3. O r i e n t o v a n é g r a f y

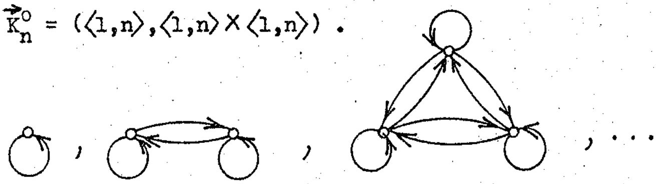
Připomeňme, že nadále neplatí terminologická dohoda, kterou jsme zavedli na začátku 2. kapitoly.

3.1. Stupeň uzlu; souvislost a silná souvislost

Zavedeme si opět označení pro některé speciální orientované grafy.

Orientovaný úplný graf na n uzlech ($n \geqq 1$) :

$$\vec{K}^o_n = (\langle 1,n\rangle, \langle 1,n\rangle \times \langle 1,n\rangle) .$$

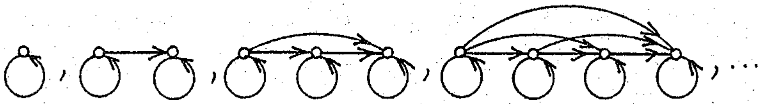


Orientovaný obyčejný úplný graf na n uzlech ($n \geqq 1$) :

$$\vec{K}_n = (\langle 1,n\rangle, \{(i,j);\ i,j \in \langle 1,n\rangle,\ i \neq j\}) .$$

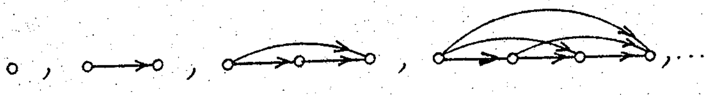
Reflexivní uspořádání na n uzlech ($n \geqq 1$) :

$$\vec{U}^o_n = (\langle 1,n\rangle, \{(i,j);\ i,j \in \langle 1,n\rangle,\ i \leqq j\}) .$$



Antireflexivní uspořádání na n uzlech ($n \geqq 1$) :

$$\vec{U}_n = (\langle 1,n\rangle, \{(i,j);\ i,j \in \langle 1,n\rangle,\ i < j\}) .$$



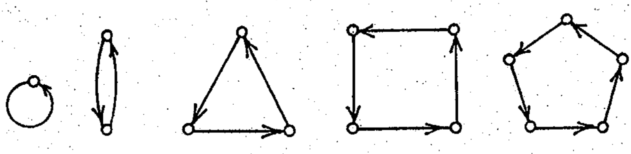
Orientovaná cesta délky $n \geqq 1$:

$\vec{P}_n = (\langle 0,n \rangle, \{(i,i+1);\ i=0,1,\ldots,n-1\})$.

Cyklus délky $n \geqq 1$:

$\vec{C}_1 = (\{1\}, \{(1,1)\})$,

$\vec{C}_n = (\langle 1,n \rangle, \{(i,i+1);\ i=1,\ldots,n-1\} \cup \{(n,1)\})$ pro $n \geqq 2$.



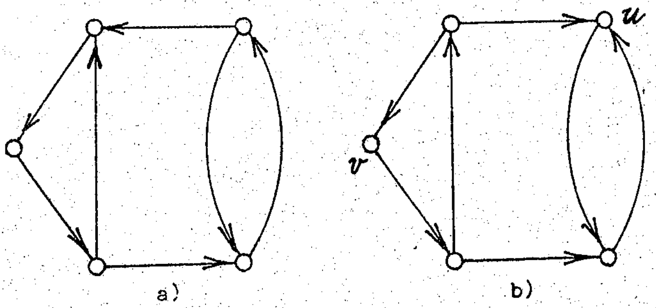
Je-li dán orientovaný graf $\vec{G}$, pak je možno grafu $\vec{G}$ přiřadit neorientovaný graf, který vznikne "smazáním šipek" na hranách grafu $\vec{G}$ (přesněji: orientované hrany (x,y) nahradíme neorientovanými hranami $\{x,y\}$), vypuštěním případných smyček a náhradou dvojic paralelních hran jedinou hranou; takto vzniklý neorientovaný graf se nazývá symetrizace grafu $\vec{G}$.

