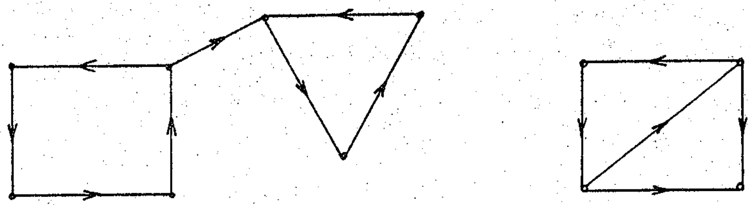
4. Matice grafů a jejich vlastnosti

Seznámili jsme se již se základními druhy grafů, které jsme v mnoha případech určovali obrázkem. Jak již víme, všechny vzájemně izomorfní grafy se dají znázornit stejným obrázkem. Grafické znázornění v případě menšího počtu uzlů a hran grafu má řadu výhod. Obrázek lze nakreslit rychle a je-li nakreslený vhodně, je přehledný, názorný a mnohdy zvýrazňuje určitou vlastnost grafu, takže v sobě skrývá víc, než jen pouhé určení množiny uzlů a množiny hran grafu. Tak například graf $\vec{G}$



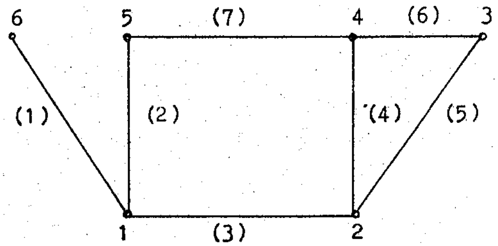
má 11 uzlů, 13 hran, dvě komponenty, jednu volnou hranu, dvě kvazikomponenty, obsahuje tři cykly atd. Zadat graf obrázkem je však možné pouze člověku. Není však možné zadat graf uvedeným obrázkem počítači. Rovněž při obecných teoretických úvahách a při řešení praktických úloh se zadáním grafů obrázky nevystačíme. V další části této kapitoly uvádíme popisy, které předpokládají numeraci uzlů a v některých případech i numeraci hran, nebo některých částí grafů. Pojem grafu je samozřejmě na očíslování jeho uzlů a hran nezávislý. Vyjadřujeme-li graf obrázkem, upouštíme vlastně od individuálních vlastností uzlů a hran daného grafu, takže obrázek reprezentuje celou třídu vzájemně izomorfních grafů.

Těžištěm této kapitoly je především výklad maticového popisu grafů, který je sice méně vhodný při zadávání grafu do počítače, ale má značný význam pro teoretické úvahy i pro tvorbu prakticky použitelných algoritmů. Zvlášť se zaměřujeme na možnosti algebraického vyjádření různých charakteristik grafů pomocí charakteristik příslušných tříd matic. Nejprve však v následujících dvou odstavcích uvádíme stručný přehled různých popisů neorientovaných a orientovaných grafů.

4.1. Různé popisy neorientovaného grafu

V přehledu uvádíme různá možná zadání grafu. Ve všech případech předpokládáme požadované očíslování uzlů i hran. Protože jde o velmi jednoduchou záležitost omezujeme se na základní charakteristiku a ilustraci zadání pro případ grafu G vyjádřeného obrázkem

G =



a) Výčtem vrcholů a hran

G: $(6,7;\ \{1,6\},\ \{1,5\},\ \{1,2\},\ \{2,4\},\ \{2,3\},\ \{3,4\},\ \{4,5\})$.

Před středníkem uvádíme počet uzlů a počet hran. Dále uvádíme jmenovitě výčet všech hran. Uvážíme-li, že množinové závorky jsou při uvádění hran zbytečné, můžeme graf G zadat pomocí $2\,|H(G)| + 2$ údajů ve tvaru

G: $(6,7;1,6,1,5,1,2,2,4,2,3,3,4,4,5)$.

b) Vyjádřením relace incidence ϱ hran a uzlů

b_1) pomocí množiny set(ϱ) všech incidujících dvojic (hrana, uzel);

set (ϱ) = { (1,1), (1,6), (2,1), 2,5), (3,1), (3,2), (4,2), (4,4), (5,2), (5,3), (6,3), (6,4), (7,4), (7,5)}.

Tímto zadáním nejsou zachyceny případné izolované uzly grafu.

b_2) pomocí množiny suc (ϱ) všech trojic (hrana, uzel, uzel), tj. trojic kde na prvém místě je uvedená hrana a dále dva uzly s ní incidující;

suc (ϱ) = { (1,1,6), (2,1,5), (3,1,2), (4,2,4), (5,2,3), (6,3,4), (7,4,5)}.

Tímto způsobem opět nejsou evidovány případné izolované uzly grafu.

b_3) pomocí množiny suc (ϱ^{-1}) všech uspořádaných x-tic, vyjadřující relaci incidence ϱ^{-1}, tj. incidenci uzlů a hran grafu;

suc (ϱ^{-1}) = { (1,1,2,3), (2,3,4,5), (3,5,6), (4,4,6,7), (5,2,7), (6,1) }.

b_4) v případě obyčejného grafu úplnou incidenční maticí

$M = [m_{ij}]$ typu $|U(G)|/|H(G)|$, kde $m_{ij} = 1$, je-li $u_i \in h_j$,
$m_{ij} = 0$ všude jinde;

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Vyjádřením relace sousednosti ω uzlů grafu

c_1) pomocí množiny set (ω) všech dvojic (i,j) sousedních uzlů pro $i \leqq j$ (toto zadání se liší jen nepatrně od zadání uvedeného ad a);

$set(\omega) = \{(1,2), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (3,4), (4,5)\}$.

c_2) pomocí množiny suc (ω) vyjadřující výčet všech okolí všech uzlů grafu;

$suc(\omega) = \{(1,2,5,6), (2,1,3,4), (3,2,4), (4,2,3,5), (5,4,1), (6,1)\}$.

c_3) v případě obyčejného grafu maticí sousednosti $S = [s_{ij}]$ řádu $|U(G)|$, kde

$s_{ij} = 1$ pro $\{i,j\} \in H(G)$,

$s_{ij} = 0$ pro $\{i,j\} \notin H(G)$;

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

d) Výčtem uzlů s jejich stupni a sousedy

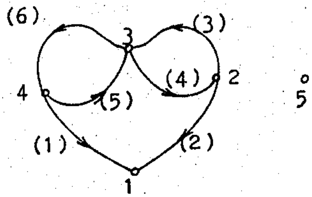
G (1,3,2,5,6,2,3,1,3,4,3,2,2,4,4,3,2,3,5,5,2,4,1,6,1,1).

Všechny uvedené způsoby jsou v zásadě ekvivalentní a výběr závisí na povaze úlohy, kterou máme na grafu řešit.

4.2. Různé popisy orientovaného grafu

K popisu orientovaného grafu máme v podstatě stejné možnosti jako pro popis grafu neorientovaného. Protože však přece jen nepatrné rozdíly jsou, uvádíme v tomto odstavci přehled základních způsobů zadání orientovaného grafu. Omezujeme se opět na stručný popis zadání v obecném případě a příslušný popis ilustrujeme v celém odstavci na příkladu orientovaného grafu $\vec{G}$ určeného obrázkem

$\vec{G}$:



Samozřejmě ve všech případech vycházíme z daného očíslování množiny uzlů a hran.

a) Popisy vycházející ze znalosti relace σ incidence hran a uzlů

a_1) výčtem prvků množiny set(σ), tj. výčtem uspořádaných trojic (i, j, k) takových, že $h_i = (u_j, u_k)$;

G: (1,4,1), (2,2,1), (3,2,3), (4,3,2), (5,4,3), (6,3,4) .

V obecném případě je tímto způsobem graf $\vec{G}$ určen až na případné izolované uzly.

a_2) V případě obyčejného grafu úplnou incidenční maticí

$M = [m_{ij}]$ typu $|U(\vec{G})|/|H(\vec{G})|$,

kde $m_{ij} = 1$, je-li $h_j = (u_i, u_k)$ pro nějaké k,

$m_{ij} = -1$ je-li $h_j = (u_k, u_i)$ pro nějaké k,

$m_{ij} = 0$ všude jinde;

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Podrobněji o incidenční matici pojednáváme ve 3. odstavci této kapitoly, kde uvádíme i její některé zajímavé vlastnosti. Poznamenáváme, že zadání orientovaného grafu $\vec{G}$ pomocí množiny suc(σ) a suc(σ^{-1}) není možné.

b) Popisy vycházející ze znalosti relace ω následnosti uzlů

b_1) výčtem prvků množiny set(ω), tj. výčtem všech orientovaných hran;

$\vec{G}$: $\{(4,1), (2,1), (2,3), (3,2), (4,3), (3,4)\}$

graf je určen až na izolované uzly;

b_2) výčtem prvků množiny suc(ω), tj. soupisem všech uzlů s udáním všech jejich následovníků;

$\vec{G}$: $\{(1), (2,1,3), (3,2,4), (4,1,3), (5)\}$;

b_3) výčtem prvků množiny suc(ω^{-1}), tj. soupisem všech uzlů s udáním všech jejich „předchůdců";

$\vec{G}$: $\{(1,4,2), (2,3), (3,2,4), (4,3), (5)\}$;

b_4) v případě prostého grafu $\vec{G}$ maticí sousednosti

$S = [s_{ij}]$ řádu $|U(\vec{G})|$, kde

$s_{ij} = 1$, je-li $(u_i, i_j) \in H(\vec{G})$,

$s_{ij} = 0$ všude jinde.

O matici sousednosti grafu $\vec{G}$ pojednáváme podrobněji ve 4.odstavci této kapitoly. Pro sledovaný příklad je zřejmě

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

4.3. Incidenční matice

Definice. Uvažujme orientovaný graf $\vec{G}$ bez smyček s daným očíslováním uzlů a hran. Nechť je $U(\vec{G}) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, $H(\vec{G}) = \{h_1, h_2, \ldots, h_m\}$. Matici $M = [m_{ik}]$ typu n/m, definovanou vztahy:

$m_{ik} = 1$, je-li u_i počáteční uzel hrany h_k ,

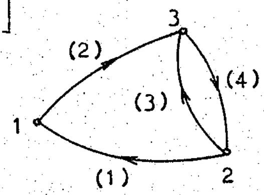
$m_{ik} = -1$, je-li u_i koncový uzel hrany h_k ,

$m_{ik} = 0$, jestliže uzel u_i neinciduje s hranou h_k ,

nazýváme úplnou incidenční (také uzlo-hranovou) maticí grafu G, stručněji incidenční maticí.

Tak například matice

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$ je incidenční matice grafu



Incidenční matice grafu $\vec{G}$ je speciálním případem tzv. totálně unimodulárních matic, které mají širší uplatnění i v rámci aplikací teorie grafů a proto o nich v tomto odstavci stručně pojednáme.

Definice. Řekneme, že matice $A = [a_{ij}]$ je totálně unimodulární, jestliže platí:

a) $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$;

b) determinant každé čtvercové podmatice matice A je roven 0 nebo ± 1.

Nyní uvedeme některé postačující podmínky, při kterých je matice totálně unimodulární.

Věta 4.3.1. Nechť A je matice s prvky $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ taková, že žádný sloupec nemá více než dva prvky nenulové. Pak

A je totálně unimodulární, právě když množinu řádkových indexů lze rozložit na množiny N_1, N_2, $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ tak, že

(1) jestliže dva nenulové prvky téhož sloupce jsou stejné, pak řádkový index prvního prvku patří do množiny N_1 a druhého prvku do množiny N_2;

(2) jestliže dva nenulové prvky téhož sloupce mají opačná znamení, pak řádkové indexy obou prvků patří shodně buď do N_1 nebo do N_2.

