}(b \varrho a)$), tj.
 $((a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R)$;
- (6) irreflexivní, je-li $\text{non}(a \varrho a)$ pro všechna $a \in A$, tj.
 $(a, a) \notin R$ pro všechna $a \in A$.

Evidentně platí následující tvrzení:

- každá asymetrická relace ($R \cap R^{-1} = \emptyset$) je i antisymetrická ($R \cap R^{-1} \subset E$, kde $E = \{ (a,a) \mid a \in A$ je identita na A);
- žádná relace nemůže být reflexivní ($E \subset R$) a zároveň irreflexivní ($E \cap R = \emptyset$);
- existují relace, které nejsou ani reflexivní ani irreflexivní, tak např. na množině $A = \{ 1, 2, 3 \}$ je to relace $R = \{ (1,1), (1,2), (2,3) \}$;
- žádná relace nemůže být symetrická ($R = R^{-1}$) a zároveň asymetrická ($R \cap R^{-1} = \emptyset$);
- jsou-li relace R_1, R_2 reflexivní, pak jsou takové i relace $R_1 \cap R_2, R_1 \cup R_2$ a $R_1 R_2$.

Jako cvičení doporučujeme formulovat různá další tvrzení uvedeného typu a provést jejich důkaz.

Věta 1.1.3: Má-li relace R v množině A některou libovolnou vlastnost (1) - (6), pak tutéž vlastnost má inverzní relace R^{-1} .

Důkaz. ad(1) Z předpokladu $(a,a) \in R$ pro všechna $a \in A$ plyne evidentně $(a,a) \in R^{-1}$ pro všechna a .

ad(2) Platí-li implikace $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$, pak $R = R^{-1}$.

ad(3) Máme dokázat platnost následující implikace

$$(c,b) \in R^{-1} \wedge (b,a) \in R^{-1} \Rightarrow (c,a) \in R^{-1}. \text{ Jsou-li}$$

splněny předpoklady implikace, pak $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$

a je-li R tranzitivní relace, pak také je $(a,c) \in R$ a tudíž je $(c,a) \in R^{-1}$.

ad(4) Je-li relace R antisymetrická, je $R \cap R^{-1} \subset E$, tj. i R^{-1} je antisymetrická.

ad 5) Je-li relace R asymetrická, je $R \cap R^{-1} = \emptyset$, tj. R^{-1} je asymetrická.

ad 6) Je-li relace R irreflexivní, je $R \cap E = \emptyset$, takže R^{-1} je irreflexivní; kdyby $(a,a) \in R^{-1}$, pak by též $(a,a) \in R$, což je spor.

Než přistoupíme k definici celočíselné mocniny relace R na množině A , připomínáme, že symbolem A^k , kde k je přirozené číslo značíme množinu $\{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_i \in A \text{ pro } i = 1, 2, \dots, k\}$, tj množinu všech uspořádaných k -tic vytvořených z prvků množiny A .

Definice. Pro relaci R na množině A definujeme mocninu s celočíselným exponentem rekurentně následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} R^{(0)} &= E, \\ R^{(k)} &= R R^{(k-1)} \text{ pro } k > 0, \\ R^{(k)} &= (R^{(-k)})^{-1} \text{ pro } k < 0. \end{aligned}$$

Jinak řečeno pro libovolně zvolené pevné $k > 0$ je $(a, \tilde{a}) \in R^{(k)}$, právě když existuje posloupnost prvků $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k = \tilde{a}$ z množiny A taková, že $(a, x_1) \in R \wedge (x_1, x_2) \in R \wedge \dots \wedge (x_{k-1}, \tilde{a}) \in R$.

Příklad. Je-li $R = \{(2,4), (4,8), (8,16), (8,24), (3,24)\}$ relace na množině $A = \{2, 3, 4, 8, 16, 24\}$, pak je $R^{(0)} = \{(2,2), (3,3), (4,4), (8,8), (16,16), (24,24)\}$, což je identita na množině A , $R^{(2)} = \{(2,8), (4,16), (4,24)\}$, $R^{(3)} = \{(2,16), (2,24)\}$, $R^{(4)} = R^{(5)} = \dots = \emptyset$.

Je-li $S = \{(2,2), (2,4), (4,8), (8,16), (8,24), (3,24)\}$
 relace na téže množině A je $S \neq R$, $S^{(0)} = R^{(0)}$,
 $S^{(2)} = \{(2,2), (2,4), (2,8), (4,16), (4,24)\}$,
 $S^{(3)} = \{(2,2), (2,4), (2,8), (2,16), (2,24)\} = S^{(4)} = S^{(5)} = \dots$

Definice. Nechť R je relace na množině A . Relace R^+ ,
 definovaná vztahem

$$R^+ = \{(x,y) \mid (x,y) \in A \times A \wedge \exists k > 0: (x,y) \in R^{(k)}\}$$

se nazývá tranzitivní uzávěr relace R .

Relace

$$R^* = E \cup R^+$$

se nazývá reflexivně-tranzitivní uzávěr relace R .

Věta 1.1.4. Je-li R^+ tranzitivní uzávěr relace R na množině A , pak platí:

$$(7) R^+ = R \cup R^{(2)} \cup R^{(3)} \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^{(k)};$$

(8) R^+ je tranzitivní relace;

(9) je-li \tilde{R} libovolná tranzitivní relace taková, že $R \subset \tilde{R}$,
 pak $R^+ \subset \tilde{R}$.

Důkaz. Dokážeme pouze tvrzení ad (9), ve kterém jinými slovy říkáme, že tranzitivní uzávěr R^+ relace R je ze všech tranzitivních relací obsahujících relaci R nejmenší (ve smyslu inkluze). Máme dokázat, že za daných předpokladů platí implikace

$$(a,b) \in R^+ \Rightarrow (a,b) \in \tilde{R}.$$

Avšak zřejmě

$(a, b) \in R^+ \Rightarrow \exists$ přirozené číslo k : $(a, b) \in R^{(k)} \Rightarrow$
 $\Rightarrow a_1, a_2, \dots, a_{k-1} \in A$: $(a, a_1) \in R \wedge (a_1, a_2) \in R \wedge$
 $\wedge \dots \wedge (a_{k-1}, b) \in R \Rightarrow$
 $(a, a_1) \in \tilde{R} \wedge (a_1, a_2) \in \tilde{R} \wedge \dots \wedge (a_{k-1}, b) \in \tilde{R} \Rightarrow$
 $(a, b) \in \tilde{R}$, neboť \tilde{R} je tranzitivní relace.

V dalším stručně uvedeme následující speciální případy relací:

- a) zobrazení množiny A do množiny B ,
- b) binární operaci,
- c) ekvivalenci na množině A ,
- d) toleranci na množině A ,
- e) uspořádání na množině A .

Uvedený výčet mimo jiné ukazuje na obecnost a šíři pojmu binární relace. Všechny definice, které jsme až dosud zavedli, mají ovšem smysl i v případě uvedených speciálních relací a totéž platí i pro dokázaná tvrzení.

A) Zobrazení

Binární relaci $R \subset A \times B$ můžeme chápat také tak, že každému danému prvku $\tilde{x} \in A$ je relací R přiřazena podmnožina $R(\tilde{x})$ množiny B , kde $R(\tilde{x}) = \{y \mid (\tilde{x}, y) \in R\}$. Takových prvků y však může být libovolný počet (nemusí existovat žádné takové y , může být jedno, dvě, ... a též celá množina B). Touto úvahou se dostáváme k pojmu zobrazení.

Definice. Zobrazením množiny A do množiny B rozumíme takovou relaci Z , ($Z \subset A \times B$), pro kterou je

$$|Z(x)| = 1 \quad \text{pro všechna } x \in A,$$

tj. každému prvku $x \in A$ odpovídá v relaci Z právě jeden prvek $y \in B$ (pak píšeme $Z: A \rightarrow B$ a $y = Z(x)$).

Zobrazení $Z: A \rightarrow B$ pak nazýváme

surjektivním (zobrazením „na“), je-li $P_Z = B$

$$(\forall y \in B \exists x \in A: y = Z(x));$$

injektivním („prostým“), platí-li implikace $Z(x_1) =$

$$= Z(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2;$$

bijektivním („prostým na“), je-li zároveň surjektivní i injektivní.

Protože všechny nezbytné pojmy týkající se zobrazení byly zavedeny v obecnějším případě pro relace, omezujeme se zde na dvě stručné, ale důležité poznámky:

1. Ke každému zobrazení existuje samozřejmě inverzní relace, ale ta nemusí být zobrazením. Inverzní relace k zobrazení $Z: A \rightarrow B$ je zobrazením množiny B na A , právě když je zobrazení Z bijektivní.

2. Mají-li množiny A , B konečný počet prvků, pak zřejmě platí:

existuje-li surjektivní zobrazení množiny A na B , je

$$|A| \geq |B|;$$

existuje-li injektivní zobrazení množiny A do B , je

$$|A| \leq |B|;$$

existuje-li bijektivní zobrazení množiny A na B , je

$$|A| = |B|.$$

B) Binární operace

Důležitým speciálním případem zobrazení je binární operace.

Definice. Jsou-li A, E, C neprázdné množiny, pak každé zobrazení ω kartézského součinu $A \times B$ do množiny C se nazývá binární operace. Je-li speciálně:

- $A \neq B = C$, pak říkáme, že ω je vnější operace na množině B ,
 $A = B \neq C$, říkáme, že ω je vnitřní operace na množině A ,
 $A = B = C$, pak říkáme, že ω je (běžná) operace na množině A .

Je-li $\omega : A \times A \rightarrow A$ operace na A , pak pro $(x, y) \in A \times A$ místo $\omega((x, y))$ krátce píšeme $x \omega y$ a hovoříme o výsledku operace ω provedené na prvky x, y .

Příklady. 1. Nechť je dán lineární vektorový prostor \mathcal{L} . Příkladem vnější operace na \mathcal{L} je operace reálného násobku prvku z \mathcal{L} - zde je $A = \mathbb{R}$ (množina reálných čísel) a $B = C = \mathcal{L}$.

2. Je-li \mathcal{L} eukleidovským prostorem (tj. reálným lineárním prostorem se skalárním součinem), pak operace skalárního součinu je příkladem vnitřní operace na \mathcal{L} : platí zde $A = B = \mathcal{L}$ a $C = \mathbb{R}$.

3. Příklady operací na množině jsou např. sčítání a násobení reálných čísel, násobení čtvercových matic, skládání zobrazení atd.

Definice. Nechť ω je operace na množině A . Říkáme, že ω je: komutativní, je-li $x \omega y = y \omega x \quad \forall x, y \in A$,
asociativní, je-li $(x \omega y) \omega z = x \omega (y \omega z) \quad \forall x, y, z \in A$.

Prvek $e \in A$ takový, že pro každé $x \in A$ platí $x \omega e = e \omega x = x$, se nazývá neutrální prvek vzhledem k operaci ω .

Příklady. Příkladem nekomutativní operace je násobení čtvercových matic, příkladem neasociativní operace je vektorový součin geometrických vektorů v E_3 . Množina všech rostoucích reálných posloupností (s přirozeně definovanou operací sčítání) je příkladem množiny, v níž neexistuje neutrální prvek vzhledem k dané operaci.

C) Ekvivalence

Definice. Ekvivalencí na množině A nazýváme relaci R , která je: reflexivní, tj. $E \subseteq R$,
symetrická, tj. $R = R^{-1}$ a
tranzitivní, tj. $R = R^+$.

Jednoduchými příklady ekvivalence jsou relace rovnoběžnosti přímek, stejnolehlosti a podobnosti trojúhelníků, podobnosti a kongruence čtvercových matic atd.

Před uvedením následující důležité věty připomínáme, že rozkladem neprázdné množiny A rozumíme systém $\mathcal{J}(A) = \{T_i\}$ ($T_i \subset A$ a $i \in I$, kde I je indexová množina) takový, že

- (i) $T_\alpha \in \mathcal{J}(A) \Rightarrow T_\alpha \neq \emptyset$
- (ii) $T_\alpha \neq T_\beta \Rightarrow T_\alpha \cap T_\beta = \emptyset \quad \forall \alpha, \beta \in I,$
- (iii) $\bigcup_{i \in I} T_i = A$.

Věta 1.1.5. Každá relace ekvivalence na množině A určuje rozklad množiny A a naopak každý rozklad množiny A určuje relaci ekvivalence na množině A .