Obdobně i naopak: každému neorientovanému obyčejnému grafu lze přiřadit orientovaný graf buďto tak, že každé hraně $\{x,y\}$ přisoudíme právě jednu z možných orientací (x,y) a (y,x) - pak říkáme, že takto sestrojený (samozřejmě nikoliv jednoznačně) graf je orientací grafu G, nebo tak, že každou hranu $\{x,y\}$ nahradíme dvojicí hran (x,y) a (y,x) - vzniklý orientovaný graf se nazývá symetrická orientace grafu G.

Pojem symetrizace orientovaného grafu nám umožňuje přenést na orientované grafy většinu pojmů, zavedených v 2. kapitole:

Definice. Řekneme, že orientovaný graf $\vec{G}$ je souvislý, jestliže jeho symetrizace je souvislý neorientovaný graf.

Takto bychom mohli postupovat i s dalšími pojmy z 2. kapitoly; záhy však zjistíme, že takovéto mechanické přenášení "neorientovaných" pojmů do orientovaných grafů nevystihuje plně jejich specifiku. Jako příklad uveďme orientované grafy na obr. 3.1.1 a, b: kdybychom např. jejich hrany považovali za jednosměrné ulice, pak v prvním z nich lze z libovolného uzlu "docestovat" do všech ostatních uzlů, zatímco v druhém z nich se z uzlu u do uzlu v nelze dostat - přitom však oba grafy jsou souvislé (dokonce mají stejnou symetrizaci). Vidíme zde nezbytnost zavedení jemnějších pojmů.



obr. 3.1.1.

Definice. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf, $u \in U(\vec{G})$.
Výstupní stupeň uzlu u v grafu G je číslo

$$d_G^-(u) = \left|\{(u,x);\ x \in U(\vec{G})\} \cap H(\vec{G})\right| .$$

Vstupní stupeň uzlu u v grafu $\vec{G}$ je číslo

$$d_G^+(u) = \left|\{(x,u);\ x \in U(\vec{G})\} \cap H(\vec{G})\right| .$$

Věta 3.1.1. Pro každý orientovaný graf $\vec{G}$ platí

$$\sum_{u \in U(\vec{G})} d_G^-(u) = \sum_{u \in U(\vec{G})} d_G^+(u) = |H(\vec{G})| .$$

Důkaz je obdobný důkazu věty 2.1.1.

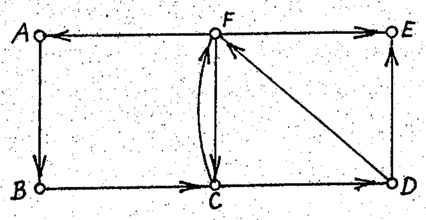
Definice. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf, $f_1 : \vec{P}_n \to \vec{G}$ homomorfismus, $f_1(0) = u$, $f_1(n) = v$. Podgraf $f_1(\vec{P}_n) \subset \vec{G}$ se nazývá orientovaný sled z uzlu u do uzlu v. Je-li f_1 hranový monomorfismus, pak se $f_1(\vec{P}_n)$ nazývá orientovaný tah z u do v, je-li f_1 monomorfismus, pak se $f_1(\vec{P}_n)$ nazývá orientovaná cesta z u do v.

Nechť $f_2 : \vec{C}_n \to \vec{G}$ je homomorfismus. Pak se podgraf $f_2(\vec{C}_n) \subset \vec{G}$ nazývá uzavřený orientovaný sled. Je-li f_2 hranový monomorfismus, pak se $f_2(\vec{C}_n)$ nazývá uzavřený orientovaný tah, je-li f_2 monomorfismus, pak se $f_2(\vec{C}_n)$ nazývá cyklus v grafu G.

Číslo n se nazývá délka orientovaného sledu, resp. orient. tahu, orient. cesty, uzavřeného orient. sledu, uzavřeného orient. tahu, cyklu.

