ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA

se sídlem v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

LINEÁRNÍ ALGEBRA II

Úvod do diskrétní matematiky

Katedra matematiky

Doc. RNDr. Jiří Holenda, CSc.

Doc. RNDr. Zdeněk Ryjáček, CSc.

I. část

Ediční středisko ZČU

Plzeň 1992

ISBN 80 - 7082 - 060 - 8

O b s a h

I. část

Předmluva 5

1. Relační struktury 7
   1.1 Binární relace 7
      A) Zobrazení 16
      B) Binární operace 17
      C) Ekvivalence 19
      D) Tolerance 22
      E) Uspořádání 23
   1.2 Částečně uspořádané množiny (posety) 24
   1.3 Srovnatelná zobrazení a matematické struktury 34
   1.4 Booleovy algebry 41
   1.5 Reprezentace Booleových algeber 49
   1.6 Grafy 56

2. Neorientované grafy 67
   2.1 Stupeň uzlu; souvislost, komponenty grafu 67
   2.2 Stromy; kostry grafu 79
   2.3 Ohodnocený graf; minimální kostra a metrika grafu 86
   2.4 Eulerovské a hamiltonovské grafy 91

3. Orientované grafy 95
   3.1 Stupeň uzlu; souvislost a silná souvislost 95
   3.2 Acyklické grafy; kvazikomponenty a kondenzace grafu 102
   3.3 Ohodnocený orientovaný graf 109

Poznámka: pokračování ve II. části od stránky 111.

II. část

4. Matice grafů a jejich vlastnosti 111
  4.1 Různé popisy neorientovaného grafu 112
  4.2 Různé popisy orientovaného grafu 114
  4.3 Incidenční matice 116
  4.4 Matice sousednosti 128
    A) Matice sousednosti neorientovaného grafu 129
    B) Matice sousednosti orientovaného grafu 134
    C) Laplaceova matice sousednosti 137
    D) Znaménková matice 143
  4.5 Matice kružnic 149
  4.6 Matice hranových řezů 155

5. Aplikace teorie grafů 163
  5.1 Minimální kostra 163
  5.2 Minimální cesta 168
  5.3 Kritická cesta 172
  5.4 Distanční matice grafu 178
  5.5 Problém obchodního cestujícího; NP-úplné problémy 183
  5.6 Toky v sítích 192
    A) Existence toku v síti 192
    B) Maximální tok 196
    C) Optimální tok 204

Přehled literatury 216

Předmluva

Tento učební text je určen především studentům druhého semestru základního kursu lineární algebry na Fakultě aplikovaných věd Západočeské univerzity v Plzni. Tomu je podřízen jak výběr vykládané látky - tj. nejzákladnější partie z diskrétní matematiky a teorie grafů, tak zejména podrobný způsob podání vykládané látky.

V první části skript se zabýváme relačními strukturami, přičemž hlavní pozornost je věnována zejména množinám s částečným uspořádáním (posetům) a jejich důležitému speciálnímu případu - Booleovým algebrám; cílem této části je objasnění souvislosti obecného případu konečné Booleovy algebry s množinovou algebrou (Stoneova věta o representaci) a se speciálním případem dvouprvkové Booleovy algebry s prvky 0 a 1, známým z výrokové logiky.

Zbývající část textu je pak věnována systematickému výkladu základních pojmů z teorie grafů. Ve druhé a třetí kapitole se čtenář seznámí s definicemi základních pojmů z oblasti konečných neorientovaných a orientovaných grafů a jsou zde dokázány základní teoretické poznatky, které jsou potřebné k pochopení obsahu čtvrté kapitoly, věnované algebraickým souvislostem, a páté kapitoly, zabývající se aplikacemi a algoritmickými aspekty.

Vzhledem k danému omezenému rozsahu textu a podrobnému způsobu výkladu probíraných pojmů a tvrzení samozřejmě nebylo možno do textu zařadit danou problematiku v celé její šíři. Výklad je tudíž zaměřen směrem k aplikacím typu dopravních, spojovacích a metrických problémů; do textu nebylo možno zařadit mnohé další velmi důležité partie, jako např. problémy nezávislosti a klikovosti, dominance, barevnosti, párování a faktorizace, rovinnosti a mnohé jiné. Čtenář nalezne bližší poučení v některé ze základních učebnic, citovaných a komentovaných v závěru textu.

Jsme si vědomi toho, že žádný učební text není zcela dokonalý - uvítáme proto jakékoli náměty a připomínky, které by mohly přispět ke zdokonalení skript v jejich případném dalším vydání.

Plzeň, březen 1992

Autoři

1. Relační struktury

1.1. Binární relace

Pojem "binární relace" patří k základním matematickým pojmům. Intuitivně každý jistě chápe, co binární relace je, neboť s příklady různých relací (vztahů) se setkáváme i v běžném životě, a to doslova na každém kroku. Zde nám jde jednak o zavedení vhodného množinového popisu binární relace, jednak o přehledné zpracování některých dalších nezbytných pojmů.

Uvažujme například následující binární relace (dále jen relace):

(osoba)	x je členem y	(společenská organizace);
(signál)	x je odezva y	(impulsu);
(součástka)	x je nutno demontovat před y	(součástkou);
(číslo)	x je menší než y	(číslo).

Každá uvedená relace a každá relace vůbec je zřejmě dána výrokovou formou typu $x \varrho y$, kde x je proměnná z dané množiny A a y je proměnná z dané množiny B. Prvek $a \in A$ je pak v relaci s prvkem $b \in B$ právě když výrok $a \varrho b$ je pravdivý. Relace ϱ je zřejmě určená, právě když jsou dány množiny A, B a všechny uspořádané dvojice (a, b) z množiny $R = \{ (x, y) \mid (x \in A) \wedge (y \in B) \wedge$ $\wedge$ (výrok $x \varrho y$ je pravdivý)$\}$.

<u>Definice.</u> Nechť A, B jsou neprázdné množiny. <u>Binární relace z množiny A do množiny B</u> je uspořádaná trojice (R, A, B), kde $R \subset A \times B$.

Dvě relace ρ_1, ρ_2 jsou *totožné*, jestliže jim odpovídající trojice (R_1, A_1, B_1), (R_2, A_2, B_2) si jsou rovny, tj platí-li zároveň $R_1 = R_2$, $A_1 = A_2$ a $B_1 = B_2$.

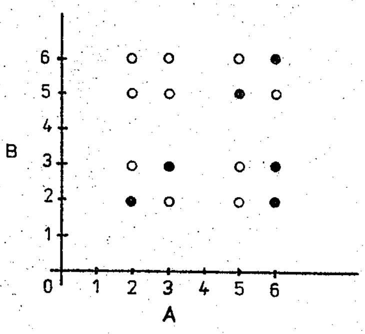
Je-li $A_1 = A_2 = A$, $B_1 = B_2 = B$ a $R_1 \subset R_2$, pak říkáme, že relace $\rho_1 = (R_1, A, B)$ *implikuje* relaci $\rho_2 = (R_2, A, B)$.

Je-li $A = B$, pak říkáme, že relace $\rho = (R, A, A)$ je *relace na množině A*.

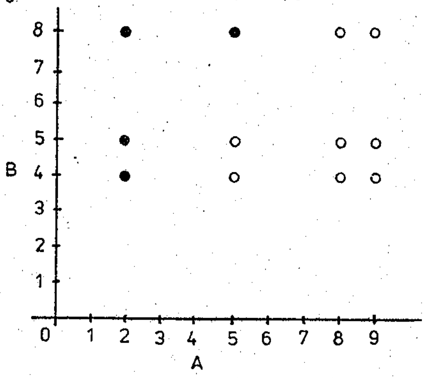
Je-li z kontextu zřejmé, s jakými množinami A, B pracujeme, pak pro relaci $\rho = (R,A,B)$ místo $(a,b) \in R$ krátce píšeme $a \rho b$. Zřejmým způsobem zavádíme pro relace pojmy inkluze, sjednocení a průniku: je-li $\rho_1 = (R_1,A,B)$ a $\rho_2 = (R_2,A,B)$, pak $\rho_1 \subset \rho_2 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow R_1 \subset R_2$, $\rho_1 \cap \rho_2 = (R_1 \cap R_2,A,B)$ a $\rho_1 \cup \rho_2 = (R_1 \cup R_2,A,B)$.

Příklad. Uvažujme relaci určenou výrokovou formou: (číslo $x \in A$) je dělitelné (číslem $y \in B$), kde $A = B = \{2, 3, 5, 6\}$.

V tomto případě je $R = \{(2,2), (3,3), (5,5), (6,2), (6,3), (6,6)\}$ příslušná podmnožina kartézského součinu $A \times B$ a grafické znázornění této relace je na obrázku 1.1.1 a).



obr. 1.1.1 a)



obr. 1.1.1 b)

Příklad. Uvažujme relaci, které odpovídá podmnožina $R = \{(2,4), (2,5), (2,8), (5,8)\}$ kartézského součinu množin A, B, kde $A = \{2, 5, 8, 9\}$, $B = \{4, 5, 8\}$.
Zřejmě jde o relaci určenou výrokovou formou:

(číslo $x \in A$) je menší než (číslo $y \in B$).

Grafické znázornění je na obrázku 1.1.1 b).

Příklad. Uvažujme průnik a sjednocení následujících relací:

$\rho_1 \equiv$ (číslo $x \in A$) je menší nebo rovno (číslu $y \in B$),
$\rho_2 \equiv$ (číslo $x \in A$) je menší než (číslo $y \in B$)
$\rho_3 \equiv$ (číslo $x \in A$) je větší nebo rovno (číslo $y \in B$),
kde $A = \langle 1,3 \rangle = B$.

Pak zřejmě platí:

ρ_1, ρ_2, ρ_3 jsou relacemi na množině $A = \langle 1,3 \rangle$,

$\rho_2 \subset \rho_1$, tj. relace ρ_2 implikuje relaci ρ_1,

$\rho_1 \cap \rho_3 = \{(x,x) \mid x \in A\}$; tato relace se nazývá identita na A a značí se E,

$\rho_1 \cup \rho_3 = \rho_2 \cup \rho_3 = A \times A$; taková relace se nazývá úplná relace na A,

$\rho_2 \cap \rho_3 = \emptyset$, tj. $\rho_2 \cap \rho_3$ je prázdná relace.

Poznamenáváme ještě, že všech relací (R, A, B) je tolik, kolik je podmnožin kartézského součinu $A \times B$. Je-li $|A| = m$ a $|B| = n$, je $|A \times B| = m \cdot n$ a tudíž počet všech podmnožin kartézského součinu $A \times B$ je roven $2^{m \cdot n}$ (symbolem $|M|$ zde značíme počet prvků konečné množiny M). Je-li tedy např. $A = B$ a $|A| = 4$, je počet všech různých relací na množině A roven číslu $2^{16} = 65.536$.

Je-li dána relace (R, A, B), pak ovšem pro daný prvek $a \in A$ obecně nemusí existovat žádný $b \in B$, s nímž je a v relaci.

Definice. Nechť $R \subset A \times B$ je binární relace. Pak množinu

$L_R = \{ a \mid a \in A \wedge \exists\, b \in B: (a,b) \in R \}$ nazýváme levým oborem relace a množinu

$P_R = \{ b \mid b \in B \wedge \exists\, a \in A: (a,b) \in R \}$ nazýváme pravým oborem relace R.

Příklad. Uvažujme relaci $R \subset A \times B$, která je průnikem relací

$R_1 \equiv$ (číslo $x \in A$) je dělitelné (číslem $y \in B$) a

$R_2 \equiv$ (číslo $x \in A$) je větší než (číslo $y \in B$),

kde $A = \{2, 3, 6, 8, 10\}$, $B = \{2, 3, 4, 5, 7, 10\}$.

V tomto případě: $R = \{(6,2), (6,3), (8,2), (8,4), (10,2), (10,5)\}$,

$L_R = \{6, 8, 10\} \subset A$,

$P_R = \{2, 3, 4, 5\} \subset B$.

Definice. Nechť (R,A,B) je binární relace. Potom inverzní relací k této relaci rozumíme binární relaci (R^{-1},B,A), kde

$$R^{-1} = \{ (b,a) \mid b \in B \wedge a \in A \wedge (a,b) \in R \}.$$

Z definice inverzní relace okamžitě vyplývá, že $(R^{-1})^{-1} = R$.

Příklad. Inverzní relací k relaci R z předcházejícího příkladu je relace $R^{-1} = \{(2,6), (3,6), (2,8), (4,8), (2,10), (5,10)\}$, kde

$L_{R^{-1}} = \{2, 3, 4, 5\} = P_R$,

$P_{R^{-1}} = \{6, 8, 10\} = L_R$.

Relace R^{-1} je průnikem inverzních relací k relacím R_1 a R_2 z předcházejícího příkladu. Tím jsme zároveň ilustrovali první tvrzení následující věty, kterou uvádíme bez důkazu.

Věta 1.1.1. Jsou-li (R,A,B) , (R_1,A,B) a (R_2,A,B) binární relace, pak platí:

(i) je-li $R = R_1 \cap R_2$, pak $R^{-1} = R_1^{-1} \cap R_2^{-1}$;

(ii) je-li $R = R_1 \cup R_2$, pak $R^{-1} = R_1^{-1} \cup R_2^{-1}$.

Definice. Nechť $R \subset A \times B$ je binární relace a $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$.

Množinu $R(A_1) = \{ b \mid b \in B \wedge \exists\, a \in A_1 : (a,b) \in R \}$ nazýváme obrazem podmnožiny A_1 v relaci R;

množinu $R^{-1}(B_1) = \{ a \mid a \in A \wedge \exists\, b \in B_1 : (a,b) \in R \}$ nazýváme vzorem podmnožiny B_1 v relaci R.

Definice. Nechť $R_1 \subset A \times B$ a $R_2 \subset B \times C$ jsou binární relace. Potom binární relaci $R \subset A \times C$, kde

$$R = \{ (a,c) \mid a \in A \wedge c \in C \wedge \exists\, b \in B : ((a,b) \in R_1 \wedge (b,c) \in R_2) \}$$

nazýváme složením (součinem) relací R_1 a R_2 a píšeme $R = R_1 R_2$.

Je nutné zdůraznit, že nelze skládat libovolné dvojice binárních relací a že složení je v obecném případě závislé na pořadí, ve kterém se relace skládají. Pro složení tří binárních relací dokazujeme následující tvrzení, které lze samozřejmě zobecnit na libovolný počet relací.

Věta 1.1.2. Skládání binárních relací je asociativní, tj. pro binární relace $R_1 \subset A \times B$, $R_2 \subset B \times C$ a $R_3 \subset C \times D$ platí:

$$(R_1R_2)R_3 = R_1(R_2R_3).$$

Důkaz. $a(R_1R_2)R_3\, d \Leftrightarrow \exists c \in C:(aR_1R_2c \wedge cR_3d)$

$\Leftrightarrow \exists c \in C:(\exists b \in B:(aR_1b \wedge bR_2c \wedge cR_3d))$

$\Leftrightarrow \exists b \in B:(aR_1b \wedge \exists c \in C:(bR_2c \wedge cR_3d))$

$\Leftrightarrow \exists b \in B:(aR_1b \wedge b(R_2R_3)d$

$\Leftrightarrow aR_1(R_2R_3)d.$

U relací na množině A ($R \subset A \times A$) lze vyšetřovat celou řadu vlastností, z nichž zde uvedeme definici těch nejběžnějších, které mají jistý význam i v aplikacích. Pro lepší porozumění uvádíme vždy oba ekvivalentní zápisy vlastností.

Definice. O relaci ($\varrho \equiv R$) na množině A řekneme, že je:

(1) reflexivní, je-li $a \varrho a$, tj $(a,a) \in R$ pro všechna $a \in A$;

(2) symetrická, platí-li implikace $(a \varrho b \Rightarrow b \varrho a)$, tj

$$((a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R);$$

(3) tranzitivní, platí-li implikace $(a \varrho b \wedge b \varrho c \Rightarrow a \varrho c)$, tj. $((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R)$;

(4) antisymetrická, platí-li implikace $(a \varrho b \wedge b \varrho a \Rightarrow a = b)$, tj. $((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b)$;

(5) asymetrická, platí-li implikace $(a \varrho b \Rightarrow \mathrm{non}(b \varrho a))$, tj.

$$((a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R);$$

(6) irreflexivní, je-li $\mathrm{non}(a \varrho a)$ pro všechna $a \in A$, tj.

$$(a,a) \notin R \text{ pro všechna } a \in A.$$

Evidentně platí následující tvrzení:

- každá asymetrická relace ($R \cap R^{-1} = \emptyset$) je i antisymetrická ($R \cap R^{-1} \subset E$, kde $E = \{(a,a) \mid a \in A$ je identita na A);
- žádná relace nemůže být reflexivní ($E \subset R$) a zároveň irreflexivní ($E \cap R = \emptyset$);
- existují relace, které nejsou ani reflexivní ani irreflexivní, tak např. na množině $A = \{1, 2, 3\}$ je to relace $R = \{(1,1), (1,2), (2,3)\}$;
- žádná relace nemůže být symetrická ($R = R^{-1}$) a zároveň asymetrická ($R \cap R^{-1} = \emptyset$);
- jsou-li relace R_1, R_2 reflexivní, pak jsou takové i relace $R_1 \cap R_2$, $R_1 \cup R_2$ a R_1R_2.

Jako cvičení doporučujeme formulovat různá další tvrzení uvedeného typu a provést jejich důkaz.

Věta 1.1.3: Má-li relace R v množině A některou libovolnou vlastnost (1) - (6), pak tutéž vlastnost má inverzní relace R^{-1}.

Důkaz. ad(1) Z předpokladu $(a,a) \in R$ pro všechna $a \in A$ plyne evidentně $(a,a) \in R^{-1}$ pro všechna a.

ad(2) Platí-li implikace $(a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$, pak $R = R^{-1}$.

ad(3) Máme dokázat platnost následující implikace

$$(c,b) \in R^{-1} \wedge (b,a) \in R^{-1} \Rightarrow (c,a) \in R^{-1}.$$

Jsou-li splněny předpoklady implikace, pak $(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R$ a je-li R tranzitivní relace, pak také je $(a,c) \in R$ a tudíž je $(c,a) \in R^{-1}$.

ad(4) Je-li relace R antisymetrická, je $R \cap R^{-1} \subset E$, tj. i R^{-1} je antisymetrická.

ad 5) Je-li relace R asymetrická, je $R \cap R^{-1} = 0$, tj. i R^{-1} je asymetrická.

ad 6) Je-li relace R irreflexivní, je $R \cap E = 0$, takže i R^{-1} je irreflexivní; kdyby $(a,a) \in R^{-1}$, pak by též $(a,a) \in R$, což je spor.

Než přistoupíme k definici celočíselné mocniny relace R na množině A, připomínáme, že symbolem A^k, kde k je přirozené číslo značíme množinu $\{(a_1, a_2, \dots, a_k) \mid a_i \in A$ pro $i = 1, 2, \dots, k\}$, tj množinu všech uspořádaných k-tic vytvořených z prvků množiny A.

Definice. Pro relaci R na množině A definujeme mocninu s celočíslenÿm exponentem rekurentně následujícím způsobem:

$$R^{(o)} = E ,$$
$$R^{(k)} = R\, R^{(k-1)} \text{ pro } k > 0 ,$$
$$R^{(k)} = (R^{(-k)})^{-1} \text{ pro } k < 0 .$$

Jinak řečeno pro libovolně zvolené pevné $k > 0$ je $(a,\tilde{a}) \in R^{(k)}$, právě když existuje posloupnost prvků $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_k = \tilde{a}$ z množiny A taková, že $(a,x_1) \in R \wedge (x_1,x_2) \in R \wedge \dots \wedge (x_{k-1},\tilde{a}) \in R$.

Příklad. Je-li $R = \{(2,4), (4,8), (8,16), (8,24), (3,24)\}$ relace na množině $A = \{2, 3, 4, 8, 16, 24\}$, pak je

$R^{(o)} = \{(2,2), (3,3), (4,4), (8,8), (16,16), (24,24)\}$,

což je identita na množině A,

$R^{(2)} = \{(2,8), (4,16), (4,24)\}$,

$R^{(3)} = \{(2,16), (2,24)\}$, $R^{(4)} = R^{(5)} = \dots = \emptyset$.

Je-li $S = \{(2,2), (2,4), (4,8), (8,16), (8,24), (3,24)\}$ relace na téže množině A je $S \neq R$, $S^{(o)} = R^{(o)}$,

$S^{(2)} = \{(2,2), (2,4), (2,8), (4,16), (4,24)\}$,

$S^{(3)} = \{(2,2), (2,4), (2,8), (2,16), (2,24)\} = S^{(4)} = S^{(5)} = \ldots$

__Definice.__ Nechť R je relace na množině A. Relace R^+, definovaná vztahem

$$R^+ = \{(x,y) \mid (x,y) \in A \times A \wedge \exists k > 0\colon (x,y) \in R^{(k)}\}$$

se nazývá __tranzitivní uzávěr__ relace R.

Relace

$$R^* = E \cup R^+$$

se nazývá __reflexivně-tranzitivní uzávěr__ relace R.

__Věta 1.1.4.__ Je-li R^+ tranzitivní uzávěr relace R na množině A, pak platí:

(7) $R^+ = R \cup R^{(2)} \cup R^{(3)} \quad \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} R^{(k)}$;

(8) R^+ je tranzitivní relace;

(9) je-li $\widetilde{R}$ libovolná tranzitivní relace taková, že $R \subset \widetilde{R}$, pak $R^+ \subset \widetilde{R}$.

__Důkaz.__ Dokážeme pouze tvrzení ad (9), ve kterém jinými slovy říkáme, že tranzitivní uzávěr R^+ relace R je ze všech tranzitivních relací obsahujících relaci R nejmanší (ve smyslu inkluze). Máme dokázat, že za daných předpokladů platí implikace

$$(a,b) \in R^+ \Rightarrow (a,b) \in \widetilde{R}.$$

Avšak zřejmě

$(a,b) \in R^+ \Rightarrow \exists$ přirozené číslo k: $(a,b) \in R^{(k)} \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1, a_2, \ldots, a_{k-1} \in A$: $(a,a_1) \in R \wedge (a_1,a_2) \in R \wedge$
$\wedge \ldots \wedge (a_{k-1},b) \in R \Rightarrow$
$(a,a_1) \in \widetilde{R} \wedge (a_1,a_2) \in \widetilde{R} \wedge \ldots \wedge (a_{k-1},b) \in \widetilde{R} \Rightarrow$
$(a,b) \in \widetilde{R}$, neboť $\widetilde{R}$ je tranzitivní relace.

V dalším stručně uvedeme následující speciální případy relací:

a) zobrazení množiny A do množiny B ,

b) binární operaci,

c) ekvivalenci na množině A ,

d) toleranci na množině A ,

e) uspořádání na množině A .

Uvedený výčet mimo jiné ukazuje na obecnost a šíři pojmu binární relace. Všechny definice, které jsme až dosud zavedli, mají ovšem smysl i v případě uvedených speciálních relací a totéž platí i pro dokázaná tvrzení.

A) Zobrazení

Binární relaci $R \subset A \times B$ můžeme chápat také tak, že každému danému prvku $\widetilde{x} \in A$ je relací R přiřazena podmnožina $R(\widetilde{x})$ množiny B, kde $R(\widetilde{x}) = \{y \mid (\widetilde{x},y) \in R\}$. Takových prvků y však může být libovolný počet (nemusí existovat žádné takové y, může být jedno, dvě, ... a též celá množina B). Touto úvahou se dostáváme k pojmu zobrazení.

Definice. Zobrazením množiny A do množiny B rozumíme takovou relaci Z, $(Z \subset A \times B)$, pro kterou je

$$|Z(x)| = 1 \quad \text{pro všechna } x \in A,$$

tj. každému prvku $x \in A$ odpovídá v relaci Z právě jeden prvek $y \in B$ (pak píšeme $Z: A \to B$ a $y = Z(x)$).

Zobrazení $Z: A \to B$ pak nazýváme

<u>surjektivním</u> (zobrazením „na"), je-li $P_Z = B$

$$(\forall y \in B \ \exists x \in A: y = Z(x));$$

<u>injektivním</u> („prostým") , platí-li implikace $Z(x_1) = Z(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;

<u>bijektivním</u> („prostým na"), je-li zároveň surjektivní i injektivní.

Protože všechny nezbytné pojmy týkající se zobrazení byly zavedeny v obecnějším případě pro relace, omezujeme se zde na dvě stručné, ale důležité poznámky:

1. Ke každému zobrazení existuje samozřejmě inverzní relace, ale ta nemusí být zobrazením. Inverzní relace k zobrazení $Z: A \to B$ je zobrazením množiny B na A, právě když je zobrazení Z bijektivní.

2. Mají-li množiny A , B konečný počet prvků, pak zřejmě platí:

existuje-li surjektivní zobrazení množiny A na B, je

$$|A| \geqq |B| ;$$

existuje-li injektivní zobrazení množiny A do B, je

$$|A| \leqq |B| ;$$

existuje-li bijektivní zobrazení množiny A na B, je

$$|A| = |B| .$$

B) Binární operace

Důležitým speciálním případem zobrazení je binární operace.

Definice. Jsou-li A, B, C neprázdné množiny, pak každé zobrazení ω kartézského součinu $A \times B$ do množiny C se nazývá binární operace. Je-li speciálně:

$A \neq B = C$, pak říkáme, že ω je vnější operace na množině B,

$A = B \neq C$, říkáme, že ω je vnitřní operace na množině A,

$A = B = C$, pak říkáme, že ω je (běžná) operace na množině A.

Je-li $\omega : A \times A \rightarrow A$ operace na A, pak pro $(x,y) \in A \times A$ místo $\omega((x,y))$ krátce píšeme $x \omega y$ a hovoříme o výsledku operace ω provedené na prvky x, y.