<u>Důkaz</u>. Nechť A je totálně unimodulární matice, která má v každém sloupci dva nenulové prvky. Protože sloupce, kde je nanejvýš jeden prvek různý od 0, nehrají v tom, co chceme dokázat, žádnou roli, budeme předpokládat, že v každém sloupci jsou právě dva prvky nenulové. Ukážeme, že množiny N_1 a N_2 splňující požadavky (1) a (2) lze najít. S maticí A sdružíme neorientovaný graf G s n uzly u_i a n hranami h_j: hrana h_j bude incidovat s vrcholy u_i a u_k, když $a_{ij} \neq 0$ a $a_{kj} \neq 0$. Takovou hranu nazveme „speciální", budou-li mít prvky a_{ij} a a_{kj} stejné znamení. Nechť C = $u_1, u_2, \dots, u_k, u_1$ je jednoduchá kružnice grafu s hranami $h_1, h_2, \dots, h_k$. Kružnice C bude sdružena s čtvercovou podmaticí B matice A tvaru

$$B = \begin{array}{c} \\ u_1 \\ u_2 \\ \\ \\ u_k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} h_1 & h_2 & & & & h_k \end{array} \\ \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & & & & \beta_k \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 & & & \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & & & \\ & & & & & \\ 0 & 0 & & & \beta_{k-1} & \alpha_k \end{bmatrix} \end{array}$$

kde $\alpha_j = \pm 1$ a $\beta_j = \pm 1$ a $\alpha_j = \beta_j$, když h_j je „speciální" hrana, a $\alpha_j = -\beta_j$, když h_j není „speciální". Je-li v podmatici

B p „speciálních" hran, pak máme

$$\det(B) = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k + (-1)^{k-1} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k =$$
$$= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k + (-k)^{k-1} (-1)^{k-p} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k =$$
$$= (1 + (-1)^{p+1}) \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k = \pm (1 + (-1)^{p+1}).$$

Z uvedeného vyplývá, že p musí být sudé, neboť jinak by platilo $\det(B) = \pm 2$. Tudíž každá jednoduchá kružnice v matici A má sudý počet speciálních hran.

V případě nespeciálních hran z obou incidujících uzlů vytvoříme nový uzel a hranu zanedbáme. V nově vytvořeném grafu již nebude žádná kružnice liché délky a tudíž graf je dvoubarevný. Definujme množinu $N_h = \{ i \mid v_i$ má barvu $h \}$, pro h = 1, 2. Vrcholy původního grafu, které byly spojeny v nový vrchol, budou patřit do množiny N_h, do které přísluší tento nový vrchol. Je jasné, že množiny N_1 a N_2 splňují požadavky (1) a (2) věty.

K důkazu v opačném směru (v důkazu postačitelnosti) předpokládejme, že platí (1) a (2) a B je čtvercová podmatice matice A. Matice B tudíž také splňuje požadavky (1) a (2). Je-li B řádu 1, pak det(B) = 0 nebo ± 1. Tvrzení věty dokážeme indukcí podle řádu p podmatice B. Předpokládejme, že $\det(B_{p-1}) = 0$ nebo ± 1 pro všechny podmatice B_{p-1} řádu (p-1) a nechť B_p je libovolná podmatice řádu p matice A. Mohou nastat tři případy:

(i) všechny sloupce podmatice B_p mají právě dva nenulové prvky a tudíž pro všechna j platí (jak plyne z podmínek (1) a (2)):

$$\sum_{i \in N_1} b_{ij} = \sum_{i \in N_2} b_{ij}$$

a tudíž řádky podmatice B_p jsou lineárně závislé a $\det(B_p) = 0$,

(ii) existuje nulový sloupec podmatice B_p a tudíž $\det(B_p) = 0$,

(iii) existuje sloupec např. j-tý ve kterém je právě jeden prvek nenulový, např. b_{sj}, pak ale

$$\det(B_p) = (-1)^{s+j} b_{sj} \det(B_{p-1})$$

a tvrzení ($\det(B_p) = 0$ nebo ± 1) platí podle indukčního předpokladu. Tím je důkaz věty dokončen.

Bez důkazu uveďme ještě následující 3 tvrzení.

<u>Věta 4.3.2.</u> Nechť A je matice s prvky $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$, pak A je totálně unimodulární matice, platí-li zároveň:

(1) $a_{ij} = a_{kj} \neq 0 \Rightarrow \underline{a}_i \succ \underline{a}_k$ nebo $\underline{a}_k \succ \underline{a}_i$;

(2) $a_{ij} = -a_{kj} \neq 0 \Rightarrow \underline{a}_i \succ -\underline{a}_k$ nebo $\underline{a}_k \succ -\underline{a}_i$.

(Uspořádání $\succ$ řádků matice A definujeme takto:

$\underline{a}_i \succ \underline{a}_k$ jestliže pro všechna j platí $a_{kj} \neq 0 \Rightarrow a_{ij} = a_{kj}$).

<u>Věta 4.3.3.</u> Nechť matice A, B mají stejný počet sloupců a prvky 0 nebo 1. Jestliže obě matice splňují podmínku (1) věty 4.3.2, pak bloková matice

$$C = \binom{A}{B} \text{ je totálně unimodulární.}$$

<u>Věta 4.3.4.</u> Nechť $A = [A_1, A_2]$ je bloková totálně unimodulární matice, pak bloková matice

$$Q = \begin{bmatrix} A_1, & A_2 \\ \pm I, & 0 \end{bmatrix}$$

je také totálně unimodulární.

Tím jsme ukončili stručný přehled některých postačujících podmínek při jejichž splnění je matice A totálně unimodulární. Nyní již můžeme dokázat tvrzení, jehož závažnost se projeví v dalším textu.

Věta 4.3.5. Incidenční matice M typu n/m grafu $\vec{G}$ je totálně unimodulární.

Důkaz. Matice M splňuje evidentně požadavky věty 4.3.1, položíme-li $N_1 = \{1, 2, \ldots, n\}$ a $N_2 = \emptyset$.

Incidenční matice M je pochopitelně závislá na pořadí, v jakém jsme očíslovali uzly i hrany grafu. Změna očíslování uzlů však způsobí pouze permutaci řádků matice M, zatímco změna očíslování hran způsobuje pouze permutaci sloupců matice M, takže je možné formulovat následující tvrzení.

Věta 4.3.6. Dva grafy $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ o stejném počtu n uzlů a m hran s incidenčními maticemi M_1, M_2 jsou izomorfní, právě když existují permutační matice P (řádu n) a Q(řádu m) tak, že platí:

$$M_1 = P\, M_2\, Q\ .$$

Na základě nutné a postačující podmínky uvedené ve větě je možné rozhodnout početně (a to je důležité) o izomorfismu dvou grafů. Uvážíme-li však, že všech permutačních matic řádu k je k!, vidíme, že k rozhodnutí o izomorfismu dvou grafů o n uzlech a m hranách můžeme vyzkoušet až m! n! možností součinů typu $P\, M_2\, Q$. To je prakticky evidentně neúnosné.

Je zřejmé, že všechny charakteristiky incidenční matice M, které zůstávají zachovány násobením permutačními maticemi P a Q, popisují svým způsobem i nějakou vlastnost příslušného grafu nezávislou na očíslování uzlů a hran. Takové charakteristiky pak přísluší celé třídě izomorfních grafů. Jednou z takových charakteristik je hodnost matice M, která pak je hodností grafu $\vec{G}$.

Věta 4.3.7. Je-li M incidenční matice grafu $\vec{G}$ o n uzlech, pak pro její hodnost platí:

$$\text{hod}(M) \leqq n - 1 .$$

Důkaz. Podle definice incidenční matice M je součet všech jejích řádků roven nulovému řádku a tedy jsou její řádky lineárně závislé.

Věta 4.3.8. Libovolný řádek incidenční matice M grafu $\vec{G}$ lze psát ve tvaru

$$\underline{m}_k = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \underline{m}_j .$$

Důkaz plyne z evidentního tvrzení $\sum_{j=1}^{n} \underline{m}_j = 0$.

Věta 4.3.9. Množina r řádků incidenční matice M typu n/m je lineárně závislá právě když v ní existuje s řádků ($1 \leqq s \leqq r$) takových, že jejich součet je nulový.

Důkaz. Protože postačitelnost vyplývá z věty 4.3.8, omezíme se na důkaz nutnosti uvedené podmínky. Nechť pro součet uvažovaných r řádků-označme je $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r$ - platí:

$$\sum_{j=1}^{r} \underline{a}_j = \underline{z} ,$$

kde $\underline{z}$ je řádek, který má p prvků nenulových (± 1) a m - p prvků nulových. Podle předpokladu lineární závislosti řádků $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_r$ je $p < r$. Vypustíme-li všechny ty řádky, které působí v řádku $\underline{z}$ vznik nenulového prvku, má zbývajících r - p řádků nulový součet. Stačí položit s = r - p a důkaz je ukončen.

Věta 4.3.10. Je-li $\vec{G}$ souvislý graf o n uzlech a $0 < r \leqq n - 1$, pak libovolných r řádků incidenční matice M grafu $\vec{G}$ je lineárně nezávislých.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že nějaké řádky v počtu r jsou linárně závislé, tj. podle věty 4.3.9 existuje mezi nimi $s(1 \leqq s \leqq r)$ řádků, jejichž součet je nulový. Pak ale existují permutační matice P (řádu n), Q (řádu m) takové, že

$$PM = \left[\begin{array}{c} S \\ \hdashline Z \end{array}\right] \quad \text{a} \quad PMQ = \left[\begin{array}{c:c} \tilde{S} & 0 \\ \hdashline 0 & \tilde{Z} \end{array}\right] ,$$

kde matice S odpovídá s řádkům s nulovým součtem;

matice Z odpovídá zbývajícím n - s řádkům a má nutně také nulový součet;

matice $[\tilde{S} \,\vdots\, 0] = SQ$ vznikla permutací sloupců matice S tak, aby sloupce $\tilde{S}$ byly nenulové; pak zřejmě $ZQ = [0 \,\vdots\, \tilde{Z}]$.

Mohou nastat pouze dva případy ($s < n$):

a) Matice $\tilde{Z}$ je nulová, pak ale v grafu $\vec{G}$ existují izolované uzly, což je spor se souvislostí grafu.

b) Matice $\tilde{Z}$ je nenulová, pak ale neexistuje žádná hrana mezi uzly, které odpovídají řádkům matice S a uzly určenými maticí Z, tj. v grafu existují alespoň dvě komponenty. To je opět spor s předpokladem souvislosti grafu. Tvrzení věty tudíž platí.

Důsledek 1 (věty 4.3.10). Je-li $\vec{G}$ souvislý graf o n uzlech a M jeho incidenční matice, pak platí:

$$\operatorname{hod}(M) = n - 1.$$

Důsledek 2 (věty 4.3.10). Je-li G graf o n uzlech a M jeho incidenční matice, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $\operatorname{hod}(M) = n - k$,
2. graf $\vec{G}$ má k komponent.

Důkaz. Nechť má graf $\vec{G}$ k komponent. Při vhodném očíslování uzlů a hran grafu lze zřejmě incidenční matici M grafu G psát ve tvaru

$$M = \begin{bmatrix} M_1, & 0, & \ldots\ldots & 0 \\ 0, & M_2, & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \\ 0, & 0, & \ldots\ldots & M_k \end{bmatrix},$$

kde M_j je incidenční matice j-té komponenty (jako samostatného grafu) o n_j uzlech. Zřejmě je $\sum_{j=1}^{k} n_j = n$, $hod(M_j) = n_j - 1$ (komponenta je souvislý graf) a $hod(M) = \sum_{j=1}^{k} hod(M_j) = \sum_{j=1}^{k} (n_j - 1) =$ $= n - k$.

