2. Neorientované grafy

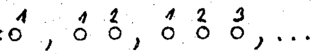
V této kapitole, nebude-li řečeno jinak, termín "graf" znamená obyčejný neorientovaný graf.

2.1. Stupeň uzlu; souvislost, komponenty grafu.

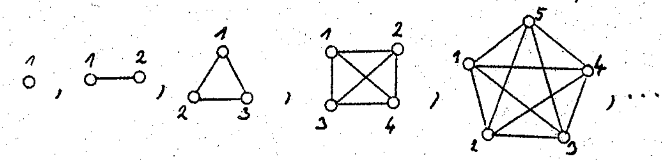
Nejprve si zavedeme označení pro některé speciální neorientované grafy, které budeme dále často používat.

Prázdný graf: $D_{\emptyset} = (\emptyset, \emptyset)$.

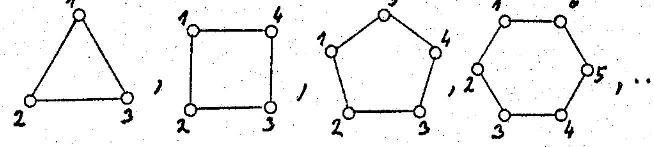
Diskrétní graf na n uzlech $(n \geqq 1)$: $D_n = (\langle 1,n \rangle, \emptyset)$.

D_n: 

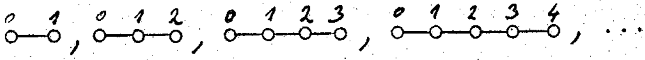
Úplný graf na n uzlech $(n \geqq 1)$: $K_n = \left(\langle 1,n\rangle, \binom{\langle 1,n\rangle}{2}\right)$.

K_n: 

Kružnice délky $n \geqq 3$: $C_n = (\langle 1,n\rangle, \{\{i,i+1\}; i \in \langle 1,n)\} \cup \{\{1,n\}\})$.

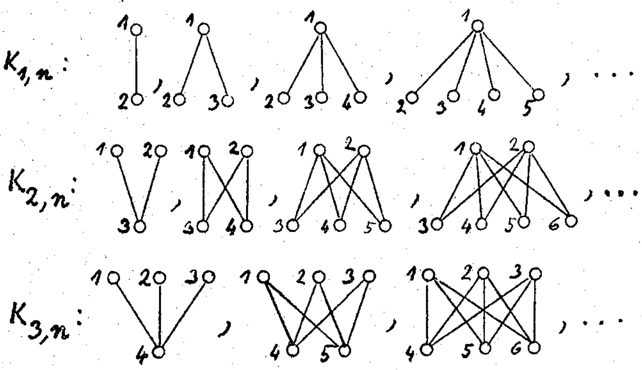
C_n: 

Cesta délky $n \geqq 1$: $P_n = (\langle 0,n\rangle, \{\{i,i+1\}; i \in \langle 0,n-1\rangle\})$.

P_n: 

Úplný sudý (bipartitní) graf $K_{m,n}$ pro $m \geq 1$, $n \geq 1$:

$$K_{m,n} = (\langle 1, m+n \rangle , \{\{i,j\} ;\ 1 \leq i \leq m\ ,\ m+1 \leq j \leq m+n\})\ .$$



Definice. Buď G graf, $u \in U(G)$ jeho uzel. Uzlové okolí uzlu u je množina uzlů $U(u) = \{v \in U(G);\ \{u,v\} \in H(G)\}$, hranové okolí uzlu u je množina hran $H(u) = \{\{u,v\} ;\ v \in U(G)\} \cap H(G)$, stupeň uzlu u v grafu G je číslo $d_G(u) = |H(u)|$. [1]

Poznámky. 1. $U(u)$ je množina všech uzlů, jež jsou spojeny hranou s uzlem u, $H(u)$ je množina všech hran, jež obsahují u. Stupeň uzlu je roven počtu hran, jež jej obsahují.

2. Též platí $d_G(u) = |U(u)|$, ale pouze v obyčejném grafu.

3. Pro každý uzel $u \in U(G)$ platí $0 \leq d_G(u) \leq |U(G)| - 1$.

Věta 2.1.1. Pro každý graf G platí

$$\sum_{u \in U(G)} d_G(u) = 2\ |H(G)|\ .$$

---

[1] Symbolem $|M|$ značíme počet prvků konečné množiny M .

Důkaz: indukcí podle $h = |H(G)|$.

1. Pro h=0 je tvrzení věty zřejmé.

2. Nechť věta platí pro každý graf, mající nejvýše h-1 hran; nechť $|H(G)| = h$. Zvolme libovolnou hranu $\{u_1, u_2\} \in H(G)$ a definujme $G' = (U(G), H(G) \setminus \{u_1, u_2\})$. Graf G' má h-1 hran a tedy $\sum_{u\,U(G')} d_{G'}(u) = 2(h-1)$. Vzhledem k tomu, že uzly u_1, u_2 mají v G stupeň o 1 větší než v G' a ostatní uzly mají stupně v G i v G' stejné, je

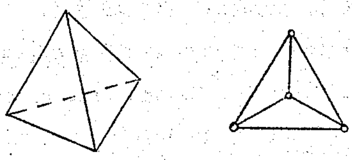
$$\sum_{u \in U(G)} d_G(u) = \sum_{u \in U(G')} d_{G'}(u) + 2 = 2(h-1) + 2 = 2h = 2|H(G)| .$$

Důsledek. V každém grafu je počet uzlů lichého stupně sudé číslo.

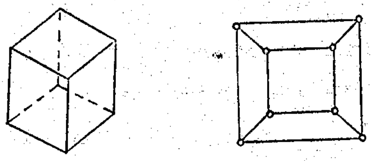
Definice. Graf G se nazývá pravidelný graf stupně k, jestliže existuje číslo k takové, že $u \in U(G) \Rightarrow d_G(u) = k$.

Příklady. K_n je pravidelný graf stupně n-1, C_n je pravidelný graf stupně 2, D_n je pravidelný graf stupně 0. Jiné zajímavé příklady pravidelných grafů nám poskytují pravidelné konvexní mnohostěny, známé již starořeckému filosofovi Platónovi: pravidelný konvexní mnohostěn je takový konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné konvexní mnohoúhelníky a v němž z každého vrcholu vychází tentýž počet hran. Lze dokázat, že existuje právě pět pravidelných konvexních mnohostěnů - jsou to tzv. platónovská tělesa: pravidelný čtyřstěn, krychle, pravidelný osmistěn, pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn. Přiřadíme-li každému vrcholu mnohostěnu uzel grafu a každé hraně hranu grafu, obdržíme pravidelné grafy na obr. 2.1.1.