Příklady. 1. Nechť je dán lineární vektorový prostor $\mathcal{L}$. Příkladem vnější operace na $\mathcal{L}$ je operace reálného násobku prvku z $\mathcal{L}$ - zde je $A = R$ (množina reálných čísel) a $B = C = \mathcal{L}$.

2. Je-li $\mathcal{L}$ eukleidovským prostorem (tj. reálným lineárním prostorem se skalárním součinem), pak operace skalárního součinu je příkladem vnitřní operace na $\mathcal{L}$: platí zde $A = B = \mathcal{L}$ a $C = R$.

3. Příklady operací na množině jsou např. sčítání a násobení reálných čísel, násobení čtvercových matic, skládání zobrazení atd.

Definice. Nechť ω je operace na množině A. Říkáme, že ω je:

komutativní, je-li $x \omega y = y \omega x \quad \forall x,y \in A$,

asociativní, je-li $(x \omega y) \omega z = x \omega (y \omega z) \quad \forall x,y,z \quad A$.

Prvek $e \in A$ takový, že pro každé $x \in A$ platí $x \omega e = e \omega x = x$, se nazývá neutrální prvek vzhledem k operaci ω

Příklady. Příkladem nekomutativní operace je násobení čtvercových matic, příkladem neasociativní operace je vektorový součin geometrických vektorů v E_3. Množina všech rostoucích reálných posloupností (s přirozeně definovanou operací sčítání) je příkladem množiny, v níž neexistuje neutrální prvek vzhledem k dané operaci.

C) Ekvivalence

Definice. Ekvivalencí na množině A nazýváme relaci R, která je: reflexivní, tj. $E \quad R$,

symetrická, tj. $R = R^{-1}$ a

tranzitivní, tj. $R = R^{+}$.

Jednoduchými příklady ekvivalence jsou relace rovnoběžnosti přímek, stejnolehlosti a podobnosti trojúhelníků, podobnosti a kongruence čtvercových matic atd.

Před uvedením následující důležité věty připomínáme, že rozkladem neprázdné množiny A rozumíme systém $\mathcal{S}(A) = \{ T_i \}$ ($T_i \subset A$ a $i \in I$, kde I je indexová množina) takový, že

(i) $T_\alpha \in \mathcal{S}(A) \Rightarrow T_\alpha \neq \emptyset$

(ii) $T_\alpha \neq T_\beta \Rightarrow T_\alpha \cap T_\beta = \emptyset \quad \forall \alpha, \beta \in I$,

(iii) $\bigcup_{i \in I} T_i = A$.

Věta 1.1.5. Každá relace ekvivalence na množině A určuje rozklad množiny A a naopak každý rozklad množiny A určuje relaci ekvivalnce na množině A.

Důkaz. Nejprve dokážeme, že relace ekvivalence R určuje rozklad. Za tím účelem k prvku $a \in A$ definujeme pomocí ekvivalence R třídu T_a vztahem:

$$T_a = \{ x \mid x \in A \wedge (a,x) \in R \} .$$

Ukážeme, že všechny různé třídy tvoří rozklad množiny A.

ad (i) T_a je neprázdná, neboť ekvivalence R je reflexivní, tj $(a,a) \in R$ a tudíž $a \in T_a$.

ad (ii) Je-li $b \in A \wedge b \in T_a$, pak $T_a = T_b$. Zřejmě totiž $b \in T_a \Leftrightarrow (a,b) \in R \Leftrightarrow (b,a) \in R \Leftrightarrow a \in T_b$, neboť R je symetrická relace. Dále však $c \in T_b \Leftrightarrow (b,c) \in R$. Takže je $(a,b) \in R$ a $(b,c) \in R$ a z tranzitivity relace R plyne: $(a,c) \in R$, tj. $c \in T_a$. Tím jsme dokázali, že platí $b \in T_a \Rightarrow T_b \subset T_a$. Obdobně dokážeme $b \in T_a \Rightarrow T_a \subset T_b$, takže za uvedeného předpokladu je $T_a = T_b$. Sporem dokážeme, že $b \notin T_a \Rightarrow T_a \cap T_b = \emptyset$. Nechť $c \in T_a \wedge c \in T_b$, pak z definice třídy, reflexivity a tranzitivity relace R plyne $(a,c) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R \wedge (c,b) \in R \Rightarrow (a,b) \in R \Rightarrow b \in T_a$, což je hledaný spor.

ad (iii) Zřejmě $\bigcup_{a \in A} T_a = A$, neboť je-li $x \in A$, pak podle definice třídy T_x a z reflexivity relace R plyne $(x,x) \in R$ a tedy $x \in T_x$.

V druhé části důkazu vycházíme z daného rozkladu $\mathcal{S}(A) = \{T_i\}$ a definujeme relaci R takto: $(a,b) \in R \Leftrightarrow \exists i \in I: a \in T_i \wedge b \in T_i$. Snadno se ověří, že takto definovaná relace je ekvivalencí.

<u>Příklady.</u> 1. Na množině M čtvercových matic téhož řádu n můžeme zavést několik různých ekvivalencí - například

$A \rho_1 B \Leftrightarrow$ hod(A) = hod(B),

$A \rho_2 B \Leftrightarrow$ matice A, B jsou si podobné (tj. existuje regulární matice $T \in M$ taková, že $B = TAT^{-1}$),

$A \rho_3 B \Leftrightarrow$ matice B vznikla řádkovými elementárními úpravami z matice A (tj. existuje regulární matice $T \in M$ taková, že $B = TA$),

a ovšem také

$A \rho_4 B \Leftrightarrow A = B$

atd. Čtenář se snadno sám přesvědčí, že všechny uvedené relace jsou ekvivalencemi na M a najde příslušné rozklady M na třídy.

2. Uvedeme ještě jeden důležitý příklad ekvivalence.

Na množině A celých čísel definujeme relaci $\equiv$ (mod p) (kde p je pevně dané přirozené číslo) předpisem

$$a \equiv b \pmod p \iff \text{číslo } a - b \text{ je dělitelné } p .$$

Například platí $4 \equiv 11 \pmod 7$, $7 \equiv 16 \pmod 3$ atd. Snadno se přesvědčíme, že takto definovaná relace, nazývaná <u>kongruence modulo p</u> (nebo též kongruence podle modulu p), je ekvivalencí na A . Třídy ekvivalence jsou pak množiny všech celých čísel, jejichž rozdíl je násobkem modulu p , tj., jinými slovy, množiny všech celých čísel, která při dělení modulem p dávají stejný nezáporný zbytek.

Například pro $p = 3$ dostáváme tři třídy ekvivalence:

$$Z_0 = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\} ,$$
$$Z_1 = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\} ,$$
$$Z_2 = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\} .$$

Tyto třídy ekvivalence se nazývají <u>zbytkové třídy modulo p</u> a je zřejmé, že pro každé $p > 0$ se množina A rozkládá na právě p různých zbytkových tříd.

Pro $x \in A$ označme Z_x tu třídu, která obsahuje x .

<u>Tvrzení.</u> Je-li $x \in Z_i$ a $y \in Z_j$, pak $x + y \in Z_{i+j}$ a $xy \in Z_{i \cdot j}$.

<u>Důkaz.</u> Zřejmě platí

$$x \in Z_i \iff \exists k_1 \text{ tak, že } x = k_1 p + i$$

a

$$y \in Z_j \iff \exists k_2 \text{ tak, že } y = k_2 p + j .$$

Odtud vyplývá, že

$$x + y = (k_1 p + i) + (k_2 p + j) = (k_1 + k_2)p + (i + j) \in Z_{i+j}$$

a

$$x \cdot y = (k_1 p + i) \cdot (k_2 p + j) = (k_1 k_2 p + k_1 j + k_2 i)p + ij \in Z_{i \cdot j} ,$$

což bylo třeba dokázat.

Právě dokázané jednoduché tvrzení ukazuje, že na (p-prvkové) množině všech zbytkových tříd modulo p můžeme definovat přirozeným způsobem operace součtu a součinu dvou tříd, takže například pro $p = 7$ platí $Z_4 + Z_5 = Z_9 = Z_2$, $Z_3 \cdot Z_4 = Z_{12} = Z_5$ atd. Je přitom zvykem každou zbytkovou třídu charakterizovat pomocí jednoho reprezentanta - a sice toho, který leží v intervalu $\langle 0, p-1 \rangle$. Takto definované operace jsou nazývány <u>aritmetika modulo p.</u>

Například v aritmetice modulo 5 platí $3 + 4 = 2$, $4 \cdot 3 = 2$ atd. Důležitým speciálním případem je <u>aritmetika modulo 2</u>, v níž platí:

$$0 + 0 = 0 , \qquad 0 \cdot 0 = 0 ,$$
$$0 + 1 = 1 + 0 = 1 , \qquad 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0 ,$$
$$1 + 1 = 0 , \qquad 1 \cdot 1 = 1 .$$

<u>D) Tolerance</u>

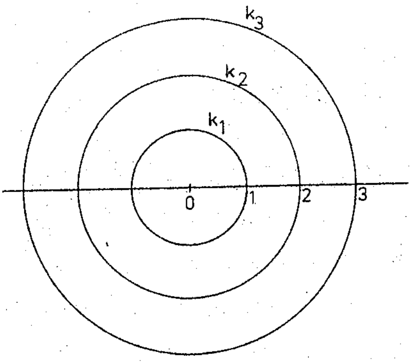
<u>Definice.</u> <u>Tolerancí na množině A</u> nazýváme každou binární relaci na A, která je zároveň reflexivní a symetrická.

Každá ekvivalence je zcela samozřejmě zároveň i tolerancí; dále uvádíme příklady relací, které jsou reflexivní a symetrické, ale nejsou tranzitivní (tj. jsou tolerancemi, ale nikoliv ekvivalencemi).

(i) Na množině slov stejné délky řekneme, že slovo S_1 je v toleranci se slovem S_2, jestliže se liší jen v jediném písmenu. Tak např.: slovo „dívka" je v toleranci se slovy „cívka" i „děvka", ale tato slova se liší ve dvou písmenech, takže v toleranci nejsou (tato relace není tranzitivní).

(ii) Na množině všech soustředných kružnic v rovině řekneme, že

kružnice k_1 je v toleranci s kružnicí k_2, jestliže pro jejich poloměry platí $|r_1 - r_2| \leqq 1$ (v daných jednotkách délky).
Tak např.: kružnice k_1 je v toleranci s kružnicí k_2, ta je v toleranci s kružnicí k_3, ale kružnice k_1 není v toleranci s kružnicí k_3 (tato relace není tranzitivní).



E) Uspořádání

Definice. Uspořádáním na množině A rozumíme takovou binární relaci ($\preccurlyeq$) na A, která je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Jako příklady uspořádání uvádíme:
srovnávání (x je menší nebo rovno y - značíme $\leqq$) čísel podle velikosti na jakékoliv podmnožině čísel reálných;
dělitelnost na množině přirozených čísel;
množinovou inkluzi na nějakém systému množin.

Poznámky. 1. Srovnávání (x je menší než y - značíme $<$) reálných čísel podle velikosti není podle uvedené definice uspořádáním, neboť toto srovnávání není reflexivní.

2. Relaci uspořádání značíme obvykle symbolem $\preccurlyeq$. Je-li $a \preccurlyeq b$ a zároveň $a \neq b$, pak píšeme $a \prec b$.

3. Z definice uspořádání nikterak nevyplývá, že by pro každé dva $a, b \in A$ muselo platit $a \preceq b$ nebo $b \preceq a$. Proto bývá v této souvislosti též používán termín částečné uspořádání.

1.2. Částečně uspořádané množiny (posety)

V tomto odstavci podrobněji vyšetříme základní vlastnosti množin, na nichž je definována relace (částečného) uspořádání. Poznatky tohoto odstavce pak budou východiskem pro obecnější přístup k pojmu matematické struktury v následujícím odstavci a pro vyšetřování vlastností Booleových algeber v odstavci 1.4.

Definice. Poset (z anglického "partially ordered set" - částečně uspořádaná množina) je dvojice $(A, \preceq)$, kde A je neprázdná množina a $\preceq$ je relace uspořádání na A.

Příklady posetů:

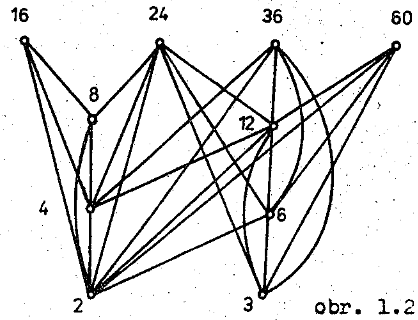
množina všech reálných čísel R s uspořádáním $\leq$, tj s přirozeným uspořádáním čísel podle velikosti - značíme $(R, \leq)$;

množina všech přirozených čísel N s dělitelností, tj s relací x dělí y, která je reflexivní, tranzitivní i antisymetrická - značíme $(N, /)$;

množina A všech podmnožin dané neprázdné množiny B s uspořádáním, daným množinovou inkluzí (je-li například $B = \{0, 1, 2\}$ pak $A = \{ \emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, B \}$). Je zřejmé, že má-li B n prvků, pak A má 2^n prvků - z tohoto důvodu se množina všech podmnožin dané neprázdné množiny B (i nekonečné) nazývá potenční množina množiny B a značí se symbolem 2^B; příslušný poset je pak dvojice $(2^B, \subseteq)$.

Znázornění struktury konečného posetu $(A, \preccurlyeq)$ poskytuje jeho tzv. diagram. V diagramu vyjádříme každý prvek množiny A kroužkem a jednotlivé kroužky rozmístíme tak, aby kroužek, odpovídající "menšímu" prvku, byl umístěn níže nežli kroužky, odpovídající všem větším prvkům, a tyto kroužky s ním navíc spojíme čarami.

Příklad. Na obr. 1.2.1 je znázorněn diagram posetu $(M,/)$, kde $M = \{2,3,4,6,8,12,16,24,36,60\}$ a $/$ je relace dělitelnosti. Vidíme, že diagram posetu může být i při poměrně "malé" množině M značně nepřehledný. Proto si ukážeme, jakým způsobem lze graficky zachytit veškerou důležitou informaci podstatně přehledněji.



obr. 1.2.1

Definice. Nechť $(A, \preccurlyeq)$ je poset. Relace $\dot{\prec}$, definovaná vztahem

$$x \dot{\prec} y \iff x \preccurlyeq y \text{ a pro žádný } z \in A,\ x \neq z \neq y, \text{ není } x \prec z \prec y$$

se nazývá relace bezprostředního předcházení (BP), příslušná k uspořádání $\preccurlyeq$.

Pro relaci bezprostředního předcházení je též používán termín pokrytí.

Relace BP není samozřejmě uspořádáním, neboť není ani reflexivní, ani tranzitivní. Příklady posetů racionálních, resp. reálných čísel s běžným uspořádáním podle velikosti ukazují, že se může stát, že relace BP je prázdná relace.

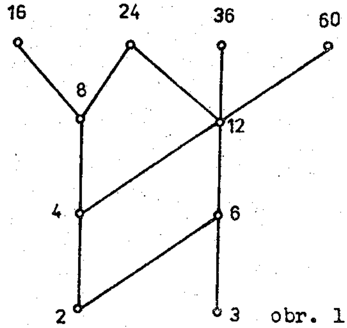
Následující věta ukazuje důležitost relace BP na konečných posetech.

<u>Věta 1.2.1.</u> Je-li $(A,\preceq)$ konečný poset, pak relace $\preceq$ je rovna reflexivně-tranzitivnímu uzávěru odpovídající relace $\dot{\prec}$ bezprostředního předcházení.

<u>Důkaz</u> věty je zřejmý.

V konečném posetu lze tedy uspořádání $\preceq$ zcela charakterizovat příslušnou relací BP, která obsahuje veškerou "podstatnou" informaci a přitom její mohutnost je zpravidla zlomkem mohutnosti uspořádání $\preceq$.

Na obr. 1.2.2 vidíme diagram relace bezprostředního předcházení, příslušné uspořádání z příkladu na předchozí stránce.



obr. 1.2.2

<u>Definice.</u> Nechť $(A,\preceq)$ je poset. Diagram relace bezprostředního předcházení, příslušné k $\preceq$, se nazývá <u>Hasseův diagram</u> relace $\preceq$ (též bývá používán termín <u>diagram pokrytí</u>).

<u>Definice.</u> O prvcích a_1, a_2 posetu $(A,\preceq)$ říkáme, že jsou <u>srovnatelné</u>, platí-li $a_1 \preceq a_2$ nebo $a_2 \preceq a_1$. Jsou-li všechny prvky posetu srovnatelné, pak říkáme, že relace $\preceq$ je <u>úplné uspořádání</u> a $(A,\preceq)$ je <u>úplně uspořádaná množina</u>.

Například poset $(N,/)$ přirozených čísel s dělitelností není úplně uspořádaná množina, avšak poset $(N,\leq)$ přirozených čísel uspořádaných podle velikosti je úplně uspořádaná množina.

Definice. Nechť $(A, \preceq)$ je úplně uspořádaná množina. Lexikografickým uspořádáním množiny $\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A^i$ indukovaným uspořádáním $\preceq$ nazýváme relaci $\circledS$ definovanou následujícím způsobem:

je-li $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$,

kde $x_t \in A$ pro $t = 1, 2, \ldots, k$, $y_s \in A$ pro $s = 1, 2, \ldots, n$,

potom

$$x \circledS y, \text{ právě když } (\exists t \leqq k,n: (x_t \prec y_t \wedge \forall j < t: x_j = y_j) \vee \vee (k \leqq n \wedge \forall j \leqq k: x_j = y_j).$$

Lexikografické uspořádání představuje velmi přirozený způsob, jak pomocí uspořádání na množině A uspořádat množiny A^2, $A \cup A^2$, A^3, $A \cup A^2 \cup A^3$, ... a též $\bigcup_{i=1}^{\infty} A^i$. Znamená to, že máme možnost srovnávat spolu n-tice a k-tice z množiny A i v případě, že $n \neq k$. Srovnávání x-tic se provádí po stejnolehlých prvcích zleva; při zjištění první nerovnosti prvků platí pro x-tice taková relace, která platí mezi nalezenými různými prvky. Při shodě na celé délce kratší x-tice, předchází kratší x-tice před delší. Tohoto způsobu uspořádání se běžně používá ve slovnících - odtud jeho název.

Věta 1.2.2: Lexikografické uspořádání $\circledS$ indukované úplným uspořádáním $\preceq$ je úplné uspořádání na množině $\tilde{A} = \bigcup_{i=1}^{\infty} A^i$.

Důkaz. Nechť $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ a $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ a předpokládejme, že $k \leqq n$.

Zřejmě je $x \circledS x$ podle definice lexikografického uspořádání, neboť $(k \leqq k \wedge \forall t \leqq k: x_t \preceq x_t)$ a tudíž relace $\circledS$ je reflexivní.

Tranzitivnost relace $\textcircled{\leq}$ se dá dokázat prověřením všech čtyř možností při rozvinutí konjunkce $x \textcircled{\leq} y \wedge y \textcircled{\leq} z$ podle definice lexikografického uspořádání.

Relace $\textcircled{\leq}$ je antisymetrická, neboť:

$$x \textcircled{\leq} y \wedge y \textcircled{\leq} x \Leftrightarrow$$
$$(\exists t \leqq k: (x_t \prec y_t \wedge \ldots) \vee (k \leqq n \wedge \forall t \leqq k: x_t = y_t)) \wedge$$
$$\wedge (\exists s \leqq n: (y_s \prec x_s \wedge \ldots) \vee (n \leqq k \wedge \forall s \leqq n: y_s = x_s)) \Leftrightarrow$$
$$(k \leqq n \wedge n \leqq k \wedge \forall t \leqq k: x_t = y_t) \Leftrightarrow x = y.$$

Relace $\textcircled{\leq}$ je tedy uspořádání. Navíc je úplné, neboť vzhledem k předpokladu $k \leqq n$ (pokud by platilo $n > k$ stačí místo dvojice (x,y) uvažovat dvojici (y,x)) a předpokladu úplnosti uspořádání $\preccurlyeq$ na množině A musí vždy nastat právě jedna ze dvou možností uvedených v disjunkci definující lexikografické uspořádání.

Nyní již můžeme snadno zavést uspořádání např. na komplexních číslech, která chápeme jako dvojice čísel reálných. Je-li $z_1 = a_1 + ib_1$ a $z_2 = a_2 + ib_2$ řekneme, že $z_1 \leqq_1 z_2$ právě když $(a_1, b_1) \textcircled{\leq} (a_2, b_2)$. Stejným způsobem pro $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ řekneme, že $z_1 \leqq_2 z_2$ právě když $(r_1, \varphi_1) \textcircled{\leq}$ $\textcircled{\leq} (r_2, \varphi_2)$.

Obě relace $\leqq_1$ i $\leqq_2$ jsou podle věty 1.2.2 úplná uspořádání množiny komplexních čísel. Uvědomíme si, že může platit: $z_1 \prec_1 z_2$ a zároveň $z_2 \prec_2 z_1$ (např. pro $z_1 = i$, $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i$).

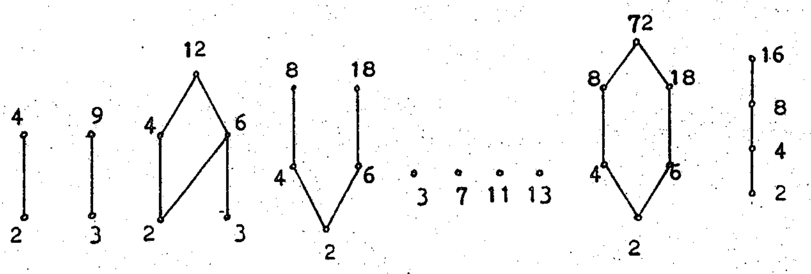
<u>Definice</u>: Nechť $(A, \leqq)$ je poset.

Prvek $d \in A$ nazýváme <u>minimálním prvkem</u> posetu $(A, \leqq)$, jestliže neexistuje prvek $x \in A$ takový, že $x \prec d$.

Prvek $h \in A$ nazýváme <u>maximálním prvkem</u> posetu $(A, \leqq)$, jestliže neexistuje prvek $x \in A$ takový, že $h \prec x$.

Prvek $m \in A$ nazýváme <u>nejmenším prvkem</u> posetu $(A, \preccurlyeq)$, jestliže pro všechna $x \in A$ je : $m \preccurlyeq x$.
Prvek $v \in A$ nazýváme <u>největším prvkem</u> posetu $(A, \preccurlyeq)$, jestliže pro všechna $x \in A$ je: $x \preccurlyeq v$.

Jednoduchými příklady (posetů podmnožin přirozených čísel s dělitelností) ilustrujeme zavedené pojmy:



$(A_1,/)$ $(A_2,/)$ $(A_3,/)$ $(A_4,/)$ $(A_5,/)$ $(A_6,/)$

obr. 1.2.3

Poset $(A_1,/)$ má dva minimální a dva maximální prvky, ale nemá žádný největší ani nejmenší prvek.
Poset $(A_2,/)$ má dva minimální prvky, jeden maximální prvek, který je zároveň prvkem největším; nemá žádný prvek nejmenší.
Poset $(A_3,/)$ má dva maximální prvky a jeden minimální prvek, který je zároneň prvkem nejmenším.
Poset $(A_4,/)$ má všechny prvky vzájemně nesrovnatelné; všechny jeho čtyři prvky jsou podle definice zároveň minimální i maximální.
Poset $(A_5,/)$ má jediný prvek minimální, který je zároveň prvkem nejmenším a jediný prvek maximální, který je zároveň prvkem největším.
Poset $(A_6,/)$ je konečná úplně uspořádaná množina s nejmenším a největším prvkem.

Věta 1.2.3. Poset $(A, \leqq)$ má nejvýše jeden nejmenší (resp. největší) prvek. Existuje-li v posetu nejmenší (resp. největší) prvek, pak je to zároveň jeho jediný prvek minimální (resp. maximální).

Důkaz provedeme pouze pro první část tvrzení o nejmenším prvku. Předpokládejme, že daný poset má dva nejmenší prvky d_1, d_2. Pak zřejmě podle definice pro všechna $x \in A$ je $d_1 \leqq x \wedge d_2 \leqq x$. Tudíž zároveň platí:

$$d_1 \leqq d_2 \quad \text{i} \quad d_2 \leqq d_1 .$$

Protože uspořádání je relace, která je mimo jiné i antisymetrická, je: $d_1 = d_2$.

Definice. Nechť $(P, \leqq)$ je poset, $\emptyset \neq B \subset P$.
Suprémem podmnožiny B (značíme sup B) nazýváme prvek $s \in P$ takový, že zároveň platí:

(i) pro všechna $x \in B$ je $x \leqq s$;

(ii) je-li $h \in P$ takový, že $x \preceq h$ pro všechna $x \in B$, pak $s \preceq h$.

Infimem podmnožiny B (značíme inf B) nazýváme prvek $m \in P$ takový, že zároveň platí:

(iii) pro všechna $x \in B$ je $m \leqq x$;

(iv) je-li $d \in P$ takový, že $d \preceq x$ pro všechna $x \in B$, pak $d \preceq m$.

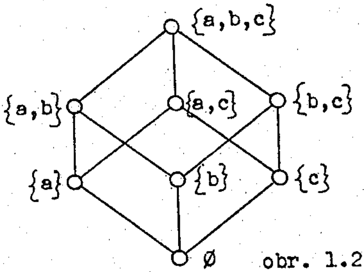
Definice. Nechť $(A, \leqq)$ je poset. Pokud pro libovolnou dvojici prvků $a_1, a_2 \in A$ existují v množině A

$\sup\{a_1, a_2\}$ (= $a_1 \vee a_2$ - spojení prvků a_1, a_2) a

$\inf\{a_1, a_2\}$ (= $a_1 \wedge a_2$ - průsek prvků a_1, a_2) , pak tento poset nazveme svazem - značíme $(A, \curlyvee, \curlywedge)$ - a užíváme v závorkách uvedené termíny i značení.