Až dosud jsme se zabývali hodností celé incidenční matice M (typu n/m) grafu $\vec{G}$. Nyní se zaměříme na grafovou interpretaci hodnosti její podmatice, která odpovídá faktoru $\vec{P}$ grafu $\vec{G}$. Omezíme se na rozbor situace v krajních případech, kdy:

(i) $|H(\vec{P})| = m - 1$, tj. případ kdy faktor $\vec{P}$ vznikl z grafu $\vec{G}$ vypuštěním jediné hrany;

(ii) $|H(\vec{P})| = n - 1$, tj. případ kdy faktor $\vec{P}$ má o jednu hranu méně než uzlů, takže může být stromem.

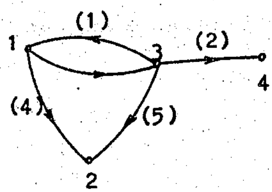
Věta 4.3.11. Je-li M_s matice typu n/m-1, která vznikla vypuštěním s-tého sloupce incidenční matice M grafu $\vec{G}$ s daným očíslováním uzlů a hran a $hod(M_s) = hod(M) - 1$, pak hrana h_s je volná hrana grafu $\vec{G}$.

Důkaz. Matice M_s je incidenční matice faktoru $\vec{P}$ grafu, který vznikl z grafu $\vec{G}$ vypuštěním hrany h_s. Nechť $hod(M) =$ $= n - k$. Podle předpokladu je $hod(M_s) = hod(M) - 1 = n - k - 1 =$

$= n - (k + 1)$. To však podle věty 4.3.10 znamená, že graf $\vec{G}$ má k komponent, zatímco **faktor** $\vec{P}$ jich má $k + 1$. Odtud plyne, že hrana h_s je volná hrana grafu $\vec{G}$.

Uvedená věta je formulována jako implikace a nedá se obrátit jak ukazuje následující příklad.

<u>Příklad</u>. Uvažujme graf $\vec{G}$ s daným očíslováním uzlů a hran a s incidenční maticí M, kde

$\vec{G}$: 

$$, \quad M = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

V daném příkladě je:

hod(M) = 3, což odpovídá skutečnosti, že $\vec{G}$ je souvislý;

hod(M_2) = 2 a rozdíl hod(M) - hod(M_2) = 1 signalizuje, že h_2 je volná hrana;

h_4 je také volná hrana, neboť nepřísluší žádnému cyklu grafu $\vec{G}$, ale rozdíl hod(M) - hod(M_4) žádnou volnou hranu nesignalizuje, neboť je nulový. Je to dáno tím, že po odstranění této volné hrany h_4 zůstal faktor $\vec{P}$ souvislý.

<u>Věta 4.3.12.</u> Nechť $\vec{G}$ je obyčejný orientovaný graf a R matice tvořená libovolnými $n - 1$ sloupci incidenční matice M typu n/m grafu $\vec{G}$. Pak platí :

(1) hod(R) = $n - 1$, právě když faktor $\vec{R}$ (grafu $\vec{G}$) určený incidenční maticí R je strom a tudíž kostra grafu $\vec{G}$;

(2) hod(R) $< n - 1$, právě když faktor $\vec{R}$ (grafu $\vec{G}$) není souvislý;

(3) je-li R_s podmatice, která vznikla z matice R vyškrtnutím

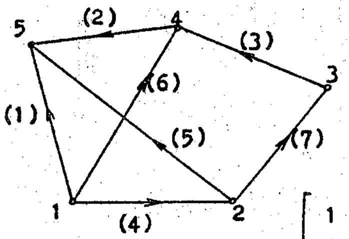
s-tého řádku, pak

(i) $\det(R_s) = 0$, právě když ve faktoru $\vec{R}$ je alespoň jedna kružnice;

(ii) $\det(R_s) = \pm 1$, právě když faktor $\vec{R}$ je kostra grafu $\vec{G}$.

<u>Důkaz</u> tvrzení uvedených ad(1) a (2) vyplývá z důsledku 2. aplikovaného na faktor $\vec{R}$. Myšlenku důkazu tvrzení ad (3) ilustrujeme následujícím příkladem.

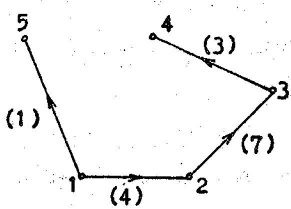
<u>Příklad</u>. Uvažujme obyčejný souvislý orientovaný graf $\vec{G}$:



s incidenční maticí $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Nechť R je matice tvořená 1., 3., 4. a 7. sloupcem matice M, tj.

$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Matice R odpovídá faktoru $\vec{R}$:



Hodnost matice R je rovna 4, což algebraicky vyjadřuje podle důsledku 2., že faktor $\vec{R}$ je souvislý. Protože součet všech řádků matice R je roven nulovému řádku, je libovolný s-tý řádek kombinací ostatních řádků. Tudíž je $\text{hod}(R) = \text{hod}(R_s)$, kde matice R_s vznikla z matice R vynecháním s-tého řádku. V našem případě

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ a dále je

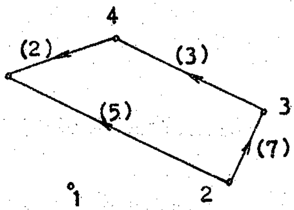
$\det(R_1) = -1$, $\det(R_2) = 1$, $\det(R_3) = -1$.

V obecném případě je zde $\mathrm{hod}(R_s) = 4$, tudíž je to regulární matice. Protože však R_s je podmatice totálně unimodulární matice M je $\det(R_s) = \pm 1$.

Uvažujme dále jinou matici R tvořenou 2., 3., 5. a 7. sloupcem incidenční matice M.

Pak je

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$ incidenční maticí faktoru $\vec{R}$:



Hodnost matice R je rovna 3, což podle důsledku 2. je algebraickým vyjádřením skutečnosti, že faktor $\vec{R}$ má dvě komponenty. Protože součet všech řádků matice R je nulový řádek, je libovolný s-tý řádek matice R lineární kombinací ostatních řádků. Matice R_s, která vznikla z matice R vynecháním s-tého řádku, má tudíž stejnou hodnost jako matice R. Je tedy $\mathrm{hod}(R) = \mathrm{hod}(R_s) = 3$ a všechny matice R_s jsou singulární ($\det(R_s) = 0$). V našem případě je např.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad R_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{a } \det(R_1) = \det(R_4) = \det(R_5) = 0.$$

Poznámka. Chceme-li využít výsledků tohoto odstavce při vyšetřování neorientovaných grafů bez smyček, pak máme dvě možnosti:

a) grafu G přiřadíme libovolnou orientací hran graf $\vec{G}$ a za incidenční matici grafu G prohlásíme incidenční matici grafu $\vec{G}$.

b) grafu G přiřadíme matici $M = [m_{ij}]$ typu m/n, kde $m = |U(G)|$, $n = |H(G)|$ a $m_{ij} = 1$, je-li $\{u_i, u_j\} \in H(G)$ a $m_{ij} = 0$ všude jinde. V tomto případě však musíme uvažovat matici M nad tělesem zbytkových tříd mod 2, (uvažte, že $1 + 1 = 0 \Rightarrow 1 = -1$).

4.4. Matice sousednosti

V tomto odstavci se zabýváme maticemi sousednosti orientovaných i neorientovaných grafů. Společným znakem matic sousednosti je, že u nich - na rozdíl od incidenční matice - sloupce i řádky matice odpovídají uzlům grafu; hodnota prvku na místě (i,j) v matici pak vyjadřuje skutečnost, zda jsou i-tý a j-tý uzel spojeny hranou (tj. jsou sousední). V literatuře se též můžeme setkat s termínem uzlo-uzlová matice. Budeme se zabývat následujícími speciálními případy matic sousednosti:

A) Maticí sousednosti neorientovaného grafu,

B) Maticí sousednosti orientovaného grafu,

C) Laplaceovou maticí sousednosti,

D) Znaménkovou maticí.

A) Matice sousednosti neorientovaného grafu

Definice. Maticí sousednosti obyčejného neorientovaného grafu G o n uzlech s daným očíslováním rozumíme matici $S = [s_{ik}]$ řádu n takovou, že:

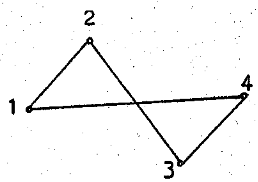
$s_{ik} = 1$, je-li $\{u_i, u_k\} \in H(G)$ a

$s_{ik} = 0$ v opačném případě.

Tak například matice

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

je maticí sousednosti grafu G:



Podle definice je matice S symetrická ($S = S^T$) a zřejmě platí:

Věta 4.4.1. Nechť G_1, G_2 jsou dva obyčejné neorientované grafy se stejným počtem n uzlů a S_1, S_2 jejich matice sousednosti. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(i) Grafy G_1, G_2 jsou izomorfní.

(ii) Existuje permutační matice P řádu n tak, že $S_1 = P\, S_2\, P^T$.

Význam uvedené věty spočívá v tom, že umožňuje algebraicky rozhodnout otázku izomorfismu grafů. Skutečnost, že všech různých permutačních matic řádu n je n!, však značně oslabuje praktickou možnost využití uvedené nutné a postačující podmínky izomorfismu grafů pro větší n.

Poznámka. Při počítání s maticí sousednosti je nutné uvážit, v jakém smyslu budeme chápat sčítání a násobení na množině $\{0,1\}$. Uvedené operace je totiž možné chápat 3 způsoby:

a) jako běžné sčítání a násobení na množině celých čísel;

b) jako operace na tělese zbytkových tříd mod (2);

c) jako booleovské spojení a průsek, tj. jako logický součet a součin.

Každý uvedený případ má i své praktické oprávnění, jak dále ukážeme.

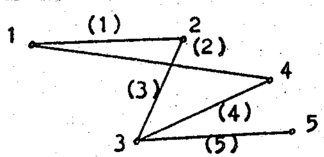
<u>Věta 4.4.2</u>. Nechť S je matice sousednosti obyčejného neorientovaného grafu G s n uzly ; sčítání a násobení na množině $\{0,1\}$ chápejme jako běžné operace na množině celých čísel. Potom prvek $s_{ik}^{(v)}$ matice S^v udává počet sledů délky v mezi uzly u_i a u_k grafu G.

<u>Důkaz</u> provedeme indukcí podle v.
Pro $v = 1$ tvrzení platí, neboť $s_{ik}^{(1)} = s_{ik} = 1$ právě když $\{u_i, u_k\}$ je hrana a to je sled délky 1 a graf G je prostý.
Nechť tvrzení platí pro $v \geq 1$, pak je

$$S^{v+1} = S^v S \quad \text{a tedy } s_{ik}^{(v+1)} = \sum_{j=1}^{n} s_{ij}^{(v)} s_{jk}.$$

Podle indukčního předpokladu je $s_{ij}^{(v)}$ počet sledů z uzlu u_i do uzlu u_j délky v. Existuje-li hrana $\{u_j, u_k\}$ v grafu G, pak $s_{ij}^{(v)}$ udává počet sledů z uzlu u_i do uzlu u_k délky $v + 1$ specifikovaných vlastností, že poslední ve sledu je hrana $\{u_j, u_k\}$. Evidentně součtem přes všechny možné poslední hrany dostaneme celkový počet sledů délky $v + 1$.