Příklad.

$\vec{G}$:



Orientovaný sled z A do E: A, B, C, D, F, C, D, E .

Orientovaný tah z A do E: A, B, C, F, C, D, F, E .

Orientovaná cesta z A do E: A, B, C, D, F, E .

Uzavřený orientovaný sled: A, B, C, D, F, C, D, F,

Uzavřený orientovaný tah: A, B, C, F, C, D, F.

Cyklus v $\vec{G}$: A, B, C, D, F.

Definice. Řekneme, že orientovaný graf $\vec{G}$ je silně souvislý, jestliže pro každou dvojici uzlů $u, v \in U(\vec{G})$ existuje přirozené číslo n a homomorfismus $f: \vec{P}_n \to \vec{G}$ tak, že $f(0) = u$ a $f(n) = v$.

Poznámky. 1. Ihned z definic plyne, že orientovaný graf $\vec{G}$ je silně souvislý právě když pro každé dva jeho uzly u, v existuje v $\vec{G}$ orientovaný sled z u do v.

2. Tvrzení lze zesílit (obdoba věty 2.1.3): $\vec{G}$ je silně souvislý právě když pro každé dva uzly $u, v \in U(\vec{G})$ existuje v $\vec{G}$ orientovaná cesta z u do v. (Důkaz: uvažujeme orientovaný sled z u do v minimální délky.)

3. Evidentní je i toto další zesílení:

Orientovaný graf $\vec{G}$ je silně souvislý právě když pro každé dva uzly $u, v \in U(\vec{G})$ existuje v $\vec{G}$ orientovaná cesta z u do v i orientovaná cesta z v do u.

4. Každý silně souvislý graf je souvislý (důkaz je zřejmý), opačné tvrzení však neplatí: graf na obr. 3.1.1. a) je silně souvislý, zatímco graf na obr. 3.1.1. b) je souvislý, ale není silně souvislý. Z tohoto důvodu se někdy u orientovaných grafů místo termínu "souvislý" používá termín <u>slabě souvislý</u>.

<u>Věta 3.1.2.</u> Souvislý orientovaný graf $\vec{G}$ s alespoň dvěma uzly je silně souvislý právě když každá jeho hrana leží v alespoň jednom cyklu.

<u>Důkaz.</u> 1. Je-li $\vec{G}$ silně souvislý a $(u,v) \in H(\vec{G})$, pak v $\vec{G}$ existuje orientovaná cesta z v do u; tato cesta spolu s hranou (u,v) tvoří požadovaný cyklus (podrobný popis tohoto cyklu pomocí homomorfismů ponecháváme čtenáři jako cvičení – – podobně i dále).

2. Nechť $\vec{G}$ je souvislý a každá jeho hrana leží v nějakém cyklu; buďte $u,v \in U(\vec{G})$. V symetrizaci grafu $\vec{G}$ existuje (neorientovaná) cesta z u do v; označíme její uzly po řadě $u = u_1, u_2, \ldots, u_k = v$. Sestrojíme v $\vec{G}$ orientovaný sled $\vec{P}$ z u do v, procházející všemi těmito uzly, následujícím postupem:

1. $\vec{P}_1 = (\{u_1\}, \emptyset)$.

2. Je-li již sestrojen sled $\vec{P}_j$, $j \leq k-1$, obsahující všechny uzly u_i pro $1 \leq i \leq j$ a neobsahující uzly u_i pro $j+1 \leq i \leq k$, pak:

– jestliže $(u_j, u_{j+1}) \in H(\vec{G})$, sestrojíme sled $\vec{P}_{j+1}$ připojením hrany (u_j, u_{j+1}) k $\vec{P}_j$;

-jestliže $(u_j, u_{j+1}) \notin H(\vec{G})$, pak nutně $(u_{j+1}, u_j) \in H(\vec{G})$, tato hrana leží v nějakém cyklu $\vec{C}_j$ a sled $\vec{P}_{j+1}$ sestrojíme tak, že k $\vec{P}_j$ připojíme graf $(U(\vec{C}_j), H(\vec{C}_j) \setminus \{(u_{j+1}, u_j)\})$, vzniklý z $\vec{C}_j$ odstraněním hrany (u_{j+1}, u_j).