Důkaz. Nejprve dokážeme, že relace ekvivalence R určuje rozklad. Za tím účelem k prvku $a \in A$ definujeme pomocí ekvivalence R třídu T_a vztahem:

$$T_a = \{x \mid x \in A \wedge (a, x) \in R\}.$$

Ukážeme, že všechny různé třídy tvoří rozklad množiny A .
ad (i) T_a je neprázdná, neboť ekvivalence R je reflexivní, tj. $(a, a) \in R$ a tudíž $a \in T_a$.

ad (ii) Je-li $b \in A \wedge b \in T_a$, pak $T_a = T_b$. Zřejmě totiž $b \in T_a \Leftrightarrow (a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R \Leftrightarrow a \in T_b$, neboť R je symetrická relace. Dále však $c \in T_b \Leftrightarrow (b,c) \in R$. Takže je $(a,b) \in R$ a $(b,c) \in R$ a z tranzitivity relace R plyne: $(a,c) \in R$, tj. $c \in T_a$. Tím jsme dokázali, že platí $b \in T_a \Rightarrow T_b \subset T_a$. Obdobně dokážeme $b \in T_a \Rightarrow T_a \subset T_b$, takže za uvedeného předpokladu je $T_a = T_b$. Sporem dokážeme, že $b \notin T_a \Rightarrow T_a \cap T_b = \emptyset$. Nechť $c \in T_a \wedge c \in T_b$, pak z definice třídy, reflexivity a tranzitivity relace R plyne $(a,c) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R \wedge (c,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in R \Rightarrow b \in T_a$, což je hledaný spor.

ad (iii) Zřejmě $\bigcup_{a \in A} T_a = A$, neboť je-li $x \in A$, pak podle definice třídy T_x a z reflexivity relace R plyne $(x,x) \in R$ a tedy $x \in T_x$.

V druhé části důkazu vycházíme z daného rozkladu $\mathcal{Y}(A) = \{T_i\}$ a definujeme relaci R takto: $(a,b) \in R \Leftrightarrow \exists i \in I: a \in T_i \wedge b \in T_i$. Snadno se ověří, že takto definovaná relace je ekvivalencí.

Příklady. 1. Na množině M čtvercových matic téhož řádu n můžeme zavést několik různých ekvivalencí - například

$$A \rho_1 B \Leftrightarrow \text{hod}(A) = \text{hod}(B),$$

$$A \rho_2 B \Leftrightarrow \text{matice } A, B \text{ jsou si podobné (tj. existuje regulární matice } T \in M \text{ taková, že } B = TAT^{-1}),$$

$$A \rho_3 B \Leftrightarrow \text{matice } B \text{ vznikla řádkovými elementárními úpravami z matice } A \text{ (tj. existuje regulární matice } T \in M \text{ taková, že } B = TA),$$

a ovšem také

$$A \rho_4 B \Leftrightarrow A = B$$

atd. Čtenář se snadno sám přesvědčí, že všechny uvedené relace jsou ekvivalencemi na M a najde příslušné rozklady M na třídy.

2. Uvedeme ještě jeden důležitý příklad ekvivalence.

Na množině A celých čísel definujeme relaci $\equiv \pmod{p}$ (kde p je pevně dané přirozené číslo) předpisem

$$a \equiv b \pmod{p} \Leftrightarrow \text{číslo } a - b \text{ je dělitelné } p.$$

Například platí $4 \equiv 11 \pmod{7}$, $7 \equiv 16 \pmod{3}$ atd. Snadno se přesvědčíme, že takto definovaná relace, nazývaná kongruence modulo p (nebo též kongruence podle modulu p), je ekvivalencí na A . Třídy ekvivalence jsou pak množiny všech celých čísel, jejichž rozdíl je násobkem modulu p , tj., jinými slovy, množiny všech celých čísel, která při dělení modulem p dávají stejný nezáporný zbytek.

Například pro $p = 3$ dostáváme tři třídy ekvivalence:

$$Z_0 = \{ \dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots \},$$

$$Z_1 = \{ \dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots \},$$

$$Z_2 = \{ \dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots \}.$$

Tyto třídy ekvivalence se nazývají zbytkové třídy modulo p a je zřejmé, že pro každé $p > 0$ se množina A rozkládá na právě p různých zbytkových tříd.

Pro $x \in A$ označme Z_x tu třídu, která obsahuje x .

Tvrzení. Je-li $x \in Z_i$ a $y \in Z_j$, pak $x + y \in Z_{i+j}$ a $xy \in Z_{i \cdot j}$.

Důkaz. Zřejmě platí

$$x \in Z_i \Leftrightarrow \exists k_1 \text{ tak, že } x = k_1 p + i$$

$$y \in Z_j \Leftrightarrow \exists k_2 \text{ tak, že } y = k_2 p + j.$$

Odtud vyplývá, že

$$x + y = (k_1 p + i) + (k_2 p + j) = (k_1 + k_2) p + (i + j) \in Z_{i+j}$$

$$x \cdot y = (k_1 p + i) \cdot (k_2 p + j) = (k_1 k_2 p + k_1 j + k_2 i) p + ij \in Z_{i \cdot j},$$

což bylo třeba dokázat.

Právě dokázané jednoduché tvrzení ukazuje, že na (p -prvkové) množině všech zbytkových tříd modulo p můžeme definovat přirozeným způsobem operace součtu a součinu dvou tříd, takže například pro $p = 7$ platí $Z_4 + Z_5 = Z_9 = Z_2$, $Z_3 \cdot Z_4 = Z_{12} = Z_5$ atd. Je přitom zvykem každou zbytkovou třídu charakterizovat pomocí jednoho reprezentanta - a sice toho, který leží v intervalu $\langle 0, p-1 \rangle$. Takto definované operace jsou nazývány aritmetika modulo p .

Například v aritmetice modulo 5 platí $3 + 4 = 2$, $4 \cdot 3 = 2$ atd. Důležitým speciálním případem je aritmetika modulo 2, v níž platí:

$$\begin{array}{ll} 0 + 0 = 0, & 0 \cdot 0 = 0, \\ 0 + 1 = 1 + 0 = 1, & 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0, \\ 1 + 1 = 0, & 1 \cdot 1 = 1. \end{array}$$

D) Tolerance

Definice. Tolerancí na množině A nazýváme každou binární relaci na A , která je zároveň reflexivní a symetrická.

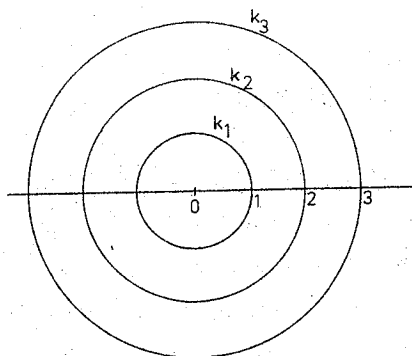
Každá ekvivalence je zcela samozřejmě zároveň i tolerancí; dále uvádíme příklady relací, které jsou reflexivní a symetrické, ale nejsou tranzitivní (tj. jsou tolerancemi, ale nikoliv ekvivalencemi).

(i) Na množině slov stejné délky řekneme, že slovo S_1 je v toleranci se slovem S_2 , jestliže se liší jen v jediném písmenu. Tak např.: slovo „dívka“ je v toleranci se slovy „cívka“ i „děvka“, ale tato slova se liší ve dvou písmenech, takže v toleranci nejsou (tato relace není tranzitivní).

(ii) Na množině všech soustředných kružnic v rovině řekneme, že

kružnice k_1 je v toleranci s kružnicí k_2 , jestliže pro jejich poloměry platí $|r_1 - r_2| \leq 1$ (v daných jednotkách délky).

Tak např.: kružnice k_1 je v toleranci s kružnicí k_2 , ta je v toleranci s kružnicí k_3 , ale kružnice k_1 není v toleranci s kružnicí k_3 (tato relace není tranzitivní).



E) Uspořádání

Definice. Uspořádáním na množině A rozumíme takovou binární relaci (\preceq) na A , která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Jako příklady uspořádání uvádíme:

- srovnávání (x je menší nebo rovno y - značíme \leq) čísel podle velikosti na jakékoliv podmnožině čísel reálných;
- dělitelnost na množině přirozených čísel;
- množinovou inkluzi na nějakém systému množin.

Poznámky. 1. Srovnávání (x je menší než y - značíme $<$) reálných čísel podle velikosti není podle uvedené definice uspořádáním, neboť toto srovnávání není reflexivní.

2. Relaci uspořádání značíme obvykle symbolem \preceq . Je-li $a \preceq b$ a zároveň $a \neq b$, pak píšeme $a \prec b$.

3. Z definice uspořádání nikterak nevyplývá, že by pro každé dva $a, b \in A$ muselo platit $a \leq b$ nebo $b \leq a$. Proto bývá v této souvislosti též používán termín částečné uspořádání.

1.2. Částečně uspořádané množiny (posety)

V tomto odstavci podrobněji vyšetříme základní vlastnosti množin, na nichž je definována relace (částečného) uspořádání. Poznatky tohoto odstavce pak budou východiskem pro obecnější přístup k pojmu matematické struktury v následujícím odstavci a pro vyšetřování vlastností Booleových algeber v odstavci 1.4.

Definice. Poset (z anglického "partially ordered set" - částečně uspořádaná množina) je dvojice (A, \leq) , kde A je neprázdná množina a \leq je relace uspořádání na A .

Příklady posetů:

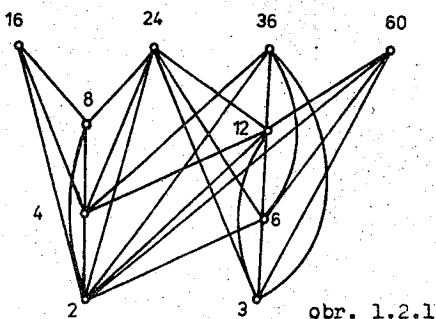
množina všech reálných čísel R s uspořádáním \leq , tj s přirozeným uspořádáním čísel podle velikosti - značíme (R, \leq) ;

množina všech přirozených čísel N s dělitelností, tj s relací x dělí y , která je reflexivní, tranzitivní i antisymetrická - značíme $(N, /)$;

množina A všech podmnožin dané neprázdné množiny B s uspořádáním, daným množinovou inkluzí (je-li například $B = \{0, 1, 2\}$ pak $A = \{ \emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, B \}$). Je zřejmé, že má-li B n prvků, pak A má 2^n prvků - z tohoto důvodu se množina všech podmnožin dané neprázdné množiny B (i nekonečné) nazývá potenční množina množiny B a značí se symbolem 2^B ; příslušný poset je pak dvojice $(2^B, \subseteq)$.

Znázornění struktury konečného posetu (A, \preceq) poskytuje jeho tzv. diagram. V diagramu vyjádříme každý prvek množiny A kroužkem a jednotlivé kroužky rozmístíme tak, aby kroužek, odpovídající "menšímu" prvku, byl umístěn níže nežli kroužky, odpovídající všem větším prvkům, a tyto kroužky s ním navíc spojíme čarami.

Příklad. Na obr. 1.2.1 je znázorněn diagram posetu $(M, /)$, kde $M = \{2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 36, 60\}$ a $/$ je relace dělitelnosti. Vidíme, že diagram posetu může být i při poměrně "malé" množině M značně nepřehledný. Proto si ukážeme, jakým způsobem lze graficky zachytit veškerou důležitou informaci podstatně přehledněji.



Definice. Nechť (A, \preceq) je poset. Relace \prec , definovaná vztahem

$$x \prec y \Leftrightarrow x \preceq y \text{ a pro žádný } z \in A, x \neq z \neq y, \text{ není } x \preceq z \preceq y$$

se nazývá relace bezprostředního předcházení (EP), příslušná k uspořádání \preceq .

Pro relaci bezprostředního předcházení je též používán termín pokrytí.

Relace EP není samozřejmě uspořádáním, neboť není ani reflexivní, ani tranzitivní. Příklady posetů racionálních, resp. reálných čísel s běžným uspořádáním podle velikosti ukazují, že se může stát, že relace EP je prázdná relace.

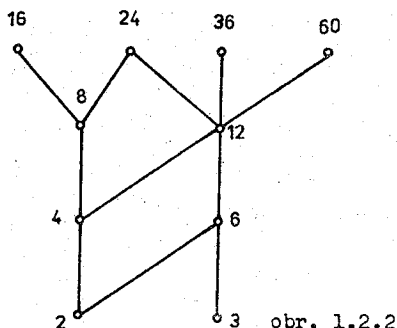
Následující věta ukazuje důležitost relace EP na konečných posetech.

Věta 1.2.1. Je-li (A, \preceq) konečný poset, pak relace \preceq je rovna reflexivně-transitivnímu uzávěru odpovídající relace \prec bezprostředního předcházení.

Důkaz věty je zřejmý.

V konečném posetu lze tedy uspořádání \preceq zcela charakterizovat příslušnou relací EP, která obsahuje veškerou "podstatnou" informaci a přitom její mohutnost je zpravidla zlomkem mohutnosti uspořádání \preceq .

Na obr. 1.2.2 vidíme diagram relace bezprostředního předcházení, příslušné uspořádání z příkladu na předchozí stránce.



Definice. Nechť (A, \preceq) je poset. Diagram relace bezprostředního předcházení, příslušné k \preceq , se nazývá Hasseův diagram relace \preceq (též bývá používán termín diagram pokrytí).

Definice. O prvcích a_1, a_2 posetu (A, \preceq) říkáme, že jsou srovnatelné, platí-li $a_1 \preceq a_2$ nebo $a_2 \preceq a_1$. Jsou-li všechny prvky posetu srovnatelné, pak říkáme, že relace \preceq je úplně uspořádání a (A, \preceq) je úplně uspořádaná množina.

Například poset $(\mathbb{N}, /)$ přirozených čísel s dělitelností není úplně uspořádaná množina, avšak poset (\mathbb{N}, \leq) přirozených

čísels uspořádaných podle velikosti je úplně uspořádaná množina.