<u>Příklad</u>. Pro graf G



je

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S^3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a protože $s_{35} = 3$, existují tři různé sledy z uzlu u_3 do uzlu u_5, a to: $u_3\, u_2\, u_3\, u_5$,
$u_3\, u_5\, u_3\, u_5$,
$u_3\, u_4\, u_3\, u_5$.

<u>Věta 4.4.3.</u> Nechť G je obyčejný neorientovaný graf s daným očíslováním uzlů a hran, M jeho incidenční matice typu n/m a S jeho matice sousednosti řádu n. Pak, počítáme-li v tělese zbytkových tříd mod 2, platí:

$$S = D + M\,M^T,$$

kde $D = [d_{ij}]$ je diagonální matice řádu n a $d_{jj} = \delta_j$; δ_j značí stupeň uzlu u_j pro $j = 1, 2, \ldots, n$.

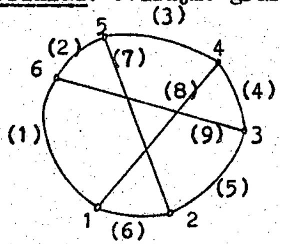
<u>Důkaz</u>. Nechť $B = [b_{ij}]$ a $B = D + M\,M^T$; zřejmě je $b_{jj} = 2\,\delta_j$ a tedy při počítání mod 2 je $b_{jj} = 0$ pro $j = 1, 2, \ldots, m$. Dále pro $i \neq j$ je $b_{ij} = \sum_{k=1}^{m} m_{ik}\, m_{kj}^{(T)} = \sum_{k=1}^{m} m_{ik}\, m_{jk}$. Avšak $m_{ik}\, m_{jk} = 1$, právě když hrana h_k inciduje jak s uzlem u_i, tak s uzlem u_j, tj. $\{u_i, u_j\} = h_k$. Graf G je však podle předpokladu obyčejný a tudíž v uvažovaném součtu, který vytváří prvek b_{ij} je nutně nanejvýš jeden součin nenulový. Je tedy

$b_{ij} = 1$, právě když $\{u_i, u_j\} \in H(G)$,

$b_{ij} = 0$ všude jinde.

Tvrzení věty tudíž platí, neboť skutečně $B = S$.

Příklad. Uvažujme graf G:



s incidenční maticí

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zřejmě je při počítání mod 2

$$MM^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$, $D = I$, neboť všechny uzly jsou

stupně 3. Jak se lehce přesvědčíme, je $D + M\,M^T$ skutečně maticí sousednosti S grafu G. Matice S vznikne z matice $M\,M^T$ vynulováním diagonálních prvků $(1 + 1 = 0)$.

Věta 4.4.4. Nechť S je matice sousednosti obyčejného neorientovaného grafu G s n uzly. Chápeme-li sčítání a násobení jako logické operace, je-li $V^k = (I + S)^k = [\, v_{ij}^{(k)} \,]$ a značí-li $d(u_i,\, u_j)$ vzdálenost uzlů u_i, u_j v grafu G, pak platí:

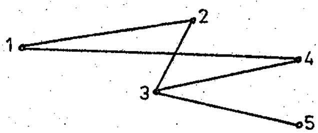
(1) $d(u_i, u_j) \leqq k$, právě když $v_{ij}^{(k)} = 1$;

(2) $d(u_i, u_j) = \min\{k \mid v_{ij}^{(k)} = 1\}$;

(3) graf G je souvislý, právě když $V^{n-1} = E$, tj. $n - 1$ mocnina matice V má všechny prvky rovny jedné.

Důkaz. Při logickém sčítání (spojení) je $1 + 0 = 0 + 1 = 1 + 1 = 1$, $0 + 0 = 0$, při logickém násobení (průseku) je: $0.0 = 0.1 = 1.0 = 0$, $1.1 = 1$. Zřejmě je $v_{ij}^{(2)} = \sum_{r=1}^{n} v_{ir}^{(1)} v_{rj}^{(1)} = 1$ právě když existuje index r tak, že $v_{ir}^{(1)} = 1$ a zároveň $v_{rj}^{(1)} = 1$, tj. $\{u_i, u_r\} \in H(G)$ a zároveň $\{u_r, u_j\} \in H(G)$. To však znamená, že $d(u_i, u_j) \leqq 2$. Důkaz ad (1) lze dokončit stejnou úvahou indukcí podle k. Tvrzení uvedená ad (2) a (3) jsou pak důsledkem tvrzení ad (1).

Příklad. Pro graf G:



je

$$V = I + S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$V^3 = E = V^4 = \ldots,$

a protože $v_{15}^{(2)} = 0$, ale $v_{15}^{(3)} = 1$, je $d(u_1, u_5) = 3$.

Protože posloupnost matic $V, V^2, \ldots, V^{n-1}$ plně popisuje metriku grafu, je možné z uvedené posloupnosti zjistit i ostatní metrické vlastnosti grafu G, jako je excentricita uzlů, průměr grafu, poloměr grafu i střed grafu.

B) Matice sousednosti orientovaného grafu

Definice. Mechť $\vec{G}$ je obyčejný orientovaný graf s daným očíslováním uzlů a $U(\vec{G}) = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Maticí sousednosti grafu $\vec{G}$ nazýváme čtvercovou matici $N = n_{ij}$ řádu n takovou, že

$n_{ij} = 1$, jestliže $(u_i, u_j) \in H(\vec{G})$,

$n_{ij} = 0$ v každém jiném případě.

Protože orientované grafy lišící se pouze očíslováním uzlů jsou izomorfní, platí evidentně následující tvrzení.

Věta 4.4.5. Jsou-li $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ dva grafy a N_1, N_2 jejich matice sousednosti, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(1) $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ jsou izomorfní grafy.

(2) Existuje permutační matice P tak, že $P\,N_1\,P^T = N_2$.

Věta dává principiální možnost rozhodnout algebraicky o izomorfismu orientovaných grafů a zároveň ukazuje, které charakteristiky matice sousednosti N mohou být charakteristikami grafů. Jsou to charakteristiky společné třídě matic $\{X \mid X = P\,N\,P^T$, kde P je libovolná permutační matice řádu $m\}$. Takovými charakteristikami jsou např. hod (N), det (N), vlastní čísla matice N, atd. Vlastnosti grafu $\vec{G}$, které nezávisí na orientaci hran (např. souvislost, počet koster, počet komponent atd) lze zjistit zrušením orientace hran a vyšetřováním neorientovaného grafu G. Zřejmě matice sousednosti S grafu G je dána vztahem

$$S = N + N^T ,$$

kde sčítání je chápáno booleovsky.

V dalším ukážeme, jak lze ze znalosti matice N různým chápáním sčítání a násobení na množině $\{0, 1\}$ a vhodnými postupy algebraicky charakterizovat některé vlastnosti grafu $\vec{G}$, závislé na orientaci.

Věta 4.4.6. Nechť $\vec{G}$ je obyčejný orientovaný graf, $N = [n_{ij}]$ jeho matice sousednosti a sčítání i násobení na množině $\{0, 1\}$ uvažujme jako běžné operace na množině celých čísel. Pak platí:

(1) prvek $n_{ij}^{(k)}$ matice N^k udává počet orientovaných sledů délky k z uzlu u_i do uzlu u_j;

(2) položíme-li $d(u_i, u_j) = \min\{k \mid n_{ij}^{(k)} \neq 0\}$, je d nejmenší délka orientované cesty z uzlu u_i do uzlu u_j.

Důkaz lze provést obdobně jako u věty 4.4.4.

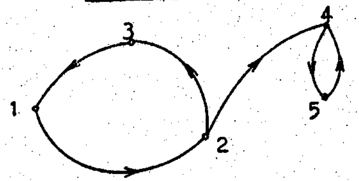
Věta 4.4.7. Nechť $\vec{G}$ je obyčejný orientovaný graf, N jeho matice sousednosti a sčítání a násobení na množině $\{0, 1\}$ uvažujme jako logické operace (booleovsky). Nechť dále $R = \sum_{k=0}^{v} N^k = [r_{ij}]$, kde $v = \min\{|H(\vec{G})|, |U(\vec{G})| - 1\}$ a $\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]$ matice taková, že $\tilde{r}_{ij} = \min\{r_{ij}, r_{ji}\}$. Pak platí:

(1) R je maticová reprezentace reflexivně tranzitivního uzávěru relace následnosti určené grafem $\vec{G}$;

(2) je-li $\tilde{r}_{ij} = 1$, pak uzly u_i, u_j patří do téže kvazikomponenty grafu $\vec{G}$;

(3) je-li $\tilde{R} = E$, tj. $\tilde{r}_{ij} = 1$ pro všechna i, j, je graf $\vec{G}$ silně souvislý.

Příklad místo důkazu. Uvažujme orientovaný graf $\vec{G}$:



s maticí sousednosti $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

V tomto případě je

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \ldots$$

$n_{25}^{(4)} = n_{23}^{(4)} = n_{24}^{(4)} = 1$, existuje tedy orientovaný sled z uzlu u_2 do uzlů u_3, u_4, u_5 délky 4;

protože například $n_{15}^{(4)} = 0$, neexistuje orientovaný sled z u_1 do u_5 délky 4. Délka orientované cesty z u_1 do u_5 je rovna 3, neboť $\min\{k \mid n_{15}^{(k)} \neq 0\} = 3$. Dále je $v = 4$ a tudíž

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že $\vec{G}$ má dvě kvazikomponenty s množinami uzlů $\{u_1, u_2, u_3\}$ a $\{u_4, u_5\}$.

<u>Věta 4.4.8.</u> Nechť $\vec{G}$ je obyčejný orientovaný graf s maticí sousednosti N řádu n. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(1) $\vec{G}$ je acyklický.

(2) N je nilpotentní matice.

(3) Všechna vlastní čísla matice N jsou nulová.

(4) $\det(xI - N) = x^n$.

(5) Existuje $k < n$ tak, že je $(I - N)^{-1} = I + N + N^2 + \ldots + N^k$.

Důkaz. (1) ⇒ (2): Je-li $\vec{G}$ acyklický, je každý or. sled or. cestou, takže podle věty 4.4.6 nutně existuje $k < n$ tak, že $N^k = 0$, tj. N je nilpotentní matice.
(2) ⇒ (1): Je-li N nilpotentní, pak pro nějaké k je $N^k = 0$. To však podle věty 4.4.6 značí, že neexistuje mezi žádnou dvojicí uzlů or.sled délky k a delší. To však znamená, že v grafu G nemůže existovat žádný cyklus.
Ekvivalenci vlastností (2), (3), (4), (5) ponecháváme čtenáři jako cvičení.

C) Laplaceova matice sousednosti

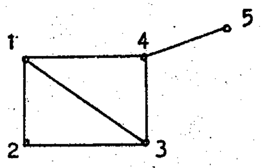
Definice. Pro daný obyčejný neorientovaný graf G s očíslovanými uzly $u_1, u_2, \ldots, u_n$ definujeme Laplaceovu matici $L = [l_{ik}]$ řádu n vztahy:

a) $l_{ik} = -1$ pro $\{u_i, u_k\} \in H(G)$,

b) $l_{ik} = 0$ pro $i \neq k$ a zároveň $\{u_i, u_k\} \notin H(G)$,

c) $l_{ii} = d(u_i)$ (= stupeň uzlu u_i).

Definici ilustrujeme maticí L, která přísluší grafu G na obrázku.



$$L = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Podle definice má matice L tyto základní vlastnosti:

(1) $L = L^T$, tj. je symetrická;

(2) $\sum_{k=1}^{m} l_{ik} = 0$ pro každé $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tj. součet prvků v každém řádku (i sloupci, neboť je $L = L^T$) je roven nule;

(3) $\det(L) = 0$;

(4) $0 \in \mathcal{S}(L)$, tj. 0 je vlastním číslem matice L;

(5) Vlastnímu číslu 0 odpovídá vlastní vektor $e = [1,1,\dots,1]^T$.