Příklady. Poset $(M,/)$ z obr. 1.2.1 ani posety $(A_1,/)$, $(A_2,/)$, $(A_3,/)$, $(A_4,/)$, jejichž Hasseovy diagramy jsou na obr. 1.2.3, nejsou svazy, neboť v každém z nich lze nalézt dvojici prvků, pro něž neexistuje supremum nebo infimum. Naproti tomu posety $(A_5,/)$ a $(A_6,/)$ z téhož příkladu jsou svazy.

Dobrým ilustrativním příkladem svazu je potenční množina libovolné neprázdné množiny M uspořádaná inkluzí - v tomto svazu je průsek dvou prvků (tj. podmnožin M) jejich průnikem a spojení je dáno jejich sjednocením. Je-li například $M = \{a,b,c\}$, pak příslušný poset $(2^M, \subseteq)$ je svazem a je popsán Hasseovým diagramem, znázorněným na obrázku.



obr. 1.2.4

Je vidět, že spojení i průsek jsou ve svazu korektně definované binární operace - supremum i infimum je v posetu (pokud existuje) určeno jednoznačně a existence je základním požadavkem v definici svazu. Z vlastností suprema i infima vyplývá pro operace spojení a průseku bezprostředně platnost následujících vztahů pro všechna a, b, c $\in$ A:

(I) $a \curlyvee b = b \curlyvee a$, (I´) $a \curlywedge b = b \curlywedge a$,

(II) $a \curlyvee a = a$, (II´) $a \curlywedge a = a$,

(III) $a \curlyvee (b \curlyvee c) = (a \curlyvee b) \curlyvee c$, (III´) $a \curlywedge (b \curlywedge c) = (a \curlywedge b) \curlywedge c$,

(IV) $a \curlywedge (b \curlyvee a) = a$, (IV´) $a \curlyvee (b \curlywedge a) = a$,

(V) $(a \leqq a \curlyvee b) \wedge (b \leqq a \curlyvee b)$, (V´) $(a \curlywedge b \leqq a) \wedge (a \curlywedge b \leqq b)$,

(VI) $(a \leqq x) \wedge (b \leqq x) \Rightarrow a \curlyvee b \leqq x$, (VI´) $(x \leqq a) \wedge (x \leqq b) \Rightarrow x \leqq a \curlywedge b$.

Tyto vlastnosti názorně ukazují, že operace spojení a průseku dávají svazu algebraický charakter. Vlastnosti (I),(I´) a (III), (III´) říkají, že operace spojení a průseku jsou komutativní a asociativní. Vlastnost (II), resp. (II´) se nazývá idempotentnost a vlastnost (IV), (IV´) je známa jako absorbce.

Z uvedeného je zřejmé, že je-li dán poset $(A, \preccurlyeq)$, který je svazem, pak ze znalosti relační struktury svazu, tj. relace uspořádání $\preccurlyeq$, můžeme jednoznačně určit algebraickou strukturu svazu, tj. binární operace spojení a průseku. Následující věta ukazuje, že též naopak, operace spojení a průseku jednoznačně určují uspořádání svazu (takže naše značení svazu, zavedené v předchozí definici, je oprávněné).

Věta 1.2.4. Nechť P je neprázdná množina a $\vee$, $\wedge$ dvě binární operace na P takové, že splňují rovnosti (I), (I´), (II), (II´), (III), (III´), (IV), (IV´). Definujeme-li na množině P relaci $\leqq$ vztahem:

$$a \leqq b \text{ právě když platí } a \vee b = b,$$

pak $(P, \leqq)$ je poset a $(P, \vee, \wedge)$ je svaz odpovídající uspořádání $\leqq$ v P.

Důkaz. Musíme dokázat, že

a) relace $\leqq$ je uspořádání na P

b) operace $\wedge$, $\vee$ definované vlastnostmi (I) - (IV´) představují opravdu suprema a infima dvouprvkových množin z P, vzhledem k uspořádání $\leqq$.

ad a) relace $\leqq$ definovaná vztahem $a \leqq b \Leftrightarrow a \vee b = b$ je zřejmě reflexivní, neboť podle (II) je $a \vee a = a \Leftrightarrow a \leqq a$;
je antisymetrická, neboť podle definice $\leqq$ a z vlastnosti (I)

je:

$$(a \leqq b) \wedge (b \leqq a) \Leftrightarrow (a \curlyvee b = b) \wedge (b \curlyvee a = a), \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a = b \curlyvee a = a \curlyvee b = b);$$

je tranzitivní, neboť podle definice $\leqq$, dosazením a užitím vlastnosti (III) spojení je:

$$(a \leqq b) \wedge (b \leqq c) \Leftrightarrow (a \curlyvee b = b) \wedge (b \curlyvee c = c) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a \curlyvee c) = a \curlyvee (b \curlyvee c) = (a \curlyvee b) \curlyvee c = (b \curlyvee c) = c$$
$$\Rightarrow a \leqq c.$$

ad b) Stačí ověřit platnost vztahů (V), (V´), (VI) a (VI´).

Poznámka. Obdobné tvrzení by bylo možno dokázat s použitím průseku - podmínka ve větě se pak nahradí ekvivalentní podmínkou

$a \preccurlyeq b$ právě když platí $a \curlywedge b = a$.

Představme si nyní, že pro daný svaz $(A, \curlyvee, \curlywedge)$ nakreslíme jeho Hasseův diagram a vzniklý obrázek otočíme "vzhůru nohama". Přesněji řečeno, provedeme následující záměny:

- relaci $\preccurlyeq$ nahradíme inverzní relací $(\preccurlyeq)^{-1}$ (značíme ji $\succcurlyeq$),
- operaci spojení nahradíme operací průseku,
- operaci průseku nahradíme operací spojení.

Je samozřejmé, že je-li A s původním uspořádáním a operacemi svazem, pak je svazem i s inverzním uspořádáním a prohozenými operacemi spojení a průseku. Svaz A', sestrojený popsaným způsobem, se nazývá duální svaz ke svazu A. Ze zřejmých vlastností vzájemného vztahu mezi svazem A a duálním svazem A' ihned vidíme, že ke každému tvrzení T můžeme formulovat ekvivalentní duální tvrzení T', které z něj vznikne náhradou symbolů $\curlyvee$, $\curlywedge$, $\preccurlyeq$ a $\succcurlyeq$ po řadě symboly $\curlywedge$, $\curlyvee$, $\succcurlyeq$ a $\preccurlyeq$. Toto pozorování je známo jako princip duality.

Princip duality umožňuje pro každou dvojici duálních tvrzení dokazovat jen jedno z nich - důkaz druhého tvrzení by byl jen jeho reprodukcí s uvedenou záměnou symbolů. S principem duality jsme se již setkali ve vlastnostech (I) - (VI), resp. (I´) - (VI´) před větou 1.2.4 a v poznámce za ní.

1.3. Srovnatelná zobrazení a matematické struktury

Až dosud jsme se zabývali problematikou, která se týkala výhradně jednoho (každého) posetu - problematikou, vymezenou okruhem otázek o dalších vlastnostech uspořádání definujícího poset. Druhý, zcela odlišný okruh otázek vzniká, chceme-li srovnávat dva posety; chceme-li zjistit v čem jsou dva různé posety shodné. Tak jako jsme při srovnávání dvou množin A, B užívali zobrazení $Z: A \to B$ budeme i při srovnávání posetů $(A, \leqq_1)$, $(B, \leqq_2)$ užívat uvedená zobrazení. Je však zcela přirozené vybrat ze všech zmíněných zobrazení jen ta, která „zachovávají" uspořádání v přesně vymezeném smyslu.

<u>Definice</u>. Jsou-li $(A, \leqq_1)$, $(B, \leqq_2)$ posety, pak zobrazení $f: A \to B$ nazýváme <u>srovnatelným zobrazením</u> daných posetů, platí-li pro všechny a_1, a_2 A implikace:

$$a_1 \leqq_1 a_2 \Rightarrow f(a_1) \leqq_2 f(a_2).$$

Podmnožinu všech srovnatelných zobrazení množiny všech zobrazení $Z: A \to B$ budeme značit hom (A,B).

Snadno lze dokázat následující tvrzení.

Věta 1.3.1. Jsou-li $(A_i, \leqq_i)$ pro $i = 1, 2, 3$ posety, zobrazení f, g taková, že $f \in \hom(A_1, A_2)$, $g \in \hom(A_2\ A_3)$, pak složené zobrazení $fg \in \hom(A_1\ A_3)$.

K objasnění pojmu srovnatelného zobrazení a pro přesné pochopení významu existence speciálního srovnatelného zobrazení dvou posetů, uvádíme následující příklady ilustrativního charakteru.

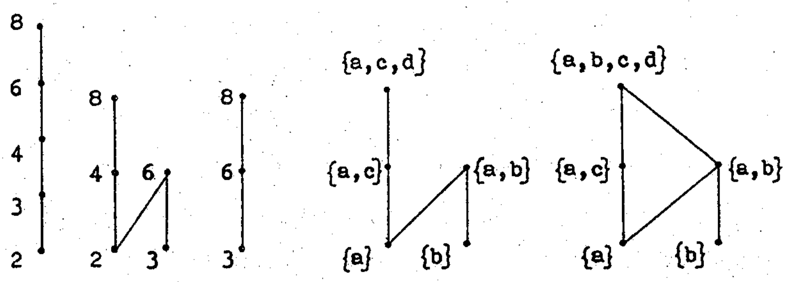
Uvažujme posety $(A, \leqq)$, $(A, \leqq_1)$ $(B, \leqq)$, $(C, \leqq_2)$ $(D, \leqq_2)$, kde $A = \{2,3,4,6,8\}$, $B = \{3,6,8\}$, $C = \{\{a\}, \{b\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{a,c,d\}\}$, $D = \{\{a\}, \{b\}, \{a,c\}, \{a,b\}, \{a,b,c,d\}\}$ a dále:

$\leqq$ je běžné uspořádání reálných čísel podle velikosti,

$\leqq_1$ je uspořádání přirozených čísel dělitelností,

$\leqq_2$ je uspořádání systému množin inkluzí.

Z diagramů pokrytí uvedených posetů (viz obrázek)



$(A, \leqq)$ $(A, \leqq_1)$ $(B, \leqq)$ $(C, \leqq_2)$ $(D, \leqq_2)$

obr. 1.3.1

mimo jiné vyplývá, že pokud nepřihlížíme k významu prvků množin a k realizaci uspořádání na daných posetech, pak

a) poset $(B, \leqq)$ je „stejný" jako část posetu $(A, \leqq)$ i $(A, \leqq_1)$;

Uvažte, že zobrazení

$Z_1: (B \to A)$	
3	2
6	3
8	6

$Z_2: (B \to A)$	
3	2
6	4
8	8

jsou injektivní zobrazení množiny B do množiny A.

Z_1 je srovnatelné injektivní zobrazení posetu $(B, \leqq)$ do posetu $(A, \leqq)$. Není to však srovnatelné zobrazení posetu $(B, \leqq)$ do posetu $(A, \leqq_1)$, protože je $3 \leqq 6$, ale není $Z_1(3) \leqq_1 Z_1(6)$.

Z_2 je srovnatelné injektivní zobrazení posetu $(B, \leqq)$ do posetu $(A, \leqq)$ i do posetu $(A, \leqq_1)$.

b) posety $(A, \leqq_1)$ a $(C, \leqq_2)$ jsou „stejné".

Uvažte, že existuje bijektivní srovnatelné zobrazení $Z_3: A \to C$ takové, že Z_3^{-1} je opět srovnatelné;

$Z_3: A \to C$	
2	$\{a\}$
3	$\{b\}$
4	$\{a,c\}$
6	$\{a,b\}$
8	$\{a,c,d\}$

$Z_4: A \to C$	
2	$\{a,c,d\}$
3	$\{a\}$
4	$\{a,b\}$
6	$\{b\}$
8	$\{a,c\}$

Zároveň si všimneme, že Z_4 je sice bijektivní zobrazení množiny A na množinu C, ale není to zobrazení srovnatelné.

c) posety $(A, \leqq_1)$ a $(D, \leqq_2)$ zřejmě „stejné" nejsou.

Zde zobrazení

Z_5: A	D
2	$\{a\}$
3	$\{b\}$
4	$\{a,c\}$
6	$\{a,b\}$
8	$\{a,b,c,d\}$

je bijektivním srovnatelným zobrazením posetu $(A, \leqq_1)$ na poset $(D, \leqq_2)$, ale inverzní zobrazení Z_5^{-1} srovnatelné není. Poset $(A, \leqq_1)$ „lze vnořit" do posetu $(D, \leqq_2)$, ale obráceně to udělat nejde.

Domníváme se, že po uvedených příkladech bude pochopitelné zavedení obecného pojmu matematické struktury.

Definice. Říkáme, že je dána matematická struktura $\mathcal{S}$, jestliže:

(1) Pro každou množinu A je určena množina $\mathcal{S}[A]$; její prvky nazýváme strukturace množiny A, dvojice (A, α), kde A je neprázdná množina a $\alpha \in \mathcal{S}[A]$, nazýváme objekty struktury $\mathcal{S}$.

(2) Pro každé dva objekty (A_1, α_1), (A_2, α_2) struktury je určena podmnožina $\hom(A_1, A_2)$ množiny všech zobrazení z A_1 do A_2; její prvky, které se nazývají morfismy z A_1 do A_2, musí splňovat axiom skládání a jednotek, tj. platí:

(i) $f \in \hom(A_1, A_2) \wedge g \in \hom(A_2, A_3) \Rightarrow fg \in \hom(A_1, A_3)$,

(ii) pro každý objekt (A, α) je $id_A \in \hom(A, A)$.

Příklady. 1. Struktura posetů $POS[A]$: pro danou množinu A je $POS[A]$ množina všech posetů (A, ρ) (se všemi možnými uspořádáními ρ na A). Objekty jsou jednotlivé posety $(A, \preccurlyeq)$, morfismy jsou srovnatelná zobrazení.

2. Struktura $VEK[X]$ lineárních vektorových prostorů: objekty jsou zde lineární vektorové prostory, morfismy jsou lineární zobrazení.

3. V závěru tohoto odstavce poznáme další příklad - algebraickou strukturu grupy. Další důležitý příklad - strukturu grafů - poznáme v odstavci 1.6: jejími objekty jsou všechny grafy na dané množině uzlů, morfismy jsou homomorfismy grafů.

Kdykoliv začínáme pracovat s objekty určité matematické struktury, je důležité nejen znát přesnou definici jednoho objektu, ale je nezbytné také vědět, kdy máme (můžeme) dva objekty považovat „v podstatě" za stejné. Je nutné si ujasnit, které objekty dané struktury jsou z hlediska této struktury ekvivalentní.

Definice. Izomorfismem objektů (A_1, α_1), (A_2, α_2) dané struktury $\mathcal{S}$ nazýváme bijektivní zobrazení $f: A_1 \to A_2$ takové, že $f \in \hom(A_1, A_2) \wedge f^{-1} \in \hom(A_2, A_1)$. Jestliže takové bijektivní zobrazení f existuje, říkáme, že objekty (A_1, α_1), (A_2, α_2) jsou izomorfní.

Věta 1.3.2. Relace $\cong$ (být izomorfní) je ekvivalence na třídě všech objektů dané struktury.

Důkaz. (i) zřejmě je $(A, \alpha) \cong (A, \alpha)$, neboť id_A je bijektivní zobrazení takové, že $id_A = id_A^{-1}$ a zároveň $id_A \in \hom(A,A)$ pro každý objekt (A, α). Relace $\cong$ je tedy reflexivní.
(ii) Je-li $(A_1, \alpha_1) \cong (A_2, \alpha_2)$, pak existuje bijektivní zobrazení $f: A_1 \to A_2$ takové, že $f \in \hom(A_1, A_2)$ a zároveň $f^{-1} \in \hom(A_2, A_1)$. Položíme-li $g = f^{-1}$ je g izomorfismem objektů (A_2, α_2), (A_1, α_1), tj. je $(A_2, \alpha_2) \cong (A_1, \alpha_1)$ takže relace $\cong$ je symetrická.
(iii) Tranzitivnost relace $\cong$ pak plyne z uzavřenosti skládání morfismů a z platného tvrzení: složení bijektivních zobrazení je opět bijektivní zobrazení.

Příklad. 1. Funkce $\lg x$ je izomorfismem $(R^+, \cdot)$, tj. množiny kladných reálných čísel s operací násobení, a $(R, +)$, tj. množiny všech reálných čísel s operací sčítání: tato funkce je morfismem, neboť "zachovává operace" ($\lg(x\cdot y) = \lg x + \lg y$) a protože je bijektivním zobrazením, je izomorfismem.

2. V závěru odstavce uvedeme definici algebraické struktury grupy a poznáme příklady dvou jejích izomorfních objektů.

Definice. Je-li B neprázdná množina, na níž je definována binární operace $\oplus$ taková, že

(i) je uzavřená na B ($a \oplus b \in B$ pro všechna $a, b \in B$),

(ii) je asociativní ($a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) \oplus c$ pro všechna $a, b, c \in B$),

(iii) existuje neutrální prvek $n \in B$ tak, že $a \oplus n = n \oplus a = a$ pro všechna $a \in B$,

(iv) pro každé $b \in B$ existuje opačný prvek, tj. prvek $(-b) \in B$ takový, že $b \oplus (-b) = n = (-b) \oplus b$,

pak $(B, \oplus)$ se nazývá grupa. Je-li navíc

(v) $a \oplus b = b \oplus a$ pro všechna $a, b \in B$,

mluvíme o komutativní grupě.

Morfismem dvou grup $(B_1, \oplus_1)$, $(B_2, \oplus_2)$ rozumíme každé zobrazení $Z: B_1 \to B_2$ takové, že $Z(a \oplus_1 b) = Z(a) \oplus_2 Z(b)$ pro všechna $a, b \in B_1$.

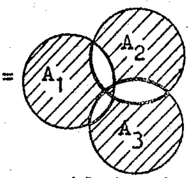
Příklad. Je-li 2^A potenční množina neprázdné množiny A, pak dvojice $(2^A, \oplus)$, kde $\oplus$ značí operaci symetrické diference, je komutativní grupa.

Připomínáme, že je-li $A_1, A_2 \in 2^A$, pak $A_1 \oplus A_2 = (A_1 \cup A_2) \setminus (A_1 \cap A_2)$. Operace $\oplus$ symetrické diference je zřejmě uzavřená na 2^A. Dále je $A_1 \oplus (A_2 \oplus A_3) =$

$$\bigcup_{i=1}^{3} A_i \setminus ((A_1 \cap A_2) \cup (A_1 \cap A_3) \cup (A_2 \cap A_3)) \cup (A_1 \cap A_2 \cap A_3) =$$

$$= (A_1 \oplus A_2) \oplus A_3 ,$$

což je rovněž patrné z grafického vyjádření

$A_1 \oplus (A_2 \oplus A_3) =$ 

$= (A_1 \oplus A_2) \oplus A_3.$

Neutrálním prvkem vzhledem k symetrické diferenci je zřejmě prázdná množina $\emptyset$, neboť $A_1 \oplus \emptyset = (A_1 \cup \emptyset) \setminus (A_1 \cap \emptyset) = A_1 - \emptyset = A_1$ pro každou množinu $A_1 \in 2^A$ a operace $\oplus$ je zřejmě komutativní, jak plyne z její definice. Každá množina je pak sama k sobě opačným prvkem vůči symetrické diferenci, neboť $A_1 \oplus A_1 =$ $= (A_1 \cup A_1) \setminus (A_1 \cap A_1) = \emptyset$. Takže $(2^A, \oplus)$ je komutativní grupa.

<u>Příklad</u>. Množina $\mathcal{M}$ všech řádkových matic typu $1/n$ s prvky z množiny $\{0, 1\}$ spolu se sčítáním matic v aritmetice modulo 2 je komutativní grupa ($\mathcal{M}$, + mod 2). Ověření požadavků z definice komutativní grupy je v tomto případě zcela evidentní, uvědomíme-li si, že neutrálním prvkem je řádek $\mathbb{O}$ samých nul a pro každý řádek $\underline{a}$ je $\underline{a} + \underline{a} = \mathbb{O}$.

<u>Věta 1.3.3</u>. Má-li množina H n prvků, pak grupy $(2^H, \oplus)$ a ($\mathcal{M}$, + mod 2) jsou izomorfní.

<u>Důkaz</u>. Požadované izomorfní zobrazení $Z: 2^H \to \mathcal{M}$ sestrojíme následujícím způsobem. Očíslujeme prvky množiny H. Nechť $H = \{h_1, h_2, \ldots, h_n\}$. Podmnožině $H_i \in 2^H$ přiřadíme řádek $\underline{a}_i = [a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}]$ tak, aby platilo:

$$a_{ik} = 1 \quad \text{právě když } h_k \in H_i,$$
$$a_{ik} = 0 \quad \text{právě když } h_k \notin H_i.$$

Z je zřejmě bijektivní zobrazení 2^H na $\mathcal{M}$ a platí implikace:
$Z(H_i) = \underline{a}_i \wedge Z(H_j) = \underline{a}_j \Rightarrow Z(H_i \oplus H_j) = \underline{a}_i + \underline{a}_j = Z(H_i) + Z(H_j)$.
Z je tudíž izomorfismus.

1.4. Booleovy algebry

V tomto odstavci budeme pokračovat ve studiu svazů. Domluvíme se, že je-li poset $(A, \preceq)$ svazem $(A, \vee, \wedge)$ a je-li z kontextu zřejmé, s jakým uspořádáním, resp. operacemi pracujeme, pak budeme krátce hovořit o svazu A.

V závěru odstavce 1.2 jsme si ukázali, že je-li poset $(A, \preceq)$ svazem, pak tato struktura zavedením operací spojení a průseku získává algebraický charakter. Z vlastností (I) a (III) před větou 1.2.4 vidíme, že operace průseku a spojení jsou komutativní a asociativní - vzniká tedy přirozená otázka, zda tyto operace jsou distributivní, tj. zda pro každé $a, b, c \in A$ platí

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad ,$$

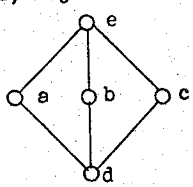
resp. duálně

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad .$$

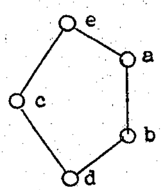
Následující příklad ukazuje, že tomu tak obecně nemusí být.

Příklad. Svazy S_1, S_2, definované Hasseovými diagramy na obr. 1.4.1, nejsou distributivní.

S_1:



S_2:



obr. 1.4.1

Ve svazu S_1 platí $a \wedge (b \vee c) = a$, zatímco $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) = d$; obdobně v S_2 je

$$a = a \wedge (b \vee c) \neq (a \wedge b) \vee (a \wedge c) = b \quad .$$

Definice. Řekneme, že svaz A je *distributivní*, jestliže pro každé prvky $a, b, c \in A$ platí

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad .$$

Poznámka. Z principu duality vyplývá, že v distributivním svazu je již automaticky splněn i duální distributivní zákon, tj.

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c) \quad .$$

Příklad. Je-li M neprázdná množina, pak, jak již bylo poznamenáno, poset $(2^M, \subseteq)$ s operacemi spojení a průseku danými množinovým sjednocením a průnikem je svazem; snadno se přesvědčíme, že tento svaz $(2^M, \cup, \cap)$ je distributivní.

Je-li A svazem a $B \subset A$, pak relace uspořádání $\preceq$ na množině A definuje přirozeným způsobem i uspořádání na podmnožině B, takže $(B, \preceq)$ je zcela samozřejmě poset. Příklad podmnožiny $B = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$ množiny $A = 2^M$ z příkladu na obr. 1.2.4 ukazuje, že $(B, \preceq)$ nemusí být svazem, neboť není zaručeno, že s každými dvěma prvky leží v B i jejich supremum a infimum.

Definice. Nechť A je svaz a $B \subset A$. Řekneme, že B je *podsvazem* svazu A, jestliže pro každé $a, b \in B$ je $a \wedge b \in B$ i $a \vee b \in B$.

Poznámky. 1. Jinými slovy, podsvaz je každá podmnožina, která je (s příslušným uspořádáním) sama svazem.

2. Je zřejmé, že je-li svaz A distributivní, pak je distributivní i každý jeho podsvaz.

Nyní již můžeme zformulovat větu, která charakterizuje distributivní svazy.

Věta 1.4.1. Svaz A je distributivní právě když neobsahuje podsvaz izomorfní s S_1 nebo s S_2 (viz obr. 1.4.1.).

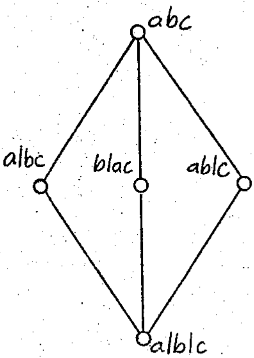
Důkaz. Protože každý podsvaz distributivního svazu je distributivní, nemůže distributivní svaz obsahovat podsvaz izomorfní s S_1 ani s S_2.

Důkaz obráceného tvrzení přesahuje rámec tohoto textu a proto jej nebudeme uvádět.