Definice. Nechť (A, \leq) je úplně uspořádaná množina. Lexikografickým uspořádáním množiny $\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A^i$ indukovaným uspořádáním \leq nazýváme relaci \oplus definovanou následujícím způsobem:

je-li $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$,
kde $x_t \in A$ pro $t = 1, 2, \dots, k$, $y_s \in A$ pro $s = 1, 2, \dots, n$,
potom

$$x \oplus y, \text{ právě když } (\exists t \leq k, n: (x_t < y_t \wedge \forall j < t: x_j = y_j) \vee \\ \vee (k \leq n \wedge \forall j \leq k: x_j = y_j)).$$

Lexikografické uspořádání představuje velmi přirozený způsob, jak pomocí uspořádání na množině A uspořádat množiny $A^2, A \cup A^2, A^3, A \cup A^2 \cup A^3, \dots$ a též $\bigcup_{i=1}^{\infty} A^i$. Znamená to, že máme možnost srovnávat spolu n -tice a k -tice z množiny A i v případě, že $n \neq k$. Srovnávání x -tic se provádí po stejnohlavých prvcích zleva; při zjištění první nerovnosti prvků platí pro x -tice taková relace, která platí mezi nalezenými různými prvky. Při shodě na celé délce kratší x -tice, předchází kratší x -tice před delší. Tohoto způsobu uspořádání se běžně používá ve slovnících - odtud jeho název.

Věta 1.2.2: Lexikografické uspořádání \oplus indukované úplným uspořádáním \leq je úplné uspořádání na množině $\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A^i$.

Důkaz. Nechť $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ a $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ a předpokládejme, že $k \leq n$.

Zřejmě je $x \oplus x$ podle definice lexikografického uspořádání, neboť $(k \leq k \wedge \forall t \leq k: x_t \leq x_t)$ a tudíž relace \oplus je reflexivní.

Tranzitivnost relace \subseteq se dá dokázat prověřením všech čtyř možností při rozvinutí konjunkce $x \subseteq y \wedge y \subseteq z$ podle definice lexikografického uspořádání.

Relace \subseteq je antisymetrická, neboť:

$$x \subseteq y \wedge y \subseteq x \Leftrightarrow$$

$$(\exists t \leq k: (x_t < y_t \wedge \dots) \vee (k \leq n \wedge \forall t \leq k: x_t = y_t)) \wedge \\ \wedge (\exists s \leq n: (y_s < x_s \wedge \dots) \vee (n \leq k \wedge \forall s \leq n: y_s = x_s)) \Leftrightarrow \\ (k \leq n \wedge n \leq k \wedge \forall t \leq k: x_t = y_t) \Leftrightarrow x = y.$$

Relace \subseteq je tedy uspořádání. Navíc je úplné, neboť vzhledem k předpokladu $k \leq n$ (pokud by platilo $n > k$ stačí místo dvojice (x, y) uvažovat dvojici (y, x)) a předpokladu úplnosti uspořádání \leq na množině A musí vždy nastat právě jedna ze dvou možností uvedených v disjunkci definující lexikografické uspořádání.

Nyní již můžeme snadno zavést uspořádání např. na komplexních číslech, která chápeme jako dvojice čísel reálných. Je-li

$z_1 = a_1 + ib_1$ a $z_2 = a_2 + ib_2$ řekneme, že $z_1 \leq_1 z_2$ právě když $(a_1, b_1) \subseteq (a_2, b_2)$. Stejným způsobem pro $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$,

$z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ řekneme, že $z_1 \leq_2 z_2$ právě když $(r_1, \varphi_1) \subseteq (r_2, \varphi_2)$.

Obě relace \leq_1 i \leq_2 jsou podle věty 1.2.2 úplná uspořádání množiny komplexních čísel. Uvědomíme si, že může platit: $z_1 <_1 z_2$ a zároveň $z_2 <_2 z_1$ (např. pro $z_1 = i$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$).

Definice: Nechť (A, \leq) je poset.

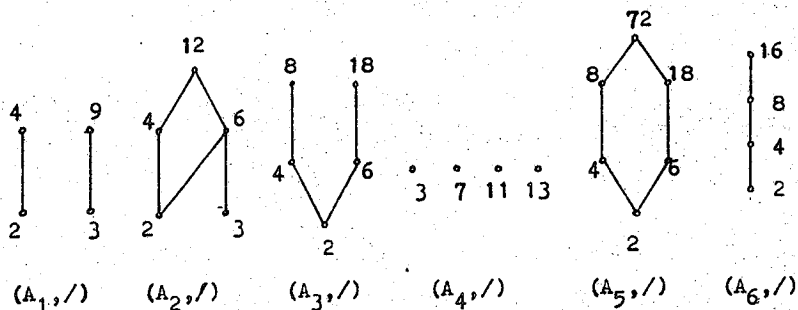
Prvek $d \in A$ nazýváme minimálním prvkem posetu (A, \leq) , jestliže neexistuje prvek $x \in A$ takový, že $x < d$.

Prvek $h \in A$ nazýváme maximálním prvkem posetu (A, \leq) , jestliže neexistuje prvek $x \in A$ takový, že $h < x$.

Prvek $m \in A$ nazýváme nejmenším prvkem posetu (A, \leq) , jestliže pro všechna $x \in A$ je: $m \leq x$.

Prvek $v \in A$ nazýváme největším prvkem posetu (A, \leq) , jestliže pro všechna $x \in A$ je: $x \leq v$.

Jednoduchými příklady (posetů podmnožin přirozených čísel s dělitelností) ilustrujeme zavedené pojmy:



obr. 1.2.3

Poset $(A_1, /)$ má dva minimální a dva maximální prvky, ale nemá žádný největší ani nejmenší prvek.

Poset $(A_2, /)$ má dva minimální prvky, jeden maximální prvek, který je zároveň prvkem největším; nemá žádný prvek nejmenší.

Poset $(A_3, /)$ má dva maximální prvky a jeden minimální prvek, který je zároveň prvkem nejmenším.

Poset $(A_4, /)$ má všechny prvky vzájemně nesrovnatelné; všechny jeho čtyři prvky jsou podle definice zároveň minimální i maximální.

Poset $(A_5, /)$ má jediný prvek minimální, který je zároveň prvkem nejmenším a jediný prvek maximální, který je zároveň prvkem největším.

Poset $(A_6, /)$ je konečná úplně uspořádaná množina s nejmenším a největším prvkem.

Věta 1.2.3. Poset (A, \leq) má nejvýše jeden nejmenší (resp. největší) prvek. Existuje-li v posetu nejmenší (resp. největší) prvek, pak je to zároveň jeho jediný prvek minimální (resp. maximální).

Důkaz provedeme pouze pro první část tvrzení o nejmenším prvku. Předpokládejme, že daný poset má dva nejmenší prvky d_1, d_2 . Pak zřejmě podle definice pro všechna $x \in A$ je $d_1 \leq x \wedge d_2 \leq x$. Tudiž zároveň platí:

$$d_1 \leq d_2 \quad \text{a} \quad d_2 \leq d_1.$$

Protože uspořádání je relace, která je mimo jiné i antisymetrická, je: $d_1 = d_2$.

Definice. Nechť (P, \leq) je poset, $\emptyset \neq B \subset P$.

Supremem podmnožiny B (značíme $\sup B$) nazýváme prvek $s \in P$ takový, že zároveň platí:

- (i) pro všechna $x \in B$ je $x \leq s$;
- (ii) je-li $h \in P$ takový, že $x \leq h$ pro všechna $x \in B$, pak $s \leq h$.

Infimem podmnožiny B (značíme $\inf B$) nazýváme prvek $m \in P$ takový, že zároveň platí:

- (iii) pro všechna $x \in B$ je $m \leq x$;
- (iv) je-li $d \in P$ takový, že $d \leq x$ pro všechna $x \in B$, pak $d \leq m$.

Definice. Nechť (A, \leq) je poset. Pokud pro libovolnou dvojici prvků $a_1, a_2 \in A$ existují v množině A

$$\sup \{ a_1, a_2 \} \quad (= a_1 \vee a_2 - \text{spojení prvků } a_1, a_2) \text{ a}$$

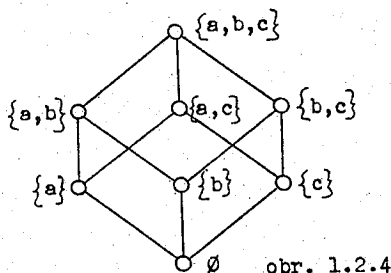
$$\inf \{ a_1, a_2 \} \quad (= a_1 \wedge a_2 - \text{průsek prvků } a_1, a_2),$$

pak tento poset nazveme svazem - značíme (A, \vee, \wedge) - a užíváme v zátvorkách uvedené termíny i značení.

Příklady. Poset $(M, /)$ z obr. 1.2.1 ani posety $(A_1, /)$, $(A_2, /)$, $(A_3, /)$, $(A_4, /)$, jejichž Hasseovy diagramy jsou na obr. 1.2.3, nejsou svazy, neboť v každém z nich lze nalézt dvojici prvků, pro něž neexistuje supremum nebo infimum. Naproti tomu posety $(A_5, /)$ a $(A_6, /)$ z téhož příkladu jsou svazy.

Dobrym ilustrativním příkladem svazu je potenční množina libovolné neprázdné množiny M uspořádaná inkluzí - v tomto svazu je průsek dvou prvků (tj. podmnožin M) jejich průnikem a spojení je dáno jejich sjednocením.

Je-li například $M = \{a, b, c\}$, pak příslušný poset $(2^M, \subseteq)$ je svazem a je popsán Hasseovým diagramem, znázorněným na obrázku.



obr. 1.2.4

Je vidět, že spojení i průsek jsou ve svazu korektně definované binární operace - supremum i infimum je v posetu (pokud existuje) určeno jednoznačně a existence je základním požadavkem v definici svazu. Z vlastností suprema i infima vyplývá pro operace spojení a průseku bezprostředně platnost následujících vztahů pro všechna $a, b, c \in A$:

- | | |
|--|---|
| (I) $a \vee b = b \vee a$, | (I') $a \wedge b = b \wedge a$, |
| (II) $a \vee a = a$, | (II') $a \wedge a = a$, |
| (III) $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$, | (III') $a \wedge (b \wedge c) = (a \wedge b) \wedge c$, |
| (IV) $a \wedge (b \vee a) = a$, | (IV') $a \vee (b \wedge a) = a$, |
| (V) $(a \cong a \vee b) \wedge (b \cong a \vee b)$, | (V') $(a \wedge b \cong a) \wedge (a \wedge b \cong b)$, |
| (VI) $(a \cong x) \wedge (b \cong x) \Rightarrow a \vee b \cong x$, | (VI') $(x \cong a) \wedge (x \cong b) \Rightarrow x \cong a \wedge b$. |

Tyto vlastnosti názorně ukazují, že operace spojení a průseku dávají svazu algebraický charakter. Vlastnosti (I), (I') a (III), (III') říkají, že operace spojení a průseku jsou komutativní a asociativní. Vlastnost (II), resp. (II') se nazývá idempotentnost a vlastnost (IV), (IV') je známa jako absorbce.

Z uvedeného je zřejmé, že je-li dán poset (A, \preceq) , který je svazem, pak ze znalosti relační struktury svazu, tj. relace uspořádání \preceq , můžeme jednoznačně určit algebraickou strukturu svazu, tj. binární operace spojení a průseku. Následující věta ukazuje, že též naopak, operace spojení a průseku jednoznačně určují uspořádání svazu (takže naše značení svazu, zavedené v předchozí definici, je oprávněné).

Věta 1.2.4. Nechť P je neprázdná množina a \vee, \wedge dvě binární operace na P takové, že splňují rovnosti (I), (I'), (II), (II'), (III), (III'), (IV), (IV'). Definujeme-li na množině P relaci \preceq vztahem:

$$a \preceq b \text{ právě když platí } a \vee b = b,$$

pak (P, \preceq) je poset a (P, \vee, \wedge) je svaz odpovídající uspořádání \preceq v P .

Důkaz. Musíme dokázat, že

- a) relace \preceq je uspořádání na P
- b) operace \wedge, \vee definované vlastnostmi (I) - (IV') představují opravdu suprema a infima dvouprvkových množin z P , vzhledem k uspořádání \preceq .

ad a) relace \preceq definovaná vztahem $a \preceq b \Leftrightarrow a \vee b = b$ je zřejmě reflexivní, neboť podle (II) je $a \vee a = a \Leftrightarrow a \preceq a$;

je antisymetrická, neboť podle definice \preceq a z vlastnosti (I)

je:

$$(a \leq b) \wedge (b \leq a) \Leftrightarrow (a \vee b = b) \wedge (b \vee a = a), \Rightarrow \\ \Rightarrow (a = b \vee a = a \vee b = b);$$

je tranzitivní, neboť podle definice \leq , dosazením a užitím vlastnosti (III) spojení je:

$$(a \leq b) \wedge (b \leq c) \Leftrightarrow (a \vee b = b) \wedge (b \vee c = c) \Rightarrow \\ \Rightarrow (a \vee c) = a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c = (b \vee c) = c \\ \Rightarrow a \leq c.$$

ad b) Stačí ověřit platnost vztahů (V), (V'), (VI) a (VI').