Následující tvrzení je přímou analogií vět 4.4.1 a 4.4.5.

Věta 4.4.9. Jsou-li G_1, G_2 dva obyčejné neorientované grafy o stejném počtu m uzlů a L_1, L_2 příslušné matice sousednosti, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) G_1, G_2 jsou izomorfní grafy.

(ii) Existuje permutační matice P řádu n taková, že

$$L_1 = P\, L_2\, P^T.$$

Následující věta ukazuje souvislost Laplaceovy matice s incidenční maticí.

Věta 4.4.10. Je-li M incidenční matice grafu $\vec{G}$ s n uzly, který vznikl z obyčejného neorientovaného grafu G libovolnou orientací hran, pak matice $L = [l_{ik}] = M\, M^T$ je Laplaceova matice sousednosti grafu G.

Důkaz. Podle definice součinu matic je $l_{ik} = \sum_{j=1}^{m} m_{ij}\, m_{jk}^{(T)} = \sum_{j=1}^{m} m_{ij}\, m_{kj}$. Odtud pro i = k snadno plyne (uvážíme-li, že $m_{ij}^2 = 1$, když uzel u_i inciduje s hranou h_j v grafu G a $m_{ij}^2 = 0$, když u_i neinciduje s h_j) vztah c) z definice matice L, neboť $l_{ii} = \sum_{j=1}^{m} m_{ij}^2$. Je-li $i \neq k$, pak $m_{ij}\, m_{kj}$ je nenulové právě když hrana h_j inciduje jak s uzlem u_i tak i s uzlem u_k. V tomto případě podle předpokladu věty je jedno z čísel m_{ij}, m_{kj} rovno 1 a druhé -1. Sčítáme-li součiny $m_{ij}\, m_{kj}$ podle j dostaneme zřejmě vztahy a) a b), z definice matice L.

Poznámka. Matice $L = M M^T$ je nezávislá na očíslování hran v grafu G. Jsou-li totiž M a $\widetilde{M}$ dvě incidenční matice téhož grafu $\vec{G}$ při stejném očíslování uzlů a různém očíslování hran, pak existuje permutační matice Q (její řád je roven počtu sloupců matice M a tedy i $\widetilde{M}$) tak, že $M = \widetilde{M} Q$. Dále zřejmě:

$$M M^T = (\widetilde{M}Q)(\widetilde{M}Q)^T = (\widetilde{M}Q)(Q^T\widetilde{M}^T) = \widetilde{M}(QQ^T)\widetilde{M}^T = \widetilde{M}\,\widetilde{M}^T,$$

neboť $Q\,Q^T = I$.

Věta 4.4.11. Je-li L Laplaceova matice sousednosti obyčejného neorientovaného grafu G s n uzly, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) graf G má k komponent;

(ii) hod $(L) = n - k$.

Důkaz. Podle věty 4.4.10 je $L = M M^T$, takže L je Gramova matice řádků matice M ($l_{ij} = \underline{m}_i\, \underline{m}_j^T$) a tudíž hod (L) = hod (M). Matice M je však incidenční matice grafu $\vec{G}$, který vznikl z grafu G libovolnou orientací hran, a tedy oba grafy mají stejný počet komponent; dokazované tvrzení vyplývá z věty 4.3.10 (důsledek 2).

Důsledek. Je-li L Laplaceova matice sousednosti řádu n, pak příslušný graf G je souvislý, právě když hod $(L) = n - 1$.

Stanovení počtu různých koster grafu G umožňuje následující věta. Ukazuje se opět, že Laplaceova matice sousednosti nejenom graf G určuje (až na izomorfismus), ale zároveň obsahuje početně zpracovatelné algebraické údaje, které lze grafově interpretovat.

Věta 4.4.12. Nechť L je Laplaceova matice sousednosti obyčejného neorientovaného grafu G s n uzly a m hranami. Pak všechny hlavní minory řádu n - 1 matice L si jsou rovny a libovolný z nich udává počet různých koster grafu G.

Důkaz. Nechť L_s značí matici, která vznikla z matice L vynecháním s-tého řádku a s-tého sloupce. Značí-li dále M_s matici, která vznikla vyškrtnutím s-tého řádku incidenční matice M grafu $\vec{G}$ (vznikl z G libovolnou orientací hran), pak zřejmě podle věty 4.4.10 je

$$L_s = M_s M_s^T;$$

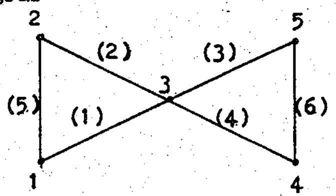
Podle věty Binet-Cauchyovy však je

$$\det (L_s) = \sum_{(\varkappa)} \det (M_s[\varkappa]) \det (M_s[\varkappa])^T = \sum_{(\varkappa)} \det^2(M_s[\varkappa]),$$

kde sčítáme přes všechny možné kombinace ($\varkappa$) sloupců (n-1).třídy z m sloupců matice M_s a kde $M_s[\varkappa]$ značí podmatici tvořenou všemi řádky matice M_s a příslušnou kombinací ($\varkappa$) sloupců matice M_s. Podle věty 4.3.12. je však $\det (M_s[\varkappa]) = \pm 1$ právě když sloupce v kombinaci ($\varkappa$) odpovídají hranám nějaké kostry.
V ostatních případech je $\det (M_s[\varkappa]) = 0$. Odtud plyne tvrzení dokazované věty.

Příklad. Uvažujme neorientovaný graf s daným očíslováním uzlů a hran. Pro graf

G:



je při orientaci hran z uzlu s nižším indexem do uzlu s vyšším indexem matice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

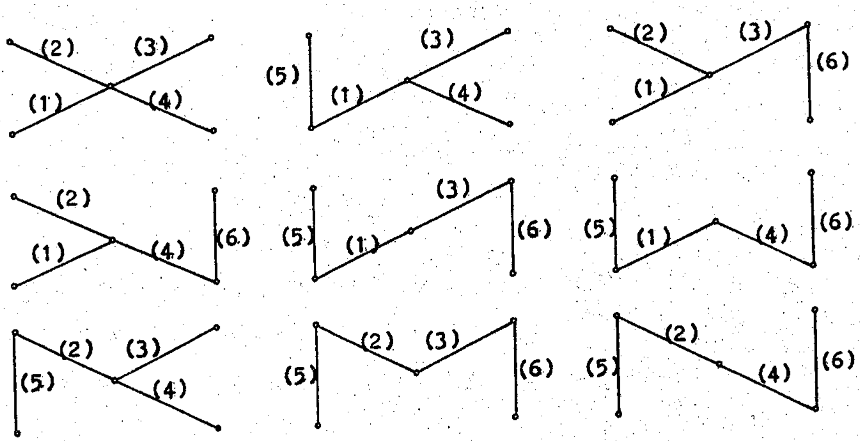
incidenční maticí. Snadno zjistíme, že platí

$$M\,M^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = L,$$

což je příslušná Laplaceova matice sousednosti. V našem případě například

$$\det (L_3) = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 9 = \det (L_1) = \det (L_2) = \det (L_4) = \det (L_5).$$

Graf G má tudíž (podle věty 4.4.12) 9 různých koster, a to :



Incidenční matice uvedených koster vzniknou vyškrtnutím 2 sloupců incidenční matice M, a to těch, které odpovídají vypuštěným hranám grafu G. Zdůrazňujeme, že všechny incidenční matice koster v tomto příkladě mají hodnost rovnu 4. Vyškrtáváním 2 sloupců v matici M vznikne dalších 6 podmatic. Jejich společná hodnost je však 3 a jim odpovídající faktory jsou nesouvislé. Ověřte si to!

Příklad. Určíme počet koster p úplného obyčejného grafu G o n uzlech. V tomto případě je Laplaceova matice sousednosti L řádu n a je

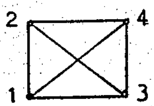
$$L = \begin{bmatrix} n-1, & -1, & -1, & \dots, & -1 \\ -1, & n-1, & -1, & \dots, & -1 \\ -1, & -1, & n-1, & \dots, & -1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -1, & -1, & -1, & \dots, & n-1 \end{bmatrix}.$$

Samozřejmě je det (L) = 0. Počet p různých koster určuje hodnota libovolného hlavního subdeterminantu řádu n − 1 matice L. V tomto případě jsou všechny hlavní podmatice řádu n − 1 stejné a tedy $p = \det (nI_{n-1} - E_{n-1})$, kde I_{n-1} je jednotková matice řádu n − 1 a E_{n-1} je matice samých jedniček téhož řádu. Z algebry víme, že pro matici A řádu r je:

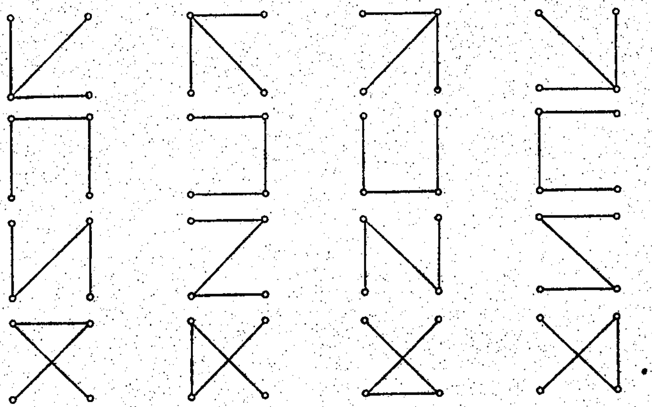
a) $\det (A) = \prod_{i=1}^{r} \lambda_i$, kde λ_i jsou vlastní čísla matice A (opakují se s algebraickou násobností);

b) je-li $\lambda_i \in \mathcal{S}(A)$ je $(\alpha \lambda_i + \beta) \in \mathcal{S}(\alpha A + \beta I)$, tj. je-li λ_i vlastní číslo matice A násobnosti k, pak číslo $\alpha \lambda_i + \beta$ je vlastním číslem matice $\alpha A + \beta I$ stejné násobnosti k, a to pro libovolná čásla α, β.

V našem příkladě je $\mathcal{S}(E_{n-1}) = \{ n - 1, 0 \}$, kde 0 je n − 2 násobná, podle b) je tedy $\mathcal{S}(-E + nI) = \{ 1, n \}$ a podle a) je $p = \det (-E + nI) = n^{n-2}$.

Úplný graf G = 

o čtyřech uzlech má následují-cích 16 různých koster, které přísluší do dvou izomorfních tříd:



D) Znaménková matice

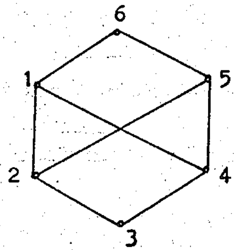
Definice. Pro obyčejný neorientovaný graf G, při daném očíslování uzlů ($U(G) = u_1, u_2, \ldots, u_n$), zavádíme **znaménkovou matici** $Z = [z_{jk}]$ řádu n pro $j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ vztahy:

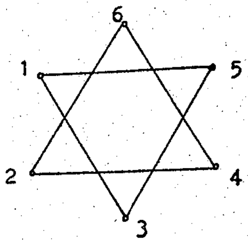
$z_{jk} = +1$, když $\{u_j, u_k\} \in H(G)$,

$z_{jk} = -1$, když $\{u_j, u_k\} \notin H(G)$,

$z_{kk} = 0$.