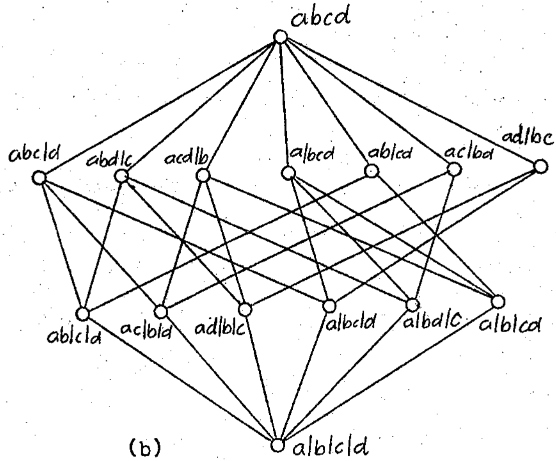
Příklad. Nechť je dána neprázdná množina M; buď A množina, jejímiž prvky jsou všechny rozklady množiny M na třídy (nebo, což je podle věty 1.1.5 totéž, všechny ekvivalence na M). Řekneme, že rozklad π_1 je zjemněním rozkladu π_2, jestliže každá třída rozkladu π_1 je podmnožinou některé třídy rozkladu π_2. Snadno se přesvědčíme, že relace zjemnění je uspořádáním na A, takže, označíme-li

$$\pi_1 \preceq \pi_2 \Leftrightarrow \pi_1 \text{ je zjemněním } \pi_2 ,$$

pak $(A, \preceq)$ je poset. Je snadným cvičením přesvědčit se, že pro každé dva rozklady π_1, π_2 existuje rozklad, který je jejich nejhrubším společným zjemněním, tj. je jejich průsekem $\pi_1 \wedge \pi_2$, a obdobně vždy existuje i jejich spojení $\pi_1 \vee \pi_2$. Poset $(A, \preceq)$ je tedy svazem a nazývá se svaz rozkladů množiny M. Na obrázku 1.4.2 (a) je znázorněn Hasseův diagram svazu rozkladů tříprvkové množiny $M = \{a, b, c\}$; ihned vidíme, že je izomorfní s S_1 a tedy není distributivní. Na obr. 1.4.2. (b) je Hasseův diagram svazu rozkladů čtyřprvkové množiny $M = \{a, b, c, d\}$ a čtenář se snadno přesvědčí, že tento svaz obsahuje podsvaz izomorfní s S_1 i podsvaz izomorfní s S_2 a tedy též není distributivní (při hledání podsvazu izomorfního s S_2 nechť si čtenář uvědomí, že na obrázku je pouze Hasseův diagram relace bezprostředního předcházení a relace uspořádání v našem svazu je jejím reflexivně--tranzitivním uzávěrem).



(a)



(b)

obr. 1.4.2

<u>Poznámka.</u> V Booleových algebrách (jež jsou, jak uvidíme, speciálním případem svazů) bývá někdy zvykem značit operaci spojení symbolem $+$ ("Booleovský součet") a průseku $\cdot$ ("Booleovský součin"). Podmínka z definice distributivního svazu v tomto značení přejde v obvyklý distributivní zákon

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad ;$$

duální podmínka (jež je s ní ekvivalentní) nabude při tomto značení podoby

$$a + b \cdot c = (a + b) \cdot (a + c) \quad .$$

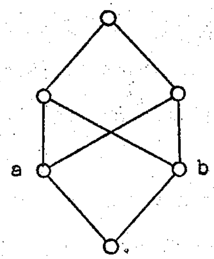
<u>Věta 1.4.2.</u> V každém konečném svazu existuje největší a nejmenší prvek.

Důkaz. Snadno dokážeme, že v každém konečném posetu A existuje alespoň jeden maximální prvek. Kdyby A neměl největší prvek, tak by v něm musely existovat alespoň dva různé maximální prvky, ale pro ty by pak v A neexistovalo supremum, což je spor.

Obdobně dokážeme existenci nejmenšího prvku.

Poznámky. 1. V nekonečném svazu ovšem největší prvek ani nejmenší prvek obecně existovat nemusí - příkladem jsou reálná čísla s obvyklým uspořádáním.

2. Tvrzení věty 1.4.2 nelze obrátit - z faktu, že v konečném posetu existuje největší i nejmenší prvek, ještě nevyplývá, že A je svazem. Příklad vidíme na obrázku 1.4.3, kde prvky a, b nemají v A supremum.



obr. 1.4.3

Tvrzení. Je-li i (resp. o) největším (resp. nejmenším) prvkem svazu A, pak pro každý prvek $a \in A$ platí

$$o \vee a = a$$

a

$$i \wedge a = a \quad .$$

Důkaz tvrzení je zřejmý.

Vidíme, že největší a nejmenší prvek svazu (pokud existují) jsou neutrálními prvky vzhledem k operacím spojení a průseku; proto budeme největšímu (nejmenšímu) prvku svazu říkat jednotkový (resp. nulový) prvek a označíme jej 1 (resp. 0). Svaz s nulovým a jednotkovým prvkem budeme značit $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$.

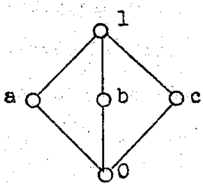
Příklad. Ve svazu $(2^M, \cup, \cap)$ je $0 = \emptyset$ a $1 = M$.

Definice. Nechť $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ je svaz, $x \in A$. Prvek $\bar{x}$, pro který platí
$$x \vee \bar{x} = 1$$
a
$$x \wedge \bar{x} = 0 \quad ,$$
se nazývá doplněk (komplement) prvku x.

Svaz $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$, v němž pro každý prvek $x \in A$ existuje komplement $\bar{x} \in A$, se nazývá komplementární svaz.

Příklady. 1. Svaz A_6 na obr. 1.2.3 není komplementární.

2. Ve svazu A, jehož Hasseův diagram vidíme na obr. 1.4.4, platí $a \vee b = 1$ a $a \wedge b = 0$, takže prvek b je doplňkem prvku a. Obdobně však také $a \vee c = 1$ a $a \wedge c = 0$ a tedy prvek c je také doplňkem prvku a.



obr. 1.4.4

Snadno zjistíme, že ke každému prvku našeho svazu existuje alespoň jeden doplněk, takže A je komplementární. Příklad ukazuje, že "doplněk" je obecně relací na množině A a tato relace nemusí být funkcí.

Věta 1.4.3. Nechť A je distributivní svaz s nulovým a jednotkovým prvkem. Existuje-li k prvku $x \in A$ jeho doplněk, pak je určen jednoznačně.

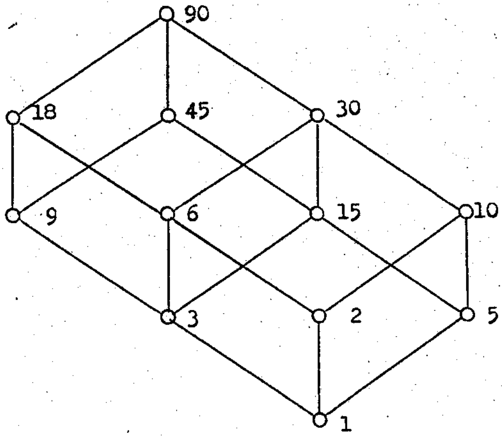
Důkaz. Nechť b_1 a b_2 jsou dva doplňky prvku a, tj. platí $a \vee b_1 = 1$, $a \vee b_2 = 1$, $a \wedge b_1 = 0$, $a \wedge b_2 = 0$. Pak platí
$$b_1 = b_1 \wedge 1 = b_1 \wedge (a \vee b_2) = (b_1 \wedge a) \vee (b_1 \wedge b_2) = 0 \vee (b_1 \wedge b_2) =$$
$$= b_1 \wedge b_2 \quad ,$$

neboli $b_1 \preccurlyeq b_2$. Obdobně však také

$$b_2 = b_2 \wedge 1 = b_2 \wedge (a \vee b_1) = (b_2 \wedge a) \vee (b_2 \wedge b_1) = 0 \vee (b_2 \wedge b_1) =$$
$$= b_1 \wedge b_2$$

a tedy též $b_2 \preccurlyeq b_1$. Odtud ihned $b_1 = b_2$.

<u>Příklad.</u> Nechť A je svaz dělitelů čísla 90 - viz obr. 1.4.5. Snadno zjistíme (např. podle věty 1.4.1), že A je distributivní. Všimněme si, že čísla 5, 18, 9, 10, 2, 45 mají v A doplňky, které jsou, jak již víme, určeny jednoznačně, ale čísla 3, 6, 15 a 30 ve svazu A doplňky nemají. Svaz A tedy není komplementární.



obr. 1.4.5

<u>Důsledek</u> věty 1.4.3. V distributivním komplementárním svazu má každý prvek právě jeden doplněk.

<u>Věta 1.4.4 (De Morganovy zákony).</u> Nechť A je distributivní komplementární svaz. Pak pro každé $a, b \in A$ platí:

(i) $\overline{a \vee b} = \bar{a} \wedge \bar{b}$,

(ii) $\overline{a \wedge b} = \bar{a} \vee \bar{b}$.

<u>Důkaz.</u> Vzhledem k dualitě stačí dokázat tvrzení (i). Platí:

$$(a \vee b) \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b}) = \left[a \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b})\right] \vee \left[b \wedge (\bar{a} \wedge \bar{b})\right] =$$
$$= \left[(a \wedge \bar{a}) \wedge \bar{b}\right] \vee \left[(b \wedge \bar{b}) \wedge \bar{a}\right] =$$
$$= (0 \wedge \bar{b}) \vee (0 \wedge \bar{a}) = 0 \vee 0 = 0.$$

Obdobně dokážeme, že také

$$(a \vee b) \vee (\bar{a} \wedge \bar{b}) = 1$$

a tedy prvek $\bar{a} \wedge \bar{b}$ je doplňkem prvku $a \vee b$.

<u>Definice.</u> Distributivní komplementární svaz se nazývá <u>Booleova algebra.</u>

<u>Poznámky.</u> 1. Někteří autoři používají pro tutéž strukturu termín <u>Booleův svaz</u>.

2. Důležitým příkladem Booleovy algebry je množina 2^M s operacemi sjednocení a průniku - nulovým prvkem je zde prázdná množina $\emptyset$, jednotkou je M , doplňkem prvku $a \in 2^M$ (tj. $a \subset M$) je množina $M \setminus a$. Tato Booleova algebra bývá nazývána <u>množinová algebra</u>.

3. V Booleových algebrách je často zvykem značit spojení symbolem $+$ a průsek symbolem $\cdot$. Následující věta shrnuje odvozená pravidla "Booleovského počítání" v této symbolice.

<u>Věta 1.4.5 (Booleovský kalkulus).</u> Nechť A je Booleova algebra, $a, b, c \in A$. Pak platí:

(S1)	$a + a = a$	$a \cdot a = a$	IDEMPOTENTNOST
(S2)	$a + b = b + a$	$ab = ba$	KOMUTATIVITA
(S3)	$(a+b)+c = a+(b+c)$	$(ab)c = a(bc)$	ASOCIATIVITA
(S4)	$a + ab = a$	$a(a + b) = a$	ABSORBCE
(D)	$a(b+c) = ab + ac$	$a + bc = (a+b)(a+c)$	DISTRIBUTIVITA

$$
\left.\begin{array}{lll}
\text{(N1)} & a + 0 = a & a\cdot 1 = a \\
\text{(N2)} & a\cdot 0 = 0 & a + 1 = 1
\end{array}\right\}\text{NEUTRÁLNÍ PRVKY}
$$

$$
\left.\begin{array}{lll}
\text{(K1)} & \bar{1} = 0 & \\
\text{(K2)} & a + \bar{a} = 1 & a\bar{a} = 0
\end{array}\right\}\text{KOMPLEMENTARITA}
$$

(K3) $\overline{(\bar{a})} = a$ INVOLUTORNOST

(K4) $\overline{a + b} = \bar{a}\cdot\bar{b}$ $\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$ DE MORGANOVY ZÁKONY

Poznámka. Jednotlivá tvrzení věty nejsou nezávislá - je třeba na ně pohlížet jako na shrnutí vlastností, které již byly odvozeny dříve (nejedná se tedy o soustavu axiomů).

1.5. Reprezentace Booleových algeber

Pojem Booleovy algebry bývá často zužován na speciální případ dvouprvkové algebry s prvky 0 a 1, známé z tzv. výrokové logiky. V tomto odstavci se věnujeme otázce charakterizace konečných Booleových algeber a ukážeme si, že strukturu všech "bohatších" konečných Booleových algeber lze jistým způsobem jednoduše vyjádřit pomocí algebry dvouprvkové.

Definice. Nechť A je Booleova algebra. Prvek $a \in A$ takový, že pro každý nenulový prvek $x \in A$ platí

$$x \wedge a = a \quad \text{nebo} \quad x \wedge a = 0 \ ,$$

se nazývá atom algebry A.

Poznámka. Věta 1.2.4 (resp. poznámka za ní) nám umožňuje formulovat definici atomu ekvivalentně - a možná názorněji - pomocí relace uspořádání: atom algebry A je takový prvek $a \in A$, že pro každý $x \in A$ s ním srovnatelný platí $0 \prec a \preceq x$.

Jinými slovy, mezi a a 0 již neexistuje žádný prvek algebry A. Uvědomíme-li si nyní definici relace $\dot{\prec}$ bezprostředního předcházení, máme odvozeno následující

Tvrzení. Prvek $a \in A$ je atomem Booleovy algebry A právě když $0 \dot{\prec} a$.

Příklad. V Booleově algebře $2^{\{a,b,c\}}$ (viz obr. 1.2.4) jsou atomy prvky $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$.

Poznámka. V libovolné Booleově algebře (tj. bez předpokladu konečnosti) obecně nelze existenci atomů zaručit.

Následující věta ukazuje základní vlastnost atomů: jsou to (spolu s nulovým prvkem) jediné prvky Booleovy algebry, které nelze zapsat ve tvaru spojení dvou jiných různých nenulových prvků.

Věta 1.5.1. Nechť A je konečná Booleova algebra a $x \in A$. Pak v A existují nenulové prvky $y \neq z$ takové, že $y \neq x \neq z$ a $x = y \vee z$ právě když x není nulový prvek ani atom algebry A .

Důkaz. 1. Je-li x nulový prvek nebo atom, pak takové prvky y, z zřejmě neexistují, neboť z podmínky $x = y \vee z$, $z \neq x \neq y$, by vyplývalo $0 \neq y \prec x$, což není možné.

2. Nechť naopak x není nulový prvek ani atom. Pak existuje prvek $a \in A$ tak, že $0 \dot{\prec} a \prec x$ a odtud

$$x = x \wedge 1 = x \wedge (a \vee \bar{a}) = (x \wedge a) \vee (x \wedge \bar{a}) = a \vee (x \wedge \bar{a}),$$

takže položíme-li $y = a$ a $z = (x \wedge \bar{a})$, platí $x = y \vee z$. Protože zřejmě $0 \neq y \neq x$, zbývá dokázat, že $0 \neq z \neq x$ a $y \neq z$. Kdyby $z = 0$, tj. $x \wedge \bar{a} = 0$, tak by platilo

$$a = 0 \vee a = (x \wedge \bar{a}) \vee a = (x \vee a) \wedge (\bar{a} \vee a) = x \wedge 1 = x,$$

což není možné. Obdobně z předpokladu $z = x$, tj. $x \wedge \bar{a} = x$, vyplývá

$$a = x \wedge a = (x \wedge \bar{a}) \wedge a = x \wedge (\bar{a} \wedge a) = x \wedge 0 = 0 ,$$

což opět nelze. Konečně, kdyby $y = z$, tj. $a = x \wedge \bar{a}$, tak by

$$a = a \wedge a = (x \wedge \bar{a}) \wedge a = x \wedge (\bar{a} \wedge a) = 0,$$

což je opět spor.

Následující věta ukazuje důležitost atomů - pomocí nich je totiž možno vyjádřit všechny nenulové prvky algebry A .

Věta 1.5.2. Buď $x \neq 0$ libovolný prvek konečné Booleovy algebry A . Pak platí

$$x = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n ,$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_n$ jsou všechny atomy algebry A , pro něž $a_i \preccurlyeq x$, $i = 1, \dots, n$.

Důkaz. 1. Je-li x atomem, pak triviálně $n = 1$ a $x = a_1$; předpokládejme tedy, že x atomem není. Podle věty 1.5.1 lze x zapsat ve tvaru $x = y \vee z$, kde $y \prec x$ a $z \prec x$. Jsou-li y i z atomy, jsme hotovi; v opačném případě můžeme na ten z nich, který není atomem (případně na oba), znovu aplikovat větu 1.5.1 - vzhledem ke konečnosti algebry A po konečném počtu kroků nutně dostaneme n-tici atomů $a_1, \dots, a_n$ takovou, že

$$x = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n .$$

Zbývá dokázat, že v získaném vyjádření se skutečně vyskytnou všechny atomy, které jsou srovnatelné s x. Nechť tedy $a \prec x$ je atom - dokážeme, že a musí být jedním z atomů $a_1, \dots, a_n$. Zřejmě platí

$$a = a \wedge x = a \wedge (a_1 \vee \dots \vee a_n) = (a \wedge a_1) \vee \dots \vee (a \wedge a_n)$$

a výraz vpravo je nenulový právě když $a = a_i$ pro některé $i = 1, \dots, n$.

Věta 1.5.3 (Stoneova věta o reprezentaci). Nechť A je konečná Booleova algebra a M je množina všech jejích atomů. Pak je algebra A izomorfní s množinovou algebrou 2^M.

Důkaz. Zobrazení $f\colon A \to 2^M$ definujeme takto:

$$f(0) = \emptyset ,$$

$$f(x) = \{a \in M;\ a \preccurlyeq x\} \quad \text{pro} \quad x \neq 0 .$$

Z věty 1.5.2 vyplývá, že takto definované zobrazení je bijektivní (tj. prosté a na); k dokončení důkazu zbývá ukázat, že f je srovnatelné, tj. že pro každé prvky $x, y \in A$ platí

$$f(x \vee y) = f(x) \cup f(y) ,$$

$$f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y) ,$$

$$f(\bar{x}) = \overline{f(x)} .$$

Označme $f(x) = \{a_{x,1}, \ldots, a_{x,m}\}$ a $f(y) = \{a_{y,1}, \ldots, a_{y,n}\}$. Pak platí

$$x = a_{x,1} \vee \ldots \vee a_{x,m}$$

a

$$y = a_{y,1} \vee \ldots \vee a_{y,n}$$

a tedy

$$x \vee y = a_{x,1} \vee \ldots \vee a_{x,m} \vee a_{y,1} \vee \ldots \vee a_{y,n} ,$$

neboli

$$f(x \vee y) = f(x) \cup f(y) .$$

Obdobně je

$$\begin{aligned} x \wedge y &= (a_{x,1} \vee \ldots \vee a_{x,m}) \wedge (a_{y,1} \vee \ldots \vee a_{y,n}) = \\ &= (a_{x,1} \wedge a_{y,1}) \vee \ldots \vee (a_{x,1} \wedge a_{y,n}) \vee \ldots \\ &\quad \ldots \vee (a_{x,m} \wedge a_{y,1}) \vee \ldots \vee (a_{x,m} \wedge a_{y,n}) . \end{aligned}$$

Protože ale průsek dvou různých atomů je nulový, dostáváme napravo spojení těch atomů, které jsou současně v $f(x)$ i v $f(y)$, takže

$$f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y) .$$

Pro důkaz třetí rovnosti použijeme stejného označení pro

$y = \bar{x}$. Pak $x \vee y = 1$, odkud $f(x \vee y) = f(1) = M$; obdobně $f(x \wedge y) = f(0) = \emptyset$. Podle předchozích dvou částí však současně $f(x \vee y) = f(x) \cup f(y)$ a $f(x \wedge y) = f(x) \cap f(y)$, odkud

$$f(x) \cup f(y) = M \quad \text{a} \quad f(x) \cap f(y) = \emptyset \ ,$$

neboli

$$f(\bar{x}) = f(y) = \overline{f(x)} \ .$$

Důkaz vlastností srovnatelného zobrazení pro případ, že $x = 0$ nebo $y = 0$, je triviální.

Důsledky. 1. Dvě konečné Booleovy algebry se stejným počtem prvků jsou izomorfní.

2. Konečná Booleova algebra má 2^n prvků, kde n je počet jejích atomů.

Větou 1.5.3 jsou plně popsány všechny konečné Booleovy algebry. Označme B_n Booleovu algebru, mající n prvků. Pomineme-li triviální případ jednoprvkové algebry $2^{\emptyset}$, pak nejmenší zajímavý případ bude dvouprvková algebra $B_2 = \{0, 1\}$. Tato algebra je izomorfní se známou "výrokovou algebrou", jejíž Hasseův diagram je na obr. 1.5.1 (a) a operace v ní jsou definovány tabulkami

$\vee$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\wedge$	0	1
0	0	0
1	0	1

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

.

Nejbližší větší algebra je čtyřprvková B_4 , jejíž Hasseův diagram je na obr. 1.5.1 (b) a operace jsou dány tabulkami

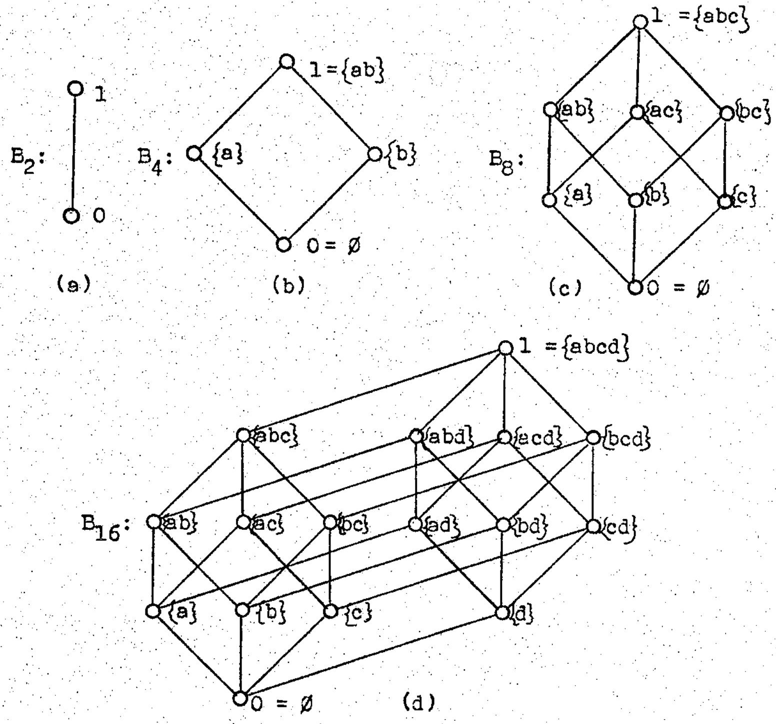
$\vee$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

$\wedge$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

x	$\bar{x}$
0	1
a	b
b	a
1	0

.

Hasseovy diagramy osmiprvkové Booleovy algebry B_8 (se třemi atomy $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$) a šestnáctiprvkové algebry B_{16} (se čtyřmi atomy) jsou na obr. 1.5.1 (c), (d) .



obr. 1.5.1

Poznamenejme, že Hasseův diagram algebry B_{2^k} se nazývá <u>k-rozměrná krychle</u> (na obr. 1.5.1 je vidíme pro $k = 1,2,3,4$).

Mějme nyní dvě Booleovy algebry $(A_1, \vee_1, \wedge_1, {}^{-1})$ a $(A_2, \vee_2, \wedge_2, {}^{-2})$ a definujme na kartézském součinu $A_1 \times A_2$ operace spojení, průseku a doplňku takto:

$$(x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2) = (x_1 \wedge_1 y_1 , x_2 \wedge_2 y_2) ,$$
$$(x_1, x_2) \vee (y_1, y_2) = (x_1 \vee_1 y_1 , x_2 \vee_2 y_2) ,$$
$$\overline{(x_1, x_2)} = (\overline{x}_1^{1} , \overline{x}_2^{2}).$$

Snadno se ukáže, že množina $A_1 \times A_2$ s takto definovanými operacemi je Booleova algebra (důkaz ponecháme čtenáři jako cvičení). Takto definovaná Booleova algebra se nazývá <u>direktní součin</u> algeber A_1, A_2 a značí se $A_1 \times A_2$. Je-li A Booleova algebra, pak r-násobný direktní součin $A \times \ldots \times A$ značíme A^r.

<u>Příklad.</u> Booleova algebra $B_8 = 2^{\{a,b,c\}}$ je izomorfní s direktním součinem $A = \{\emptyset, \{a\}\} \times \{\emptyset, \{b\}\} \times \{\emptyset, \{c\}\}$; příslušný izomorfismus je definován tabulkou:

x	$(\emptyset,\emptyset,\emptyset)$	$(\{a\},\emptyset,\emptyset)$	$(\emptyset,\{b\},\emptyset)$	$(\emptyset,\emptyset,\{c\})$	$(\{a\},\{b\},\emptyset)$	$(\{a\},\emptyset,\{c\})$	$(\emptyset,\{b\},\{c\})$	$(\{a\},\{b\},\{c\})$
$f(x)$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$	$\{a,b,c\}$

Protože však každá z algeber $\{\emptyset, \{a\}\}$, $\{\emptyset, \{b\}\}$, $\{\emptyset, \{c\}\}$ je izomorfní s B_2, dostáváme, že $B_8 = B_{2^3}$ je izomorfní s $(B_2)^3$. V obecném případě obdobná úvaha vede k následujícímu tvrzení:

<u>Věta 1.5.4.</u> 1. Booleova algebra B_{2^r} je izomorfní s algebrou $(B_2)^r$.

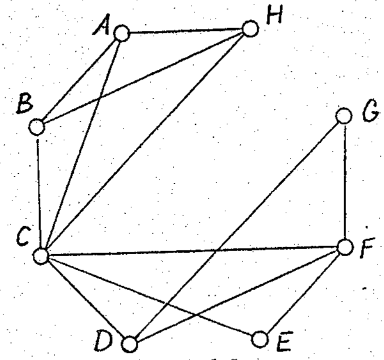
2. Pro každou konečnou Booleovu algebru A existuje číslo r takové, že A je izomorfní s algebrou $(B_2)^r$.

V následujícím odstavci (a ve většině zbývající části těchto skript) se budeme zabývat studiem další matematické struktury - grafů. Doporučujeme čtenáři, aby si uvědomil, že teorie grafů, zejména v její části, zabývající se srovnáváním (morfismy) grafů, je dalším příkladem obecného schematu, naznačeného v odstavci 1.3.

1.6 Grafy

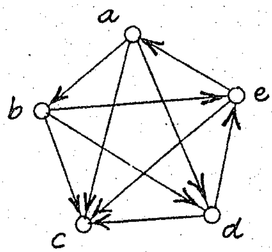
Začněme dvěma příklady.