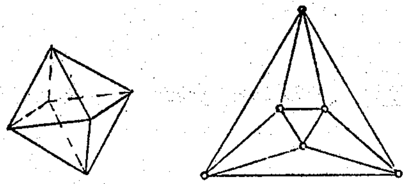
čtyřstěn



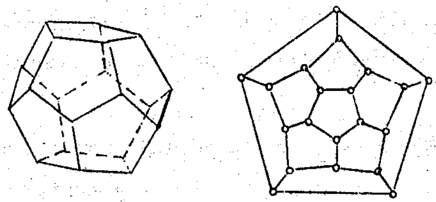
krychle



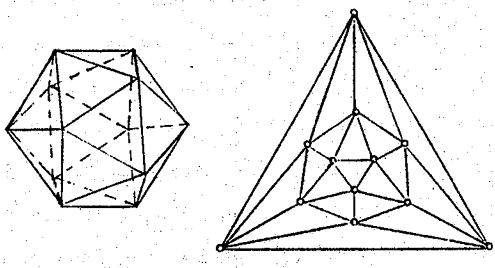
osmistěn



dvanáctistěn



dvacetistěn

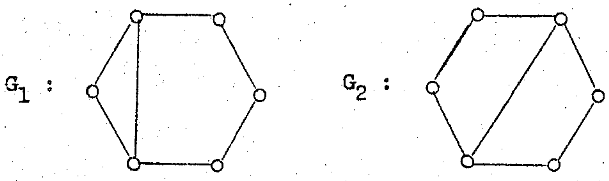


obr. 2.1.1.

Pro pravidelný graf je charakteristické, že všechny uzly mají stejný stupeň. Jakýmsi opakem by byl graf, v němž naopak žádné dva uzly nemají stejný stupeň. Po krátké úvaze zjistíme, že takový graf neexistuje, má-li mít alespoň dva uzly: kdyby existoval a měl n uzlů, tak by stupně jeho uzlů musely být $n-1, n-2, \dots, 2, 1, 0$ a odstraněním uzlu stupně 0 bychom obdrželi graf s $n-1$ uzly a s uzlem stupně $n-1$, což není možné. Tato situace navozuje následující otázku: kdy existuje graf, jehož stupně uzlů jsou rovny předem zadaným číslům.

<u>Definice.</u> Nechť $|U(G)| = n$. Očíslujme uzly grafu G tak, že $d_G(u_1) \geqq d_G(u_2) \geqq \dots \geqq d_G(u_n)$. Konečná nerostoucí posloupnost $d_G(u_1), d_G(u_2), \dots, d_G(u_n)$ se nazývá <u>soubor stupňů</u> grafu G.

Ihned je vidět, že jsou-li G_1, G_2 izomorfní, pak mají stejné soubory stupňů. Grafy G_1, G_2 na obr. 2.1.2 ukazují, že obrácené tvrzení neplatí: je $G_1 \not\cong G_2$ a oba grafy mají stejný soubor stupňů 3, 3, 2, 2, 2, 2.



obr. 2.1.2.

<u>Definice.</u> Řekneme, že konečná nerostoucí posloupnost celých nezáporných čísel je <u>grafová posloupnost</u>, jestliže existuje graf, jehož je tato posloupnost souborem stupňů.

Věta 2.1.2. Nechť je dána posloupnost celých nezáporných čísel $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$, $1 \leq s_1 \leq n-1$, $n \geq 2$. Pak je posloupnost

$$s_1, s_2, \dots, s_n \qquad \dots(1)$$

grafová právě když je grafová posloupnost

$$s_2-1, s_3-1, \dots, s_{s_1+1}-1, s_{s_1+2}, \dots, s_n . \qquad \dots(2)$$

Důkaz. 1. Je-li (2) grafová posloupnost, pak připojíme-li ke grafu, jehož je (2) souborem stupňů, nový uzel u_1 a nové hrany $\{u_1, u_i\}$ pro $i = 2, \dots, s_1+1$, obdržíme graf, jehož souborem stupňů je posloupnost (1).

2. Nechť naopak (1) je grafová, tj. existuje graf G tak, že $|U(G)| = n$ a $d_G(u_i) = s_i$ pro $i = 1, \dots, n$.

a) Jestliže $\{u_1, u_i\} \in H(G)$ pro $i = 2, \dots, s_1+1$, pak graf $G' = (U(G) \setminus \{u_1\}, H(G) \setminus \{\{u_1, u_i\} ; i = 2, \dots, s_1+1\})$ má soubor stupňů (2) a jsme hotovi.

b) Jestliže nejsou všechny hrany $\{u_1, u_i\}$ pro $i = 2, \dots, s_1+1$ v H(G), pak pro některé i, $2 \leq i \leq s_1+1$, je $\{u_1, u_i\} \notin H(G)$; nutně tedy též $\{u_1, u_j\} \in H(G)$ pro některé $j \in \langle s_1+2, n \rangle$. Z grafu G sestrojíme graf G′ následující konstrukcí:

α) je-li $s_i = s_j$, pak zaměníme očíslování uzlů u_i, u_j ;

β) je-li $s_i > s_j$, pak najdeme uzel u_k, který sousedí s u_i, ale nesousedí s u_j, z H(G) vyjmeme hrany $\{u_i, u_k\}$ a $\{u_1, u_j\}$ a přidáme hrany $\{u_1, u_i\}$ a $\{u_j, u_k\}$.

V obou případech jsme obdrželi graf G′ se stejným souborem stupňů a takový, že $\{u_1, u_i\} \in H(G')$. Popsanou konstrukci opakujeme pro každý uzel u_i, $2 \leq i \leq s_1+1$, nesousední s u_1 - po konečném počtu kroků tak vyšetřování převedeme na případ a) a důkaz je hotov.

Příklad. Příkladem posloupnosti, která není grafová, je posloupnost n-1, n-2,...,2, 1, 0 ; jiným příkladem je posloupnost 6,3,3,2,2,2 (v grafu na 6 uzlech mohou být stupně nejvýše 5) nebo 4,3,2,2,2,1,1 (lichý počet uzlů lichého stupně). Vyšetřeme posloupnost 5,5,5,4,3,2 . Opakovaným užitím věty 2.1.2 dostáváme postupně posloupnosti 4,4,3,2,1 a 3,2,1,0 ; poslední posloupnost (a tedy ani původní) grafová není.