Poznámka. Obdobné tvrzení by bylo možno dokázat s použitím průseku - podmínka ve větě se pak nahradí ekvivalentní podmínkou

$$a \leq b \text{ právě když platí } a \wedge b = a.$$

Představme si nyní, že pro daný svaz (A, \vee, \wedge) nakreslíme jeho Hasseův diagram a vzniklý obrázek otočíme "vzhůru nohama".

Přesněji řečeno, provedeme následující záměny:

- relaci \leq nahradíme inverzní relací $(\leq)^{-1}$ (značíme ji \geq),
- operaci spojení nahradíme operací průseku,
- operaci průseku nahradíme operací spojení.

Je samozřejmé, že je-li A s původním uspořádáním a operacemi svazem, pak je svazem i s inverzním uspořádáním a prohozenými operacemi spojení a průseku. Svaz A' , sestavený popsáním způsobem, se nazývá duální svaz ke svazu A . Ze zřejmých vlastností vzájemného vztahu mezi svazem A a duálním svazem A' ihned vidíme, že ke každému tvrzení T můžeme formulovat ekvivalentní duální tvrzení T' , které z něj vznikne náhradou symbolů \vee, \wedge, \leq a \geq po řadě symboly \wedge, \vee, \geq a \leq . Toto pozorování je známo jako princip duality.

Princip duality umožňuje pro každou dvojici duálních tvrzení dokazovat jen jedno z nich - důkaz druhého tvrzení by byl jen jeho reprodukcí s uvedenou záměnou symbolů. S principem duality jsme se již setkali ve vlastnostech (I) - (VI), resp. (I') - (VI') před větou 1.2.4 a v poznámce za ní.

• 1.3. Srovnatelná zobrazení a matematické struktury

Až dosud jsme se zabývali problematikou, která se týkala výhradně jednoho (každého) posetu - problematikou, vymezenou okruhem otázek o dalších vlastnostech uspořádání definujícího poset. Druhý, zcela odlišný okruh otázek vzniká, chceme-li srovnávat dva posety; chceme-li zjistit v čem jsou dva různé posety shodné. Tak jako jsme při srovnávání dvou množin A, B užívali zobrazení $Z: A \rightarrow B$ budeme i při srovnávání posetů (A, \leq_1) , (B, \leq_2) užívat uvedená zobrazení. Je však zcela přirozené vybrat ze všech zmíněných zobrazení jen ta, která „zachovávají“ uspořádání v přesně vymezeném smyslu.

Definice. Jsou-li (A, \leq_1) , (B, \leq_2) posety, pak zobrazení $f: A \rightarrow B$ nazýváme srovnatelným zobrazením daných posetů, platí-li pro všechny $a_1, a_2 \in A$ implikace:

$$a_1 \leq_1 a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq_2 f(a_2).$$

Podmnožinu všech srovnatelných zobrazení množiny všech zobrazení $Z: A \rightarrow B$ budeme značit $\text{hom}(A, B)$.

Snadno lze dokázat následující tvrzení.

Věta 1.3.1. Jsou-li (A_i, \cong_i) pro $i = 1, 2, 3$ posety, zobrazení f, g taková, že $f \in \text{hom}(A_1, A_2)$, $g \in \text{hom}(A_2, A_3)$, pak složené zobrazení $fg \in \text{hom}(A_1, A_3)$.

K objasnění pojmu srovnatelného zobrazení a pro přesné pochopení významu existence speciálního srovnatelného zobrazení dvou posetů, uvádíme následující příklady ilustrativního charakteru.

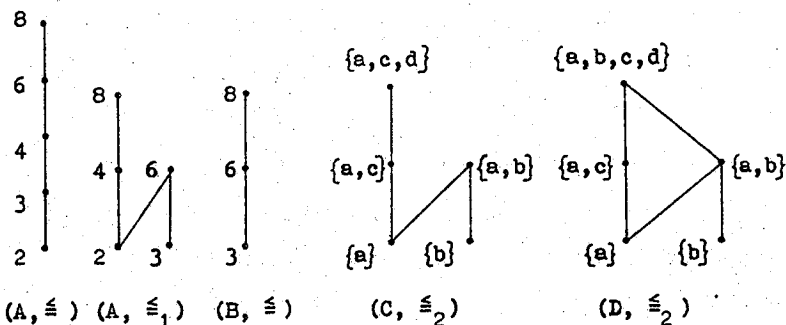
Uvažujme posety (A, \cong) , (A, \cong_1) , (B, \cong) , (C, \cong_2) , (D, \cong_2) , kde $A = \{2, 3, 4, 6, 8\}$, $B = \{3, 6, 8\}$, $C = \{\{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, c, d\}\}$, $D = \{\{a\}, \{b\}, \{a, c\}, \{a, b\}, \{a, b, c, d\}\}$ a dále:

\cong je běžné uspořádání reálných čísel podle velikosti,

\cong_1 je uspořádání přirozených čísel dělitelností,

\cong_2 je uspořádání systému množin inkluzí.

Z diagramů pokrytí uvedených posetů (viz obrázek)



obr. 1.3.1

mimo jiné vyplývá, že pokud nepřihlížíme k významu prvků množin a k realizaci uspořádání na daných posetech, pak

a) poset (B, \cong) je „stejný“ jako část posetu (A, \cong) i (A, \cong_1) ;

Uvažte, že zobrazení

$$Z_1: (B \rightarrow A), \quad Z_2: (B \rightarrow A)$$

3	2
6	3
8	6

3	2
6	4
8	8

jsou injektivní zobrazení množiny B do množiny A.

Z_1 je srovnatelné injektivní zobrazení posetu (B, \leq) do posetu (A, \leq) . Není to však srovnatelné zobrazení posetu (B, \leq) do posetu (A, \leq_1) , protože je $3 \leq 6$, ale není $Z_1(3) \leq_1 Z_1(6)$.

Z_2 je srovnatelné injektivní zobrazení posetu (B, \leq) do posetu (A, \leq) i do posetu (A, \leq_1) .

b) posety (A, \leq_1) a (C, \leq_2) jsou „stejné“.

Uvažte, že existuje bijektivní srovnatelné zobrazení

$Z_3: A \rightarrow C$ takové, že Z_3^{-1} je opět srovnatelné;

$$Z_3: A \rightarrow C$$

2	{a}
3	{b}
4	{a,c}
6	{a,b}
8	{a,c,d}

$$Z_4: A \rightarrow C$$

2	{a,c,d}
3	{a}
4	{a,b}
6	{b}
8	{a,c}

Zároveň si všimneme, že Z_4 je sice bijektivní zobrazení množiny A na množinu C, ale není to zobrazení srovnatelné.

c) posety (A, \leq_1) a (D, \leq_2) zřejmě „stejné“ nejsou.

Zde zobrazení $Z_5: A \rightarrow D$

2	{a}
3	{b}
4	{a,c}
6	{a,b}
8	{a,b,c,d}

je bijektivním srovnatelným zobrazením posetu (A, \leq_1) na poset (D, \leq_2) , ale inverzní zobrazení Z_5^{-1} srovnatelné není. Poset (A, \leq_1) „lze vnořit“ do posetu (D, \leq_2) , ale obráceně to udělat nejde.

Domníváme se, že po uvedených příkladech bude pochopitelné zavedení obecného pojmu matematické struktury.

Definice. Říkáme, že je dána matematická struktura \mathcal{S} , jestliže:

- (1) Pro každou množinu A je určena množina $\mathcal{S}[A]$; její prvky nazýváme strukturace množiny A , dvojice (A, α) , kde A je neprázdná množina a $\alpha \in \mathcal{S}[A]$, nazýváme objekty struktury \mathcal{S} .
- (2) Pro každé dva objekty (A_1, α_1) , (A_2, α_2) struktury je určena podmnožina $\text{hom}(A_1, A_2)$ množiny všech zobrazení z A_1 do A_2 ; její prvky, které se nazývají morfismy z A_1 do A_2 , musí splňovat axiom skládání a jednotek, tj. platí:
 - (i) $f \in \text{hom}(A_1, A_2) \wedge g \in \text{hom}(A_2, A_3) \Rightarrow fg \in \text{hom}(A_1, A_3)$,
 - (ii) pro každý objekt (A, α) je $\text{id}_A \in \text{hom}(A, A)$.

Příklady. 1. Struktura posetů $\text{POS}[A]$: pro danou množinu A je $\text{POS}[A]$ množina všech posetů (A, φ) (se všemi možnými uspořádáními φ na A). Objekty jsou jednotlivé posety (A, \leq) , morfismy jsou srovnatelná zobrazení.

2. Struktura $\text{VEK}[X]$ lineárních vektorových prostorů: objekty jsou zde lineární vektorové prostory, morfismy jsou lineární zobrazení.

3. V závěru tohoto odstavce poznáme další příklad - algebraickou strukturu grupy. Další důležitý příklad - strukturu grafů - poznáme v odstavci 1.6: jejími objekty jsou všechny grafy na dané množině uzlů, morfismy jsou homomorfismy grafů.

Kdykoliv začínáme pracovat s objekty určité matematické struktury, je důležité nejen znát přesnou definici jednoho objektu, ale je nezbytné také vědět, kdy máme (můžeme) dva objekty považovat „v podstatě“ za stejné. Je nutné si ujasnit, které objekty dané struktury jsou z hlediska této struktury ekvivalentní.

Definice. Izomorfismem objektů (A_1, α_1) , (A_2, α_2) dané struktury \mathcal{Y} nazýváme bijektivní zobrazení $f: A_1 \rightarrow A_2$ takové, že $f \in \text{hom}(A_1, A_2) \wedge f^{-1} \in \text{hom}(A_2, A_1)$. Jestliže takové bijektivní zobrazení f existuje, říkáme, že objekty (A_1, α_1) , (A_2, α_2) jsou izomorfní.

Věta 1.3.2. Relace \cong (být izomorfní) je ekvivalence na třídě všech objektů dané struktury.

Důkaz. (i) zřejmě je $(A, \alpha) \cong (A, \alpha)$, neboť id_A je bijektivní zobrazení takové, že $\text{id}_A = \text{id}_A^{-1}$ a zároveň $\text{id}_A \in \text{hom}(A, A)$ pro každý objekt (A, α) . Relace \cong je tedy reflexivní.

(ii) Je-li $(A_1, \alpha_1) \cong (A_2, \alpha_2)$, pak existuje bijektivní zobrazení $f: A_1 \rightarrow A_2$ takové, že $f \in \text{hom}(A_1, A_2)$ a zároveň $f^{-1} \in \text{hom}(A_2, A_1)$. Položíme-li $g = f^{-1}$ je g izomorfismem objektů (A_2, α_2) , (A_1, α_1) , tj. je $(A_2, \alpha_2) \cong (A_1, \alpha_1)$ takže relace \cong je symetrická.

(iii) Tranzitivnost relace \cong pak plyne z uzavřenosti skládání morfismů a z platného tvrzení: složení bijektivních zobrazení je opět bijektivní zobrazení.

Příklad. 1. Funkce $\lg x$ je izomorfismem (\mathbb{R}^+, \cdot) , tj. množiny kladných reálných čísel s operací násobení, a $(\mathbb{R}, +)$, tj. množiny všech reálných čísel s operací sčítání: tato funkce je

morfismem, neboť "zachovává operace" ($\lg(x \cdot y) = \lg x + \lg y$) a protože je bijektivním zobrazením, je izomorfismem.

2. V závěru odstavce uvedeme definici algebraické struktury grupy a poznáme příklady dvou jejích izomorfních objektů.

Definice. Je-li B neprázdná množina, na níž je definována binární operace \oplus taková, že

- (i) je uzavřená na B ($a \oplus b \in B$ pro všechna $a, b \in B$),
- (ii) je asociativní ($a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ pro všechna $a, b, c \in B$),
- (iii) existuje neutrální prvek $n \in B$ tak, že $a \oplus n = n \oplus a = a$ pro všechna $a \in B$,
- (iv) pro každé $b \in B$ existuje opačný prvek, tj. prvek $(-b) \in B$ takový, že $b \oplus (-b) = n = (-b) \oplus b$,

pak (B, \oplus) se nazývá grupa. Je-li navíc

- (v) $a \oplus b = b \oplus a$ pro všechna $a, b \in B$,

mluvíme o komutativní grupě.

Morfismem dvou grup (B_1, \oplus_1) , (B_2, \oplus_2) rozumíme každé zobrazení $Z: B_1 \rightarrow B_2$ takové, že $Z(a \oplus_1 b) = Z(a) \oplus_2 Z(b)$ pro všechna $a, b \in B_1$.

Příklad. Je-li 2^A potenční množina neprázdné množiny A , pak dvojice $(2^A, \oplus)$, kde \oplus značí operaci symetrické difference, je komutativní grupa.