Příklad první - společenský. Na večírku se sešlo 8 osob: Alena, Božena, Cyril, David, Eva, František, Gustav a Helena. Alena, Božena, Cyril a Helena jsou spolužáci, David, František a Gustav společně hrají volejbal, Eva je manželka Františka, Cyril se zná s Evou a Františkem z lyžařského kursu a s Davidem z šachového kroužku. Přiřadíme-li každé osobě našeho večírku bod v rovině a vyznačíme-li skutečnost, že dvě osoby se znají, spojnicí těchto bodů, obdržíme obrázek, z něhož je ihned patrná struktura naší společnosti - - například ihned vidíme, že klíčovou úlohu na večírku má Cyril: selže-li, pak se společnost rozpadne na dvě skupiny.



obr. 1.6.1.

Příklad druhý - sportovní. Pět přátel hraje systémem "každý s každým" tenisový turnaj a výsledky zápasů zaznamenávají tak, že každému hráči přiřadí jeden bod a sehraný zápas znázorní šipkou od vítěze k poraženému. Jeden z možných výsledků



obr. 1.6.2.

takového sportovního zápolení vidíme na obr. 1.6.2.

V těchto a mnoha dalších situacích se setkáváme s objektem, zvaným <u>graf</u>, skládajícím se z konečné množiny "bodů", jimž budeme říkat <u>uzly</u>, a ze spojnic těchto uzlů, jimž budeme říkat <u>hrany</u>; může přitom jít o <u>neorientované hrany</u> jako v obr. 1.6.1 nebo o <u>orientované hrany</u> jako v obr. 1.6.2. Každá neorientovaná hrana je plně popsána "neuspořádanou dvojicí" uzlů u, v, které spojuje, tj. přesněji dvouprvkovou množinou svých koncových uzlů $\{u,v\}$; obdobně každá orientovaná hrana je plně popsána uspořádanou dvojicí (u,v) svých koncových uzlů. V některých aplikacích se můžeme též setkat s hranou, která začíná i končí v témž uzlu u (situace, kdy prvek systému sám sebe ovlivňuje, v dopravních úlohách přeprava uvnitř města apod); taková hrana se nazývá <u>smyčka</u> a může být podle povahy problému neorientovaná (pak ji popíšeme uzlem u, k němuž je připojena), nebo orientovaná (a pak ji popíšeme uspořádanou dvojicí (u,u)).

Po těchto předběžných úvahách jsme připraveni na následující definici.

<u>Definice.</u> Buď U konečná množina. Označme:

$\binom{U}{2} = \left\{\{u,v\};\ u,v \in U\right\}$ množinu všech dvouprvkových částí množiny U,

U^2 kartézský součin $U \times U = \left\{(u,v);\ u,v \in U\right\}$, tj. množinu všech uspořádaných dvojic prvků z U.

<u>Graf</u> je uspořádaná dvojice $G = (U,H)$, kde $H \subset \binom{U}{2} \cup U^2 \cup U$.

Množina $H \cap \binom{U}{2}$ se nazývá množina neorientovaných hran grafu G.

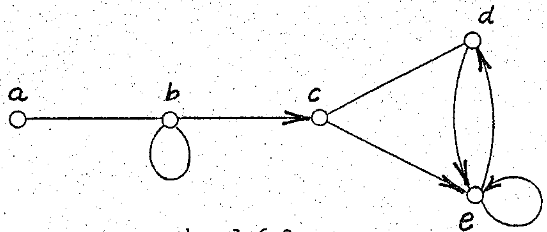
Množina $H \cap U^2$ se nazývá množina orientovaných hran grafu G.

Množina $H \cap U$ se nazývá množina neorientovaných smyček grafu G.

Množina $H \cap \{(u,u);\ u \in U\}$ se nazývá množina orientovaných smyček grafu G.

Jsou-li dva uzly $u,v \in U$ spojeny hranou h, říkáme, že u,v jsou _sousední_ ; říkáme, že hrana h tyto uzly _obsahuje_ nebo že s nimi _inciduje_. Je-li h orientovaná hrana, tj. $h = (u,v)$, pak uzel u (resp. v) se nazývá _počáteční_ (resp. _koncový_) uzel hrany h; šipka na obrázku směřuje od u k v.

Příklad.



obr. 1.6.3.

Pro graf G na obr. 1.6.3 je:

množina uzlů $U = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$,

množina hran $H = \{\{a,b\},\{c,d\},(b,c),(c,e),(d,e),(e,d),(e,e),b\}$,

množina neorientovaných hran $H \cap \binom{U}{2} = \{\{a,b\},\ \{c,d\}\}$,

množina orientovaných hran $H \cap U^2 = \{(b,c),(c,e),(d,e),(e,d),(e,e)\}$,

množina neorientovaných smyček $H \cap U = \{b\}$,

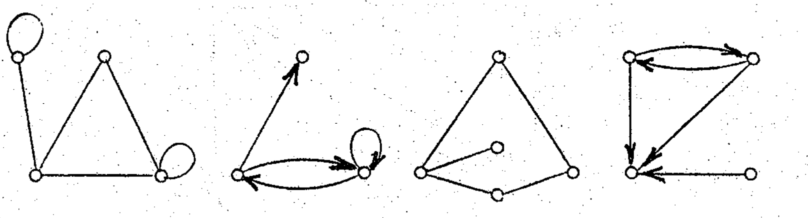
množina orientovaných smyček $H \cap \{(u,u);\ u \in U\} = \{(e,e)\}$.

Definice. Graf $G = (U,H)$ se nazývá _neorientovaný graf_, jestliže $H \subset \binom{U}{2} \cup U$, orientovaný graf, jestliže $H \subset U^2$,

obyčejný neorientovaný graf, jestliže $H \subset \binom{U}{2}$,

obyčejný orientovaný graf, jestliže $H \subset U^2 \setminus \{(u,u);\ u \in U\}$.

Příklad. Na obr. 1.6.4 a, b, c, d vidíme příklady neorientovaného grafu, orientovaného grafu, obyčejného neorientovaného grafu a obyčejného orientovaného grafu.



a) b) c) d)

obr. 1.6.4.

Příklad. Uvažujme elektrický obvod na obr. 1.6.5 a) . Chceme-li popsat kombinatorickou strukturu propojení jednotlivých prvků obvodu, obdržíme objekt, znázorněný na obr. 1.6.5 b),

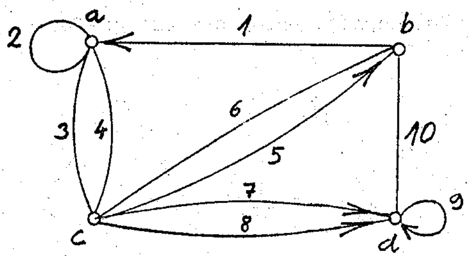
a) b)

obr. 1.6.5.

jenž není grafem, neboť uzly u_2, u_3 jsou spojeny dvojicí hran, což naše definice grafu nepřipouští. Takovéto hrany se nazývají paralelní hrany a objekt na obr. 1.6.5 b) je příkladem obecnější struktury, nazývané multigraf.

Definice. Multigraf G je uspořádaná trojice $G = (U,H,\varepsilon)$, kde U, H jsou konečné množiny a $\varepsilon : H \to \binom{U}{2} \cup U^2 \cup U$ je zobrazení. Zobrazení ε se nazývá zobrazení incidence.

Příklad.



$U = \{a,b,c,d\}$, $H = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $\varepsilon(1) = (b,a)$, $\varepsilon(2) = \{a\}$, $\varepsilon(3) = \{a,c\}$, $\varepsilon(4) = \{a,c\}$, $\varepsilon(5) = (c,b)$, $\varepsilon(6) = \{c,b\}$, $\varepsilon(7) = (c,d)$, $\varepsilon(8) = (c,d)$, $\varepsilon(9) = (d,d)$, $\varepsilon(10) = \{b,d\}$. Všimněme si, že zobrazení ε není prosté: je $\varepsilon(3) = \varepsilon(4)$ a $\varepsilon(7) = \varepsilon(8)$.

Věta 1.6.1. Multigraf je grafem právě když ε je prosté zobrazení.

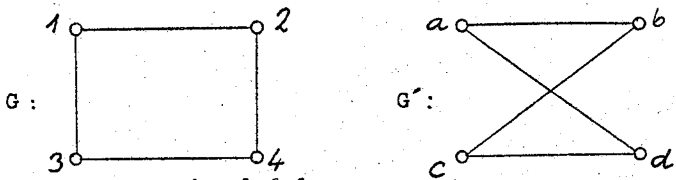
Důkaz věty je zřejmý.

Poznámky. 1. Terminologie není v literatuře zcela jednotná. Někteří autoři pod pojmem "graf" rozumějí multigraf a graf ve smyslu naší definice nazývají na základě věty 1.1 "prostý graf", jiní grafem rozumějí strukturu, kterou my nazýváme obyčejný graf atd. Při čerpání z knižní literatury je tedy nezbytné se u každé publikace seznámit s definicemi jednotlivých pojmů. Autoři časopiseckých článků terminologické problémy většinou řeší odkazem na některou ze základních monografií o teorii grafů.

2. Množina hran orientovaného grafu $G = (U,H)$ je podmnožina kartézského součinu $U \times U$, tj. binární relace na U; množina hran obyčejného orientovaného grafu je antireflexivní relace na U. Obdobně lze každému neorientovanému grafu náhradou každé jeho hrany dvojicí opačně orientovaných hran přiřadit symetrickou relaci; obyčejnému neorientovanému grafu takto odpovídá symetrická antireflexivní relace. Vidíme tedy, že grafy jsou vhodným nástrojem ke studiu relačních struktur.

3. V dalším textu se pro jednoduchost omezíme na grafy.

Nechť $G = (U,H)$ a $G' = (U', H')$ jsou dva grafy. Pak rovnost $G = G'$ přirozeně znamená $U = U'$ a $H = H'$, tj. dva grafy jsou si rovny, mají-li stejné množiny uzlů a hran.



obr. 1.6.6.

Grafy G, G' na obr. 1.6.6 si v tomto smyslu rovny nejsou, neboť $U(G) = \{1,2,3,4\}$, zatímco $U(G') = \{a,b,c,d\}$ [1]. Oba grafy však přesto představují jen "jiné nakreslení téhož obrázku" (v překřížení hran $\{a,d\}$, $\{b,c\}$ není uzel!). Snadno zjistíme, že uzly obou grafů si lze vzájemně jednoznačně přiřadit tak, aby dvojici uzlů spojených hranou odpovídala opět dvojice uzlů spojených hranou - existuje tedy

[1]) Symbolem $U(G)$, resp. $H(G)$ budeme značit množinu uzlů, resp. hran grafu G.

srovnatelné (strukturu zachovávající) zobrazení U(G) do U(G´).

<u>Definice.</u> Buďte G a G´ grafy. Zobrazení $f:U(G)\to U(G')$ se nazývá <u>homomorfismus</u> grafu G do grafu G´, jestliže platí

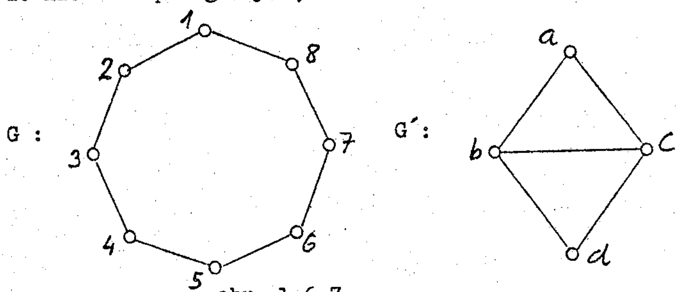
$$(x,y)\in H(G) \Rightarrow (f(x),f(y)) \in H(G') \quad \text{a}$$

$$\{x,y\}\in H(G) \Rightarrow \{f(x),f(y)\} \in H(G') \ .$$

Zkráceně píšeme $f:G\to G'$.

<u>Příklad.</u> 1. Pro grafy G, G´ na obr. 1.6.6 definujme $f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$, $f(4) = d$.

2. Ale také pro grafy G, G´ na obr. 1.6.7 je zobrazení



obr. 1.6.7.

$f: U(G)\to U(G')$, definované tabulkou

u	1	2	3	4	5	6	7	8
f(u)	a	b	c	b	c	a	b	c

,

homomorfismem G do G´. Vyšetříme tedy otázku podrobněji.

<u>Definice.</u> Nechť $f:U\to U'$. Pak zobrazení

$f^+: \binom{U}{2} \cup U^2 \cup U \to \binom{U'}{2} \cup U'^2 \cup U'$, definované vztahy

$$f^+(\{u,v\}) = \{f(u),f(v)\} \quad ,$$

$$f^+((u,v)) = (f(u),f(v)) \quad ,$$

$$f^+(\{u\}) = \{f(u)\}$$

nazveme zobrazením <u>indukovaným</u> zobrazením f.

Poznámka. $f:U(G) \longrightarrow U(G')$ je homomorfismus právě když pro každou hranu $h \in H(G)$ je $f^+(h) \in H(G')$.

Definice. Buďte G, G' grafy, $f: G \to G'$ homomorfismus. f se nazývá:

uzlový monomorfismus, je-li f prosté zobrazení,
uzlový epimorfismus, je-li f zobrazení na $U(G')$,
hranový monomorfismus, je-li f^+ prosté zobrazení,
hranový epimorfismus, je-li f^+ zobrazení na $H(G')$,
monomorfismus, je-li f i f^+ prosté zobrazení,
epimorfismus, je-li f i f^+ zobrazení na,
izomorfismus, jsou-li f i f^+ prostá a na.

Existuje-li izomorfismus $f: G \to G'$, pak se snadno dokáže, že existuje inverzní zobrazení $f^{-1}: G' \to G$ a je též izomorfismem. V tomto případě říkáme, že G a G' jsou izomorfní a značíme $G \simeq G'$.

Příklady. 1. Buďte G, G' grafy z obr. 1.6.7.

a) Zobrazení $f_1:U(G) \longrightarrow U(G')$, definované předpisem

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1(u)$	a	b	c	b	c	a	b	c

,

je homomorfismem G do G' a nemá žádné další vlastnosti.

b) Zobrazení $f_2: U(G) \longrightarrow U(G')$, definované

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_2(u)$	a	b	c	d	c	a	b	c

,

je homomorfismem G do G', není monomorfismem uzlovým ani hranovým, je uzlovým epimorfismem, není hranovým epimorfismem.

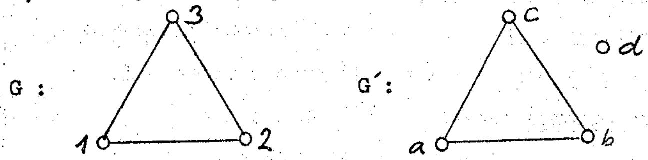
c) Zobrazení f_3: $U(G) \longrightarrow U(G')$, definované

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_3(u)$	a	b	d	c	a	b	c	b

,

je homomorfismem G do G´, není monomorfismem uzlovým ani hranovým, ale je uzlovým i hranovým epimorfismem, tj. je epimorfismem.

2. Najděte $f: G \longrightarrow G'$ tak, aby f byl hranový epimorfismus, ale nebyl uzlový epimorfismus. Řešení:



$f(1) = a$, $f(2) = b$, $f(3) = c$.

<u>Definice.</u> Uzel $u \in U(G)$ se nazývá <u>izolovaný uzel</u> grafu G, jestliže u neinciduje s žádnou hranou $h \in H(G)$.

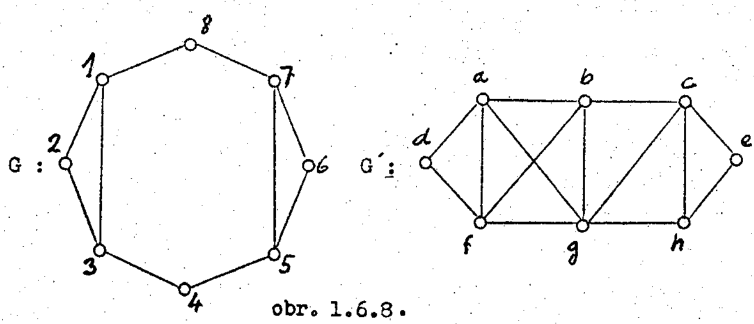
<u>Věta 1.6.2.</u> Jestliže G´ nemá izolované uzly, pak každý hranový epimorfismus $f: G \to G'$ je uzlový epimorfismus.

<u>Důkaz.</u> Nechť $u' \in U(G')$. Protože u´ není izolovaný, existuje hrana $[u',v'] \in H(G')$ (orientovaná nebo neorientovaná), ale f^+ je zobrazení na a tedy tato hrana je obrazem nějaké hrany $[u,v] \in H(G)$. Pak ale nutně $u' = f(u)$ nebo $u' = f(v)$.

<u>Příklad.</u> Pro grafy G, G´ na obr. 1.6.8 definujme zobrazení f_1: $U(G) \longrightarrow U(G')$ předpisem

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_1(u)$	a	f	b	a	d	a	f	b

.



obr. 1.6.8.

Pak f_1 je pouze homomorfismem G do G'.

Zobrazení f_2: $G \longrightarrow G'$, definované

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_2(u)$	a	d	f	b	g	h	c	b

,

je homomorfismem G do G', je hranovým monomorfismem, ale není uzlovým monomorfismem.

Zobrazení f_3: $G \longrightarrow G'$, definované

u	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_3(u)$	a	d	f	b	c	e	h	g

,

je homomorfismem G do G', je monomorfismem (tj. uzlovým i hranovým), je uzlovým epimorfismem, ale není hranovým epimorfismem (a tedy není izomorfismem).

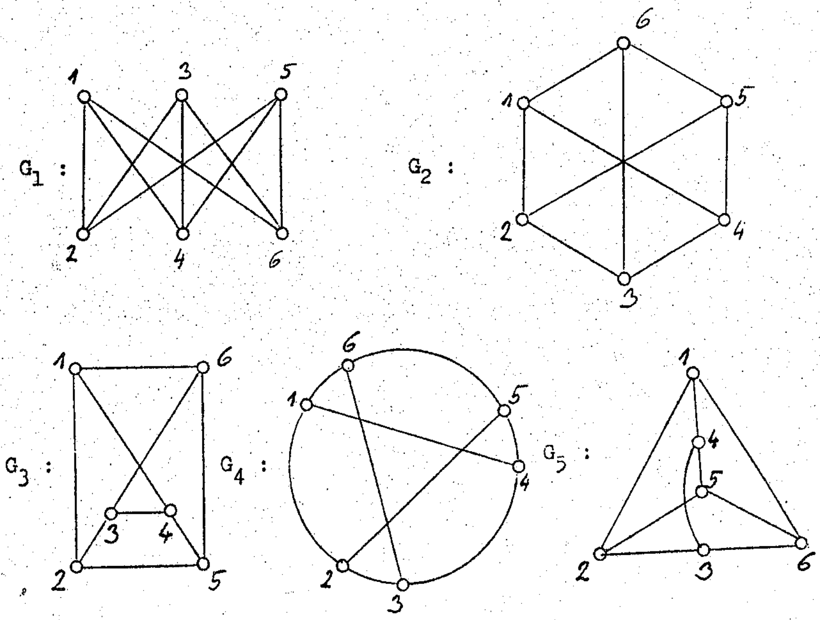
<u>Věta 1.6.3.</u> Nechť $f: G \longrightarrow G'$ je uzlový monomorfismus. Pak f je hranový monomorfismus.

<u>Důkaz.</u> Kdyby f nebyl hranový monomorfismus, tak by pro některé dvě hrany $[u_1, v_1]$, $[u_2, v_2] \in H(G)$ (orientované nebo neorientované) bylo $f^+([u_1,v_1]) = f^+([u_2,v_2])$, odkud nutně $f(u_1) = f(u_2)$ nebo $f(u_1) = f(v_2)$.

<u>Poznámka.</u> Relace "G je izomorfní s G'" je reflexivní, symetrická a tranzitivní, tj. je ekvivalencí na množině všech

konečných grafů. Rozlišení, zda dva grafy náleží téže třídě ekvivalence, však nemusí být vždy snadnou záležitostí.

<u>Příklad.</u> Které z grafů $G_1, \ldots, G_5$ na obr. 1.6.9 jsou izomorfní?



obr. 1.6.9.

(všechny - uzly, jež si odpovídají, jsou shodně očíslovány)

2. Neorientované grafy

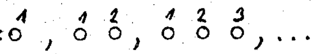
V této kapitole, nebude-li řečeno jinak, termín "graf" znamená <u>obyčejný neorientovaný graf</u>.

2.1. Stupeň uzlu; souvislost, komponenty grafu.

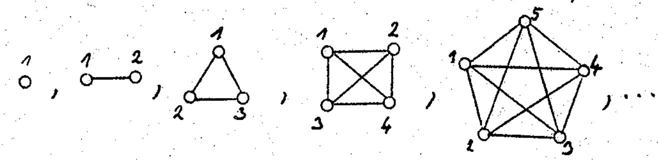
Nejprve si zavedeme označení pro některé speciální neorientované grafy, které budeme dále často používat.

<u>Prázdný graf</u>: $D_\emptyset = (\emptyset, \emptyset)$.

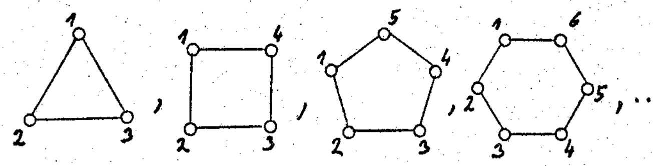
<u>Diskrétní graf</u> na n uzlech $(n \geqq 1)$: $D_n = (\langle 1,n\rangle, \emptyset)$.

D_n: 

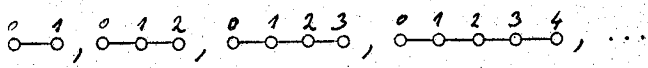
<u>Úplný graf</u> na n uzlech $(n \geqq 1)$: $K_n = \left(\langle 1,n\rangle, \binom{\langle 1,n\rangle}{2}\right)$.

K_n: 

<u>Kružnice</u> délky $n \geqq 3$: $C_n = (\langle 1,n\rangle, \{\{i,i+1\}; i \in \langle 1,n)\} \cup \{\{1,n\}\})$.

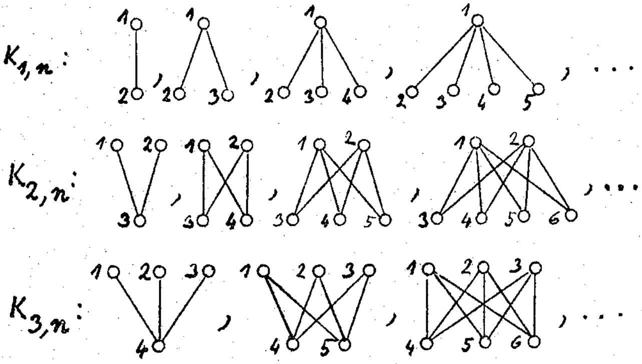
C_n: 

<u>Cesta</u> délky $n \geqq 1$: $P_n = (\langle 0,n\rangle, \{\{i,i+1\} ; i \in \langle 0,n-1\rangle\})$.

P_n: 

Úplný sudý (bipartitní) graf $K_{m,n}$ pro $m \geqq 1$, $n \geqq 1$:

$$K_{m,n} = (\langle 1, m+n \rangle , \{ \{i,j\} \ ; \ 1 \leqq i \leqq m \ , \ m+1 \leqq j \leqq m+n \}) \ .$$



Definice. Buď G graf, $u \in U(G)$ jeho uzel. Uzlové okolí uzlu u je množina uzlů $U(u) = \{ v \in U(G); \{u,v\} \in H(G) \}$, hranové okolí uzlu u je množina hran $H(u) = \{ \{u,v\} \ ; \ v \in U(G) \} \cap H(G)$, stupeň uzlu u v grafu G je číslo $d_G(u) = |H(u)|$. [1]

Poznámky. 1. $U(u)$ je množina všech uzlů, jež jsou spojeny hranou s uzlem u, $H(u)$ je množina všech hran, jež obsahují u. Stupeň uzlu je roven počtu hran, jež jej obsahují.

2. Též platí $d_G(u) = |U(u)|$, ale pouze v obyčejném grafu.

3. Pro každý uzel $u \in U(G)$ platí $0 \leqq d_G(u) \leqq |U(G)| - 1$.

Věta 2.1.1. Pro každý graf G platí

$$\sum_{u \in U(G)} d_G(u) = 2 \, |H(G)| \ .$$

---

[1] Symbolem $|M|$ značíme počet prvků konečné množiny M .

Důkaz: indukcí podle $h = |H(G)|$.