Vyšetřeme posloupnost

6, 6, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 1 .

(i) Užitím věty 2.1.2 dostaneme posloupnost

5, 4, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 1 ,

kterou musíme monotonně uspořádat:

5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1 .

(ii) Opětovným užitím věty 2.1.2 obdržíme posloupnost

3, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1 ,

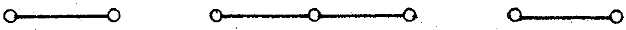
čili po novém uspořádání

3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1 .

(iii) Potřetí užijeme větu 2.1.2 :

1, 1, 1, 2, 1, 1, 1

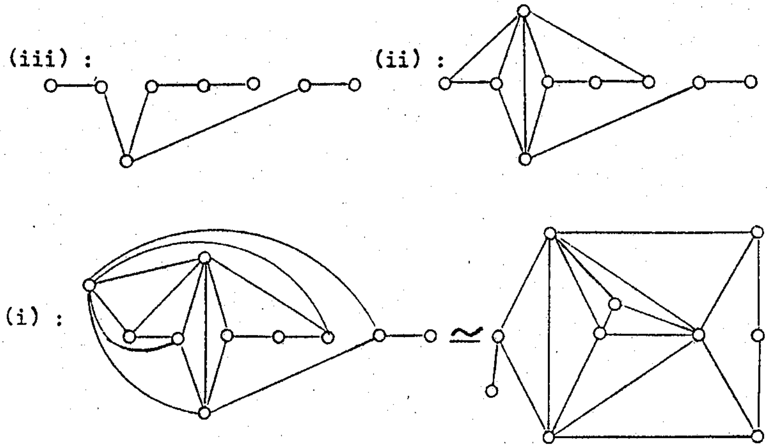
a graf na obr. 2.1.3 nás přesvědčí, že poslední (a tedy i původní) posloupnost je grafová.



obr. 2.1.3.

Konstrukce, popsaná v důkazu věty 2.1.2, nám dále umožňuje graf s daným souborem stupňů i prakticky sestrojit tímto postupem: vyjdeme od grafu na obr. 2.1.3 a dále (iii)ke třem uzlům stupně 1 připojíme nový uzel stupně 3, (ii) k uzlům stupňů 3, 2, 2, 1, 1 předchozího grafu připojíme nový uzel stupně 5,

(i) k uzlům stupňů 5, 4, 3, 2, 2, 2 předchozího grafu připojíme nový uzel stupně 6 . Postup konstrukce je znázorněn na obr. 2.1.4; zároveň z konstrukce vidíme, že toto řešení není jediné.



obr. 2.1.4.

<u>Definice.</u> 1. Buďte G_1, G grafy. Řekneme, že G_1 je:
<u>podgrafem</u> grafu G (značíme $G_1 \subset G$), jestliže $U(G_1) \subset U(G)$ a $H(G_1) \subset H(G)$;
<u>faktorem</u> grafu G, jestliže $U(G_1) = U(G)$ a $H(G_1) \subset H(G)$.

2. Buď $X \subset U(G)$. Podgraf $\left(X, H(G) \cap \binom{X}{2} \right)$ se nazývá <u>indukovaný podgraf</u> grafu G na množině uzlů X.

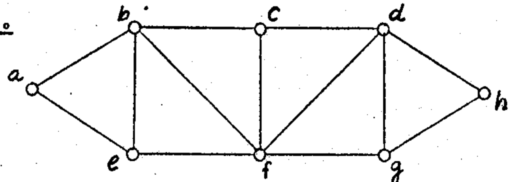
<u>Definice.</u> Řekneme, že graf G je <u>souvislý</u>, jestliže pro každé dva uzly $u, v \in U(G)$ existuje přirozené číslo n a homomorfismus $f: P_n \to G$ takový, že $f(0) = u$ a $f(n) = v$.

Je-li $f\colon G \longrightarrow G'$ homomorfismus, pak označíme $f(G)$ homomorfní obraz grafu G, tj. podgraf grafu G' s množinou uzlů $f(U(G))$ a s množinou hran $f^{+}(H(G))$.

Definice. Nechť $f\colon P_n \longrightarrow G$ je homomorfismus, $f(0) = u$, $f(n) = v$. Podgraf $f(P_n) \subset G$ se nazývá sled z uzlu u do uzlu v. Je-li f hranový monomorfismus, pak se $f(P_n)$ nazývá tah z u do v ; je-li f uzlový monomorfismus, pak se $f(P_n)$ nazývá cesta z u do v. Číslo n se nazývá délka sledu, resp. tahu, resp. cesty.

Příklad.

G :



Sled z a do h: a, b, c, f, b, c, d, g, d, h .

Tah z a do h: a, b, e, f, b, c, d, g, f, d, h .

Cesta z a do h: a, e, b, f, d, h .

(Hovoříme-li o sledu, tahu či cestě, jedná se vždy o homomorfní obraz grafu P_n s množinou uzlů $\{0, 1, \ldots, n\}$ a lze jej tedy krátce popsat posloupností uzlů $f(0), f(1), \ldots, f(n)$.)

Graf G z našeho příkladu je souvislý; obdobně všechny grafy na obr. 2.1.4 jsou souvislé. Příkladem nesouvislého grafu je graf na obr. 2.1.3 a graf G' z poznámky před větou 1.3.2.

Tvrzení. Graf G je souvislý právě když pro každé dva uzly $u, v \in U(G)$ existuje v G sled z u do v .

Důkaz plyne ihned z příslušných definic.

Věta 2.1.3. Graf G je souvislý právě když pro každé dva jeho uzly $u,v \in U(G)$ existuje v G cesta z u do v.

Důkaz. 1. Jestliže pro každé $u,v \in U(G)$ existuje v G cesta z u do v, pak tato cesta je sledem a podle tvrzení před větou je G souvislý.

2. Jestliže naopak G je souvislý, pak pro $u,v \in U(G)$ označíme $f(P_n)$ sled z u do v minimální délky. Kdyby pro některé $i < j$ bylo $f(i) = f(j)$, tak by $f(0),\dots,f(i),f(j+1),\dots,f(n)$ byl sled z u do v menší délky než n. Zobrazení f je tedy uzlový monomorfismus, tj. $f(P_n)$ je cesta z u do v.