Připomínáme, že je-li $A_1, A_2 \in 2^A$, pak $A_1 \oplus A_2 = (A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2)$. Operace \oplus symetrické difference je zřejmě uzavřená na 2^A . Dále je $A_1 \oplus (A_2 \oplus A_3) =$

$$\bigcup_{i=1}^3 A_i \setminus ((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= (A_1 \oplus A_2) \oplus A_3,$$

což je rovněž patrné z grafického vyjádření

$$A_1 \oplus (A_2 \oplus A_3) = \begin{array}{c} \text{Diagram showing three overlapping circles } A_1, A_2, A_3 \text{ with the symmetric difference of } A_2 \text{ and } A_3 \text{ shaded.} \\ \text{Diagram showing } A_1 \text{ and the symmetric difference of } A_2 \text{ and } A_3 \text{ shaded.} \end{array} = (A_1 \oplus A_2) \oplus A_3.$$

Neutrálním prvkem vzhledem k symetrické diferenci je zřejmě prázdná množina \emptyset , neboť $A_1 \oplus \emptyset = (A_1 \cup \emptyset) \setminus (A_1 \cap \emptyset) = A_1 - \emptyset = A_1$ pro každou množinu $A_1 \in 2^A$ a operace \oplus je zřejmě komutativní, jak plyne z její definice. Každá množina je pak sama k sobě opačným prvkem vůči symetrické diferenci, neboť $A_1 \oplus A_1 = (A_1 \cup A_1) \setminus (A_1 \cap A_1) = \emptyset$. Takže $(2^A, \oplus)$ je komutativní grupa.

Příklad. Množina \mathcal{M} všech řádkových matic typu $1/n$ s prvky z množiny $\{0, 1\}$ spolu se sčítáním matic v aritmetice modulo 2 je komutativní grupa $(\mathcal{M}, + \text{ mod } 2)$. Ověření požadavků z definice komutativní grupy je v tomto případě zcela evidentní, uvědomíme-li si, že neutrálním prvkem je řádek \mathcal{O} samých nul a pro každý řádek \underline{a} je $\underline{a} + \underline{a} = \mathcal{O}$.

Věta 1.3.3. Má-li množina H n prvků, pak grupy $(2^H, \oplus)$ a $(\mathcal{M}, + \text{ mod } 2)$ jsou izomorfní.

Důkaz. Požadované izomorfní zobrazení $Z: 2^H \rightarrow \mathcal{M}$ sestrojíme následujícím způsobem. Očíslujeme prvky množiny H . Nechť $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$. Podmnožině $H_i \in 2^H$ přiřadíme řádek $\underline{a}_i = [a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}]$ tak, aby platilo:

$$a_{ik} = 1 \quad \text{právě když } h_k \in H_i,$$

$$a_{ik} = 0 \quad \text{právě když } h_k \notin H_i.$$

Z je zřejmě bijektivní zobrazení 2^H na \mathcal{M} a platí implikace:

$$Z(H_i) = \underline{a}_i \wedge Z(H_j) = \underline{a}_j \Rightarrow Z(H_i \oplus H_j) = \underline{a}_i + \underline{a}_j = Z(H_i) + Z(H_j).$$

Z je tudíž izomorfismus.

1.4. Booleovy algebry

V tomto odstavci budeme pokračovat ve studiu svazů. Domluvíme se, že je-li poset (A, \leq) svazem (A, \vee, \wedge) a je-li z kontextu zřejmé, s jakým uspořádáním, resp. operacemi pracujeme, pak budeme krátce hovořit o svazu A .

V závěru odstavce 1.2 jsme si ukázali, že je-li poset (A, \leq) svazem, pak tato struktura zavedením operací spojení a průseku získává algebraický charakter. Z vlastností (I) a (III) před větou 1.2.4 vidíme, že operace průseku a spojení jsou komutativní a asociativní - vzniká tedy přirozená otázka, zda tyto operace jsou distributivní, tj. zda pro každé $a, b, c \in A$ platí

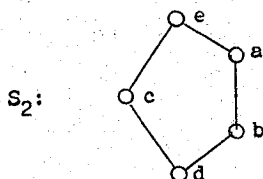
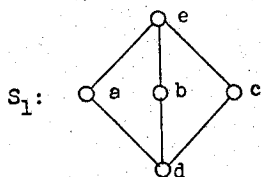
$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) ,$$

resp. duálně

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) .$$

Následující příklad ukazuje, že tomu tak obecně nemusí být.

Příklad. Svazy S_1, S_2 , definované Hasseovými diagramy na obr. 1.4.1, nejsou distributivní.



obr. 1.4.1

Ve svazu S_1 platí $a \wedge (b \vee c) = a$, zatímco $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = d$; obdobně v S_2 je

$$a = a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b .$$

Definice. Řekneme, že svaz A je distributivní, jestliže pro každé prvky $a, b, c \in A$ platí

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) .$$

Poznámka. Z principu duality vyplývá, že v distributivním svazu je již automaticky splněn i duální distributivní zákon, tj.

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) .$$

Příklad. Je-li M neprázdná množina, pak, jak již bylo poznamenáno, poset $(2^M, \subseteq)$ s operacemi spojení a průseku danými množinovým sjednocením a průnikem je svazem; snadno se přesvědčíme, že tento svaz $(2^M, \cup, \cap)$ je distributivní.

Je-li A svazem a $B \subset A$, pak relace uspořádání \leq na množině A definuje přirozeným způsobem i uspořádání na podmnožině B , takže (B, \leq) je zcela samozřejmě poset. Příklad podmnožiny $B = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ množiny $A = 2^M$ z příkladu na obr. 1.2.4 ukazuje, že (B, \leq) nemusí být svazem, neboť není zaručeno, že s každými dvěma prvky leží v B i jejich supremum a infimum.

Definice. Nechť A je svaz a $B \subset A$. Řekneme, že B je podsvazem svazu A , jestliže pro každé $a, b \in B$ je $a \wedge b \in B$ i $a \vee b \in B$.

Poznámky. 1. Jinými slovy, podsvaz je každá podmnožina, která je (s příslušným uspořádáním) sama svazem.

2. Je zřejmé, že je-li svaz A distributivní, pak je distributivní i každý jeho podsvaz.

Nyní již můžeme zformulovat větu, která charakterizuje distributivní svazy.

Věta 1.4.1. Svaz A je distributivní právě když neobsahuje podsvaz izomorfní s S_1 nebo s S_2 (viz obr. 1.4.1.).

Důkaz. Protože každý podsvaz distributivního svazu je distributivní, nemůže distributivní svaz obsahovat podsvaz izomorfní s S_1 ani s S_2 .

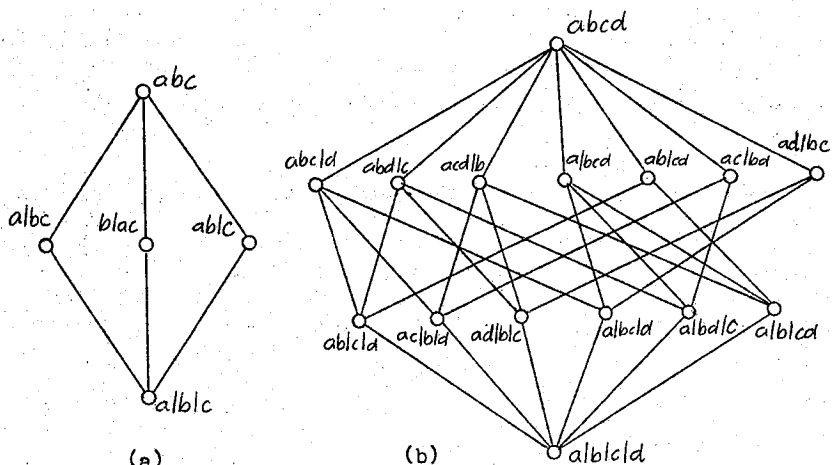
Důkaz obráceného tvrzení přesahuje rámec tohoto textu a proto jej nebudeme uvádět.

Příklad. Nechť je dána neprázdná množina M ; buď A množina, jejímiž prvky jsou všechny rozklady množiny M na třídy (nebo, což je podle věty 1.1.5 totéž, všechny ekvivalence na M). Řekneme, že rozklad π_1 je zjemněním rozkladu π_2 , jestliže každá třída rozkladu π_1 je podmnožinou některé třídy rozkladu π_2 . Snadno se přesvědčíme, že relace zjemnění je uspořádáním na A , takže, označíme-li

$$\pi_1 \leq \pi_2 \Leftrightarrow \pi_1 \text{ je zjemněním } \pi_2,$$

pak (A, \leq) je poset. Je snadným cvičením přesvědčit se, že pro každé dva rozklady π_1, π_2 existuje rozklad, který je jejich nejhrubším společným zjemněním, tj. je jejich průsekem $\pi_1 \wedge \pi_2$, a obdobně vždy existuje i jejich spojení $\pi_1 \vee \pi_2$. Poset (A, \leq) je tedy svazem a nazývá se svaz rozkladů množiny M . Na obrázku 1.4.2 (a) je znázorněn Hasseův diagram svazu rozkladů tříprvkové množiny $M = \{a, b, c\}$; ihned vidíme, že je izomorfní s S_1 a tedy není distributivní. Na obr. 1.4.2. (b) je Hasseův diagram svazu rozkladů čtyřprvkové množiny $M = \{a, b, c, d\}$ a čtenář se snadno přesvědčí, že tento svaz obsahuje podsvaz izomorfní

s S_1 i podsvaz izomorfní s S_2 a tedy též není distributivní (při hledání podsvazu izomorfního s S_2 nechť si čtenář uvědomí, že na obrázku je pouze Hasseův diagram relace bezprostředního předcházení a relace uspořádání v našem svazu je jejím reflexivně-trenzitivním uzávěrem).



obr. 1.4.2

Poznámka. V Booleových algebrách (jež jsou, jak uvidíme, speciálním případem svazů) bývá někdy zvykem značit operaci spojení symbolem $+$ ("Booleovský součet") a průseku \cdot ("Booleovský součin"). Podmínka z definice distributivního svazu v tomto značení přejde v obvyklý distributivní zákon

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c ;$$

duální podmínka (jež je s ní ekvivalentní) nabude při tomto značení podoby

$$a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c) .$$

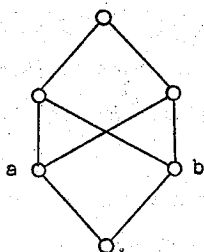
Věta 1.4.2. V každém konečném svazu existuje největší a nejmenší prvek.

Důkaz. Snadno dokážeme, že v každém konečném posetu A existuje alespoň jeden maximální prvek. Kdyby A neměl největší prvek, tak by v něm musely existovat alespoň dva různé maximální prvky, ale pro ty by pak v A neexistovalo supremum, což je spor.

Obdobně dokážeme existenci nejmenšího prvku.

Poznámky. 1. V nekonečném svazu ovšem největší prvek ani nejmenší prvek obecně existovat nemusí - příkladem jsou reálná čísla s obvyklým uspořádáním.

2. Tvrzení věty 1.4.2 nelze obrátit - z faktu, že v konečném posetu existuje největší i nejmenší prvek, ještě nevyplývá, že A je svazem. Příklad vidíme na obrázku 1.4.3, kde prvky a , b nemají v A supremum.



obr. 1.4.3

Tvrzení. Je-li i (resp. σ) největším (resp. nejmenším) prvkem svazu A , pak pro každý prvek $a \in A$ platí

$$\sigma \vee a = a$$

$$i \wedge a = a$$

Důkaz tvrzení je zřejmý.

Vidíme, že největší a nejmenší prvek svazu (pokud existují) jsou neutrálními prvky vzhledem k operacím spojení a průseku; proto budeme největšímu (nejmenšímu) prvku svazu říkat jednotkový (resp. nulový) prvek a označíme jej 1 (resp. 0). Svaz s nulovým a jednotkovým prvkem budeme značit $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$.

Příklad. Ve svazu $(2^M, \cup, \cap)$ je $0 = \emptyset$ a $1 = M$.

Definice. Nechť $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ je svaz, $x \in A$. Prvek \bar{x} , pro který platí

$$x \vee \bar{x} = 1$$

a

$$x \wedge \bar{x} = 0,$$

se nazývá doplňk (komplement) prvku x .

Svaz $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$, v němž pro každý prvek $x \in A$ existuje komplement $\bar{x} \in A$, se nazývá komplementární svaz.

Příklady. 1. Svaz A_6 na obr. 1.2.3 není komplementární.

2. Ve svazu A , jehož Hasseův

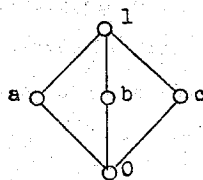
diagram vidíme na obr. 1.4.4, platí $a \vee b = 1$ a $a \wedge b = 0$, takže prvek b

je doplňkem prvku a . Obdobně však

také $a \vee c = 1$ a $a \wedge c = 0$ a tedy

prvek c je také doplňkem prvku a .

Snadno zjistíme, že ke každému prvku našeho svazu existuje alespoň jeden doplňk, takže A je komplementární. Příklad ukazuje, že "doplňk" je obecně relací na množině A a tato relace nemusí být funkcí.



obr. 1.4.4

Věta 1.4.3. Nechť A je distributivní svaz s nulovým a jednotkovým prvkem. Existuje-li k prvku $x \in A$ jeho doplňk, pak je určen jednoznačně.