3. Je-li $j+1 < k$, položíme $j := j+1$ a opakujeme bod 2, je-li $j+1 = k$, pak $\vec{P}_{j+1} = \vec{P}$ je hledaný orientovaný sled z u do v.

<u>Definice.</u> Orientovaný graf $\vec{G}$ se nazývá <u>eulerovský</u>, jestliže existuje epimorfismus $f: \vec{C}_m \to \vec{G}$, kde $m = |H(\vec{G})|$.

<u>Poznámka.</u> Podobně jako u neorientovaných grafů lze ekvivalentně říci, že $\vec{G}$ je eulerovský, jestliže v něm existuje orientovaný uzavřený tah, který obsahuje všechny jeho hrany.

<u>Definice.</u> Orientovaný graf $\vec{G}$ se nazývá <u>rovnovážně orientovaný</u>, jestliže pro každý uzel $u \in U(\vec{G})$ platí

$$d_G^-(u) = d_G^+(u) \quad .$$

<u>Věta 3.1.3.</u> Orientovaný graf $\vec{G}$ s alespoň dvěma uzly je eulerovský právě když je souvislý a rovnovážně orientovaný.

<u>Důkaz</u> je obdobný důkazu věty 2.4.1.

<u>Důsledek.</u> Souvislý rovnovážně orientovaný graf je silně souvislý.

3.2. Acyklické grafy; kvazikomponenty a kondenzace grafu

Definice. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf, $\vec{G}' \subset \vec{G}$. Řekneme, že podgraf $\vec{G}'$ je *kvazikomponenta* grafu $\vec{G}$, jestliže

a) $\vec{G}'$ je silně souvislý graf,

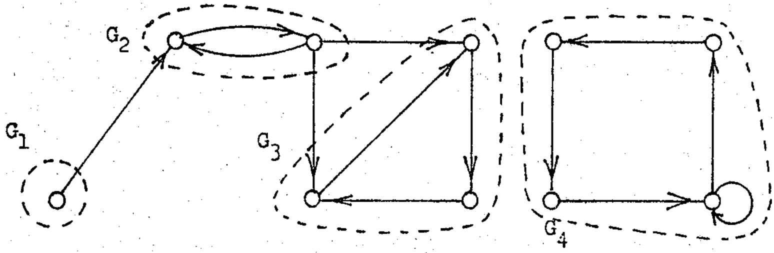
b) jestliže $\vec{G}' \subset \vec{G}'' \subset \vec{G}$ a $\vec{G}''$ ke silně souvislý, pak $\vec{G}'' = \vec{G}'$.

Poznámka. 1. Jinými slovy: kvazikomponenta orientovaného grafu je jeho maximální silně souvislý podgraf.

2. Hovoříme-li o komponentě orientovaného grafu, pak je tím ovšem míněna komponenta jeho symetrizace. Někdy se v této souvislosti říká slabá komponenta; místo termínu kvazikomponenta se pak používá termín silná komponenta.

3. Graf o jediném uzlu a žádné hraně považujeme za silně souvislý - mohou tedy být kvazikomponenty orientovaného grafu i jednouzlové.

Příklad. Orientovaný graf na obr. 3.2.1 má dvě komponenty (to je zřejmé) a čtyři kvazikomponenty G_1, G_2, G_3, G_4.



obr. 3.2.1.

Poznámka. 1. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf, definujme na množině jeho uzlů $U(\vec{G})$ relaci ρ předpisem:

u ρ v právě když z u vede v $\vec{G}$ orientovaná cesta do v a současně z v vede v $\vec{G}$ orientovaná cesta do u.

(Tato relace bývá nazývána relace oboustranné dosažitelnosti). Snadno se přesvědčíme, že ρ je reflexivní, symetrická i tranzitivní a tedy je ekvivalencí na $U(\vec{G})$ - příslušné třídy ekvivalence jsou právě množiny uzlů jednotlivých kvazikomponent grafu $\vec{G}$ (a kvazikomponenty jsou indukované podgrafy na těchto třídách ekvivalence).