1. Pro h=0 je tvrzení věty zřejmé.

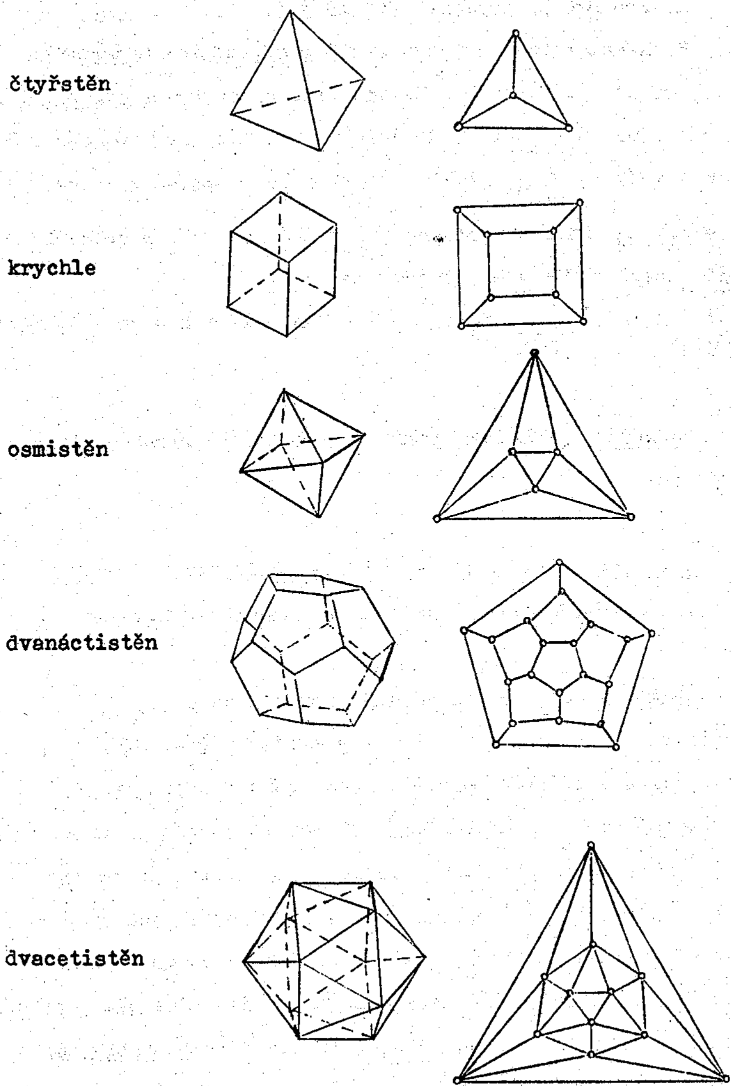
2. Nechť věta platí pro každý graf, mající nejvýše h-1 hran; nechť $|H(G)| = h$. Zvolme libovolnou hranu $\{u_1,u_2\} \in H(G)$ a definujme $G' = (U(G), H(G) \setminus \{u_1,u_2\})$. Graf G' má h-1 hran a tedy $\sum_{u \in U(G')} d_{G'}(u) = 2(h-1)$. Vzhledem k tomu, že uzly u_1, u_2 mají v G stupeň o 1 větší než v G' a ostatní uzly mají stupně v G i v G' stejné, je

$$\sum_{u \in U(G)} d_G(u) = \sum_{u \in U(G')} d_{G'}(u) + 2 = 2(h-1) + 2 = 2h = 2|H(G)| .$$

Důsledek. V každém grafu je počet uzlů lichého stupně sudé číslo.

Definice. Graf G se nazývá pravidelný graf stupně k, jestliže existuje číslo k takové, že $u \in U(G) \Rightarrow d_G(u) = k$.

Příklady. K_n je pravidelný graf stupně n-1, C_n je pravidelný graf stupně 2, D_n je pravidelný graf stupně 0. Jiné zajímavé příklady pravidelných grafů nám poskytují pravidelné konvexní mnohostěny, známé již starořeckému filosofovi Platónovi: pravidelný konvexní mnohostěn je takový konvexní mnohostěn, jehož všechny stěny jsou shodné pravidelné konvexní mnohoúhelníky a v němž z každého vrcholu vychází tentýž počet hran. Lze dokázat, že existuje právě pět pravidelných konvexních mnohostěnů - jsou to tzv. platónovská tělesa: pravidelný čtyřstěn, krychle, pravidelný osmistěn, pravidelný dvanáctistěn a pravidelný dvacetistěn. Přiřadíme-li každému vrcholu mnohostěnu uzel grafu a každé hraně hranu grafu, obdržíme pravidelné grafy na obr. 2.1.1.



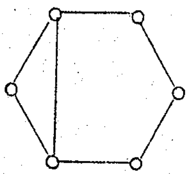
obr. 2.1.1.

Pro pravidelný graf je charakteristické, že všechny uzly mají stejný stupeň. Jakýmsi opakem by byl graf, v němž naopak žádné dva uzly nemají stejný stupeň. Po krátké úvaze zjistíme, že takový graf neexistuje, má-li mít alespoň dva uzly: kdyby existoval a měl n uzlů, tak by stupně jeho uzlů musely být $n-1, n-2, \ldots, 2, 1, 0$ a odstraněním uzlu stupně 0 bychom obdrželi graf s $n-1$ uzly a s uzlem stupně $n-1$, což není možné. Tato situace navozuje následující otázku: kdy existuje graf, jehož stupně uzlů jsou rovny předem zadaným číslům.

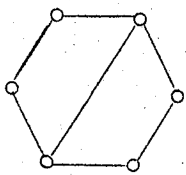
<u>Definice.</u> Nechť $|U(G)| = n$. Očíslujme uzly grafu G tak, že $d_G(u_1) \geqq d_G(u_2) \geqq \ldots \geqq d_G(u_n)$. Konečná nerostoucí posloupnost $d_G(u_1), d_G(u_2), \ldots, d_G(u_n)$ se nazývá <u>soubor stupňů</u> grafu G.

Ihned je vidět, že jsou-li G_1, G_2 izomorfní, pak mají stejné soubory stupňů. Grafy G_1, G_2 na obr. 2.1.2 ukazují, že obrácené tvrzení neplatí: je $G_1 \not\cong G_2$ a oba grafy mají stejný soubor stupňů 3, 3, 2, 2, 2, 2.

G_1 :



G_2 :



obr. 2.1.2.

<u>Definice.</u> Řekneme, že konečná nerostoucí posloupnost celých nezáporných čísel je <u>grafová posloupnost</u>, jestliže existuje graf, jehož je tato posloupnost souborem stupňů.

<u>Věta 2.1.2.</u> Nechť je dána posloupnost celých nezáporných čísel $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_n$, $1 \leq s_1 \leq n-1$, $n \geq 2$. Pak je posloupnost

$$s_1, s_2, \dots, s_n \qquad \dots(1)$$

grafová právě když je grafová posloupnost

$$s_2-1, s_3-1, \dots, s_{s_1+1}-1, s_{s_1+2}, \dots, s_n . \qquad \dots(2)$$

<u>Důkaz.</u> 1. Je-li (2) grafová posloupnost, pak připojíme-li ke grafu, jehož je (2) souborem stupňů, nový uzel u_1 a nové hrany $\{u_1, u_i\}$ pro $i = 2, \dots, s_1+1$, obdržíme graf, jehož souborem stupňů je posloupnost (1).

2. Nechť naopak (1) je grafová, tj. existuje graf G tak, že $|U(G)| = n$ a $d_G(u_i) = s_i$ pro $i = 1, \dots, n$.

a) Jestliže $\{u_1, u_i\} \in H(G)$ pro $i = 2, \dots, s_1+1$, pak graf $G' = (U(G) \setminus \{u_1\}, H(G) \setminus \{\{u_1, u_i\} ; i = 2, \dots, s_1+1\})$ má soubor stupňů (2) a jsme hotovi.

b) Jestliže nejsou všechny hrany $\{u_1, u_i\}$ pro $i = 2, \dots, s_1+1$ v H(G), pak pro některé i, $2 \leq i \leq s_1+1$, je $\{u_1, u_i\} \notin H(G)$; nutně tedy též $\{u_1, u_j\} \in H(G)$ pro některé $j \in \langle s_1+2, n \rangle$. Z grafu G sestrojíme graf G′ následující konstrukcí:

α) je-li $s_i = s_j$, pak zaměníme očíslování uzlů u_i, u_j ;

β) je-li $s_i > s_j$, pak najdeme uzel u_k, který sousedí s u_i, ale nesousedí s u_j, z H(G) vyjmeme hrany $\{u_i, u_k\}$ a $\{u_1, u_j\}$ a přidáme hrany $\{u_1, u_i\}$ a $\{u_j, u_k\}$.

V obou případech jsme obdrželi graf G′ se stejným souborem stupňů a takový, že $\{u_1, u_i\} \in H(G')$. Popsanou konstrukci opakujeme pro každý uzel u_i, $2 \leq i \leq s_1+1$, nesousední s u_1 - po konečném počtu kroků tak vyšetřování převedeme na případ a) a důkaz je hotov.

Příklad. Příkladem posloupnosti, která není grafová, je posloupnost n-1, n-2,...,2, 1, 0 ; jiným příkladem je posloupnost 6,3,3,2,2,2 (v grafu na 6 uzlech mohou být stupně nejvýše 5) nebo 4,3,2,2,2,1,1 (lichý počet uzlů lichého stupně). Vyšetřeme posloupnost 5,5,5,4,3,2 . Opakovaným užitím věty 2.1.2 dostáváme postupně posloupnosti 4,4,3,2,1 a 3,2,1,0 ; poslední posloupnost (a tedy ani původní) grafová není.

Vyšetřeme posloupnost

6, 6, 5, 4, 3, 3, 3, 3, 2, 1 .

(i) Užitím věty 2.1.2 dostaneme posloupnost

5, 4, 3, 2, 2, 2, 3, 2, 1 ,

kterou musíme monotonně uspořádat:

5, 4, 3, 3, 2, 2, 2, 2, 1 .

(ii) Opětovným užitím věty 2.1.2 obdržíme posloupnost

3, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1 ,

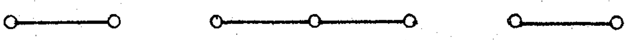
čili po novém uspořádání

3, 2, 2, 2, 2, 1, 1, 1 .

(iii) Potřetí užijeme větu 2.1.2 :

1, 1, 1, 2, 1, 1, 1

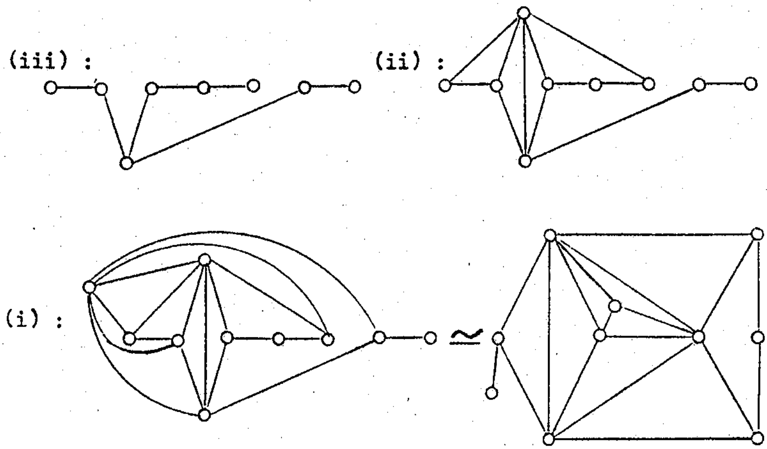
a graf na obr. 2.1.3 nás přesvědčí, že poslední (a tedy i původní) posloupnost je grafová.



obr. 2.1.3.

Konstrukce, popsaná v důkazu věty 2.1.2, nám dále umožňuje graf s daným souborem stupňů i prakticky sestrojit tímto postupem: vyjdeme od grafu na obr. 2.1.3 a dále (iii)ke třem uzlům stupně 1 připojíme nový uzel stupně 3, (ii) k uzlům stupňů 3, 2, 2, 1, 1 předchozího grafu připojíme nový uzel stupně 5,

(i) k uzlům stupňů 5, 4, 3, 2, 2, 2 předchozího grafu připojíme nový uzel stupně 6 . Postup konstrukce je znázorněn na obr. 2.1.4; zároveň z konstrukce vidíme, že toto řešení není jediné.



obr. 2.1.4.

<u>Definice.</u> 1. Buďte G_1, G grafy. Řekneme, že G_1 je:
<u>podgrafem</u> grafu G (značíme $G_1 \subset G$), jestliže $U(G_1) \subset U(G)$ a $H(G_1) \subset H(G)$;
<u>faktorem</u> grafu G, jestliže $U(G_1) = U(G)$ a $H(G_1) \subset H(G)$.

2. Buď $X \subset U(G)$. Podgraf $\left(X, H(G) \cap \binom{X}{2} \right)$ se nazývá <u>indukovaný podgraf</u> grafu G na množině uzlů X.

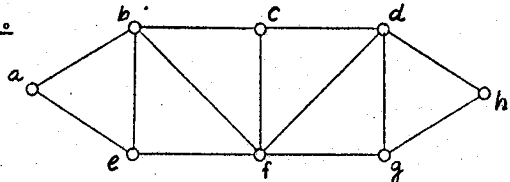
<u>Definice.</u> Řekneme, že graf G je <u>souvislý</u>, jestliže pro každé dva uzly $u, v \in U(G)$ existuje přirozené číslo n a homomorfismus $f: P_n \rightarrow G$ takový, že $f(0) = u$ a $f(n) = v$.

Je-li $f: G \longrightarrow G'$ homomorfismus, pak označíme $f(G)$ homomorfní obraz grafu G, tj. podgraf grafu G' s množinou uzlů $f(U(G))$ a s množinou hran $f^{+}(H(G))$.

<u>Definice.</u> Nechť $f: P_n \longrightarrow G$ je homomorfismus, $f(0) = u$, $f(n) = v$. Podgraf $f(P_n) \subset G$ se nazývá <u>sled</u> z uzlu u do uzlu v. Je-li f hranový monomorfismus, pak se $f(P_n)$ nazývá <u>tah</u> z u do v ; je-li f uzlový monomorfismus, pak se $f(P_n)$ nazývá <u>cesta</u> z u do v . Číslo n se nazývá <u>délka</u> sledu, resp. tahu, resp. cesty.

<u>Příklad.</u>

G :



Sled z a do h: a, b, c, f, b, c, d, g, d, h .

Tah z a do h: a, b, e, f, b, c, d, g, f, d, h .

Cesta z a do h: a, e, b, f, d, h .

(Hovoříme-li o sledu, tahu či cestě, jedná se vždy o homomorfní obraz grafu P_n s množinou uzlů $\{0, 1, \ldots, n\}$ a lze jej tedy krátce popsat posloupností uzlů $f(0), f(1), \ldots, f(n)$.)

Graf G z našeho příkladu je souvislý; obdobně všechny grafy na obr. 2.1.4 jsou souvislé. Příkladem nesouvislého grafu je graf na obr. 2.1.3 a graf G' z poznámky před větou 1.3.2.

<u>Tvrzení.</u> Graf G je souvislý právě když pro každé dva uzly $u, v \in U(G)$ existuje v G sled z u do v .

<u>Důkaz</u> plyne ihned z příslušných definic.

Věta 2.1.3. Graf G je souvislý právě když pro každé dva jeho uzly $u,v \in U(G)$ existuje v G cesta z u do v.

Důkaz. 1. Jestliže pro každé $u,v \in U(G)$ existuje v G cesta z u do v, pak tato cesta je sledem a podle tvrzení před větou je G souvislý.

2. Jestliže naopak G je souvislý, pak pro $u,v \in U(G)$ označíme $f(P_n)$ sled z u do v minimální délky. Kdyby pro některé $i < j$ bylo $f(i) = f(j)$, tak by $f(0),\dots,f(i),f(j+1),\dots,f(n)$ byl sled z u do v menší délky než n. Zobrazení f je tedy uzlový monomorfismus, tj. $f(P_n)$ je cesta z u do v.

Definice. Buď $G' \subset G$. Řekneme, že G' je komponenta grafu G, jestliže

a) G' je souvislý graf,

b) jestliže $G' \subset G'' \subset G$ a G'' je souvislý, pak $G'' = G'$.

Poznámka. Komponenta grafu je jeho maximální souvislý podgraf.

Věta 2.1.4. Buďte $G_1,\dots,G_k$ všechny komponenty grafu G. Pak platí

1. $G = \bigcup_{i=1}^{k} G_i$, [1)]

2. $G_i \cap G_j = \emptyset$ pro $i \neq j$.

---

1) Jsou-li G_1, G_2 dva podgrafy téhož grafu, pak přirozeným způsobem definujeme $G_1 \cup G_2 = (U(G_1) \cup U(G_2), H(G_1) \cup H(G_2))$ a $G_1 \cap G_2 = (U(G_1) \cap U(G_2), H(G_1) \cap H(G_2))$; pro konečný počet grafů indukcí.

Důkaz. 1. Pro každý uzel $u \in U(G)$ je graf $(\{u\}, \emptyset)$ souvislý a tedy je podgrafem nějaké komponenty; obdobně pro každou hranu z $H(G)$. Odtud vyplývá, že $G \subset G_1 \cup \dots \cup G_k$; protože současně $G_i \subset G$ pro $1 \leqq i \leqq k$, musí též být $G_1 \cup \dots \cup G_k \subset G$ a tedy $G_1 \cup \dots \cup G_k = G$.

2. Nechť $i \neq j$ a $G_i \cap G_j$ obsahuje uzel u. Označme X množinu všech $v \in U(G)$, pro něž existuje v G cesta z u do v a G^u podgraf grafu G indukovaný na X. Zřejmě G^u je souvislý, tedy z každého jeho uzlu existuje cesta do u, a tedy $G_i \subset G^u$. Z podmínky b) z definice komponenty plyne, že $G_i = G^u$. Obdobně dokážeme, že i $G_j = G^u$, takže $G_i = G_j$.

Poznámka. Navíc jsme zjistili, že $G_i = G_j = G^u$ a tedy důkaz věty dává konstrukci umožňující sestrojení komponenty obsahující zadaný uzel u - uvědomme si, že v aplikacích je graf zpravidla uložen v paměti počítače a nalezení komponenty pak není vidět "na první pohled".

Označení. Zavedeme následující označení:

$\delta(G) = \min\limits_{u \in U(G)} d_G(u)$ - minimální stupeň grafu ,

$\Delta(G) = \max\limits_{u \in U(G)} d_G(u)$ - maximální stupeň grafu .

Věta 2.1.5. Je-li $\delta(G) \geqq \frac{1}{2}|U(G)|$, pak je G souvislý.

Důkaz. Označíme-li $\delta(G) = k$, pak podle předpokladu $|U(G)| \leqq 2k$. Kdyby byl G nesouvislý, tak by musel mít komponentu -označme ji G'- s nejvýše k uzly; pak ale nutně $\delta(G) \leqq k - 1$, což je spor.

Definice. Uzel $u \in U(G)$, pro který $d_G(u) = 1$, se nazývá koncový uzel grafu G.

Věta 2.1.6. Buď G souvislý, $|U(G)| \geqq 2$; nechť $|H(G)| < |U(G)|$. Pak má graf G alespoň dva koncové uzly.

Důkaz. Kdyby měl G nejvýše jeden koncový uzel, tak by všechny ostatní uzly musely být vzhledem k souvislosti G stupně alespoň 2; z věty 2.1.1 pak dostáváme

$$|H(G)| = \frac{1}{2} \sum_{u \in U(G)} d_G(u) \geqq \frac{1}{2} \left[2(|U(G)| - 1) + 1 \right] =$$

$$= \frac{1}{2}(2|U(G)| - 1) = |U(G)| - \frac{1}{2} \quad ,$$

odkud, vzhledem k tomu, že $|H(G)|$ i $|U(G)|$ jsou celá čísla, vyplývá $|H(G)| \geqq |U(G)|$, což je spor.

Věta 2.1.7. Je-li G souvislý a $|U(G)| = n$, pak

$$|H(G)| \geqq n - 1 \quad .$$

Důkaz provedeme indukcí.

1. Je-li $n = 1$, je tvrzení zřejmé.

2. Předpokládejme, že každý souvislý graf na n uzlech má alespoň n-1 hran; buď G souvislý graf na n+1 uzlech.

a) Jestliže $|H(G)| \geqq n+1$, není co dokazovat.

b) Jestliže $|H(G)| \leqq n$, pak podle věty 2.1.6 má graf G koncový uzel u. Označme v jediný sousední uzel uzlu u a položme $G' = (U(G) \setminus \{u\}, H(G) \setminus \{\{u,v\}\})$. Graf G', vzniklý z G vyjmutím jedné hrany, má n uzlů a tedy podle indukčního předpokladu je $|H(G')| \geqq n - 1$; graf G má tedy alespoň n hran.

2.2. Stromy; kostry grafu.

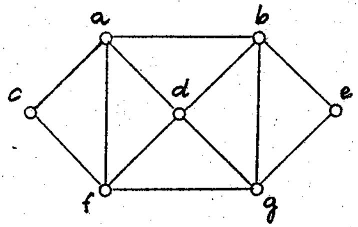
Definice. Buď $f: C_n \to G$ homomorfismus. Pak podgraf $f(C_n) \subset G$ se nazývá uzavřený sled v G. Je-li f hranový monomorfismus, pak se $f(C_n)$ nazývá uzavřený tah v G; je-li f monomorfismus, nazývá se $f(C_n)$ kružnice v G. Číslo n se nazývá délka uzavřeného sledu, resp. uzavřeného tahu, resp. kružnice.

Poznámka. 1. Místo kružnice délky 3 (resp. 4, 5 atd.) se někdy též říká trojúhelník (resp. čtyřúhelník,...)

2. Obdobně jako u sledů, tahů a cest je možno uzavřený sled (uzavřený tah, kružnici) jednoduše popsat posloupností uzlů $f(1), \ldots, f(n)$.

Příklad.

G :



Uzavřený sled v G: f, d, a, b, d, a, c .

Uzavřený tah v G: c, a, f, d, a, b, g, f .

Kružnice v G: a, d, b, g, f, c .

Věta 2.2.1. Buď G souvislý, $C \subset G$ kružnice, $h \in H(C)$. Pak podgraf $G' = (U(G), H(G) \setminus \{h\})$, vzniklý odstraněním hrany h z G, je souvislý.

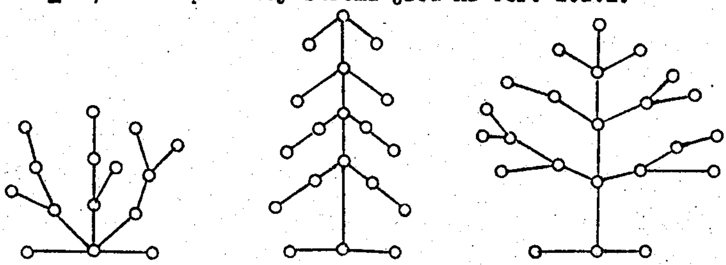
Důkaz. Buďte u, v libovolné dva uzly grafu G; dokážeme, že uzly u, v leží v téže komponentě grafu G'. Ze souvislosti grafu G vyplývá existence cesty P z u do v v G: jestliže $h \notin H(P)$, je P cesta z u do v v grafu G' a tvrzení je zřejmé; předpokládejme tedy naopak, že $h \in H(P)$. Nechť $h = \{a,b\}$ a označme C kružnici v G, obsahující hranu h.

Není-li žádný z uzlů a,b totožný s některým z uzlů u, v, pak po odstranění hrany h zbývající hrany cesty P tvoří dvě cesty v G', z nichž jedna spojuje uzel a s jedním z uzlů u, v a druhá spojuje uzel b s druhým z u, v; zbývající hrany kružnice C tvoří cestu v G' z a do b. Z věty 2.1.4 pak plyne, že uzly u, v leží v téže komponentě grafu G' a tedy G' je souvislý.

Případ, kdy některý z uzlů a, b je totožný s některým z uzlů u, v, je ještě jednodušší a je ponechán čtenáři jako cvičení.

Definice. Souvislý graf, který neobsahuje jako podgraf žádnou kružnici, se nazývá strom.

Příklad. Příklady stromů jsou grafy P_n a $K_{1,n}$ pro libovolné $n \geq 1$; další příklady stromů jsou na obr. 2.2.1.



obr. 2.2.1.

Tvrzení. Každý strom na alespoň dvou uzlech má alespoň dva koncové uzly.

Důkaz. Buď $P \subset G$ cesta v G maximální délky; u, v uzly stupně 1 v P. Kdyby $d_G(u) \geqq 2$, tak by existoval sousední uzel x uzlu u tak, že $\{u,x\} \in H(G)$, ale $\{u,x\} \notin H(P)$, což je pro $x \notin U(P)$ v rozporu s maximalitou cesty P a pro $x \in U(P)$ v rozporu s neexistencí kružnice v G. Tedy uzel u (a obdobně i v) je stupně 1 v G.

Věta 2.2.2. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. G je strom.

2. Pro každé dva uzly $u, v \in U(G)$ existuje v G právě jedna cesta z u do v.

3. G je souvislý a $|H(G)| = |U(G)| - 1$.

4. G je minimální souvislý graf s množinou uzlů $U(G)$ (tj. nemá žádný souvislý vlastní faktor).

Důkaz provedeme podle následujícího schematu:

$$\begin{tikzcd} (2) \arrow[r, Leftrightarrow] & (1) \arrow[r, Rightarrow] & (3) \arrow[dl, Rightarrow] \\ & (4) \arrow[u, Rightarrow] & \end{tikzcd}$$

(1) $\Longrightarrow$ (2): Ze souvislosti stromu vyplývá existence cesty z u do v; z neexistence kružnic v G vyplývá jednoznačnost této cesty (dvě různé cesty by vytvořily kružnici v G).

(2) $\Longrightarrow$ (1): Z existence cesty mezi každými dvěma uzly vyplývá souvislost grafu G; z jednoznačnosti cesty vyplývá

neexistence kružnice v G (jsou-li u, v uzly kružnice v G, pak mezi nimi existují alespoň dvě různé cesty).

(1) $\Rightarrow$(3): Dokazujeme, že pro každý strom platí $|H(G)| = |U(G)| - 1$; tvrzení dokážeme indukcí podle $n = |U(G)|$.

a) Pro n = 1 je tvrzení zřejmé.

b) Nechť každý strom na n uzlech má n-1 hran; buď G strom na n+1 uzlech. Podle tvrzení před větou nalezneme koncový uzel u grafu G a sestrojíme graf $G' \subset G$ odstraněním z G uzlu u a jediné hrany, která s ním inciduje. Graf G' je pak opět souvislý graf bez kružnic, tj. strom; podle předpokladu má G' n-1 hran (neboť má n uzlů) a tedy graf G má n hran.