Důkaz. Nechť b_1 a b_2 jsou dva doplňky prvku a , tj. platí $a \vee b_1 = 1$, $a \vee b_2 = 1$, $a \wedge b_1 = 0$, $a \wedge b_2 = 0$. Pak platí

$$\begin{aligned} b_1 &= b_1 \wedge 1 = b_1 \wedge (a \vee b_2) = (b_1 \wedge a) \vee (b_1 \wedge b_2) = 0 \vee (b_1 \wedge b_2) = \\ &= b_1 \wedge b_2, \end{aligned}$$

neboli $b_1 \preceq b_2$. Obdobně však také

$$b_2 = b_2 \wedge 1 = b_2 \wedge (a \vee b_1) = (b_2 \wedge a) \vee (b_2 \wedge b_1) = 0 \vee (b_2 \wedge b_1) = b_1 \wedge b_2$$

a tedy též $b_2 \preceq b_1$. Odtud ihned $b_1 = b_2$.

Příklad. Nechť A je svaz dělitelů čísla 90 - viz obr. 1.4.5.

Snadno zjistíme

(např. podle věty

1.4.1), že A je

distributivní.

Všimněme si, že

čísla 5, 18, 9, 10,

2, 45 mají v A

doplňky, které jsou,

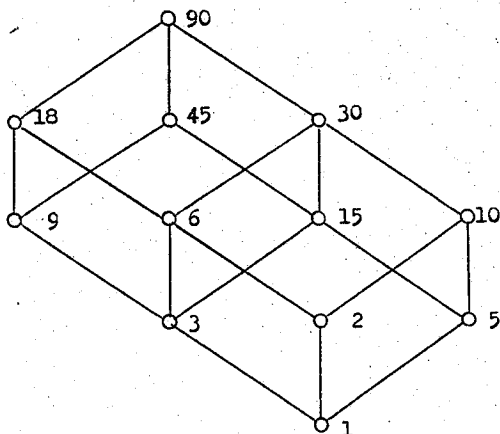
jak již víme, určeny

jednoznačně, ale čísla

3, 6, 15 a 30 ve svazu A

doplňky nemají. Svaz A

tedy není komplementární.



obr. 1.4.5

Důsledek věty 1.4.3. V distributivním komplementárním svazu má každý prvek právě jeden doplněk.

Věta 1.4.4 (De Morganovy zákony). Nechť A je distributivní komplementární svaz. Pak pro každé $a, b \in A$ platí:

(i) $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$,

(ii) $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$.

Důkaz. Vzhledem k dualitě stačí dokázat tvrzení (i). Platí:

$$\begin{aligned}
 (a \vee b) \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b}) &= [a \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b})] \vee [b \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b})] = \\
 &= [(a \wedge \bar{a}) \wedge \bar{b}] \vee [(b \wedge \bar{b}) \wedge \bar{a}] = \\
 &= (0 \wedge \bar{b}) \vee (0 \wedge \bar{a}) = 0 \vee 0 = 0.
 \end{aligned}$$

Obdobně dokážeme, že také

$$(a \vee b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) = 1$$

a tedy prvek $\bar{a} \wedge \bar{b}$ je doplňkem prvku $a \vee b$.

Definice. Distributivní komplementární svaz se nazývá Booleova algebra.

Poznámky. 1. Někteří autoři používají pro tutéž strukturu termín Booleův svaz.

2. Důležitým příkladem Booleovy algebry je množina 2^M s operacemi sjednocení a průniku - nulovým prvkem je zde prázdná množina \emptyset , jednotkou je M , doplňkem prvku $a \in 2^M$ (tj. $a \subset M$) je množina $M \setminus a$. Tato Booleova algebra bývá nazývána množinová algebra.

3. V Booleových algebrách je často zvykem značit spojení symbolem $+$ a průsek symbolem \cdot . Následující věta shrnuje odvozená pravidla "Booleovského počítání" v této symbolice.

Věta 1.4.5 (Booleovský kalkulus). Nechť A je Booleova algebra, $a, b, c \in A$. Pak platí:

(S1)	$a + a = a$	$a \cdot a = a$	IDEMPOTENTNOST
(S2)	$a + b = b + a$	$ab = ba$	KOMUTATIVITA
(S3)	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(ab)c = a(bc)$	ASOCIATIVITA
(S4)	$a + ab = a$	$a(a + b) = a$	ABSORBECE
(D)	$a(b+c) = ab + ac$	$a + bc = (a+b)(a+c)$	DISTRIBUTIVITA

(N1)	$a + 0 = a$	$a \cdot 1 = a$	} NEUTRÁLNÍ PRVKY
(N2)	$a \cdot 0 = 0$	$a + 1 = 1$	
(K1)	$\bar{\bar{1}} = 0$		} KOMPLEMENTARITA
(K2)	$a + \bar{a} = 1$	$a\bar{a} = 0$	
(K3)	$\overline{(\bar{a})} = a$		INVOLUTORNOST
(K4)	$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$	$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$	DE MORGANOVY ZÁKONY

Poznámka. Jednotlivá tvrzení věty nejsou nezávislá - je třeba na ně pohlížet jako na shrnutí vlastností, které již byly odvozeny dříve (nejedná se tedy o soustavu axiomů).

1.5. Reprezentace Booleových algeber

Pojem Booleovy algebry bývá často zužován na speciální případ dvouprvkové algebry s prvky 0 a 1, známé z tzv. výrokové logiky. V tomto odstavci se věnujeme otázce charakterizace konečných Booleových algeber a ukážeme si, že strukturu všech "bohatších" konečných Booleových algeber lze jistým způsobem jednoduše vyjádřit pomocí algebry dvouprvkové.

Definice. Nechť A je Booleova algebra. Prvek $a \in A$ takový, že pro každý nenulový prvek $x \in A$ platí

$$x \wedge a = a \quad \text{nebo} \quad x \wedge a = 0,$$

se nazývá atom algebry A .

Poznámka. Věta 1.2.4 (resp. poznámka za ní) nám umožňuje formulovat definici atomu ekvivalentně - a možná názorněji - pomocí relace uspořádání: atom algebry A je takový prvek $a \in A$, že pro každý $x \in A$ s ním srovnatelný platí $0 < a \leq x$.

Jinými slovy, mezi a a 0 již neexistuje žádný prvek algebry A .
 Uvědomíme-li si nyní definici relace \prec bezprostředního předcházení, máme odvozeno následující

Tvrzení. Prvek $a \in A$ je atomem Booleovy algebry A právě když $0 \prec a$.

Příklad. V Booleově algebře $2^{\{a,b,c\}}$ (viz obr. 1.2.4) jsou atomy prvky $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$.

Poznámka. V libovolné Booleově algebře (tj. bez předpokladu konečnosti) obecně nelze existenci atomů zaručit.

Následující věta ukazuje základní vlastnost atomů: jsou to (spolu s nulovým prvkem) jediné prvky Booleovy algebry, které nelze zapsat ve tvaru spojení dvou jiných různých nenulových prvků.

Věta 1.5.1. Nechť A je konečná Booleova algebra a $x \in A$. Pak v A existují nenulové prvky $y \neq z$ takové, že $y \neq x \neq z$ a $x = y \vee z$ právě když x není nulový prvek ani atom algebry A .

Důkaz. 1. Je-li x nulový prvek nebo atom, pak takové prvky y, z zřejmě neexistují, neboť z podmínky $x = y \vee z$, $z \neq x \neq y$, by vyplývalo $0 \neq y \prec x$, což není možné.

2. Nechť naopak x není nulový prvek ani atom. Pak existuje prvek $a \in A$ tak, že $0 \prec a \prec x$ a odtud

$$x = x \wedge 1 = x \wedge (a \vee \bar{a}) = (x \wedge a) \vee (x \wedge \bar{a}) = a \vee (x \wedge \bar{a}),$$

takže položíme-li $y = a$ a $z = (x \wedge \bar{a})$, platí $x = y \vee z$.

Protože zřejmě $0 \neq y \neq x$, zbývá dokázat, že $0 \neq z \neq x$ a $y \neq z$. Kdyby $z = 0$, tj. $x \wedge \bar{a} = 0$, tak by platilo

$$a = 0 \vee a = (x \wedge \bar{a}) \vee a = (x \vee a) \wedge (\bar{a} \vee a) = x \wedge 1 = x,$$

což není možné. Obdobně z předpokladu $z = x$, tj. $x \wedge \bar{a} = x$, vyplývá

$$a = x \wedge a = (x \wedge \bar{a}) \wedge a = x \wedge (\bar{a} \wedge a) = x \wedge 0 = 0,$$

což opět nelze. Konečně, kdyby $y = z$, tj. $a = x \wedge \bar{a}$, tak by

$$a = a \wedge a = (x \wedge \bar{a}) \wedge a = x \wedge (\bar{a} \wedge a) = 0,$$

což je opět spor.

Následující věta ukazuje důležitost atomů - pomocí nich je totiž možno vyjádřit všechny nenulové prvky algebry A .

Věta 1.5.2. Buď $x \neq 0$ libovolný prvek konečné Booleovy algebry A . Pak platí

$$x = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n,$$

kde a_1, a_2, \dots, a_n jsou všechny atomy algebry A , pro něž

$$a_i \leq x, \quad i = 1, \dots, n.$$

Důkaz. 1. Je-li x atomem, pak triviálně $n = 1$ a $x = a_1$; předpokládejme tedy, že x atomem není. Podle věty 1.5.1 lze x zapsat ve tvaru $x = y \vee z$, kde $y < x$ a $z < x$. Jsou-li y i z atomy, jsme hotovi; v opačném případě můžeme na ten z nich, který není atomem (případně na oba), znovu aplikovat větu 1.5.1 - vzhledem ke konečnosti algebry A po konečném počtu kroků nutně dostaneme n -tici atomů a_1, \dots, a_n takovou, že

$$x = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n.$$

Zbývá dokázat, že v získaném vyjádření se skutečně vyskytnou všechny atomy, které jsou srovnatelné s x . Nechť tedy $a < x$ je atom - dokážeme, že a musí být jedním z atomů a_1, \dots, a_n . Zřejmě platí

$$a = a \wedge x = a \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_n) = (a \wedge a_1) \vee \dots \vee (a \wedge a_n)$$

a výraz vpravo je nenulový právě když $a = a_i$ pro některé $i = 1, \dots, n$.

Věta 1.5.3 (Stoneova věta o reprezentaci). Nechť A je konečná Booleova algebra a M je množina všech jejích atomů. Pak je algebra A izomorfní s množinovou algebrou 2^M .

Důkaz. Zobrazení $f: A \rightarrow 2^M$ definujeme takto:

$$f(0) = \emptyset,$$

$$f(x) = \{a \in M; a \leq x\} \quad \text{pro } x \neq 0.$$

Z věty 1.5.2 vyplývá, že takto definované zobrazení je bijektivní (tj. prosté a na); k dokončení důkazu zbývá ukázat, že f je srovnatelné, tj. že pro každé prvky $x, y \in A$ platí

$$f(x \vee y) = f(x) \cup f(y),$$

$$f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y),$$

$$f(\bar{x}) = \overline{f(x)}.$$

Označme $f(x) = \{a_{x,1}, \dots, a_{x,m}\}$ a $f(y) = \{a_{y,1}, \dots, a_{y,n}\}$.

Pak platí

$$x = a_{x,1} \vee \dots \vee a_{x,m}$$

a

$$y = a_{y,1} \vee \dots \vee a_{y,n}$$

a tedy

$$x \vee y = a_{x,1} \vee \dots \vee a_{x,m} \vee a_{y,1} \vee \dots \vee a_{y,n},$$

neboli

$$f(x \vee y) = f(x) \cup f(y).$$

Obdobně je

$$\begin{aligned} x \wedge y &= (a_{x,1} \vee \dots \vee a_{x,m}) \wedge (a_{y,1} \vee \dots \vee a_{y,n}) = \\ &= (a_{x,1} \wedge a_{y,1}) \vee \dots \vee (a_{x,1} \wedge a_{y,n}) \vee \dots \\ &\quad \dots \vee (a_{x,m} \wedge a_{y,1}) \vee \dots \vee (a_{x,m} \wedge a_{y,n}). \end{aligned}$$

Protože ale průsek dvou různých atomů je nulový, dostáváme napravo spojení těch atomů, které jsou současně v $f(x)$ i v $f(y)$, takže

$$f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y).$$

Pro důkaz třetí rovnosti použijeme stejného označení pro

$y = \bar{x}$. Pak $x \vee y = 1$, odkud $f(x \vee y) = f(1) = M$; obdobně $f(x \wedge y) = f(0) = \emptyset$. Podle předchozích dvou částí však současně $f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$ a $f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y)$, odkud

$$f(x) \cup f(y) = M \quad \text{a} \quad f(x) \cap f(y) = \emptyset,$$

neboli

$$f(\bar{x}) = f(y) = \overline{f(x)}.$$

Důkaz vlastností srovnatelného zobrazení pro případ, že $x = 0$ nebo $y = 0$, je triviální.

Důsledky. 1. Dvě konečné Booleovy algebry se stejným počtem prvků jsou izomorfní.