Znaménková matice Z je zřejmě symetrická ($Z = Z^T$). Bývá zvykem v matici Z uvádět pouze znaménka a nulové diagonální prvky. Tak například pro grafy G a $\widetilde{G}$ určené obrázkem





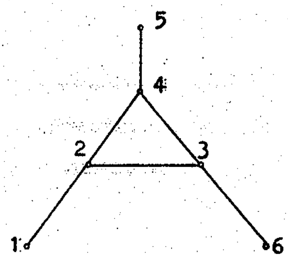
$$\text{je } Z = \begin{bmatrix} 0 & + & - & + & - & + \\ + & 0 & + & - & + & - \\ - & + & 0 & + & - & - \\ + & - & + & 0 & + & - \\ - & - & - & + & 0 & + \\ + & - & - & - & + & 0 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{Z} = \begin{bmatrix} 0 & - & + & - & + & - \\ - & 0 & - & + & - & + \\ + & - & 0 & - & + & + \\ - & + & - & 0 & - & + \\ + & + & + & - & 0 & - \\ - & + & + & + & - & 0 \end{bmatrix}.$$

Graf $\widetilde{G}$ je zřejmě doplňkem (hranovým) grafu G, neboť $\{u_j, u_k\} \in \widetilde{G}$, právě když $\{u_j, u_k\} \notin G$. Zároveň však je $\widetilde{Z} = -Z$.

Zadání grafu znaménkovou maticí umožňuje popsat velmi jednoduchým způsobem i následující nepříliš přehlednou operaci s grafem G. V grafu G vybereme při daném očíslování uzel u_j a vytvoříme nový graf G_j tak, že platí:

1. $U(G_j) = U(G)$, tj. oba grafy mají stejné uzly.
2. Je-li $(s \neq j) \wedge (k \neq j)$, je $\{u_s, u_k\} \in H(G_j)$ právě když $\{u_s, u_k\} \in H(G)$, tj. hrany, které neincidují v G s uzlem u_j, jsou beze změny i v G_j.
3. Pro $k \neq j$ je $\{u_j, u_k\} \in H(G_j)$ právě když je $\{u_j, u_k\} \notin H(G)$.

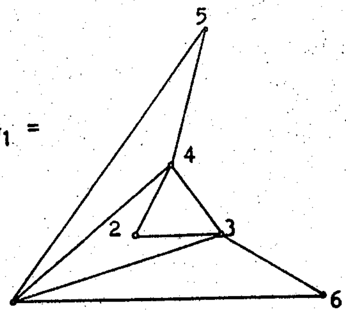
Znaménkovou matici Z_j grafu G_j dostaneme násobením j-tého řádku a zároveň j-tého sloupce matice Z grafu G číslem −1, což ilustrujeme příkladem. Uvažujme graf

G = 

se znaménk. maticí $Z = \begin{bmatrix} 0 & + & - & - & - & - \\ + & 0 & + & + & - & - \\ - & + & 0 & + & - & + \\ - & + & + & 0 & + & - \\ - & - & - & + & 0 & - \\ - & - & + & - & - & 0 \end{bmatrix}$

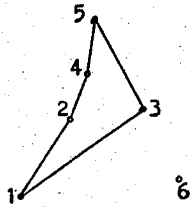
Zřejmě pro j = 1

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0 & - & + & + & + & + \\ - & 0 & + & + & - & - \\ + & + & 0 & + & - & + \\ + & + & + & 0 & + & - \\ + & - & - & + & 0 & - \\ + & - & + & - & - & 0 \end{bmatrix}$$ a tedy G_1 =



Obdobně pro j = 3 je zřejmě

$$Z_3 = \begin{bmatrix} 0 & + & + & - & - & - \\ + & 0 & - & + & - & - \\ + & - & 0 & - & + & - \\ - & + & - & 0 & + & - \\ - & - & + & + & 0 & - \\ - & - & - & - & - & 0 \end{bmatrix}$$ znaménkovou maticí grafu G_3 =



Věta 4.4.13. Pro obyčejný graf s n uzly jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(1) G je pravidelný graf stupně k.

(2) Existuje celé číslo r takové, že pro znaménkovou matici Z grafu G platí:

$$Z\,e = r\,e\,,$$

kde $e = [1, 1, \ldots, 1]^T$ je n-rozměrný sloupec jedniček.

Navíc je $r = 2k - (n - 1)$.

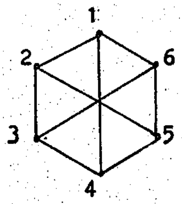
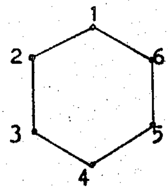
Důkaz. Nechť $Z = [z_{jk}]$ je znaménková matice řádu n popisující graf G. Označme $Ze = s = [s_1, s_2, \ldots, s_n]^T$. Z významu součinu matice Z a sloupce e plyne

$$s_j = \sum_{k=1}^{n} z_{jk} = (\text{stupeň uzlu } u_j) - (n - \text{stupeň uzlu } u_j) + 1 .$$

Z předpokladu o pravidelnosti grafu a jeho stupni plyne že $s_j = 2k - (n - 1) = r$ pro všechna j a tedy Ze = re.

Naopak, je-li $Ze = re$, je graf G pravidelný se stupněm $k = \frac{1}{2}(r + n - 1)$.

Obsah uvedené věty ilustrujeme příklady. Nechť

G =  a $\widetilde{G}$ = 

jsou pravidelné grafy o stupních $k = 3$ a $k = 2$. Pro jejich znaménkové matice zřejmě je:

$$Ze = \begin{bmatrix} 0 & + & - & + & - & + \\ + & 0 & + & - & + & - \\ - & + & 0 & + & - & + \\ + & - & + & 0 & + & - \\ - & + & - & + & 0 & + \\ + & - & + & - & + & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ tedy } r = 1 \text{ a } k = \frac{1}{2}(1 + 5) = 3;$$

$$Ze = \begin{bmatrix} 0 & + & - & - & - & + \\ + & 0 & + & - & - & - \\ - & + & 0 & + & - & - \\ - & - & + & 0 & + & - \\ - & - & - & + & 0 & + \\ + & - & - & - & + & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ tedy } r = -1 \text{ a } k = \frac{1}{2}(-1 + 5) = 2.$$

<u>Věta 4.4.14</u>. Pro obyčejný graf G s n uzly jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(1) Existují reálná čísla s, t ($s > t$) taková, že je

$$(Z - sI)(Z - tI) = (n - 1 + st)E,$$

kde I je jednotková matice řádu n a E je matice řádu n, jejíž všechny prvky jsou rovny 1.

(2) Graf G není ani diskrétní ani úplný a velikost symetrické diference uzlových okolí (viz odst. 2.1) libovolných dvou uzlů x a y závisí pouze na tom, je-li $\{x,y\}$ hrana grafu nebo ne.

Navíc platí:

(i) $p(x, y) = -(s + 1)(t + 1)$,

(ii) $q(x, y) = -(s - 1)(t - 1)$,

kde p a q jsou příslušné mohutnosti symetrických diferencí okolí, tj.

$$p(x, y) = | U(x) \oplus U(y) | \quad \text{pro } \{x, y\} \in H(G),$$

$$q(x,y) = | U(x) \oplus U(y) | \quad \text{pro } \{x, y\} \notin H(G).$$

Důkaz. Pro příslušnou matici Z a libovolná reálná čísla s, r položme:

$$(Z - sI)(Z - tI) = Z^2 - (s + t)Z + stI = P = [p_{ik}].$$

Podle definice součinu a součtu matic zřejmě je:

$$p_{ii} = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} z_{ji} + st = n - 1 + st,$$

$$p_{ik} = \sum_{j=1}^{n} z_{ij} z_{jk} - (s + t)z_{ik} \quad \text{pro } i \neq k. \text{ Takže}$$

pro $\{u_i, u_k\} \in H(G)$ je $p_{ik} = n - 2 - p(u_i\, u_k) - (s + t)$;

pro $\{u_i, u_k\} \notin H(G)$ je $p_{ik} = n - 2 - q(u_i\, u_k) + s + t$.

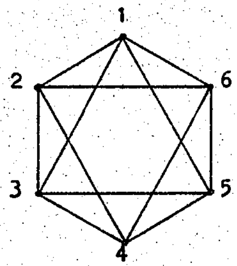
Předpokládáme-li nyní, že velikost symetrické diference okolí libovolných dvou vrcholů x, y závisí pouze na tom, je-li $\{x, y\}$ hrana nebo ne a platí-li pro čísla s, t vztahy (i) a (ii), pak evidentně je

$$P = (n - 1 + st)E.$$

Naopak, je-li $P = (n - 1 + st)E$, musí platit nutně i vztahy (i), (ii) a také tvrzení věty ad 2.

Příklad. Uvažujme pravidelný graf G se znaménkovou maticí Z, kde

G =



$$, \quad Z = \begin{bmatrix} 0 & + & + & - & + & + \\ + & 0 & + & + & - & + \\ + & + & 0 & + & + & - \\ - & + & + & 0 & + & + \\ + & - & + & + & 0 & + \\ + & + & - & + & + & 0 \end{bmatrix}.$$

V našem případě je $p(x, y) = 4$ pro $\{x, y\} \in H(G)$ a dále je $q(x, y) = 0$, je-li $\{x, y\} \in H(G)$. Tak například

$$p(1, 2) = |(\{2,3,5,6\} \setminus \{1,3,4,6\}) \cup (\{1,3,4,6\} \setminus \{2,3,5,6\})| =$$
$$= |\{2,5\} \cup \{1,4\}| = |\{1,2,4,5\}|,$$
$$q(1, 4) = |(\{2,3,5,6\} \setminus \{2,3,5,6\}) \cup (\{2,3,5,6\} \setminus \{2,3,5,6\})| =$$
$$= |\emptyset| = 0.$$

Pro čísla s, t máme tedy podmínky:

$$4 = -(s + 1)(t + 1),$$
$$0 = -(s - 1)(t - 1), \quad \text{takže je } s = 1,\ t = -3.$$

Pro uvedené hodnoty čísel s a t skutečně platí

$$(Z - sI)(Z - tI) = Z^2 - (s + t)Z + stI = (n - 1 + st)E,$$

neboť je $Z^2 + 2Z - 3I =$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 2E.$$

4.5. Matice kružnic

V celém tomto odstavci termínem "graf" míníme obyčejný souvislý neorientovaný graf o n uzlech a m hranách. Je-li T kostra grafu G, pak symbolem $T + \{h\}$ označujeme faktor grafu G, který vznikl z T přidáním hrany h.

Věta 4.5.1. Nechť T je kostra grafu G a h libovolná tětiva[1)] grafu G vzhledem ke kostře T. Pak faktor $T + \{h\}$ obsahuje právě jednu kružnici.

Důkaz. Mezi krajními uzly u, v hrany h existuje v kostře T jediná cesta. Doplněním hrany h vznikne tedy jediná kružnice.

Definice. Nechť $h_1, h_2, \ldots, h_c$ je množina všech tětiv grafu G vzhledem ke kostře T, kde c je cyklomatické číslo[1)] grafu G, nechť K_i je pro $i = 1, 2, \ldots, c$ kružnice grafu $T + \{h_i\}$. Pak množinu kružnic $K_1, K_2, \ldots, K_c$ nazýváme *fundamentální soustavou kružnic* grafu G vzhledem ke kostře T.

Různým kostrám grafu G o více než n hranách mohou samozřejmě odpovídat různé fundamentální soustavy, ale všechny fundamentální soustavy kružnic téhož grafu mají stejný počet prvků, a to c. Oprávněnost uvedené definice vyplývá z věty 4.5.1.