Definice. Buď $G' \subset G$. Řekneme, že G' je komponenta grafu G, jestliže

a) G' je souvislý graf,

b) jestliže $G' \subset G'' \subset G$ a G'' je souvislý, pak $G'' = G'$.

Poznámka. Komponenta grafu je jeho maximální souvislý podgraf.

Věta 2.1.4. Buďte $G_1,\dots,G_k$ všechny komponenty grafu G. Pak platí

1. $G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$, [1]

2. $G_i \cap G_j = \emptyset$ pro $i \neq j$.

---

[1] Jsou-li G_1, G_2 dva podgrafy téhož grafu, pak přirozeným způsobem definujeme $G_1 \cup G_2 = (U(G_1) \cup U(G_2), H(G_1) \cup H(G_2))$ a $G_1 \cap G_2 = (U(G_1) \cap U(G_2), H(G_1) \cap H(G_2))$; pro konečný počet grafů indukcí.

Důkaz. 1. Pro každý uzel $u \in U(G)$ je graf $(\{u\}, \emptyset)$ souvislý a tedy je podgrafem nějaké komponenty; obdobně pro každou hranu z $H(G)$. Odtud vyplývá, že $G \subset G_1 \cup \ldots \cup G_k$; protože současně $G_i \subset G$ pro $1 \leqq i \leqq k$, musí též být $G_1 \cup \ldots \cup G_k \subset G$ a tedy $G_1 \cup \ldots \cup G_k = G$.

2. Nechť $i \neq j$ a $G_i \cap G_j$ obsahuje uzel u. Označme X množinu všech $v \in U(G)$, pro něž existuje v G cesta z u do v a G^u podgraf grafu G indukovaný na X. Zřejmě G^u je souvislý, tedy z každého jeho uzlu existuje cesta do u, a tedy $G_i \subset G^u$. Z podmínky b) z definice komponenty plyne, že $G_i = G^u$. Obdobně dokážeme, že i $G_j = G^u$, takže $G_i = G_j$.

Poznámka. Navíc jsme zjistili, že $G_i = G_j = G^u$ a tedy důkaz věty dává konstrukci umožňující sestrojení komponenty obsahující zadaný uzel u - uvědomme si, že v aplikacích je graf zpravidla uložen v paměti počítače a nalezení komponenty pak není vidět "na první pohled".

Označení. Zavedeme následující označení:

$$\delta(G) = \min_{u \in U(G)} d_G(u) \qquad \text{- minimální stupeň grafu ,}$$

$$\Delta(G) = \max_{u \in U(G)} d_G(u) \qquad \text{- maximální stupeň grafu .}$$

Věta 2.1.5. Je-li $\delta(G) \geqq \frac{1}{2}|U(G)|$, pak je G souvislý.

Důkaz. Označíme-li $\delta(G) = k$, pak podle předpokladu $|U(G)| \leqq 2k$. Kdyby byl G nesouvislý, tak by musel mít komponentu -označme ji G'- s nejvýše k uzly; pak ale nutně $\delta(G) \leqq k - 1$, což je spor.

Definice. Uzel $u \in U(G)$, pro který $d_G(u) = 1$, se nazývá koncový uzel grafu G.

Věta 2.1.6. Buď G souvislý, $|U(G)| \geq 2$; nechť $|H(G)| < |U(G)|$. Pak má graf G alespoň dva koncové uzly.

Důkaz. Kdyby měl G nejvýše jeden koncový uzel, tak by všechny ostatní uzly musely být vzhledem k souvislosti G stupně alespoň 2; z věty 2.1.1 pak dostáváme

$$|H(G)| = \frac{1}{2} \sum_{u \in U(G)} d_G(u) \geq \frac{1}{2} \left[2(|U(G)| - 1) + 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{2}(2|U(G)| - 1) = |U(G)| - \frac{1}{2} \quad ,$$

odkud, vzhledem k tomu, že $|H(G)|$ i $|U(G)|$ jsou celá čísla, vyplývá $|H(G)| \geq |U(G)|$, což je spor.

Věta 2.1.7. Je-li G souvislý a $|U(G)| = n$, pak

$$|H(G)| \geq n - 1 \ .$$

Důkaz provedeme indukcí.

1. Je-li $n = 1$, je tvrzení zřejmé.

2. Předpokládejme, že každý souvislý graf na n uzlech má alespoň n-1 hran; buď G souvislý graf na n+1 uzlech.

a) Jestliže $|H(G)| \geq n+1$, není co dokazovat.

b) Jestliže $|H(G)| \leq n$, pak podle věty 2.1.6 má graf G koncový uzel u. Označme v jediný sousední uzel uzlu u a položme $G' = (U(G) \setminus \{u\}, H(G) \setminus \{\{u,v\}\})$. Graf G', vzniklý z G vyjmutím jedné hrany, má n uzlů a tedy podle indukčního předpokladu je $|H(G')| \geq n - 1$; graf G má tedy alespoň n hran.

2.2. Stromy; kostry grafu.

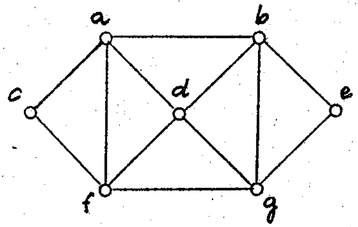
Definice. Buď $f: C_n \to G$ homomorfismus. Pak podgraf $f(C_n) \subset G$ se nazývá uzavřený sled v G. Je-li f hranový monomorfismus, pak se $f(C_n)$ nazývá uzavřený tah v G; je-li f monomorfismus, nazývá se $f(C_n)$ kružnice v G. Číslo n se nazývá délka uzavřeného sledu, resp. uzavřeného tahu, resp. kružnice.

Poznámka. 1. Místo kružnice délky 3 (resp. 4, 5 atd.) se někdy též říká trojúhelník (resp. čtyřúhelník,...)

2. Obdobně jako u sledů, tahů a cest je možno uzavřený sled (uzavřený tah, kružnici) jednoduše popsat posloupností uzlů f(1), ..., f(n) .

Příklad.

G :



Uzavřený sled v G: f, d, a, b, d, a, c .

Uzavřený tah v G: c, a, f, d, a, b, g, f .

Kružnice v G: a, d, b, g, f, c .

Věta 2.2.1. Buď G souvislý, $C \subset G$ kružnice, $h \in H(C)$. Pak podgraf $G' = (U(G), H(G) \setminus \{h\})$, vzniklý odstraněním hrany h z G, je souvislý.