Podobně komponenty grafu $\vec{G}$ jsou indukované podgrafy na třídách ekvivalence ρ, definované předpisem:

u ρ v právě když v symetrizaci grafu $\vec{G}$ existuje (neorientovaná) cesta z u do v.

2. Ještě jiná charakteristika kvazikomponent: odstraníme-li z $\vec{G}$ všechny hrany, které nepatří žádnému cyklu,[1] pak komponenty vzniklého grafu jsou kvazikomponenty původního grafu $\vec{G}$ (důkaz ponecháváme čtenáři jako cvičení).

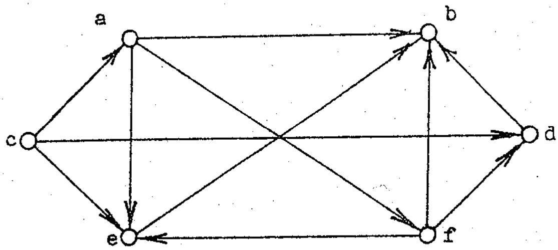
Definice. Orientovaný graf $\vec{G}$ se nazývá acyklický, jestliže neobsahuje jako podgraf žádný cyklus.

Poznámka. 1. Speciálně tedy acyklický graf nemá smyčky.

2. Na obr. 3.2.2 je uveden příklad acyklického grafu, zatímco graf na obr. 3.2.1 acyklický není.

---

1) Takové hrany se nazývají volné hrany grafu $\vec{G}$.



obr. 3.2.2.

Věta 3.2.1. Je-li $\vec{G}$ acyklický orientovaný graf a $\vec{G}' \subset \vec{G}$ je jeho podgraf, pak $\vec{G}'$ je acyklický.

Důkaz je zřejmý.

•

Definice. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf. Uzel $u \in U(\vec{G})$ se nazývá:

vstupní uzel grafu $\vec{G}$, jestliže $d^+_G(u) = 0$,

výstupní uzel grafu $\vec{G}$, jestliže $d^-_G(u) = 0$.

Příklad. Uzel c je vstupním uzlem a uzel b je výstupním uzlem grafu na obr. 3.2.2.

Věta 3.2.2. Každý acyklický orientovaný graf má alespoň jeden vstupní uzel a alespoň jeden výstupní uzel.

Důkaz. Výstupní uzel v acyklickém grafu G nalezneme následujícím postupem.

a) Polož $i := 1$ a zvol libovolný uzel $u_1 \in U(\vec{G})$.

b) Je $d_G^-(u_i) = 0$?

- jestliže ano, jdi k bodu c),
- jestliže ne, pak z u_i vede hrana do některého uzlu $u_{i+1} \in U(\vec{G})$; polož $i := i+1$ a opakuj bod b).

c) Konec - u_i je hledaný výstupní uzel.

Vzhledem k tomu, že v posloupnosti uzlů $u_1, u_2, \dots$ se nemůže žádný uzel vyskytnout dvakrát (neboť by tím byl v $\vec{G}$ nalezen cyklus), je zřejmé, že po konečném počtu kroků nutně nastane možnost c).

Nalezení vstupního uzlu acyklického grafu $\vec{G}$ je obdobné.

<u>Věta 3.2.3.</u> Buď $\vec{G}$ orientovaný graf, označme $|U(\vec{G})| = n$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $\vec{G}$ je acyklický;
2. všechny kvazikomponenty grafu $\vec{G}$ jsou grafy o jediném uzlu;
3. každý neprázdný podgraf grafu $\vec{G}$ obsahuje vstupní uzel;
4. každý neprázdný podgraf grafu $\vec{G}$ obsahuje výstupní uzel;
5. existuje takové očíslování uzlů grafu $\vec{G}$ čísly $1,\dots,n$, že pro každou hranu $(i,j) \in H(G)$ je $i < j$.