2. Konečná Booleova algebra má 2^n prvků, kde n je počet jejích atomů.

Větou 1.5.3 jsou plně popsány všechny konečné Booleovy algebry. Označme B_n Booleovu algebru, mající n prvků. Pomineme-li triviální případ jednoprvkové algebry 2^0 , pak nejmenší zajímavý případ bude dvouprvková algebra $B_2 = \{0, 1\}$. Tato algebra je izomorfní se známou "výrokovou algebrou", jejíž Hasseův diagram je na obr. 1.5.1 (a) a operace v ní jsou definovány tabulkami

\vee	0	1
0	0	1
1	1	1

\wedge	0	1
0	0	0
1	0	1

x	\bar{x}
0	1
1	0

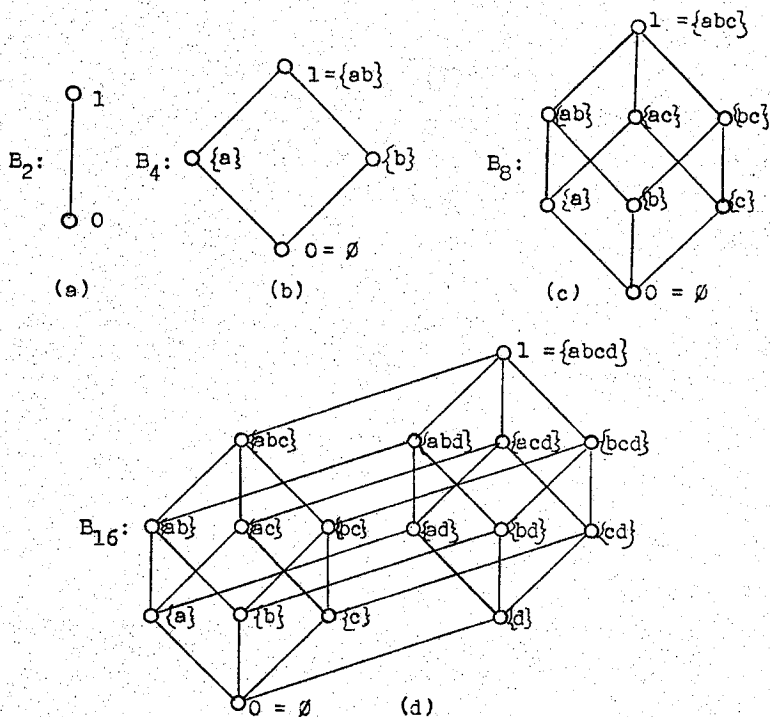
Nejbližší větší algebra je čtyřprvková B_4 , jejíž Hasseův diagram je na obr. 1.5.1 (b) a operace jsou dány tabulkami

\vee	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

\wedge	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

x	\bar{x}
0	1
a	b
b	a
1	0

Hasseovy diagramy osmiprvkové Booleovy algebry B_8 (se třemi atomy $\{a\}, \{b\}, \{c\}$) a šestnáctiprvkové algebry B_{16} (se čtyřmi atomy) jsou na obr. 1.5.1 (c), (d).



obr. 1.5.1

Poznamenejme, že Hasseův diagram algebry B_{2^k} se nazývá k-rozměrná krychle (na obr. 1.5.1 je vidíme pro $k = 1, 2, 3, 4$).

Mějme nyní dvě Booleovy algebry $(A_1, \vee_1, \wedge_1, \neg^1)$ a $(A_2, \vee_2, \wedge_2, \neg^2)$ a definujme na kartézském součinu $A_1 \times A_2$ operace spojení, průseku a doplňku takto:

$$(x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2) = (x_1 \wedge_1 y_1, x_2 \wedge_2 y_2),$$

$$(x_1, x_2) \vee (y_1, y_2) = (x_1 \vee_1 y_1, x_2 \vee_2 y_2),$$

$$\overline{(x_1, x_2)} = (\overline{x_1^1}, \overline{x_2^2}).$$

Snadno se ukáže, že množina $A_1 \times A_2$ s takto definovanými operacemi je Booleova algebra (důkaz ponecháme čtenáři jako cvičení).

Takto definovaná Booleova algebra se nazývá direktní součin algeber A_1, A_2 a značí se $A_1 \times A_2$. Je-li A Booleova algebra, pak r -násobný direktní součin $A \times \dots \times A$ značíme A^r .

Příklad. Booleova algebra $B_8 = 2^{\{a,b,c\}}$ je izomorfní s direktním součinem $A = \{\emptyset, \{a\}\} \times \{\emptyset, \{b\}\} \times \{\emptyset, \{c\}\}$; příslušný izomorfismus je definován tabulkou:

x	$(\emptyset, \emptyset, \emptyset)$	$(\{a\}, \emptyset, \emptyset)$	$(\emptyset, \{b\}, \emptyset)$	$(\emptyset, \emptyset, \{c\})$	$(\{a\}, \{b\}, \emptyset)$	$(\{a\}, \emptyset, \{c\})$	$(\emptyset, \{b\}, \{c\})$	$(\{a\}, \{b\}, \{c\})$
$r(x)$	\emptyset	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{a, c\}$	$\{b, c\}$	$\{a, b, c\}$

Protože však každá z algeber $\{\emptyset, \{a\}\}$, $\{\emptyset, \{b\}\}$, $\{\emptyset, \{c\}\}$ je izomorfní s B_2 , dostáváme, že $B_8 = B_{2^3}$ je izomorfní s $(B_2)^3$. V obecném případě obdobná úvaha vede k následujícímu tvrzení:

Věta 1.5.4. 1. Booleova algebra B_{2^r} je izomorfní s algebrou $(B_2)^r$.

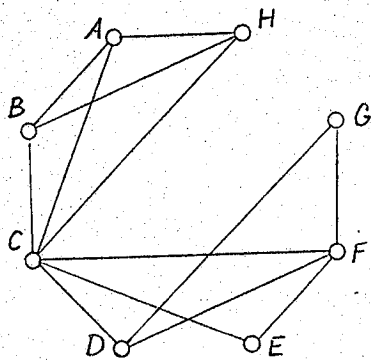
2. Pro každou konečnou Booleovu algebru A existuje číslo r takové, že A je izomorfní s algebrou $(B_2)^r$.

V následujícím odstavci (a ve většině zbývajících částí těchto skript) se budeme zabývat studiem další matematické struktury - grafů. Doporučujeme čtenáři, aby si uvědomil, že teorie grafů, zejména v její části, zabývající se srovnáváním (morfismy) grafů, je dalším příkladem obecného schématu, naznačeného v odstavci 1.3.

1.6 Grafy

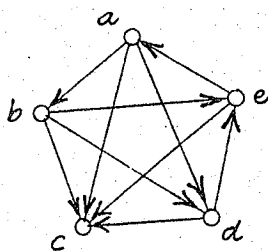
Začneme dvěma příklady.

Příklad první - společenský. Na večírku se sešlo 8 osob: Alena, Božena, Cyril, David, Eva, František, Gustav a Helena. Alena, Božena, Cyril a Helena jsou spolužáci, David, František a Gustav společně hrají volejbal, Eva je manželka Františka, Cyril se zná s Evou a Františkem z lyžařského kursu a s Davidem z šachového kroužku. Přiřadíme-li každé osobě našeho večírku bod v rovině a vyznačíme-li skutečnost, že dvě osoby se znají, spojnici těchto bodů, obdržíme obrázek, z něhož je ihned patrná struktura naší společnosti - - například ihned vidíme, že klíčovou úlohu na večírku má Cyril: selže-li, pak se společnost rozpadne na dvě skupiny.



obr. 1.6.1.

Příklad druhý - sportovní. Pět přátel hraje systémem "každý s každým" tenisový turnaj a výsledky zápasů zaznamenávají tak, že každému hráči přiřadí jeden bod a sehraný zápas znázorní šipkou od vítěze k poraženému. Jeden z možných výsledků



obr. 1.6.2.

takového sportovního zápolení vidíme na obr. 1.6.2.

V těchto a mnoha dalších situacích se setkáváme s objektem, zvaným graf, skládajícím se z konečné množiny "bodů", jimž budeme říkat uzly, a ze spojnic těchto uzlů, jimž budeme říkat hrany; může přitom jít o neorientované hrany jako v obr. 1.6.1 nebo o orientované hrany jako v obr. 1.6.2. Každá neorientovaná hrana je plně popsána "neuspořádanou dvojicí" uzlů u, v , které spojuje, tj. přesněji dvouprvkovou množinou svých koncových uzlů $\{u, v\}$; obdobně každá orientovaná hrana je plně popsána uspořádanou dvojicí (u, v) svých koncových uzlů. V některých aplikacích se můžeme též setkat s hranou, která začíná i končí v témž uzlu u (situace, kdy prvek systému sám sebe ovlivňuje, v dopravních úlohách přeprava uvnitř města apod); taková hrana se nazývá smyčka a může být podle povahy problému neorientovaná (pak ji popíšeme uzlem u , k němuž je připojena), nebo orientovaná (a pak ji popíšeme uspořádanou dvojicí (u, u)).

Po těchto předběžných úvahách jsme připraveni na následující definici.

Definice. Buď U konečná množina. Označme:

$\binom{U}{2} = \{\{u, v\}; u, v \in U\}$ množinu všech dvouprvkových částí množiny U ,

U^2 kartézský součin $U \times U = \{(u, v); u, v \in U\}$, tj. množinu všech uspořádaných dvojic prvků z U .

Graf je uspořádaná dvojice $G = (U, H)$, kde $H \subset \binom{U}{2} \cup U^2 \cup U$.

Množina $H \cap \binom{U}{2}$ se nazývá množina neorientovaných hran grafu G .

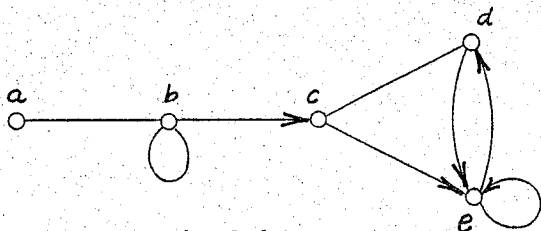
Množina $H \cap U^2$ se nazývá množina orientovaných hran grafu G .

Množina $H \cap U$ se nazývá množina neorientovaných smyček grafu G .

Množina $H \cap \{(u,u); u \in U\}$ se nazývá množina orientovaných smyček grafu G .

Jsou-li dva uzly $u, v \in U$ spojeny hranou h , říkáme, že u, v jsou sousední; říkáme, že hrana h tyto uzly obsahuje nebo že s nimi inciduje. Je-li h orientovaná hrana, tj. $h = (u, v)$, pak uzel u (resp. v) se nazývá počáteční (resp. koncový) uzel hrany h ; šipka na obrázku směřuje od u k v .

Příklad.



obr. 1.6.3.

Pro graf G na obr. 1.6.3 je:

množina uzlů $U = \{a, b, c, d, e\}$,

množina hran $H = \{\{a,b\}, \{c,d\}, (b,c), (c,e), (d,e), (e,d), (e,e), b\}$,

množina neorientovaných hran $H \cap \binom{U}{2} = \{\{a,b\}, \{c,d\}\}$,

množina orientovaných hran $H \cap U^2 = \{(b,c), (c,e), (d,e), (e,d), (e,e)\}$,

množina neorientovaných smyček $H \cap U = \{b\}$,

množina orientovaných smyček $H \cap \{(u,u); u \in U\} = \{(e,e)\}$.

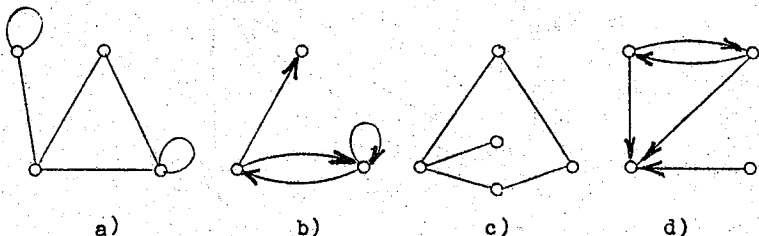
Definice. Graf $G = (U, H)$ se nazývá neorientovaný graf, jestliže $H \subset \binom{U}{2} \cup U$,

orientovaný graf, jestliže $H \subset U^2$,

obyčejný neorientovaný graf, jestliže $H \subset \binom{U}{2}$,

obyčejný orientovaný graf, jestliže $H \subset U^2 \setminus \{(u,u); u \in U\}$.

Příklad. Na obr. 1.6.4 a, b, c, d vidíme příklady neorientovaného grafu, orientovaného grafu, obyčejného neorientovaného grafu a obyčejného orientovaného grafu.



obr. 1.6.4.

Příklad. Uvažujme elektrický obvod na obr. 1.6.5 a) .

Chceme-li popsat kombinatorickou strukturu propojení jednotlivých prvků obvodu, obdržíme objekt, znázorněný na obr. 1.6.5 b) ,



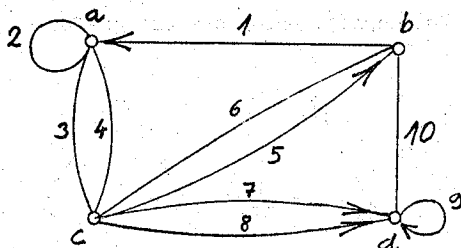
obr. 1.6.5.

jenž není grafem, neboť uzly u_2, u_3 jsou spojeny dvojicí hran, což naše definice grafu nepřipouští. Takoveto hrany se nazývají paralelní hrany a objekt na obr. 1.6.5 b) je příkladem obecněj-

ší struktury, nazývané multigraf.