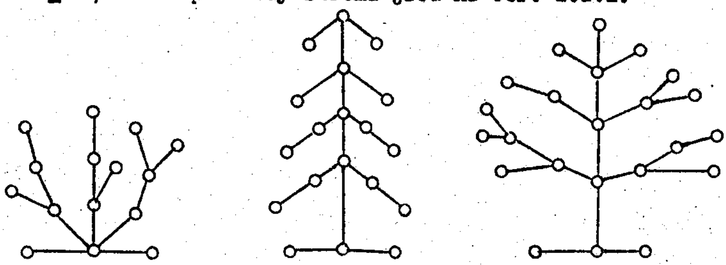
Důkaz. Buďte u, v libovolné dva uzly grafu G; dokážeme, že uzly u, v leží v téže komponentě grafu G'. Ze souvislosti grafu G vyplývá existence cesty P z u do v v G: jestliže $h \notin H(P)$, je P cesta z u do v v grafu G' a tvrzení je zřejmé; předpokládejme tedy naopak, že $h \in H(P)$. Nechť $h = \{a,b\}$ a označme C kružnici v G, obsahující hranu h.

Není-li žádný z uzlů a,b totožný s některým z uzlů u, v , pak po odstranění hrany h zbývající hrany cesty P tvoří dvě cesty v G', z nichž jedna spojuje uzel a s jedním z uzlů u, v a druhá spojuje uzel b s druhým z u, v; zbývající hrany kružnice C tvoří cestu v G' z a do b. Z věty 2.1.4 pak plyne, že uzly u, v leží v téže komponentě grafu G' a tedy G' je souvislý.

Případ, kdy některý z uzlů a, b je totožný s některým z uzlů u, v , je ještě jednodušší a je ponechán čtenáři jako cvičení.

Definice. Souvislý graf, který neobsahuje jako podgraf žádnou kružnici, se nazývá strom.

Příklad. Příklady stromů jsou grafy P_n a $K_{1,n}$ pro libovolné $n \geq 1$; další příklady stromů jsou na obr. 2.2.1.



obr. 2.2.1.

Tvrzení. Každý strom na alespoň dvou uzlech má alespoň dva koncové uzly.

Důkaz. Buď $P \subset G$ cesta v G maximální délky; u, v uzly stupně 1 v P. Kdyby $d_G(u) \geqq 2$, tak by existoval sousední uzel x uzlu u tak, že $\{u,x\} \in H(G)$, ale $\{u,x\} \notin H(P)$, což je pro $x \notin U(P)$ v rozporu s maximalitou cesty P a pro $x \in U(P)$ v rozporu s neexistencí kružnice v G. Tedy uzel u (a obdobně i v) je stupně 1 v G.

Věta 2.2.2. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. G je strom.

2. Pro každé dva uzly $u, v \in U(G)$ existuje v G právě jedna cesta z u do v.

3. G je souvislý a $|H(G)| = |U(G)| - 1$.

4. G je minimální souvislý graf s množinou uzlů $U(G)$ (tj. nemá žádný souvislý vlastní faktor).

Důkaz provedeme podle následujícího schematu:

$$\begin{tikzcd} (2) \arrow[r, Leftrightarrow] & (1) \arrow[r, Rightarrow] & (3) \arrow[dl, Rightarrow] \\ & (4) \arrow[u, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

(1) $\Rightarrow$ (2): Ze souvislosti stromu vyplývá existence cesty z u do v; z neexistence kružnic v G vyplývá jednoznačnost této cesty (dvě různé cesty by vytvořily kružnici v G).

(2) $\Rightarrow$ (1): Z existence cesty mezi každými dvěma uzly vyplývá souvislost grafu G; z jednoznačnosti cesty vyplývá

neexistence kružnice v G (jsou-li u, v uzly kružnice v G, pak mezi nimi existují alespoň dvě různé cesty).

(1) $\Rightarrow$(3): Dokazujeme, že pro každý strom platí $|H(G)| = |U(G)| - 1$; tvrzení dokážeme indukcí podle $n = |U(G)|$.

a) Pro n = 1 je tvrzení zřejmé.

b) Nechť každý strom na n uzlech má n-1 hran; buď G strom na n+1 uzlech. Podle tvrzení před větou nalezneme koncový uzel u grafu G a sestrojíme graf $G' \subset G$ odstraněním z G uzlu u a jediné hrany, která s ním inciduje. Graf G' je pak opět souvislý graf bez kružnic, tj. strom; podle předpokladu má G' n-1 hran (neboť má n uzlů) a tedy graf G má n hran.

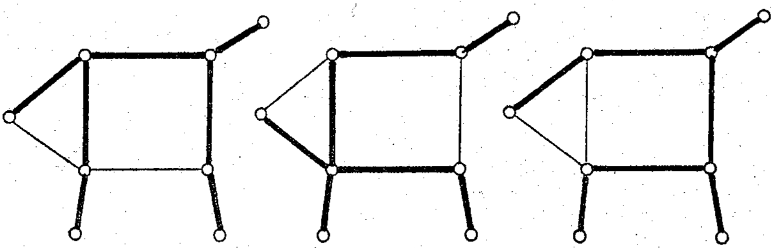
(3) $\Rightarrow$(4): Podle věty 2.1.7 má každý souvislý graf na n uzlech alespoň n-1 hran - souvislý graf s n uzly a n-1 hranami je tedy minimální.

(4) $\Rightarrow$(1): Podle věty 2.2.1 se odstraněním hrany, která je hranou některé kružnice grafu G, neporuší souvislost grafu G. Odtud ihned vyplývá, že minimální souvislý graf na dané množině uzlů nemůže obsahovat kružnice, tj. je to strom.

Definice. Nechť G je souvislý graf. Graf $T \subset G$ se nazývá **kostra** grafu G, jestliže

1. T je strom ,
2. T je faktor grafu G .

Poznámka. V souvislém grafu G může existovat více různých koster (viz obr. 2.2.2), všechny však mají $|U(G)| - 1$ hran.



obr. 2.2.2.

Poznámka. Kolik může mít daný souvislý graf koster? Nejmenší možný počet koster - jedinou - mají zřejmě stromy. Největší počet různých koster bude mít graf s "co největším" počtem hran, tj. úplný graf K_n - lze dokázat, že počet koster úplného grafu K_n je roven n^{n-2} (tento výsledek znal již roku 1889 A. Cayley) - viz též příklady za větou 4.4.12.