Definice. Nechť G je graf s hranami $h_1, h_2, \ldots, h_m$ a kružnicemi $K_1, K_2, \ldots, K_p$. *Úplnou maticí kružnic* grafu G nazýváme matici $K = k_{ij}$ typu p/m, jejíž prvky jsou dány vztahy:

$$k_{ij} = 1, \text{ je-li } h_j \in H(K_i),$$

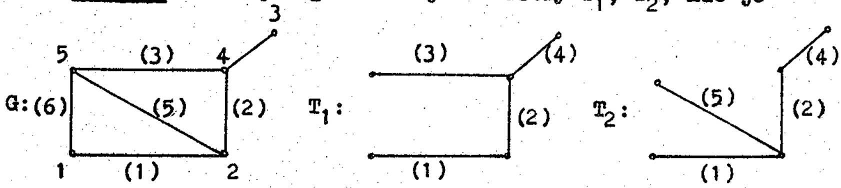
$$k_{ij} = 0 \text{ v každém jiném případě, tj. } h_j \notin H(K_i).$$

---

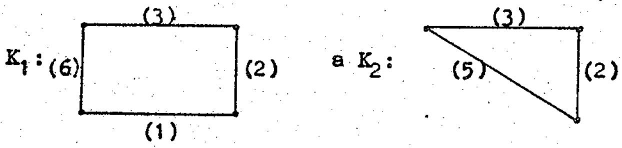
1) viz odst. 2.2.

Maticí K_F fundamentální soustavy kružnic F nazýváme pak podmaticí matice K, jejíž řádky odpovídají kružnicím ze soustavy F.

Příklad. Uvažujme graf G a jeho kostry T_1, T_2, kde je



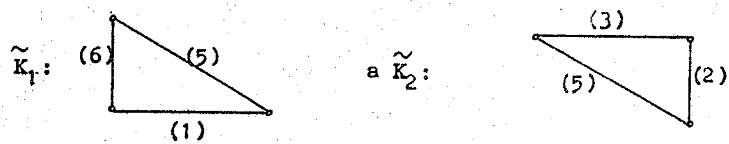
Fundamentální soustavu kružnic F_1 odpovídající kostře T_1 tvoří kružnice



takže matice K_{F_1} fundamentální soustavy kružnic F_1 je při daném očíslování hran a kružnic určena vztahem

$$K_{F_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Fundamentální soustavu kružnic F_2 odpovídající kostře T_2 tvoří kružnice



takže v tomto případě je

$$K_{F_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Zřejmě K_1, K_2, K_3 ($K_3 = \widetilde{K}_1$) jsou všechny kružnice grafu G a tudíž

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$ je úplná matice kružnic grafu G.

Pro motivaci dalšího postupu si všimneme, že v tomto případě je

a) $MK^T = 0$, kde $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ je incidenční matice grafu G

a kde počítáme mod 2;

b) $hod(K) = c = hod(F_i)$ a $c = n - hod(M) = 6 - 4 = 2$;

c) 3. řádek matice K je součtem 1. a 2. řádku (mod 2).

Věta 4.5.2: Matice K_F libovolné fundamentální soustavy kružnic F obyčejného souvislého grafu o m uzlech a n hranách má plnou řádkovou hodnost a platí:

(1) $hod(K_F) = c$, kde c je cyklomatické číslo grafu G;

(2) Při vhodném očíslování kružnic a hran je $K_F = [\, I_c \mid K_{12} \,]$, kde I_c je jednotková matice řádu c.

Důkaz. Hodnost matice K_F nezávisí evidentně ani na očíslování kružnic ve fundamentální soustavě ani na očíslování hran grafu G. Uvažujme tedy fundamentální soustavu kružnic $F = K_1, K_2, \ldots, K_c$, odpovídající kostře T. Nechť dále $h_1, h_2, \ldots, h_c$ jsou všechny tětivy grafu G vzhledem ke kostře T a $h_{c+1}, \ldots, h_m$ zbývající hrany grafu, tedy větve grafu G vzhledem ke kostře T. Je-li očíslování kružnic provedeno tak, že K_i je pro $i = 1, 2, \ldots, c$ jediná kružnice grafu $T + \{h_i\}$, pak podle definice matice fundamentální soustavy kružnic máme:

$$K_F = [\, I_c \mid K_{12} \,],$$ kde I_c je jednotková matice řádu c

a tudíž $hod(K_F) = c$ a zřejmě také platí (3).

Věta 4.5.3. Je-li G obyčejný, neorientovaný, souvislý graf s daným očíslováním uzlů $u_1, u_2, \ldots, u_n$, hran $h_1, h_2, \ldots, h_m$ a kružnic $K_1, K_2, \ldots, K_p$, M jeho incidenční matice, K úplná matice kružnic a c cyklomatické číslo, pak platí:

(1) $MK^T = 0$, počítáme-li mod 2;

(2) $\mathrm{hod}(K) = c$;

(3) $c \leqq p \leqq 2^c - 1$.

Důkaz. Položíme-li $R = MK^T = [r_{ij}]$, pak R je matice typu n/p a zřejmě podle definice součinu matic je

$$r_{ij} = \sum_{s=1}^{n} m_{is}\, k_{sj}^{(T)} = \sum_{s=1}^{n} m_{is}\, k_{js}.$$

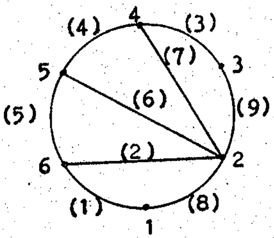
Součin $m_{is} k_{js}$ je však nenulový právě když hrana h_s inciduje s uzlem u_i a zároveň je-li $h_s \in H(K_j)$ – to však nastane buďto právě pro dvě hrany (pokud $u_i \in U(K_j)$), nebo pro žádnou hranu (je-li $u_i \notin U(K_j)$) a tedy, počítáme-li v aritmetice modulo 2, je vždy $r_{ij} = 0$.

Protože maximální počet lineárně nezávislých řešení soustavy $Mx = 0$ je roven defektu matice M, kde $\mathrm{def}(M) = m - \mathrm{hod}(M) = m - n + 1 = c$, máme pro hodnost matice K^T (a tedy také K) horní odhad $\mathrm{hod}(K) = \mathrm{hod}(K^T) \leqq c$. Podle věty 4.5.2 má však podmatice K_F matice K hodnost c a tedy $c \leqq \mathrm{hod}(K)$, odkud dostáváme $\mathrm{hod}(K) = c$.

Dolní odhad pro počet kružnic p je zřejmý. Řádky matice K jsou však kombinacemi (mod 2) c řádků matice K_F a tudíž

$$p \leqq \binom{c}{1} + \binom{c}{2} + \ldots + \binom{c}{c} = 2^c - 1.$$

Příklad. Uvažujme graf G s daným očíslováním uzlů a hran



s incidenční maticí $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Najdeme lineárně nezávislá řešení homogenní soustavy $Mx = 0$ běžnou eliminační metodou(ovšem počítat budeme mod 2). Poslední řádek matice M nebudeme uvažovat, neboť je součtem ostatních. Dále k čtvrtému řádku přičteme řádek třetí a k pátému nový čtvrtý. Tím dospějeme k matici:

$$\widetilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zřejmě je $\mathrm{hod}(M) = \mathrm{hod}(\widetilde{M}) = 5$ a tedy $c = 9 - 5 = 4$. Hrany h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 jsou větvemi grafu a hrany h_6, h_7, h_8, h_9 jsou tětivami grafu vzhledem ke kostře T, určené podmaticí P prvních pěti sloupců matice M.

Protože existují 4 nezávislá řešení soustavy $Mx = 0$ a podmatice P má hodnost 5, můžeme poslední čtyři neznámé volit. Volené hodnoty podtrhujeme vlnovkou a ostatní neznámé spočítáme; tak dostaneme:

$$x_1 = [\,0, 1, 0, 0, 1 \quad \underline{1, 0, 0, 0}\,]^T,$$
$$x_2 = [\,0, 1, 0, 1, 1 \quad \underline{0, 1, 0, 0}\,]^T,$$
$$x_3 = [\,1, 1, 0, 0, 0 \quad \underline{0, 0, 1, 0}\,]^T,$$
$$x_4 = [\,0, 1, 1, 1, 1 \quad \underline{0, 0, 0, 1}\,]^T;$$

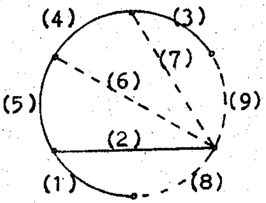
matice $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ je tudíž transponovanou maticí fundamentální soustavy kružnic K_1, K_2, K_3, K_4, kde

$\{h_2, h_5, h_6\} = H(K_1)$,

$\{h_2, h_4, h_5, h_7\} = H(K_2)$,

$\{h_1, h_2, h_8\} = H(K_3)$,

$\{h_2, h_3, h_4, h_5, h_9\} = H(K_4)$.



Všechny 4 uvedené kružnice odpovídají kostře grafu T; na obrázku je kostra T silně vytažena.

Libovolný řádek úplné matice kružnic dostaneme sečtením některých řádků matice K_F. Tak například řádek $[1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1]$, který odpovídá kružnici určené hranami h_1, h_8, h_9, h_3, h_4, h_5, je roven součtu $x_3^T + x_4^T$. Avšak některé součty řádků matice K_F fundamentální soustavy kružnic neodpovídají žádnému řádku úplné matice kružnic; tak například $x_1^T + x_2^T + x_3^T = [1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0]$, což není žádný řádek úplné matice kružnic, neboť hrany h_1, h_2, h_4, h_6, h_7, h_8 nepatří společně do žádné kružnice.

V příkladu byl naznačen možný algebraický postup stanovení matice K_F fundamentální soustavy rovnic, a to z incidenční matice grafu G (počítáním mod 2). Zároveň jsme ukázali, že horního odhadu pro počet kružnic p z věty 4. 5. 3 nemusí být vždy dosaženo. Obecně však nelze tento horní odhad zlepšit, jak vyplývá z 1. příkladu tohoto odstavce.

Poznámka. Naznačený postup, umožňující nalezení matice fundamentální soustavy kružnic z incidenční matice grafu G, vyplývá v obecném případě z věty 1.3.3 o izomorfismu grup $(2^H, \oplus)$ a $(\mathcal{M}, + \bmod 2)$, dosadíme-li za H množinu všech hran grafu G. Dále je nutné provést následující úvahy:

1. Je-li $\widetilde{K}_i$ množina všech hran kružnice K_i, je $\widetilde{K}_i \in 2^H$.
2. Je-li $\hat{K}$ množina, jejíž prvky jsou:
   a) množiny hran $\widetilde{K}_i$ všech kružnic grafu G,
   b) sjednocení disjunktních množin $\widetilde{K}_i$,
   c) prázdná množina,
   pak $\hat{K} \in 2^H$.
3. Operace $\oplus$ symetrické diference je uzavřená na množině $\hat{K}$ a tedy $(\hat{K}, \oplus)$ je podgrupa grupy $(2^H, \oplus)$.
4. Podgrupě $(\hat{K}, \oplus)$ odpovídá izomorfní podgrupa $(\hat{\mathcal{M}}, + \bmod 2)$, která je generována c řádky úplné matice kružnic takových, že součet libovolných z nich je nenulový řádek.
5. Existuje c nenulových řešení homogenní soustavy $Mx = 0$ (řešíme nad tělesem zbytkových tříd mod 2) takových, že součet libovolných z nich je nenulové řešení.
6. Různé součty řádků z $\widetilde{\mathcal{M}}$ odpovídají jednoznačně různým symetrickým diferencím na množině $\hat{K}$, která však není tvořena pouze jen množinami $\widetilde{K}_i$.