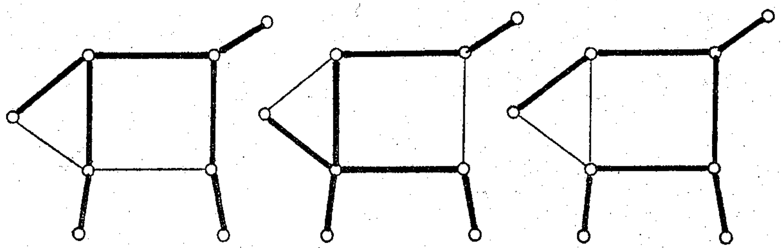
(3) $\Rightarrow$(4): Podle věty 2.1.7 má každý souvislý graf na n uzlech alespoň n-1 hran - souvislý graf s n uzly a n-1 hranami je tedy minimální.

(4) $\Rightarrow$(1): Podle věty 2.2.1 se odstraněním hrany, která je hranou některé kružnice grafu G, neporuší souvislost grafu G. Odtud ihned vyplývá, že minimální souvislý graf na dané množině uzlů nemůže obsahovat kružnice, tj. je to strom.

<u>Definice.</u> Nechť G je souvislý graf. Graf $T \subset G$ se nazývá <u>kostra</u> grafu G, jestliže

1. T je strom ,
2. T je faktor grafu G .

<u>Poznámka.</u> V souvislém grafu G může existovat více různých koster (viz obr. 2.2.2), všechny však mají $|U(G)| - 1$ hran.



obr. 2.2.2.

Poznámka. Kolik může mít daný souvislý graf koster? Nejmenší možný počet koster - jedinou - mají zřejmě stromy. Největší počet různých koster bude mít graf s "co největším" počtem hran, tj. úplný graf K_n - lze dokázat, že počet koster úplného grafu K_n je roven n^{n-2} (tento výsledek znal již roku 1889 A. Cayley) - viz též příklady za větou 4.4.12.

Věta 2.2.3. V každém souvislém grafu existuje alespoň jedna jeho kostra.

Důkaz 1. V daném souvislém grafu G sestrojíme kostru T následujícím postupem.

(i) Zvol libovolný uzel $u \in U(G)$ a polož $G_0 = (\{u\}, \emptyset)$.

(ii) $k := 0$.

(iii) Je-li již sestrojen strom $G_k \subset G$, a není-li faktor grafu G , pak ze souvislosti grafu G vyplývá existence hrany $\{x,y\} \in H(G)$ takové, že $x \in U(G_k)$, ale $y \notin U(G_k)$. Položme $G_{k+1} = (U(G_k) \cup \{y\}, H(G_k) \cup \{x,y\})$. Pak je $G_{k+1} \subset G$ a a G_{k+1} je strom (neboť pro každé dva uzly v něm existuje právě jedna cesta).

(iv) Není-li $U(G_{k+1}) = U(G)$, polož $k := k + 1$ a opakuj bod (iii); je-li $U(G_{k+1}) = U(G)$, pak G_{k+1} je faktor grafu G - - polož $T = G_{k+1}$ a jsme hotovi.

Důkaz 2. V souvislém grafu G sestrojíme kostru T následující konstrukcí.

(i) Polož $G_0 = G$; G_0 je souvislým faktorem grafu G.

(ii) $k := 0$.

(iii) Je-li již sestrojen souvislý faktor G_k grafu G, pak:

- jestliže G_k obsahuje kružnici, pak na této kružnici zvol libovolnou hranu h_k a polož $G_{k+1} = (U(G_k), H(G_k) \setminus \{h_k\})$. Graf G_{k+1} je faktorem grafu G a podle věty 2.2.1 je souvislý; polož $k := k + 1$ a vrať se k bodu (iii) ;

- jestliže G_k neobsahuje kružnici, pak G_k je souvislý faktor grafu G bez kružnic, polož $T = G_k$ a jsme hotovi.

Poznámka. Důkazy věty 2.2.3 zároveň dávají algoritmy, umožňující praktické nalezení kostry daného grafu.

Je-li G souvislý graf na n uzlech a $T \subset G$ je jeho kostra, pak kostra T má $|U(G)| - 1$ hran a zbývajících $|H(G)| - |U(G)| + 1$ hran grafu G leží "mimo kostru". Zobecníme tuto úvahu na nesouvislý graf.

Nechť G je nesouvislý a má k komponent $G_1, \ldots, G_k$, $k > 1$, označme $|U(G_i)| = n_i$. Sestrojíme-li v i-té komponentě G_i její kostru T_i $(i = 1, \ldots, k)$, pak T_i bude mít $n_i - 1$ hran. Kostry všech komponent grafu G budou mít celkem

$$(n_1 - 1) + \ldots + (n_k - 1) = n_1 + \ldots + n_k - 1 - \ldots - 1 =$$
$$= |U(G)| - k$$

hran; zbývajících hran "mimo kostry" je

$$|H(G)| - |U(G)| + k \ .$$

Definice. Označme $k(G)$ počet komponent grafu G.

Číslo $h(G) = |U(G)| - k(G)$ se nazývá hodnost grafu G.

Číslo $c(G) = |H(G)| - |U(G)| + k(G)$ se nazývá cyklomatické číslo (též Bettiho číslo nebo nulita) grafu G.

Poznámky. 1. Pro každý graf G na n uzlech platí:

$$0 \leqq h(G) \leqq n - 1 \quad ,$$
$$0 \leqq c(G) \leqq \binom{n-1}{2} \quad .$$

$h(G) = 0$ pro $G = D_n$ (diskrétní graf), $h(G) = n - 1$, je-li graf G souvislý. Obdobně $c(G) = 0$ právě když G je grafem, jehož každá komponenta je strom. Maximální hodnoty nabývá cyklomatické číslo pro $G = K_n$ a snadno zjistíme, že $|H(K_n)| = \binom{n}{2}$, odkud $c(K_n) = \binom{n}{2} - n + 1 = \binom{n-1}{2}$.

2. Algoritmus z důkazu 1 věty 2.2.3 nalezne kostru souvislého grafu G v $h(G)$ krocích; algoritmus z druhého důkazu splní tentýž úkol v $c(G)$ krocích.

3. Je-li T kostra souvislého grafu G, pak se hrany G, jež nepatří kostře T, nazývají tětivy grafu G vzhledem k T; hrany kostry T se nazývají větve grafu G (vzhledem k T) . Graf G má zřejmě $h(G)$ větví a $c(G)$ tětiv.

2.3. Ohodnocený graf; minimální kostra a metrika grafu

Představme si následující situace.

a) Je dána dopravní síť (například železniční). Tuto síť popíšeme grafem G, v němž každému nádraží odpovídá uzel a každé trati odpovídá hrana grafu. Chceme-li pomocí našeho grafu řešit praktické otázky železniční dopravy, je přirozené každé hraně grafu G přiřadit reálné číslo, mající význam např. délky tratě.

b) Jestliže je graf G grafem elektrického obvodu, tj. uzly odpovídají uzlům obvodu a hrany odpovídají větvím obvodu, pak každé hraně grafu G přiřadíme hodnotu příslušného prvku obvodu.

c) Je dán libovolný systém, který je třeba převést posloupností operací z výchozího stavu do cílového stavu. Uzly grafu G odpovídají jednotlivým možným stavům systému; hrany popisují operace, jež systém převádějí ze stavu do jiného stavu. V tomto případě každé hraně můžeme přiřadit např. dobu trvání příslušné operace, cenu operace apod.

Uvedené příklady nás přivádějí k následující definici.

Definice. Buď G graf. Funkce $w: H(G) \longrightarrow (0, \infty)$ se nazývá (hranové) ohodnocení grafu G; graf se zadaným ohodnocením se nazývá ohodnocený graf.

Z uvedených příkladů vidíme, že bude účelné zabývat se hledáním podgrafů, na nichž je ohodnocení minimální.

Věta 2.3.1. Buď G souvislý ohodnocený graf, nechť K je souvislý faktor grafu G, pro který je číslo $\sum_{h \in H(K)} w(h)$ minimální. Pak je K kostra grafu G.

Důkaz. Kdyby K obsahoval kružnici, tak by bylo možno odstraněním jedné hrany této kružnice získat faktor, který je podle věty 2.2.1 souvislý a má menší součet ohodnocení hran, což je spor s minimalitou faktoru K.

Definice. Buď G souvislý ohodnocený graf, K jeho kostra taková, že pro všechny souvislé faktory G′ grafu G platí

$$\sum_{h \in H(K)} w(h) \leqq \sum_{h' \in H(G')} w(h') \quad .$$

Kostra K se nazývá minimální kostra grafu G.

Poznámka. Existence minimální kostry v daném souvislém ohodnoceném grafu je evidentní.

Věta 2.3.2. Buď G souvislý ohodnocený graf, K jeho kostra. Pro každou hranu $h \in H(G) \setminus H(K)$ označme C_h jedinou kružnici grafu $(U(K), H(K) \cup \{h\})$. Pak K je minimální kostra grafu G právě když pro každou hranu $h \in H(G) \setminus H(K)$ je $w(h) \geqq w(h')$ pro všechny hrany $h' \in H(C_h)$.

Důkaz. 1. Nechť K je minimální kostra grafu G. Kdyby existovala hrana $h \in H(G) \setminus H(K)$ taková, že v příslušné kružnici C_h pro některou hranu h' platí $w(h) < w(h')$, tak by bylo možno sestrojit náhradou hrany h' v kostře K hranou h jinou kostru K' s nižším součtem ohodnocení hran, což je spor s minimalitou kostry K (důkaz tvrzení, že takto sestrojený podgraf K' je kostrou grafu G, ponecháváme čtenáři jako cvičení).

2. Nechť naopak K není minimální kostra - je tedy minimální nějaká jiná kostra K', přičemž obě kostry mají stejný počet hran. Označme $h_1, \ldots, h_k$ hrany z $H(K') \setminus H(K)$. Připojením h_i ke K vznikne kružnice C_{h_i}, z níž kostra K' neobsahuje nějakou hranu (neboť K', jsouc stromem, neobsahuje kružnice) - označme tuto hranu h_i' $(i = 1, \ldots, k)$.

Tedy: hrany h_i nepatří do H(K), ale jsou z H(K'),

hrany h_i' nepatří do H(K'), ale jsou z H(K).

Z minimality kostry K' a z předpokladu, že K není minimální, plyne

$$\sum_{i=1}^{k} w(h_i) < \sum_{i=1}^{k} w(h_i') ,$$

a tedy pro některé i je $w(h_i) < w(h_i')$, tj. neplatí podmínka věty.

Definice. Buď G graf, $u,v \in U(G)$. Vzdálenost uzlů u, v (značíme $d_G(u,v)$) je délka nejkratší cesty z uzlu u do uzlu v v grafu G. Neexistuje-li v G cesta z u do v, položíme $d_G(u,v) = \infty$.

Věta 2.3.3. Buď G souvislý ohodnocený graf; $x, y, z \in U(G)$. Pak platí:

0. $d_G(x,y)$ je celé číslo,

1. $d_G(x,y) \geq 0$ a $d_G(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

2. $d_G(x,y) = d_G(y,x)$,

3. $d_G(x,y) + d_G(y,z) \geq d_G(x,z)$,

4. je-li $d_G(x,z) > 1$, pak existuje $y \in U(G)$ tak, že $x \neq y \neq z$ a $d_G(x,y) + d_G(y,z) = d_G(x,z)$.

Důkaz věty je snadný.

Poznámka. 1. Z tvrzení 1 – 3 věty 2.3.3 vyplývá, že graf G spolu s funkcí $d_G(x,y)$ tvoří metrický prostor. Funkce $d_G(x,y)$ bývá proto též nazývána metrika grafu.

2. Zavedeme nyní obdobný pojem v ohodnoceném grafu.

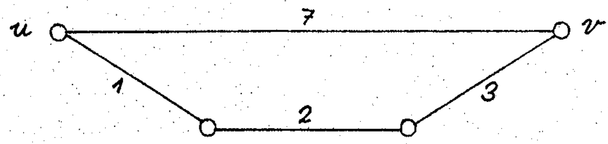
Definice. Buď G ohodnocený graf. Pro každou cestu $P \subset G$ definujeme w-délku $w(P)$ cesty P předpisem

$$w(P) = \sum_{h \in H(P)} w(h) .$$

Pro každé dva uzly $u,v \in U(G)$ nazveme w-vzdáleností uzlů u, v (značíme $d_G^w(u,v)$) nejmenší w-délku cesty z u do v. Neexistuje-li cesta z u do v, položíme $d_G^w(u,v) = \infty$.

Jsou-li u, v dva uzly grafu G, pak cesta z u do v, mající nejmenší délku, se nazývá nejkratší cesta z u do v; cesta z u do v, mající nejmenší w-délku, se nazývá minimální cesta z u do v.

Poznámka. 1. Graf na obr. 3.2.1 ukazuje, že nejkratší cesta z u do v nemusí být současně minimální cestou: nejkratší cesta z u do v má délku 1 a w-délku 7, zatímco minimální cesta z u do v má délku 3 a w-délku 6.



obr. 3.2.1.

2. Pro funkci $d_G^w(x,y)$ platí věta obdobná větě 2.3.3 - její formulaci a důkaz přenecháváme čtenáři jako snadné cvičení. Speciálně odtud vidíme, že funkce $d_G^w(x,y)$ má také vlastnosti metriky.

Příklad. Nechť U(G) je množina všech železničních stanic ČSD a H(G) je množina všech železničních tratí ČSD. Označme $\rho(x,y)$ cenu jízdenky (osobní vlak 2. tř., obyčejné jízdné) ze stanice x do y. Pak funkce $\rho(x,y)$ <u>není</u> metrika, neboť nemá vlastnost 3 (trojúhelníková nerovnost) z věty 2.3.3 : jestliže např. stanice B leží na trati mezi A a C tak, že A je od ní vzdálena 9 km a C je vzdálena 17 km, pak jízdné z A do C činí 4 Kčs, zatímco $\rho(A,B) = 1$ a $\rho(B,C) = 2$.

2.4. Eulerovské a hamiltonovské grafy

Oblíbeným námětem úloh z oblasti tzv. rekreační matematiky je úkol nakreslit daný "obrázek" (tj. graf) jedním nepřerušovaným a nikde se nepřekrývajícím (s výjimkou křížení) tahem. Ke stejné úloze se dostaneme i v praktičtějších situacích – – například tak, že hrany grafu představují ulice nějakého města, uzly jsou křižovatky a řidič posypového vozu má za úkol posypat všechny ulice města tak, aby žádnou ulicí neprojížděl dvakrát a aby svoji objížďku skončil na místě, z něhož vyjel. Podmínku řešitelnosti těchto a podobných úloh nalezl již v 18. století L. Euler.

Definice. Buď G graf, označme $m = |H(G)|$. Řekneme, že G je eulerovský graf, jestliže existuje epimorfismus $f\colon C_m \longrightarrow G$.

Poznámka. V definici se požaduje, aby délka kružnice C_m byla rovna počtu hran grafu G; odtud vyplývá, že epimorfismus f je nutně též hranovým monomorfismem a tedy $f(C_m)$ je uzavřený tah. Lze tedy ekvivalentně říci: Graf G je eulerovský, jestliže v G existuje uzavřený tah, který obsahuje všechny jeho hrany.

Věta 2.4.1. Graf G s alespoň dvěma uzly je eulerovský právě když G je souvislý a všechny jeho uzly jsou sudého stupně.

Důkaz. 1. Je-li G eulerovský, pak $G = f(C_m)$ a ze souvislosti kružnice C_m vyplývá souvislost G. Dále pro každý uzel $u \in U(G)$ platí $d_G(u) = \sum_{y \in f^{-1}(u)} d_{C_m}(y) = 2|f^{-1}(u)|$, což je sudé číslo.

Před druhou částí důkazu dokážeme jedno pomocné tvrzení.

Lemma. Nechť všechny uzly grafu G jsou sudého stupně, nechť $u \in U(G)$ není izolovaný. Pak existuje uzavřený tah $T \subset G$ takový, že $u \in U(T)$

Důkaz lemmatu. Tah T sestrojíme následující konstrukcí.

a) Z uzlu u vede v G hrana do některého uzlu u_1; položíme-li $f(0) = u$ a $f(1) = u_1$, obdržíme tah $T_1 = f(P_1) \subset G$.

b) Je-li již sestrojen tah $T_k = f(P_k) \subset G$ délky $k \geqq 1$, pak k uzlu $f(k)$, jenž je zřejmě lichého stupně v T_k a sudého stupně v G, existuje uzel u_{k+1} tak, že hrana $\{f(k), u_{k+1}\}$ je hranou G, ale není hranou T_k.

- Jestliže $u_{k+1} \neq u$, pak položíme $f(k+1) = u_{k+1}$, obdržíme tak tah $T_{k+1} = f(P_{k+1}) \subset G$ a opakujeme bod b) pro $k := k+1$;

- jestliže $u_{k+1} = u$, pak položíme $f(k+1) = u_{k+1}$ a obdržíme hledaný uzavřený tah $T = f(C_{k+1}) \subset G$.

Nechť tedy nyní G je souvislý a všechny jeho uzly jsou sudého stupně. Zvolme $u_0 \in U(G)$. Podle lemmatu existuje uzavřený tah $T_0 = f_0(C_{k_0}) \subset G$ tak, že $u_0 \in U(T_0)$. Jestliže $H(T_0) = H(G)$, pak T_0 je uzavřený tah požadovaných vlastností a jsme hotovi; v opačném případě můžeme definovat neprázdný graf G_1 předpisem $G_1 = (U(G), H(G) \setminus H(T_0))$. Ze souvislosti grafu G vyplývá existence uzlu $u_1 \in U(G_1) \cap U(T_0)$, který není izolovaným uzlem grafu G_1. Protože všechny uzly grafu G_1 jsou sudého stupně, existuje v G_1 uzavřený tah $T_0^1 = f_0^1(C_{k_1})$ tak, že $f_0^1(k_1) = u_1$; protože současně $u_1 \in U(T_0)$, existuje číslo r_1, $1 \leq r_1 \leq k_0$, tak, že $f_0(r_1) = u_1$. Definujeme-li nyní zobrazení $f_1 : \langle 1, k_0 + k_1 \rangle \to U(G)$ předpisem

$$f_1(i) = f_0(i) \qquad \text{pro } 1 \leq i \leq r_1 ,$$

$$f_1(i) = f_0^1(i - r_1) \text{ pro } r_1 + 1 \leq i \leq r_1 + k_1 ,$$

$$f_1(i) = f_0(i - k_1) \text{ pro } r_1 + k_1 + 1 \leq i \leq k_0 + k_1 ,$$

pak je f hranovým monomorfismem $C_{k_0+k_1}$ do G a tedy $T_1 = f_1(C_{k_0+k_1}) \subset G$ je uzavřený tah, jehož je T_0 vlastním podgrafem. Jestliže nyní $H(T_1) = H(G)$, pak jsme hotovi; v opačném případě analogickým způsobem sestrojíme uzavřený tah T_2, pro nějž $T_1 \subsetneqq T_2$ – po konečném počtu kroků tak získáme uzavřený tah, obsahující všechny hrany grafu G.

Definice. Graf G se nazývá hamiltonovský, jestliže obsahuje jako podgraf kružnici délky $|U(G)|$.

Poznámky. 1. Kružnice, která je obsažena v G a má délku $|U(G)|$, nutně prochází všemi uzly grafu G. Taková kružnice se nazývá hamiltonovská kružnice grafu G.

2. Dokažte, že všechny grafy na obr. 2.1.1. jsou hamiltonovské.

3. Čtenář, který v tomto okamžiku očekává větu typu "Graf G je hamiltonovský právě když ...???...", bude ve svém očekávání zklamán. Taková věta uvedena nebude, neboť žádná taková tzv. charakterizační věta není známa. Vidíme, že problémy, které jsou "na první pohled" velmi podobné, se mohou svojí obtížností zásadně lišit: zatímco problém existence

eulerovského tahu byl úspěšně vyřešen již v 18. století, náleží problém existence hamiltonovské kružnice k velmi obtížným problémům. K této problematice se vrátíme v dalších souvislostech v 5. kapitole.

4. Byla nalezena celá řada postačujících podmínek existence hamiltonovské kružnice v grafu; uvedeme zde bez důkazu jednu z nich, jež je zesílením věty 2.1.5.

<u>Věta 2.4.2 (Diracova věta).</u> Jestliže pro graf G, mající alespoň tři uzly, platí

$$\delta(G) \geqq \frac{1}{2}|U(G)| ,$$

pak je graf G hamiltonovský.

3. O r i e n t o v a n é   g r a f y

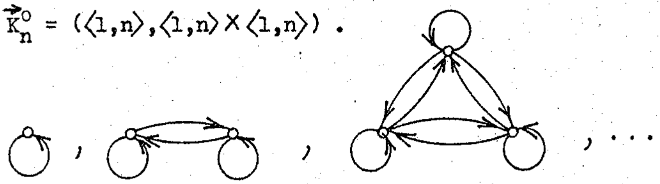
Připomeňme, že nadále neplatí terminologická dohoda, kterou jsme zavedli na začátku 2. kapitoly.

3.1. Stupeň uzlu; souvislost a silná souvislost

Zavedeme si opět označení pro některé speciální orientované grafy.

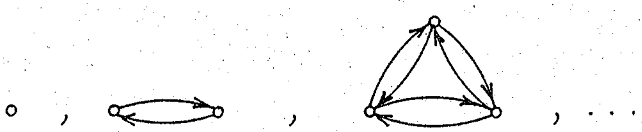
Orientovaný úplný graf na n uzlech ($n \geqq 1$) :

$$\vec{K}_n^o = (\langle 1,n\rangle, \langle 1,n\rangle \times \langle 1,n\rangle) .$$



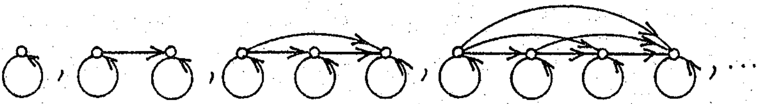
Orientovaný obyčejný úplný graf na n uzlech ($n \geqq 1$) :

$$\vec{K}_n = (\langle 1,n\rangle, \{(i,j);\ i,j \in \langle 1,n\rangle,\ i \neq j\}) .$$



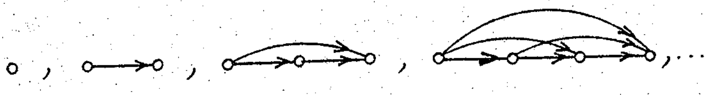
Reflexivní uspořádání na n uzlech ($n \geqq 1$) :

$$\vec{U}_n^o = (\langle 1,n\rangle, \{(i,j);\ i,j \in \langle 1,n\rangle,\ i \leqq j\}) .$$



Antireflexivní uspořádání na n uzlech ($n \geqq 1$) :

$$\vec{U}_n = (\langle 1,n\rangle, \{(i,j);\ i,j \in \langle 1,n\rangle,\ i < j\}) .$$

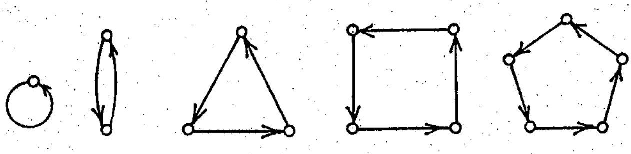


<u>Orientovaná cesta</u> délky $n \geqq 1$:

$$\vec{P}_n = (\langle 0,n\rangle, \{(i,i+1);\ i=0,1,\dots,n-1\}) .$$

<u>Cyklus délky</u> $n \geqq 1$:

$$\vec{C}_1 = (\{1\}, \{(1,1)\}) ,$$
$$\vec{C}_n = (\langle 1,n\rangle, \{(i,i+1);\ i=1,\dots,n-1\} \cup \{(n,1)\}) \text{ pro } n \geqq 2.$$



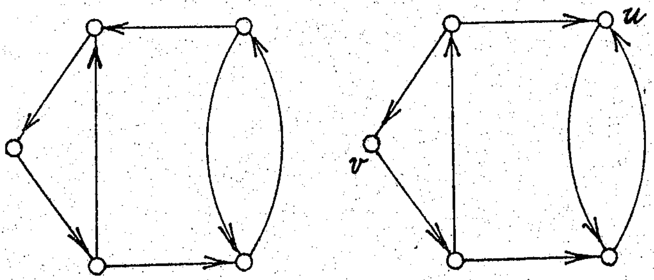
Je-li dán orientovaný graf $\vec{G}$, pak je možno grafu $\vec{G}$ přiřadit neorientovaný graf, který vznikne "smazáním šipek" na hranách grafu $\vec{G}$ (přesněji: orientované hrany (x,y) nahradíme neorientovanými hranami $\{x,y\}$), vypuštěním případných smyček a náhradou dvojic paralelních hran jedinou hranou; takto vzniklý neorientovaný graf se nazývá <u>symetrizace</u> grafu $\vec{G}$.

Obdobně i naopak: každému neorientovanému obyčejnému grafu lze přiřadit orientovaný graf buďto tak, že každé hraně $\{x,y\}$ přisoudíme právě jednu z možných orientací (x,y) a (y,x) – pak říkáme, že takto sestrojený (samozřejmě nikoliv jednoznačně) graf je <u>orientací</u> grafu G, nebo tak, že každou hranu $\{x,y\}$ nahradíme dvojicí hran (x,y) a (y,x) – vzniklý orientovaný graf se nazývá symetrická orientace grafu G.

Pojem symetrizace orientovaného grafu nám umožňuje přenést na orientované grafy většinu pojmů, zavedených v 2. kapitole:

Definice. Řekneme, že orientovaný graf $\vec{G}$ je souvislý, jestliže jeho symetrizace je souvislý neorientovaný graf.

Takto bychom mohli postupovat i s dalšími pojmy z 2. kapitoly; záhy však zjistíme, že takovéto mechanické přenášení "neorientovaných" pojmů do orientovaných grafů nevystihuje plně jejich specifiku. Jako příklad uveďme orientované grafy na obr. 3.1.1 a, b: kdybychom např. jejich hrany považovali za jednosměrné ulice, pak v prvním z nich lze z libovolného uzlu "docestovat" do všech ostatních uzlů, zatímco v druhém z nich se z uzlu u do uzlu v nelze dostat - přitom však oba grafy jsou souvislé (dokonce mají stejnou symetrizaci). Vidíme zde nezbytnost zavedení jemnějších pojmů.



a) b)

obr. 3.1.1.