Věta 2.2.3. V každém souvislém grafu existuje alespoň jedna jeho kostra.

Důkaz 1. V daném souvislém grafu G sestrojíme kostru T následujícím postupem.

(i) Zvol libovolný uzel $u \in U(G)$ a polož $G_0 = (\{u\}, \emptyset)$.

(ii) $k := 0$.

(iii) Je-li již sestrojen strom $G_k \subset G$, a není-li faktor grafu G , pak ze souvislosti grafu G vyplývá existence hrany $\{x,y\} \in H(G)$ takové, že $x \in U(G_k)$, ale $y \notin U(G_k)$. Položme $G_{k+1} = (U(G_k) \cup \{y\}, H(G_k) \cup \{x,y\})$. Pak je $G_{k+1} \subset G$ a a G_{k+1} je strom (neboť pro každé dva uzly v něm existuje právě jedna cesta).

(iv) Není-li $U(G_{k+1}) = U(G)$, polož $k := k + 1$ a opakuj bod (iii); je-li $U(G_{k+1}) = U(G)$, pak G_{k+1} je faktor grafu G – – polož $T = G_{k+1}$ a jsme hotovi.

<u>Důkaz 2.</u> V souvislém grafu G sestrojíme kostru T následující konstrukcí.

(i) Polož $G_0 = G$; G_0 je souvislým faktorem grafu G.

(ii) $k := 0$.

(iii) Je-li již sestrojen souvislý faktor G_k grafu G, pak:

– jestliže G_k obsahuje kružnici, pak na této kružnici zvol libovolnou hranu h_k a polož $G_{k+1} = (U(G_k), H(G_k) \setminus \{h_k\})$. Graf G_{k+1} je faktorem grafu G a podle věty 2.2.1 je souvislý; polož $k := k + 1$ a vrať se k bodu (iii) ;

– jestliže G_k neobsahuje kružnici, pak G_k je souvislý faktor grafu G bez kružnic, polož $T = G_k$ a jsme hotovi.

<u>Poznámka.</u> Důkazy věty 2.2.3 zároveň dávají algoritmy, umožňující praktické nalezení kostry daného grafu.

Je-li G souvislý graf na n uzlech a $T \subset G$ je jeho kostra, pak kostra T má $|U(G)| - 1$ hran a zbývajících $|H(G)| - |U(G)| + 1$ hran grafu G leží "mimo kostru". Zobecníme tuto úvahu na nesouvislý graf.

Nechť G je nesouvislý a má k komponent $G_1, \ldots, G_k$, $k > 1$, označme $|U(G_i)| = n_i$. Sestrojíme-li v i-té komponentě G_i její kostru T_i $(i = 1, \ldots, k)$, pak T_i bude mít $n_i - 1$ hran. Kostry všech komponent grafu G budou mít celkem

$$(n_1 - 1) + \dots + (n_k - 1) = n_1 + \dots + n_k - 1 - \dots - 1 =$$
$$= |U(G)| - k$$

hran; zbývajících hran "mimo kostry" je

$$|H(G)| - |U(G)| + k \ .$$

Definice. Označme $k(G)$ počet komponent grafu G.

Číslo $h(G) = |U(G)| - k(G)$ se nazývá hodnost grafu G.

Číslo $c(G) = |H(G)| - |U(G)| + k(G)$ se nazývá cyklomatické číslo (též Bettiho číslo nebo nulita) grafu G.

Poznámky. 1. Pro každý graf G na n uzlech platí:

$$0 \leqq h(G) \leqq n - 1 \quad ,$$
$$0 \leqq c(G) \leqq \binom{n-1}{2} \quad .$$

$h(G) = 0$ pro $G = D_n$ (diskrétní graf), $h(G) = n - 1$, je-li graf G souvislý. Obdobně $c(G) = 0$ právě když G je grafem, jehož každá komponenta je strom. Maximální hodnoty nabývá cyklomatické číslo pro $G = K_n$ a snadno zjistíme, že $|H(K_n)| = \binom{n}{2}$, odkud $c(K_n) = \binom{n}{2} - n + 1 = \binom{n-1}{2}$.

2. Algoritmus z důkazu 1 věty 2.2.3 nalezne kostru souvislého grafu G v $h(G)$ krocích; algoritmus z druhého důkazu splní tentýž úkol v $c(G)$ krocích.

3. Je-li T kostra souvislého grafu G, pak se hrany G, jež nepatří kostře T, nazývají tětivy grafu G vzhledem k T; hrany kostry T se nazývají větve grafu G (vzhledem k T). Graf G má zřejmě $h(G)$ větví a $c(G)$ tětiv.

2.3. Ohodnocený graf; minimální kostra a metrika grafu

Představme si následující situace.

a) Je dána dopravní síť (například železniční). Tuto síť popíšeme grafem G, v němž každému nádraží odpovídá uzel a každé trati odpovídá hrana grafu. Chceme-li pomocí našeho grafu řešit praktické otázky železniční dopravy, je přirozené každé hraně grafu G přiřadit reálné číslo, mající význam např. délky tratě.

b) Jestliže je graf G grafem elektrického obvodu, tj. uzly odpovídají uzlům obvodu a hrany odpovídají větvím obvodu, pak každé hraně grafu G přiřadíme hodnotu příslušného prvku obvodu.

c) Je dán libovolný systém, který je třeba převést posloupností operací z výchozího stavu do cílového stavu. Uzly grafu G odpovídají jednotlivým možným stavům systému; hrany popisují operace, jež systém převádějí ze stavu do jiného stavu. V tomto případě každé hraně můžeme přiřadit např. dobu trvání příslušné operace, cenu operace apod.

Uvedené příklady nás přivádějí k následující definici.

Definice. Buď G graf. Funkce $w: H(G) \longrightarrow (0, \infty)$ se nazývá (hranové) ohodnocení grafu G; graf se zadaným ohodnocením se nazývá ohodnocený graf.

Z uvedených příkladů vidíme, že bude účelné zabývat se hledáním podgrafů, na nichž je ohodnocení minimální.

Věta 2.3.1. Buď G souvislý ohodnocený graf, nechť K je souvislý faktor grafu G, pro který je číslo $\sum_{h \in H(K)} w(h)$ minimální. Pak je K kostra grafu G.