Definice. Multigraf G je uspořádaná trojice $G = (U, H, \xi)$, kde U, H jsou konečné množiny a $\xi: H \rightarrow \binom{U}{2} \cup U^2 \cup U$ je zobrazení. Zobrazení ξ se nazývá zobrazení incidence.

Příklad.



$U = \{a, b, c, d\}$, $H = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, $\xi(1) = (b, a)$,
 $\xi(2) = \{a\}$, $\xi(3) = \{a, c\}$, $\xi(4) = \{a, c\}$, $\xi(5) = (c, b)$,
 $\xi(6) = \{c, b\}$, $\xi(7) = (c, d)$, $\xi(8) = (c, d)$, $\xi(9) = (d, d)$,
 $\xi(10) = \{b, d\}$. Všimněme si, že zobrazení ξ není prosté:
je $\xi(3) = \xi(4)$ a $\xi(7) = \xi(8)$.

Věta 1.6.1. Multigraf je grafem právě když ξ je prosté zobrazení.

Důkaz věty je zřejmý.

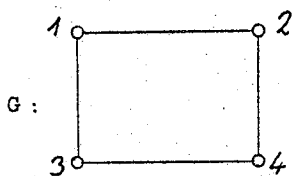
Poznámky. 1. Terminologie není v literatuře zcela jednotná. Někteří autoři pod pojmem "graf" rozumějí multigraf a graf ve smyslu naší definice nazývají na základě věty 1.1 "prostý graf", jiní grafem rozumějí strukturu, kterou my nazýváme obyčejný graf atd. Při čerpání z knižní literatury je tedy nezbytné se u každé publikace seznámit s definicemi jednotlivých

pojmu. Autoři časopiseckých článků terminologické problémy většinou řeší odkazem na některou ze základních monografií o teorii grafů.

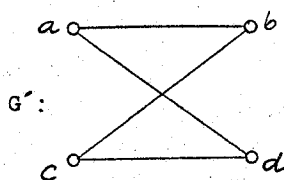
2. Množina hran orientovaného grafu $G = (U, H)$ je podmnožina kartézského součinu $U \times U$, tj. binární relace na U ; množina hran obyčejného orientovaného grafu je antireflexivní relace na U . Obdobně lze každému neorientovanému grafu nahradit každé jeho hrany dvojicí opačně orientovaných hran přiřadit symetrickou relaci; obyčejnému neorientovanému grafu takto odpovídá symetrická antireflexivní relace. Vidíme tedy, že grafy jsou vhodným nástrojem ke studiu relačních struktur.

3. V dalším textu se pro jednoduchost omezíme na grafy.

Nechť $G = (U, H)$ a $G' = (U', H')$ jsou dva grafy. Pak rovnost $G = G'$ přirozeně znamená $U = U'$ a $H = H'$, tj. dva grafy jsou si rovny, mají-li stejné množiny uzlů a hran.



obr. 1.6.6.



Grafy G, G' na obr. 1.6.6 si v tomto smyslu rovny nejsou, neboť $U(G) = \{1, 2, 3, 4\}$, zatímco $U(G') = \{a, b, c, d\}$ ¹⁾. Oba grafy však přesto představují jen "jiné nakreslení téhož obrázku" (v překřížení hran $\{a, d\}, \{b, c\}$ není uzel!). Snadno zjistíme, že uzly obou grafů si lze vzájemně jednoznačně přiřadit tak, aby dvojici uzlů spojených hranou odpovídala opět dvojice uzlů spojených hranou - existuje tedy

¹⁾ Symbolem $U(G)$, resp. $H(G)$ budeme značit množinu uzlů, resp. hran grafu G .

srovnatelné (strukturu zachovávající) zobrazení $U(G)$ do $U(G')$.

Definice. Buďte G a G' grafy. Zobrazení $f:U(G) \rightarrow U(G')$ se nazývá homomorfismus grafu G do grafu G' , jestliže platí

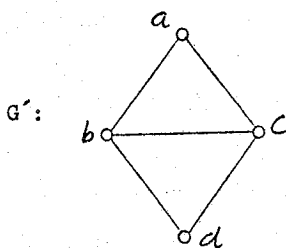
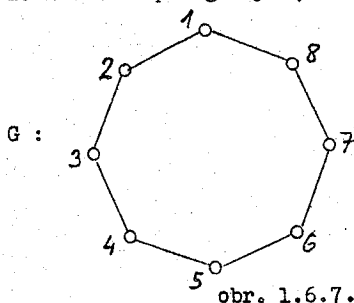
$$(x,y) \in H(G) \implies (f(x),f(y)) \in H(G') \quad \text{a}$$

$$\{x,y\} \in H(G) \implies \{f(x),f(y)\} \in H(G') \quad .$$

Zkráceně píšeme $f:G \rightarrow G'$.

Příklad. 1. Pro grafy G, G' na obr. 1.6.6 definujme $f(1) = a, f(2) = b, f(3) = c, f(4) = d$.

2. Ale také pro grafy G, G' na obr. 1.6.7 je zobrazení



$f: U(G) \rightarrow U(G')$, definované tabulkou

u	1	2	3	4	5	6	7	8
f(u)	a	b	c	b	c	a	b	c

homomorfismem G do G' . Vyšetříme tedy otázku podrobněji.

Definice. Nechť $f:U \rightarrow U'$. Pak zobrazení

$$f^+: \binom{U}{2} \cup U^2 \cup U \rightarrow \binom{U'}{2} \cup U'^2 \cup U', \text{ definované vztahy}$$

$$f^+(\{u,v\}) = \{f(u),f(v)\} \quad ,$$

$$f^+(u,v) = (f(u),f(v)) \quad ,$$

$$f^+(\{u\}) = \{f(u)\}$$

nazveme zobrazením indukovaným zobrazením f .

Poznámka. $f:U(G) \rightarrow U(G')$ je homomorfismus právě když pro každou hranu $h \in H(G)$ je $f^+(h) \in H(G')$.

Definice. Buďte G, G' grafy, $f: G \rightarrow G'$ homomorfismus. f se nazývá:

uzlový monomorfismus, je-li f prosté zobrazení,
uzlový epimorfismus, je-li f zobrazení na $U(G')$,
hranový monomorfismus, je-li f^+ prosté zobrazení,
hranový epimorfismus, je-li f^+ zobrazení na $H(G')$,
monomorfismus, je-li f i f^+ prosté zobrazení,
epimorfismus, je-li f i f^+ zobrazení na,
izomorfismus, jsou-li f i f^+ prostá a na.

Existuje-li izomorfismus $f: G \rightarrow G'$, pak se snadno dokáže, že existuje inverzní zobrazení $f^{-1}: G' \rightarrow G$ a je též izomorfismem. V tomto případě říkáme, že G a G' jsou izomorfní a značíme $G \simeq G'$.

Příklady. 1. Buďte G, G' grafy z obr. 1.6.7.

a) Zobrazení $f_1: U(G) \rightarrow U(G')$, definované předpisem

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1(u)$	a	b	c	b	c	a	b	c

je homomorfismem G do G' a nemá žádné další vlastnosti.

b) Zobrazení $f_2: U(G) \rightarrow U(G')$, definované

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_2(u)$	a	b	c	d	c	a	b	c

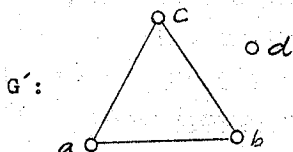
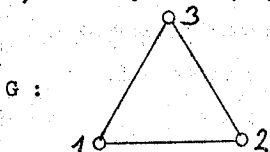
je homomorfismem G do G' , není monomorfismem uzlovým ani hranovým, je uzlovým epimorfismem, není hranovým epimorfismem.

c) Zobrazení $f_3: U(G) \rightarrow U(G')$, definované

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_3(u)$	a	b	d	c	a	b	c	b

je homomorfismem G do G' , není monomorfismem uzlovým ani hranovým, ale je uzlovým i hranovým epimorfismem, tj. je epimorfismem.

2. Najděte $f: G \rightarrow G'$ tak, aby f byl hranový epimorfismus, ale nebyl uzlový epimorfismus. Řešení:



$f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$.

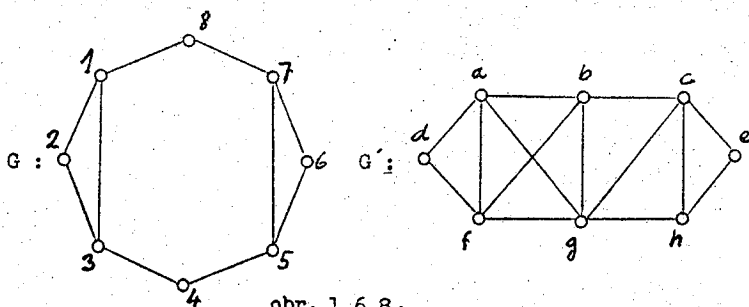
Definice. Uzel $u \in U(G)$ se nazývá izolovaný uzel grafu G , jestliže u neinciduje s žádnou hranou $h \in H(G)$.

Věta 1.6.2. Jestliže G' nemá izolované uzly, pak každý hranový epimorfismus $f: G \rightarrow G'$ je uzlový epimorfismus.

Důkaz. Nechť $u' \in U(G')$. Protože u' není izolovaný, existuje hrana $[u', v'] \in H(G')$ (orientovaná nebo neorientovaná), ale f^+ je zobrazení na a tedy tato hrana je obrazem nějaké hrany $[u, v] \in H(G)$. Pak ale nutně $u' = f(u)$ nebo $u' = f(v)$.

Příklad. Pro grafy G, G' na obr. 1.6.8 definujeme zobrazení $f_1: U(G) \rightarrow U(G')$ předpisem

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1(u)$	a	f	b	a	d	a	f	b



obr. 1.6.8.

Pak f_1 je pouze homomorfismem G do G' .

Zobrazení $f_2: G \rightarrow G'$, definované

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_2(u)$	a	d	f	b	g	h	c	b

je homomorfismem G do G' , je hranovým monomorfismem, ale není uzlovým monomorfismem.

Zobrazení $f_3: G \rightarrow G'$, definované

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_3(u)$	a	d	f	b	c	e	h	g

je homomorfismem G do G' , je monomorfismem (tj. uzlovým i hranovým), je uzlovým epimorfismem, ale není hranovým epimorfismem (a tedy není izomorfismem).

Věta 1.6.3. Nechť $f: G \rightarrow G'$ je uzlový monomorfismus.

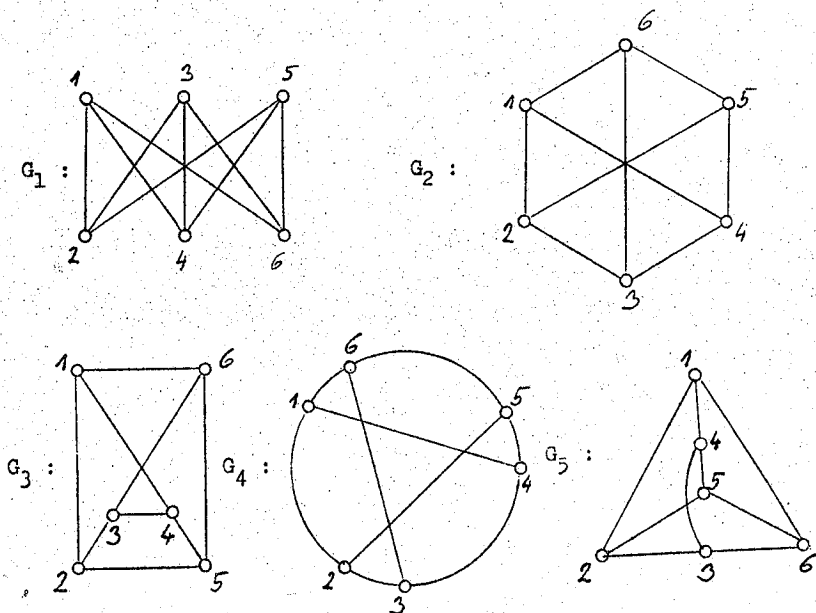
Pak f je hranový monomorfismus.

Důkaz. Kdyby f nebyl hranový monomorfismus, tak by pro některé dvě hrany $[u_1, v_1]$, $[u_2, v_2] \in H(G)$ (orientované nebo neorientované) bylo $f^+([u_1, v_1]) = f^+([u_2, v_2])$, odkud nutně $f(u_1) = f(u_2)$ nebo $f(u_1) = f(v_2)$.

Poznámka. Relace "G je izomorfní s G' " je reflexivní, symetrická a tranzitivní, tj. je ekvivalencí na množině všech

konečných grafů. Rozlišení, zda dva grafy náleží téže třídě ekvivalence, však nemusí být vždy snadnou záležitostí.

Příklad. Které z grafů G_1, \dots, G_5 na obr. 1.6.9 jsou izomorfní?



obr. 1.6.9.

(všechny - uzly, jež si odpovídají, jsou shodně očíslovány)