<u>Důkaz</u> provedeme podle následujícího schematu:

$$\begin{array}{ccccc} (2) & \Longleftrightarrow & (1) & \Longrightarrow & (3) \\ & & \Uparrow & & \Downarrow \\ & & (5) & \Longleftarrow & (4) \end{array} .$$

a) Ekvivalentnost tvrzení (1) a (2) je zřejmá.

b) Z (1) vyplývá ihned (3) na základě vět 3.2.1 a 3.2.2.

c) (3) $\Longrightarrow$ (4). Předpokládejme, že v každém podgrafu grafu $\vec{G}$ existuje výstupní uzel a hledejme v libovolném neprázdném podgrafu $\vec{G}' \subset \vec{G}$ vstupní uzel. Označme $|U(\vec{G}')| = k$. Jestliže $k = 1$, pak jediný uzel grafu $\vec{G}'$ je současně i jeho vstupním uzlen a jsme hotovi; v opačném případě v $\vec{G}'$ nalezneme výstupní uzel u_1 a sestrojíme podgraf $\vec{G}_1 \subset \vec{G}'$ na $k-1$ uzlech tak, že z $\vec{G}'$ odstraníme uzel u_1 i všechny hrany s ním incidující. Má-li $\vec{G}_1$ alespoň dva uzly, pak v něm opět nalezneme výstupní uzel u_2 a jeho odstraněním (i s příslušnými hranami) sestrojíme podgraf $\vec{G}_2$ na $k-2$ uzlech. Po $k-1$ krocích tak získáme podgraf $\vec{G}_{k-1}$, obsahující jediný uzel u_k. Takto nalezený uzel u_k je nutně vstupním uzlem grafu $\vec{G}'$, neboť kdyby do u_k vedla nějaká hrana (například z uzlu u_j, $j < k$), tak by uzel u_j nemohl být při j-tém kroku algoritmu výstupním uzlem.

d) (4) $\Longrightarrow$ (5). Předpokládáme nyní, že každý podgraf grafu $\vec{G}$ má vstupní uzel; očíslování uzlů, při němž každá hrana vede z uzlu s nižším číslem do uzlu s vyšším číslem, sestrojíme následujícím algoritmem:

- položíme $\vec{G}_1 = \vec{G}$;
- pro i od 1 do $n-1$: v grafu $\vec{G}_i$ nalezneme vstupní uzel, přiřadíme mu číslo i a sestrojíme graf $\vec{G}_{i+1}$ tak, že z $\vec{G}_i$ odstraníme uzel u_i i všechny hrany s ním incidující ;
- jedinému uzlu grafu $\vec{G}_n$ přiřadíme číslo n.

Takto sestrojené očíslování uzlů má zřejmě požadovanou vlastnost.

e) (5) $\Longrightarrow$ (1). Nechť v $\vec{G}$ existuje popsané očíslování uzlů. Kdyby v $\vec{G}$ existoval cyklus $f(\vec{C}_k)$, kde $f:\vec{C}_k \longrightarrow \vec{G}$, tak by (označíme-li $č_i$ očíslování uzlu $f(i)$, $i = 1,\ldots,k$), muselo platit $č_1 < č_2 < \dots < č_k < č_1$, což není možné.

Poznámky. 1. Při ověřování acykličnosti grafu $\vec{G}$ tedy stačí prověřit platnost kterékoliv jedné z pěti podmínek, uvedených ve větě 3.2.3. V praxi je užitečná hlavně podmínka (5), přičemž část d) důkazu poskytuje algoritmus, který v $|U(\vec{G})|$ krocích acykličnost prověří a v kladném případě sestrojí očíslování. Zkuste si pomocí tohoto algoritmu prozkoumat acykličnost grafu na obr. 3.2.1 (ve druhém kroku nenalezneme vstupní uzel - graf není acyklický) a acykličnost grafu na obr. 3.2.2 (existují dvě očíslování daných vlastností - ve čtvrtém kroku máme k dispozici dva vstupní uzly).