Důkaz. Kdyby K obsahoval kružnici, tak by bylo možno odstraněním jedné hrany této kružnice získat faktor, který je podle věty 2.2.1 souvislý a má menší součet ohodnocení hran, což je spor s minimalitou faktoru K.

Definice. Buď G souvislý ohodnocený graf, K jeho kostra taková, že pro všechny souvislé faktory G' grafu G platí

$$\sum_{h \in H(K)} w(h) \leqq \sum_{h' \in H(G')} w(h') \quad .$$

Kostra K se nazývá minimální kostra grafu G.

Poznámka. Existence minimální kostry v daném souvislém ohodnoceném grafu je evidentní.

Věta 2.3.2. Buď G souvislý ohodnocený graf, K jeho kostra. Pro každou hranu $h \in H(G) \setminus H(K)$ označme C_h jedinou kružnici grafu $(U(K), H(K) \cup \{h\})$. Pak K je minimální kostra grafu G právě když pro každou hranu $h \in H(G) \setminus H(K)$ je $w(h) \geqq w(h')$ pro všechny hrany $h' \in H(C_h)$.

Důkaz. 1. Nechť K je minimální kostra grafu G. Kdyby existovala hrana $h \in H(G) \setminus H(K)$ taková, že v příslušné kružnici C_h pro některou hranu h' platí $w(h) < w(h')$, tak by bylo možno sestrojit náhradou hrany h' v kostře K hranou h jinou kostru K' s nižším součtem ohodnocení hran, což je spor s minimalitou kostry K (důkaz tvrzení, že takto sestrojený podgraf K' je kostrou grafu G, ponecháváme čtenáři jako cvičení).

2. Nechť naopak K není minimální kostra - je tedy minimální nějaká jiná kostra K', přičemž obě kostry mají stejný počet hran. Označme $h_1, \ldots, h_k$ hrany z $H(K') \setminus H(K)$. Připojením h_i ke K vznikne kružnice C_{h_i}, z níž kostra K' neobsahuje nějakou hranu (neboť K', jsouc stromem, neobsahuje kružnice) - označme tuto hranu h_i' $(i = 1, \ldots, k)$.

Tedy: hrany h_i nepatří do $H(K)$, ale jsou z $H(K')$,

hrany h_i' nepatří do $H(K')$, ale jsou z $H(K)$.

Z minimality kostry K' a z předpokladu, že K není minimální, plyne

$$\sum_{i=1}^{k} w(h_i) < \sum_{i=1}^{k} w(h_i') ,$$

a tedy pro některé i je $w(h_i) < w(h_i')$, tj. neplatí podmínka věty.

Definice. Buď G graf, $u, v \in U(G)$. Vzdálenost uzlů u, v (značíme $d_G(u,v)$) je délka nejkratší cesty z uzlu u do uzlu v v grafu G. Neexistuje-li v G cesta z u do v, položíme $d_G(u,v) = \infty$.

Věta 2.3.3. Buď G souvislý ohodnocený graf; $x, y, z \in U(G)$. Pak platí:

0. $d_G(x,y)$ je celé číslo,
1. $d_G(x,y) \geq 0$ a $d_G(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d_G(x,y) = d_G(y,x)$,
3. $d_G(x,y) + d_G(y,z) \geq d_G(x,z)$,
4. je-li $d_G(x,z) > 1$, pak existuje $y \in U(G)$ tak, že $x \neq y \neq z$ a $d_G(x,y) + d_G(y,z) = d_G(x,z)$.

Důkaz věty je snadný.

Poznámka. 1. Z tvrzení 1 – 3 věty 2.3.3 vyplývá, že graf G spolu s funkcí $d_G(x,y)$ tvoří metrický prostor. Funkce $d_G(x,y)$ bývá proto též nazývána metrika grafu.

2. Zavedeme nyní obdobný pojem v ohodnoceném grafu.

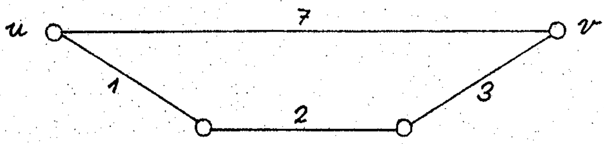
Definice. Buď G ohodnocený graf. Pro každou cestu $P \subset G$ definujeme w-délku $w(P)$ cesty P předpisem

$$w(P) = \sum_{h \in H(P)} w(h) .$$

Pro každé dva uzly $u,v \in U(G)$ nazveme w-vzdáleností uzlů u, v (značíme $d_G^w(u,v)$) nejmenší w-délku cesty z u do v. Neexistuje-li cesta z u do v, položíme $d_G^w(u,v) = \infty$.

Jsou-li u, v dva uzly grafu G, pak cesta z u do v, mající nejmenší délku, se nazývá nejkratší cesta z u do v; cesta z u do v, mající nejmenší w-délku, se nazývá minimální cesta z u do v.

Poznámka. 1. Graf na obr. 3.2.1 ukazuje, že nejkratší cesta z u do v nemusí být současně minimální cestou: nejkratší cesta z u do v má délku 1 a w-délku 7, zatímco minimální cesta z u do v má délku 3 a w-délku 6.



obr. 3.2.1.

2. Pro funkci $d_G^w(x,y)$ platí věta obdobná větě 2.3.3 - její formulaci a důkaz přenecháváme čtenáři jako snadné cvičení. Speciálně odtud vidíme, že funkce $d_G^w(x,y)$ má také vlastnosti metriky.

Příklad. Nechť U(G) je množina všech železničních stanic ČSD a H(G) je množina všech železničních tratí ČSD. Označme $\rho(x,y)$ cenu jízdenky (osobní vlak 2. tř., obyčejné jízdné) ze stanice x do y. Pak funkce $\rho(x,y)$ není metrika, neboť nemá vlastnost 3 (trojúhelníková nerovnost) z věty 2.3.3 : jestliže např. stanice B leží na trati mezi A a C tak, že A je od ní vzdálena 9 km a C je vzdálena 17 km, pak jízdné z A do C činí 4 Kčs, zatímco $\rho(A,B) = 1$ a $\rho(B,C) = 2$.

2.4. Eulerovské a hamiltonovské grafy

Oblíbeným námětem úloh z oblasti tzv. rekreační matematiky je úkol nakreslit daný "obrázek" (tj. graf) jedním nepřerušovaným a nikde se nepřekrývajícím (s výjimkou křížení) tahem. Ke stejné úloze se dostaneme i v praktičtějších situacích – – například tak, že hrany grafu představují ulice nějakého města, uzly jsou křižovatky a řidič posypového vozu má za úkol posypat všechny ulice města tak, aby žádnou ulicí neprojížděl dvakrát a aby svoji objížďku skončil na místě, z něhož vyjel. Podmínku řešitelnosti těchto a podobných úloh nalezl již v 18. století L. Euler.