Definice. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf, $u \in U(\vec{G})$. Výstupní stupeň uzlu u v grafu G je číslo

$$d_G^-(u) = \left|\{(u,x);\ x \in U(\vec{G})\} \cap H(\vec{G})\right| .$$

Vstupní stupeň uzlu u v grafu $\vec{G}$ je číslo

$$d_G^+(u) = \left|\{(x,u);\ x \in U(\vec{G})\} \cap H(\vec{G})\right| .$$

Věta 3.1.1. Pro každý orientovaný graf $\vec{G}$ platí

$$\sum_{u \in U(\vec{G})} d_G^-(u) = \sum_{u \in U(\vec{G})} d_G^+(u) = |H(\vec{G})| .$$

Důkaz je obdobný důkazu věty 2.1.1.

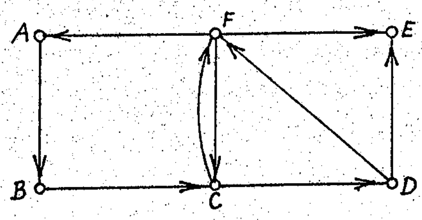
Definice. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf, $f_1 : \vec{P}_n \to \vec{G}$ homomorfismus, $f_1(0) = u$, $f_1(n) = v$. Podgraf $f_1(\vec{P}_n) \subset \vec{G}$ se nazývá orientovaný sled z uzlu u do uzlu v. Je-li f_1 hranový monomorfismus, pak se $f_1(\vec{P}_n)$ nazývá orientovaný tah z u do v, je-li f_1 monomorfismus, pak se $f_1(\vec{P}_n)$ nazývá orientovaná cesta z u do v.

Nechť $f_2 : \vec{C}_n \to \vec{G}$ je homomorfismus. Pak se podgraf $f_2(\vec{C}_n) \subset \vec{G}$ nazývá uzavřený orientovaný sled. Je-li f_2 hranový monomorfismus, pak se $f_2(\vec{C}_n)$ nazývá uzavřený orientovaný tah, je-li f_2 monomorfismus, pak se $f_2(\vec{C}_n)$ nazývá cyklus v grafu G.

Číslo n se nazývá délka orientovaného sledu, resp. orient. tahu, orient. cesty, uzavřeného orient. sledu, uzavřeného orient. tahu, cyklu.

Příklad.

$\vec{G}$:



Orientovaný sled z A do E: A, B, C, D, F, C, D, E .

Orientovaný tah z A do E: A, B, C, F, C, D, F, E .

Orientovaná cesta z A do E: A, B, C, D, F, E .

Uzavřený orientovaný sled: A, B, C, D, F, C, D, F,

Uzavřený orientovaný tah: A, B, C, F, C, D, F.

Cyklus v $\vec{G}$: A, B, C, D, F.

Definice. Řekneme, že orientovaný graf $\vec{G}$ je silně souvislý, jestliže pro každou dvojici uzlů $u, v \in U(\vec{G})$ existuje přirozené číslo n a homomorfismus $f: \vec{P}_n \rightarrow \vec{G}$ tak, že $f(0) = u$ a $f(n) = v$.

Poznámky. 1. Ihned z definic plyne, že orientovaný graf $\vec{G}$ je silně souvislý právě když pro každé dva jeho uzly u, v existuje v $\vec{G}$ orientovaný sled z u do v.

2. Tvrzení lze zesílit (obdoba věty 2.1.3): $\vec{G}$ je silně souvislý právě když pro každé dva uzly $u, v \in U(\vec{G})$ existuje v $\vec{G}$ orientovaná cesta z u do v. (Důkaz: uvažujeme orientovaný sled z u do v minimální délky.)

3. Evidentní je i toto další zesílení:

Orientovaný graf $\vec{G}$ je silně souvislý právě když pro každé dva uzly $u, v \in U(\vec{G})$ existuje v $\vec{G}$ orientovaná cesta z u do v i orientovaná cesta z v do u.

4. Každý silně souvislý graf je souvislý (důkaz je zřejmý), opačné tvrzení však neplatí: graf na obr. 3.1.1. a) je silně souvislý, zatímco graf na obr. 3.1.1. b) je souvislý, ale není silně souvislý. Z tohoto důvodu se někdy u orientovaných grafů místo termínu "souvislý" používá termín slabě souvislý.

Věta 3.1.2. Souvislý orientovaný graf $\vec{G}$ s alespoň dvěma uzly je silně souvislý právě když každá jeho hrana leží v alespoň jednom cyklu.

Důkaz. 1. Je-li $\vec{G}$ silně souvislý a $(u,v) \in H(\vec{G})$, pak v $\vec{G}$ existuje orientovaná cesta z v do u; tato cesta spolu s hranou (u,v) tvoří požadovaný cyklus (podrobný popis tohoto cyklu pomocí homomorfismů ponecháváme čtenáři jako cvičení – – podobně i dále).

2. Nechť $\vec{G}$ je souvislý a každá jeho hrana leží v nějakém cyklu; buďte $u,v \in U(\vec{G})$. V symetrizaci grafu $\vec{G}$ existuje (neorientovaná) cesta z u do v; označíme její uzly po řadě $u = u_1, u_2, \dots, u_k = v$. Sestrojíme v $\vec{G}$ orientovaný sled $\vec{P}$ z u do v, procházející všemi těmito uzly, následujícím postupem:

1. $\vec{P}_1 = (\{u_1\}, \emptyset)$.

2. Je-li již sestrojen sled $\vec{P}_j$, $j \leqq k-1$, obsahující všechny uzly u_i pro $1 \leqq i \leqq j$ a neobsahující uzly u_i pro $j+1 \leqq i \leqq k$, pak:

- jestliže $(u_j,u_{j+1}) \in H(\vec{G})$, sestrojíme sled $\vec{P}_{j+1}$ připojením hrany (u_j,u_{j+1}) k $\vec{P}_j$;

-jestliže $(u_j,u_{j+1}) \notin H(\vec{G})$, pak nutně $(u_{j+1},u_j) \in H(\vec{G})$, tato hrana leží v nějakém cyklu $\vec{C}_j$ a sled $\vec{P}_{j+1}$ sestrojíme tak, že k $\vec{P}_j$ připojíme graf $(U(\vec{C}_j), H(\vec{C}_j) \setminus \{(u_{j+1},u_j)\})$, vzniklý z $\vec{C}_j$ odstraněním hrany (u_{j+1},u_j).

3. Je-li $j+1 < k$, položíme $j := j+1$ a opakujeme bod 2, je-li $j+1 = k$, pak $\vec{P}_{j+1} = \vec{P}$ je hledaný orientovaný sled z u do v.

<u>Definice.</u> Orientovaný graf $\vec{G}$ se nazývá <u>eulerovský</u>, jestliže existuje epimorfismus $f: \vec{C}_m \rightarrow \vec{G}$, kde $m = |H(\vec{G})|$.

<u>Poznámka.</u> Podobně jako u neorientovaných grafů lze ekvivalentně říci, že $\vec{G}$ je eulerovský, jestliže v něm existuje orientovaný uzavřený tah, který obsahuje všechny jeho hrany.

<u>Definice.</u> Orientovaný graf $\vec{G}$ se nazývá <u>rovnovážně orientovaný</u>, jestliže pro každý uzel $u \in U(\vec{G})$ platí

$$d_G^-(u) = d_G^+(u) \quad .$$

<u>Věta 3.1.3.</u> Orientovaný graf $\vec{G}$ s alespoň dvěma uzly je eulerovský právě když je souvislý a rovnovážně orientovaný.

<u>Důkaz</u> je obdobný důkazu věty 2.4.1.

<u>Důsledek.</u> Souvislý rovnovážně orientovaný graf je silně souvislý.

3.2. Acyklické grafy; kvazikomponenty a kondenzace grafu

<u>Definice.</u> Buď $\vec{G}$ orientovaný graf, $\vec{G}' \subset \vec{G}$. Řekneme, že podgraf $\vec{G}'$ je <u>kvazikomponenta</u> grafu $\vec{G}$, jestliže

a) $\vec{G}'$ je silně souvislý graf,

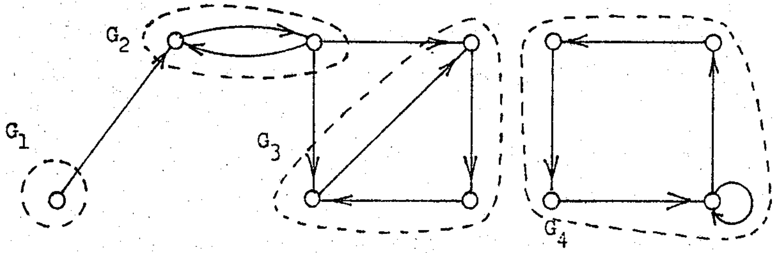
b) jestliže $\vec{G}' \subset \vec{G}'' \subset \vec{G}$ a $\vec{G}''$ ke silně souvislý, pak $\vec{G}'' = \vec{G}'$.

<u>Poznámka.</u> 1. Jinými slovy: kvazikomponenta orientovaného grafu je jeho maximální silně souvislý podgraf.

2. Hovoříme-li o komponentě orientovaného grafu, pak je tím ovšem míněna komponenta jeho symetrizace. Někdy se v této souvislosti říká slabá komponenta; místo termínu kvazikomponenta se pak používá termín silná komponenta.

3. Graf o jediném uzlu a žádné hraně považujeme za silně souvislý - mohou tedy být kvazikomponenty orientovaného grafu i jednouzlové.

Příklad. Orientovaný graf na obr. 3.2.1 má dvě komponenty (to je zřejmé) a čtyři kvazikomponenty G_1, G_2, G_3, G_4.



obr. 3.2.1.

Poznámka. 1. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf, definujme na množině jeho uzlů $U(\vec{G})$ relaci ρ předpisem:

$u \rho v$ právě když z u vede v $\vec{G}$ orientovaná cesta do v a současně z v vede v $\vec{G}$ orientovaná cesta do u.

(Tato relace bývá nazývána relace oboustranné dosažitelnosti). Snadno se přesvědčíme, že ρ je reflexivní, symetrická i tranzitivní a tedy je ekvivalencí na $U(\vec{G})$ – příslušné třídy ekvivalence jsou právě množiny uzlů jednotlivých kvazikomponent grafu $\vec{G}$ (a kvazikomponenty jsou indukované podgrafy na těchto třídách ekvivalence).

Podobně komponenty grafu $\vec{G}$ jsou indukované podgrafy na třídách ekvivalence ρ, definované předpisem:

$u \rho v$ právě když v symetrizaci grafu $\vec{G}$ existuje (neorientovaná) cesta z u do v.

2. Ještě jiná charakteristika kvazikomponent: odstraníme-li z $\vec{G}$ všechny hrany, které nepatří žádnému cyklu,[1] pak komponenty vzniklého grafu jsou kvazikomponenty původního grafu $\vec{G}$ (důkaz ponecháváme čtenáři jako cvičení).

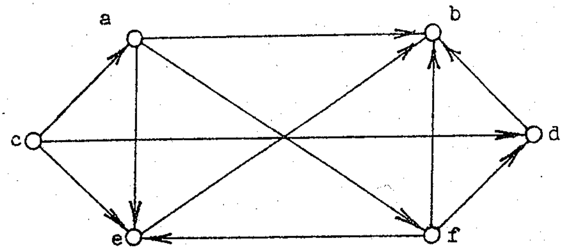
Definice. Orientovaný graf $\vec{G}$ se nazývá acyklický, jestliže neobsahuje jako podgraf žádný cyklus.

Poznámka. 1. Speciálně tedy acyklický graf nemá smyčky.

2. Na obr. 3.2.2 je uveden příklad acyklického grafu, zatímco graf na obr. 3.2.1 acyklický není.

---

1) Takové hrany se nazývají volné hrany grafu $\vec{G}$.



obr. 3.2.2.

Věta 3.2.1. Je-li $\vec{G}$ acyklický orientovaný graf a $\vec{G}' \subset \vec{G}$ je jeho podgraf, pak $\vec{G}'$ je acyklický.

Důkaz je zřejmý.

•

Definice. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf. Uzel $u \in U(\vec{G})$ se nazývá:

vstupní uzel grafu $\vec{G}$, jestliže $d^+_G(u) = 0$,

výstupní uzel grafu $\vec{G}$, jestliže $d^-_G(u) = 0$.

Příklad. Uzel c je vstupním uzlem a uzel b je výstupním uzlem grafu na obr. 3.2.2.

Věta 3.2.2. Každý acyklický orientovaný graf má alespoň jeden vstupní uzel a alespoň jeden výstupní uzel.

Důkaz. Výstupní uzel v acyklickém grafu G nalezneme následujícím postupem.

a) Polož $i := 1$ a zvol libovolný uzel $u_1 \in U(\vec{G})$.

b) Je $d^-_G(u_i) = 0$?

- jestliže ano, jdi k bodu c),
- jestliže ne, pak z u_i vede hrana do některého uzlu $u_{i+1} \in U(\vec{G})$; polož $i := i+1$ a opakuj bod b).

c) Konec – u_i je hledaný výstupní uzel.

Vzhledem k tomu, že v posloupnosti uzlů $u_1, u_2, \ldots$ se nemůže žádný uzel vyskytnout dvakrát (neboť by tím byl v $\vec{G}$ nalezen cyklus), je zřejmé, že po konečném počtu kroků nutně nastane možnost c).

Nalezení vstupního uzlu acyklického grafu $\vec{G}$ je obdobné.

<u>Věta 3.2.3.</u> Buď $\vec{G}$ orientovaný graf, označme $|U(\vec{G})| = n$. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $\vec{G}$ je acyklický;
2. všechny kvazikomponenty grafu $\vec{G}$ jsou grafy o jediném uzlu;
3. každý neprázdný podgraf grafu $\vec{G}$ obsahuje vstupní uzel;
4. každý neprázdný podgraf grafu $\vec{G}$ obsahuje výstupní uzel;
5. existuje takové očíslování uzlů grafu $\vec{G}$ čísly $1,\ldots,n$, že pro každou hranu $(i,j) \in H(G)$ je $i < j$.

<u>Důkaz</u> provedeme podle následujícího schematu:

$$\begin{array}{ccccc} (2) & \Longleftrightarrow & (1) & \Longrightarrow & (3) \\ & & \Uparrow & & \Downarrow \\ & & (5) & \Longleftarrow & (4) \end{array} .$$

a) Ekvivalentnost tvrzení (1) a (2) je zřejmá.

b) Z (1) vyplývá ihned (3) na základě vět 3.2.1 a 3.2.2.

c) (3) $\Longrightarrow$ (4). Předpokládejme, že v každém podgrafu grafu $\vec{G}$ existuje výstupní uzel a hledejme v libovolném neprázdném podgrafu $\vec{G}' \subset \vec{G}$ vstupní uzel. Označme $|U(\vec{G}')| = k$. Jestliže $k = 1$, pak jediný uzel grafu $\vec{G}'$ je současně i jeho vstupním uzlen a jsme hotovi; v opačném případě v $\vec{G}'$ nalezneme výstupní uzel u_1 a sestrojíme podgraf $\vec{G}_1 \subset \vec{G}'$ na k-1 uzlech tak, že z $\vec{G}'$ odstraníme uzel u_1 i všechny hrany s ním incidující. Má-li $\vec{G}_1$ alespoň dva uzly, pak v něm opět nalezneme výstupní uzel u_2 a jeho odstraněním (i s příslušnými hranami) sestrojíme podgraf $\vec{G}_2$ na k-2 uzlech. Po k-1 krocích tak získáme podgraf $\vec{G}_{k-1}$, obsahující jediný uzel u_k. Takto nalezený uzel u_k je nutně vstupním uzlem grafu $\vec{G}'$, neboť kdyby do u_k vedla nějaká hrana (například z uzlu u_j, $j < k$), tak by uzel u_j nemohl být při j-tém kroku algoritmu výstupním uzlem.

d) (4) $\Longrightarrow$ (5). Předpokládáme nyní, že každý podgraf grafu $\vec{G}$ má vstupní uzel; očíslování uzlů, při němž každá hrana vede z uzlu s nižším číslem do uzlu s vyšším číslem, sestrojíme následujícím algoritmem:

- položíme $\vec{G}_1 = \vec{G}$;
- pro i od 1 do n-1: v grafu $\vec{G}_i$ nalezneme vstupní uzel, přiřadíme mu číslo i a sestrojíme graf $\vec{G}_{i+1}$ tak, že z $\vec{G}_i$ odstraníme uzel u_i i všechny hrany s ním incidující ;
- jedinému uzlu grafu $\vec{G}_n$ přiřadíme číslo n.

Takto sestrojené očíslování uzlů má zřejmě požadovanou vlastnost.

e) (5) $\Longrightarrow$ (1). Nechť v $\vec{G}$ existuje popsané očíslování uzlů. Kdyby v $\vec{G}$ existoval cyklus $f(\vec{C}_k)$, kde $f:\vec{C}_k \longrightarrow \vec{G}$, tak by (označíme-li $č_i$ očíslování uzlu f(i), i = 1,...,k), muselo platit $č_1 < č_2 < \dots < č_k < č_1$, což není možné.

Poznámky. 1. Při ověřování acykličnosti grafu $\vec{G}$ tedy stačí prověřit platnost kterékoliv jedné z pěti podmínek, uvedených ve větě 3.2.3. V praxi je užitečná hlavně podmínka (5), přičemž část d) důkazu poskytuje algoritmus, který v $|U(\vec{G})|$ krocích acykličnost prověří a v kladném případě sestrojí očíslování. Zkuste si pomocí tohoto algoritmu prozkoumat acykličnost grafu na obr. 3.2.1 (ve druhém kroku nenalezneme vstupní uzel - graf není acyklický) a acykličnost grafu na obr. 3.2.2 (existují dvě očíslování daných vlastností - ve čtvrtém kroku máme k dispozici dva vstupní uzly).

2. Z (5) ve větě 3.2.3 dále plyne, že každý acyklický graf $\vec{G}$ je izomorfní s některým podgrafem grafu $\vec{U}_n$ (uspořádání), kde $n = |U(\vec{G})|$; příslušný izomorfismus je dán očíslováním uzlů. Též naopak: uspořádání je acyklický graf a tedy též každý graf izomorfní s některým jeho podgrafem je acyklický. Krátce řečeno: acyklické grafy lze považovat za části uspořádání.

3. V acyklickém grafu je zřejmě každý orientovaný sled orientovaná cesta.

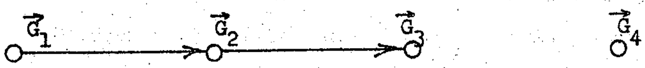
Definice. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf, $\vec{G}_1,\dots,\vec{G}_k$ jeho kvazikomponenty. Orientovaný graf

$$\vec{G}_c = (\{\vec{G}_1,\dots,\vec{G}_k\}, \{(\vec{G}_i,\vec{G}_j);\ i \neq j \text{ a existují } x \in U(\vec{G}_i) \text{ a } y \in U(\vec{G}_j) \text{ tak, že } (x,y) \in H(\vec{G})\})$$

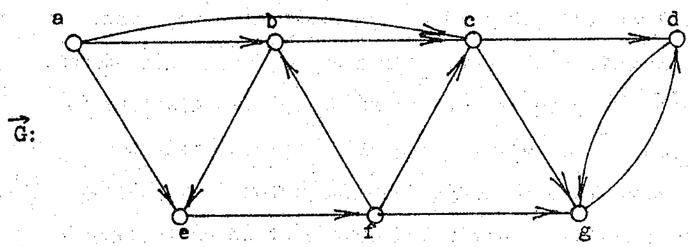
se nazývá kondenzace grafu $\vec{G}$.

Poznámka. Jinak řečeno: uzly kondenzace $\vec{G}_c$ jsou kvazikomponenty grafu $\vec{G}$; dvě kvazikomponenty jsou spojeny hranou, jestliže v nich existují uzly, spojené hranou.

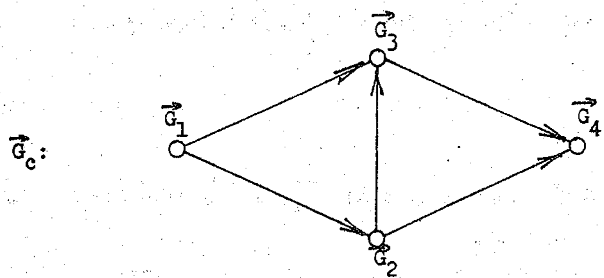
Příklady. Na obr. 3.2.3 a) je kondenzace grafu z obr. 3.2.1. Graf $\vec{G}$ na obr. 3.2.3. b) má čtyři kvazikomponenty s množinami uzlů $U(\vec{G}_1) = \{a\}$, $U(\vec{G}_2) = \{b,e,f\}$, $U(\vec{G}_3) = \{c\}$, $U(\vec{G}_4) = \{d,g\}$; kondenzace $\vec{G}_c$ je na obr. 3.2.3 c) .



a)



b)



c)

obr. 3.2.3.

Věta 3.2.4. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf. Platí:

1. $\vec{G}_c$ je acyklický graf.

2. $\vec{G}$ je silně souvislý právě když $\vec{G}_c$ je graf o jediném uzlu.

3. $\vec{G}$ je acyklický právě když $\vec{G} = \vec{G}_c$.

Důkaz. Tvrzení (1) plyne přímo z definice $\vec{G}_c$ a z maximality kvazikomponent, tvrzení (2) je zřejmé, neboť silně souvislý graf má jedinou kvazikomponentu, tvrzení (3) plyne ihned z části (2) věty 3.2.3.

3.3 Ohodnocený orientovaný graf

Obdobně jako v odst. 2.3 zavedeme i pro orientované grafy následující pojmy a označení.

Definice. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf, $u,v \in U(\vec{G})$. Vzdálenost uzlů u,v (značíme $d_{\vec{G}}(u,v)$) je délka nejkratší orientované cesty z uzlu u do uzlu v v grafu $\vec{G}$. Neexistuje-li v $\vec{G}$ orientovaná cesta z u do v, položíme $d_{\vec{G}}(u,v) = \infty$.

Příklad. Je-li $\vec{G} = \vec{C}_4$, pak $d_{\vec{G}}(1,2) = 1$, ale $d_{\vec{G}}(2,1) = 3$.

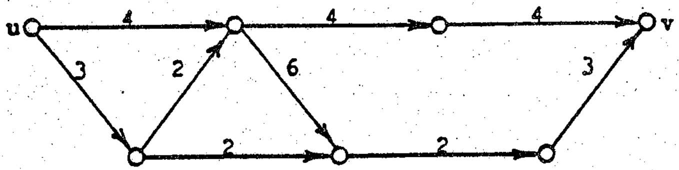
Definice. Buď $\vec{G}$ orientovaný graf. Funkce $w: H(\vec{G}) \to (0,\infty)$ se nazývá (hranové) ohodnocení grafu $\vec{G}$; graf se zadaným ohodnocením se nazývá ohodnocený orientovaný graf.

Definice. Buď $\vec{G}$ ohodnocený orientovaný graf. Pro každou orientovanou cestu $\vec{P} \subseteq \vec{G}$ definujeme <u>w-délku</u> $w(\vec{P})$ cesty $\vec{P}$ předpisem $w(\vec{P}) = \sum_{h \in H(\vec{P})} w(h)$.

Pro každé dva uzly $u,v \in U(\vec{G})$ nazveme <u>w-vzdáleností</u> uzlů u,v (značíme $d^w_{\vec{G}}(u,v)$) nejmenší w-délku orientované cesty z u do v v $\vec{G}$. Neexistuje-li v $\vec{G}$ orientovaná cesta z u do v, položíme $d^w_{\vec{G}}(u,v) = \infty$.

Jsou-li u,v dva uzly grafu $\vec{G}$, pak orientovaná cesta nejmenší délky z u do v se nazývá <u>nejkratší cesta</u> z u do v; orientovaná cesta z u do v, mající nejmenší w-délku, se nazývá <u>minimální cesta</u> z u do v.

Příklad. V grafu na obr. 3.3.1 platí: nejkratší orientovaná cesta z u do v má délku 3 (a w-délku 12), zatímco minimální cesta z u do v má délku 4 (ale w-délku 10); orientovaná cesta z v do u neexistuje. Je tedy $d_{\vec{G}}(u,v) = 3$, $d^w_{\vec{G}}(u,v) = 10$ a $d_{\vec{G}}(v,u) = d^w_{\vec{G}}(v,u) = \infty$.



obr. 3.3.1.

Poznámka. Pro funkce $d_{\vec{G}}$ a $d^w_{\vec{G}}$ by bylo možno formulovat větu obdobnou větě 2.2.3 (formulaci a důkaz ponecháváme čtenáři jako cvičení), ovšem s výjimkou tvrzení 2, jehož obdoba v orientovaných grafech neplatí. Funkce $d_{\vec{G}}$ a $d^w_{\vec{G}}$ tedy v orientovaném grafu $\vec{G}$ obecně nejsou metrikami.

Název:	Lineární algebra II - I. + II. část Úvod do diskrétní matematiky
Autor:	Doc.RNDr. Jiří Holenda, CSc. Doc.RNDr. Zdeněk Ryjáček, CSc.
Vydavatel:	Západočeská univerzita v Plzni
Určeno:	I. roč. FAV - všechna zaměření
Vedoucí katedry:	Prof.RNDr. Pavel Drábek, DrSc.
Vyšlo:	duben 1992
Počet stran celkem:	220
Počet obrázků celkem:	123
Počet příloh celkem:	-
AA / VA celkem:	10,13 / 10,71
Vydání:	I.
Náklad:	400 výtisků
Číslo publikace:	516
Tiskárna:	ZČU v Plzni
Cena za I. + II. část:	27,-- Kčs

55 - 070 - 92
17/31 Kčs 27,--