2. Z (5) ve větě 3.2.3 dále plyne, že každý acyklický graf $\vec{G}$ je izomorfní s některým podgrafem grafu $\vec{U}_n$ (uspořádání), kde $n = |U(\vec{G})|$; příslušný izomorfismus je dán očíslováním uzlů. Též naopak: uspořádání je acyklický graf a tedy též každý graf izomorfní s některým jeho podgrafem je acyklický. Krátce řečeno: acyklické grafy lze považovat za části uspořádání.

3. V acyklickém grafu je zřejmě každý orientovaný sled orientovaná cesta.

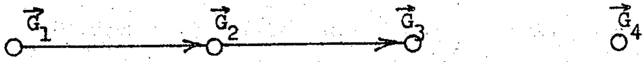
Definice. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf, $\vec{G}_1, \dots, \vec{G}_k$ jeho kvazikomponenty. Orientovaný graf

$$\vec{G}_c = (\{\vec{G}_1, \dots, \vec{G}_k\}, \{(\vec{G}_i, \vec{G}_j);\ i \neq j \text{ a existují } x \in U(\vec{G}_i) \text{ a } y \in U(\vec{G}_j) \text{ tak, že } (x,y) \in H(\vec{G})\})$$

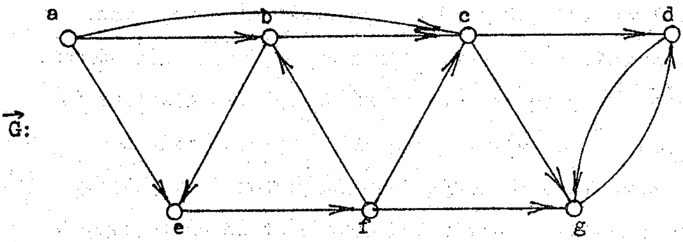
se nazývá kondenzace grafu $\vec{G}$.

Poznámka. Jinak řečeno: uzly kondenzace $\vec{G}_c$ jsou kvazikomponenty grafu $\vec{G}$; dvě kvazikomponenty jsou spojeny hranou, jestliže v nich existují uzly, spojené hranou.

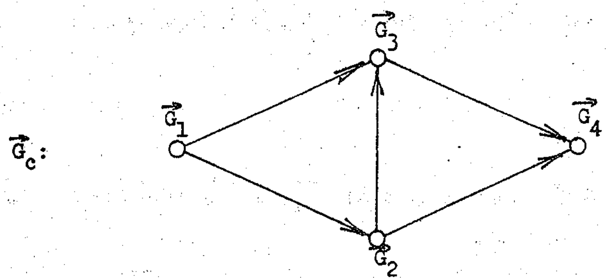
Příklady. Na obr. 3.2.3 a) je kondenzace grafu z obr. 3.2.1. Graf $\vec{G}$ na obr. 3.2.3. b) má čtyři kvazikomponenty s množinami uzlů $U(\vec{G}_1) = \{a\}$, $U(\vec{G}_2) = \{b,e,f\}$, $U(\vec{G}_3) = \{c\}$, $U(\vec{G}_4) = \{d,g\}$; kondenzace $\vec{G}_c$ je na obr. 3.2.3 c) .



a)



b)



c)

obr. 3.2.3.

Věta 3.2.4. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf. Platí:

1. $\vec{G}_c$ je acyklický graf.

2. $\vec{G}$ je silně souvislý právě když $\vec{G}_c$ je graf o jediném uzlu.

3. $\vec{G}$ je acyklický právě když $\vec{G} = \vec{G}_c$.

Důkaz. Tvrzení (1) plyne přímo z definice $\vec{G}_c$ a z maximality kvazikomponent, tvrzení (2) je zřejmé, neboť silně souvislý graf má jedinou kvazikomponentu, tvrzení (3) plyne ihned z části (2) věty 3.2.3.

3.3 Ohodnocený orientovaný graf

Obdobně jako v odst. 2.3 zavedeme i pro orientované grafy následující pojmy a označení.