Definice. Buď G graf, označme $m = |H(G)|$. Řekneme, že G je eulerovský graf, jestliže existuje epimorfismus $f\colon C_m \longrightarrow G$.

Poznámka. V definici se požaduje, aby délka kružnice C_m byla rovna počtu hran grafu G; odtud vyplývá, že epimorfismus f je nutně též hranovým monomorfismem a tedy $f(C_m)$ je uzavřený tah. Lze tedy ekvivalentně říci: Graf G je eulerovský, jestliže v G existuje uzavřený tah, který obsahuje všechny jeho hrany.

Věta 2.4.1. Graf G s alespoň dvěma uzly je eulerovský právě když G je souvislý a všechny jeho uzly jsou sudého stupně.

Důkaz. 1. Je-li G eulerovský, pak $G = f(C_m)$ a ze souvislosti kružnice C_m vyplývá souvislost G. Dále pro každý uzel $u \in U(G)$ platí $d_G(u) = \sum_{y \in f^{-1}(u)} d_{C_m}(y) = 2|f^{-1}(u)|$, což je sudé číslo.

Před druhou částí důkazu dokážeme jedno pomocné tvrzení.

Lemma. Nechť všechny uzly grafu G jsou sudého stupně, nechť $u \in U(G)$ není izolovaný. Pak existuje uzavřený tah $T \subset G$ takový, že $u \in U(T)$

Důkaz lemmatu. Tah T sestrojíme následující konstrukcí.

a) Z uzlu u vede v G hrana do některého uzlu u_1; položíme-li $f(0) = u$ a $f(1) = u_1$, obdržíme tah $T_1 = f(P_1) \subset G$.

b) Je-li již sestrojen tah $T_k = f(P_k) \subset G$ délky $k \geqq 1$, pak k uzlu $f(k)$, jenž je zřejmě lichého stupně v T_k a sudého stupně v G, existuje uzel u_{k+1} tak, že hrana $\{f(k), u_{k+1}\}$ je hranou G, ale není hranou T_k.

- Jestliže $u_{k+1} \neq u$, pak položíme $f(k+1) = u_{k+1}$, obdržíme tak tah $T_{k+1} = f(P_{k+1}) \subset G$ a opakujeme bod b) pro $k := k+1$;

- jestliže $u_{k+1} = u$, pak položíme $f(k+1) = u_{k+1}$ a obdržíme hledaný uzavřený tah $T = f(C_{k+1}) \subset G$.

Nechť tedy nyní G je souvislý a všechny jeho uzly jsou sudého stupně. Zvolme $u_0 \in U(G)$. Podle lemmatu existuje uzavřený tah $T_0 = f_0(C_{k_0}) \subset G$ tak, že $u_0 \in U(T_0)$. Jestliže $H(T_0) = H(G)$, pak T_0 je uzavřený tah požadovaných vlastností a jsme hotovi; v opačném případě můžeme definovat neprázdný graf G_1 předpisem $G_1 = (U(G), H(G) \setminus H(T_0))$. Ze souvislosti grafu G vyplývá existence uzlu $u_1 \in U(G_1) \cap U(T_0)$, který není izolovaným uzlem grafu G_1. Protože všechny uzly grafu G_1 jsou sudého stupně, existuje v G_1 uzavřený tah $T_0^1 = f_0^1(C_{k_1})$ tak, že $f_0^1(k_1) = u_1$; protože současně $u_1 \in U(T_0)$, existuje číslo r_1, $1 \leq r_1 \leq k_0$, tak, že $f_0(r_1) = u_1$. Definujeme-li nyní zobrazení $f_1 : \langle 1, k_0 + k_1 \rangle \rightarrow U(G)$ předpisem

$$f_1(i) = f_0(i) \quad \text{pro } 1 \leq i \leq r_1 ,$$

$$f_1(i) = f_0^1(i - r_1) \text{ pro } r_1 + 1 \leq i \leq r_1 + k_1 ,$$

$$f_1(i) = f_0(i - k_1) \text{ pro } r_1 + k_1 + 1 \leq i \leq k_0 + k_1 ,$$

pak je f hranovým monomorfismem $C_{k_0+k_1}$ do G a tedy $T_1 = f_1(C_{k_0+k_1}) \subset G$ je uzavřený tah, jehož je T_0 vlastním podgrafem. Jestliže nyní $H(T_1) = H(G)$, pak jsme hotovi; v opačném případě analogickým způsobem sestrojíme uzavřený tah T_2, pro nějž $T_1 \subsetneqq T_2$ - po konečném počtu kroků tak získáme uzavřený tah, obsahující všechny hrany grafu G.

<u>Definice.</u> Graf G se nazývá <u>hamiltonovský</u>, jestliže obsahuje jako podgraf kružnici délky $|U(G)|$.

<u>Poznámky.</u> 1. Kružnice, která je obsažena v G a má délku $|U(G)|$, nutně prochází všemi uzly grafu G. Taková kružnice se nazývá <u>hamiltonovská kružnice</u> grafu G.

2. Dokažte, že všechny grafy na obr. 2.1.1. jsou hamiltonovské.

3. Čtenář, který v tomto okamžiku očekává větu typu "Graf G je hamiltonovský právě když ...???...", bude ve svém očekávání zklamán. Taková věta uvedena nebude, neboť žádná taková tzv. charakterizační věta není známa. Vidíme, že problémy, které jsou "na první pohled" velmi podobné, se mohou svojí obtížností zásadně lišit: zatímco problém existence

eulerovského tahu byl úspěšně vyřešen již v 18. století, náleží problém existence hamiltonovské kružnice k velmi obtížným problémům. K této problematice se vrátíme v dalších souvislostech v 5. kapitole.

4. Byla nalezena celá řada postačujících podmínek existence hamiltonovské kružnice v grafu; uvedeme zde bez důkazu jednu z nich, jež je zesílením věty 2.1.5.

<u>Věta 2.4.2 (Diracova věta).</u> Jestliže pro graf G, mající alespoň tři uzly, platí

$$\delta(G) \geqq \frac{1}{2}|U(G)| ,$$

pak je graf G hamiltonovský.