Definice. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf, $u,v \in U(\vec{G})$. Vzdálenost uzlů u,v (značíme $d_{\vec{G}}(u,v)$) je délka nejkratší orientované cesty z uzlu u do uzlu v v grafu $\vec{G}$. Neexistuje-li v $\vec{G}$ orientovaná cesta z u do v, položíme $d_{\vec{G}}(u,v) = \infty$.

Příklad. Je-li $\vec{G} = \vec{C}_4$, pak $d_{\vec{G}}(1,2) = 1$, ale $d_{\vec{G}}(2,1) = 3$.

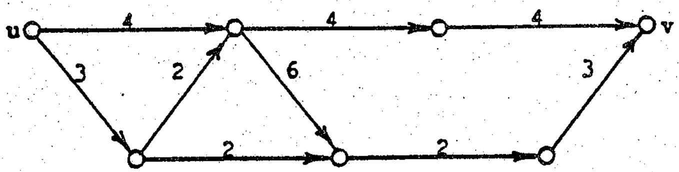
Definice. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf. Funkce $w:H(\vec{G}) \rightarrow (0,\infty)$ se nazývá (hranové) ohodnocení grafu $\vec{G}$; graf se zadaným ohodnocením se nazývá ohodnocený orientovaný graf.

Definice. Buď $\vec{G}$ ohodnocený orientovaný graf. Pro každou orientovanou cestu $\vec{P} \subseteq \vec{G}$ definujeme <u>w-délku</u> $w(\vec{P})$ cesty $\vec{P}$ předpisem $w(\vec{P}) = \sum_{h \in H(\vec{P})} w(h)$.

Pro každé dva uzly $u, v \in U(\vec{G})$ nazveme <u>w-vzdáleností</u> uzlů u, v (značíme $d^w_{\vec{G}}(u,v)$) nejmenší w-délku orientované cesty z u do v v $\vec{G}$. Neexistuje-li v $\vec{G}$ orientovaná cesta z u do v, položíme $d^w_{\vec{G}}(u,v) = \infty$.

Jsou-li u, v dva uzly grafu $\vec{G}$, pak orientovaná cesta nejmenší délky z u do v se nazývá <u>nejkratší cesta</u> z u do v; orientovaná cesta z u do v, mající nejmenší w-délku, se nazývá <u>minimální cesta</u> z u do v.

Příklad. V grafu na obr. 3.3.1 platí: nejkratší orientovaná cesta z u do v má délku 3 (a w-délku 12), zatímco minimální cesta z u do v má délku 4 (ale w-délku 10); orientovaná cesta z v do u neexistuje. Je tedy $d_{\vec{G}}(u,v) = 3$, $d^w_{\vec{G}}(u,v) = 10$ a $d_{\vec{G}}(v,u) = d^w_{\vec{G}}(v,u) = \infty$.



obr. 3.3.1.

Poznámka. Pro funkce $d_{\vec{G}}$ a $d^w_{\vec{G}}$ by bylo možno formulovat větu obdobnou větě 2.2.3 (formulaci a důkaz ponecháváme čtenáři jako cvičení), ovšem s výjimkou tvrzení 2, jehož obdoba v orientovaných grafech neplatí. Funkce $d_{\vec{G}}$ a $d^w_{\vec{G}}$ tedy v orientovaném grafu $\vec{G}$ obecně nejsou metrikami.

Název:	Lineární algebra II - I. + II. část Úvod do diskrétní matematiky
Autor:	Doc.RNDr. Jiří Holenda, CSc. Doc.RNDr. Zdeněk Ryjáček, CSc.
Vydavatel:	Západočeská univerzita v Plzni
Určeno:	I. roč. FAV - všechna zaměření
Vedoucí katedry:	Prof.RNDr. Pavel Drábek, DrSc.
Vyšlo:	duben 1992
Počet stran celkem:	220
Počet obrázků celkem:	123
Počet příloh celkem:	-
AA / VA celkem:	10,13 / 10,71
Vydání:	I.
Náklad:	400 výtisků
Číslo publikace:	516
Tiskárna:	ZČU v Plzni
Cena za I. + II. část:	27,-- Kčs

55 - 070 - 92
17/31 Kčs 27,--