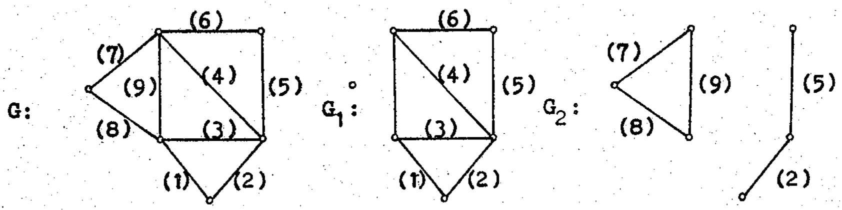
4.6. Matice hranových řezů

V tomto odstavci se budeme zabývat maticovým popisem hranových řezů obyčejného souvislého neorientovaného grafu G - - dále jen grafu G. Ukážeme, jaké výhody takový popis přináší. V páté kapitole pak uvidíme, jaký význam mají hranové řezy v aplikacích. Pro zjednodušení zápisů (je-li P faktor grafu G) označujeme symbolem $P \pm \{h_1, h_2, \ldots, h_k\}$ faktor grafu G, který vznikne z grafu G odebráním (-) nebo přidáním (+) uvedené množiny hran grafu G.

Definice. Hranovým řezem grafu G rozumíme takovou minimální množinu R jeho hran, pro niž platí

$$\mathrm{hod}(G - R) = \mathrm{hod}(G) - 1.$$

Příklad. Uvažujme graf G určený obrázkem a zároveň faktory G_1, G_2,



kde $G_1 = G - \{h_7, h_8\}$, $G_2 = G - \{h_1, h_3, h_4, h_6\}$. Graf G je souvislý a jak již víme je $\mathrm{hod}(G) = |U(G)| - 1 = 6 - 1 = 5$ avšak každý z faktorů G_1 G_2 má dvě komponenty, takže $\mathrm{hod}(G_1) = 4 = \mathrm{hod}(G_2)$. Obě množiny hran $R_1 = \{h_7, h_8\}$, $R_2 = \{h_1, h_3, h_4, h_6\}$ jsou tedy podle definice hranové řezy.

Z příkladu a z definice vyplývá, že:

1. Různé hranové řezy grafu G mohou mít různý počet prvků.
2. Je-li K kružnice grafu G a R jeho řez, pak $|H(K) \cap R| = 2k$. pro nějaké $k \in N_0$, tj. každý řez grafu má s množinou hran kružnice grafu sudý počet společných hran (připouštíme i 0).
3. Je-li R řez grafu G, pak existuje disjunktní rozklad množiny uzlů $U(G) = U_1(G) \cup U_2(G)$ takový, že:

   (i) $h = \{u_1, u_2\} \in R$ právě když $(u_1 \in U_1(G)) \wedge (u_2 \in U_2(G))$.

   Naopak, je-li $U(G) = U_1(G) \cup U_2(G)$ disjunktní rozklad množiny uzlů $U(G)$ a R je množina hran s vlastností (i), pak R je řezem grafu G.

Další méně zřejmé tvrzení vyslovíme jako samostatnou větu.

Věta 4.6.1. Podmnožina hran R souvislého grafu G je hranovým řezem grafu právě tehdy, je-li minimální množinou hran, která obsahuje alespoň jednu větev každé kostry grafu G.

Důkaz. Nutnost podmínky je zřejmá, neboť faktor G - R grafu G, který obsahuje nějakou celou kostru grafu G je souvislý a má tedy stejnou hodnost jako graf G. Aby množina R byla řezem, musí nutně obsahovat alespoň jednu větev každé kostry grafu G.

Předpokládejme, že R je minimální množina obsahující alespoň jednu hranu každé kostry grafu G. Pak však faktor G - R neobsahuje žádnou kostru grafu G a tudíž není souvislý. Protože R je minimální taková množina, musí mít faktor G - R právě dvě komponenty a tedy

$$\mathrm{hod}(G) = \mathrm{hod}(G - R) + 1.$$

Množina R je tedy podle definice hranovým řezem, čímž je dokázána i postačitelnost podmínky.

Vyjdeme-li z uvedené věty, můžeme pomocí libovolné kostry T grafu G konstruovat hranové řezy grafu následujícím způsobem:

(i) Najdeme nějakou kostru T grafu G o n uzlech - s hranami $h_1, h_2, \ldots, h_{n-1}$; uvědomíme si, že jednoprvková množina $\{h_i\}$ $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ je hranovým řezem kostry T.

(ii) Určíme rozklad množiny uzlů kostry T indukovaný řezem $\{h_i\}$. Faktor $T - \{h_i\}$ kostry T má dvě komponenty; označíme-li jejich množiny uzlů $U_j^{(i)}(T)$, $j = 1, 2$, pak zřejmě

$$U(G) = U_1^{(i)}(T) \cup U_2^{(i)}(T),$$

$$U_1^{(i)}(T) \cap U_2^{(i)}(T) = \emptyset,$$

$$U_j^{(i)}(T) \neq \emptyset \quad \text{pro } j = 1, 2.$$

(iii) Stanovíme řez R_i grafu G takto:

$R_i = \{h_i\} \cup \{\{u_1, u_2\} / \{u_1, u_2\} \in H(G) \wedge u_1 \in U_1^{(i)}(T) \wedge u_2 \in U_2^{(i)}(T)\}$,

tj. k hraně h_i přidáme všechny ty hrany grafu G, které mají jeden uzel v 1 komponentě faktoru $T - \{h_i\}$ a druhý uzel v komponentě druhé.

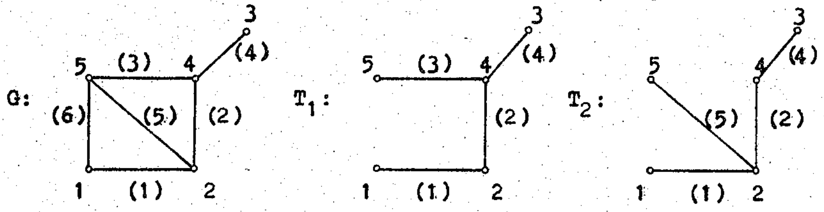
<u>Definice</u>. Nechť T je kostra obyčejného souvislého grafu G o n uzlech. Množinu R_i všech řezů zkonstruovaných pro $i = 1, 2, \ldots, n-1$ shora uvedeným způsobem nazýváme <u>fundamentální soustavou hranových řezů</u> grafu G přísluše jících kostře T.

<u>Definice</u>. Nechť G je graf s daným očíslováním hran, $H = \{h_1, \ldots, h_m\}$, s daným očíslováním všech hranových řezů $R_1, R_2, \ldots, R_s$. Matici $Q = [q_{ij}]$ typu s/m, kde

$$q_{ij} = 1, \text{ právě když } h_j \in R_i,$$
$$q_{ij} = 0 \text{ všude jinde } (h_j \notin R_i),$$

nazýváme <u>úplnou maticí hranových řezů</u> grafu G. Maticí fundamentální soustavy hranových řezů F nazýváme podmatici Q_F matice Q tvořenou řádky, které odpovídají řezům soustavy F.

<u>Příklad</u>. Uvažujme graf G a jeho kostry T_1, T_2, kde je



(Srovnejte s příkladem za větou 4.5.1.)

Fundamentální soustavu řezů $\tilde{F}_1$ grafu G vzhledem ke kostře T_1

tvoří hranové řezy $R_1 = \{h_1, h_6\}, R_2 = \{h_2, h_5, h_6\}$, $R_3 = \{h_3, h_5, h_6\}$, $R_4 = \{h_4\}$, které postupně odpovídají disjunktním rozkladům $\{u_1\} \cup \{u_2, u_3, u_4, u_5\}$, $\{u_1, u_2\} \cup \{u_3, u_4, u_5\}$, $\{u_5\} \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ a $\{u_3\} \cup \{u_1, u_2, u_4, u_5\}$ množiny uzlů grafu G.

V tomto případě pro dané očíslování řezů a hran je

$$Q_{\tilde{F}_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matice fundamentální soustavy hranových řezů grafu G vzhledem ke kostře T_1.

Fundamentální soustavu řezů grafu G vzhledem ke kostře T_2 tvoří hranové řezy $\{h_1, h_6\}$, $\{h_2, h_3\}$, $\{h_4\}$, $\{h_5, h_3, h_6\}$.

V tomto případě při zřejmém očíslování řezů a hran je

$$Q_{\tilde{F}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matice fundamentální soustavy hranových řezů grafu G vzhledem ke kostře T_2.

Všimneme si, že v tomto případě platí

a) $KQ^T_{\tilde{F}_1} = 0$ a také $KQ^T_{\tilde{F}_2} = 0$, kde K je úplná matice kružnic grafu G (viz příklad za větou 4.5.1);

b) $\mathrm{hod}(Q_{\tilde{F}_1}) = 4 = n - 1 = \mathrm{hod}(Q_{\tilde{F}_2})$;

c) $Q_{\tilde{F}_1} = [\, I_4 \mid Y \,]$, kde I_4 je jednotková matice řádu 4.

d) Součet některých řádků matice $Q_{\tilde{F}}$ může určovat:

(i) hranový řez – stačí sečíst 1. a 2. řádek matice Q_{F_1},

(ii) sjednocení disjunktních hranových řezů – stačí sečíst 3. a 4. řádek matice Q_{F_1} nebo 2. a 3. řádek matice Q_{F_2}.

Věta 4.6.2. Úplná matice K kružnic a úplná matice hranových řezů Q téhož grafu G jsou při shodném očíslování hran a při počítání v aritmetice mod 2 vzájemně ortogonální, tj. platí

(i) $KQ^T = 0$,

(ii) $QK^T = 0^T$.

Důkaz vyplývá z toho, že řez R má s množinou hran kružnice H(K) sudý počet společných hran, tj. $|R \cap H(K)| = 2j$ pro nějaké j přirozené (připouštíme i 0). Vztah (ii) dostáváme ze vztahu (i) pouhým transponováním.

Věta 4.6.3. Je-li Q úplná matice hranových řezů obyčejného souvislého grafu G o n uzlech, M incidenční matice téhož grafu , $Q_{\tilde{F}}$ matice libovolné fundamentální soustavy hranových řezů, pak platí:

$$\mathrm{hod}(Q_{\tilde{F}}) = \mathrm{hod}(Q) = \mathrm{hod}(M) = n - 1.$$

Důkaz. Podle důsledku 1. (věty 4.3.10) je hod(M) = n - 1. Dále podle věty 4.5 je hod(K) = c = m - n + 1. Maximální počet všech existujících lineárně nezávislých řešení homogenní soustavy Kx = 0 však určuje defekt matice K (d(K) = m - hod(K)) a zřejmě je:

$$d(K) = m - c = m - (m - n + 1) = n - 1.$$

Avšak podle věty 4.6.2 platí $KQ^T = 0$, takže je $\mathrm{hod}(Q^T) \leqq n - 1$. Protože je $\mathrm{hod}(Q) = \mathrm{hod}(Q^T)$ a Q_F je podmaticí matice Q, evidentně máme:

$$\mathrm{hod}(Q_F) \leqq \mathrm{hod}(Q) \leqq n - 1.$$

Uvažujme dále libovolnou kostru T grafu G a očíslujme hrany grafu G tak, aby $\{h_1, h_2, \dots, h_{n-1}\} = H(T)$. Řezy nechť jsou očíslovány tak, že $R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}$ tvoří fundamentální soustavu F hranových řezů grafu G příslušejících kostře T.

Pak zřejmě
$$Q = \begin{bmatrix} Q_{\tilde{F}} \\ \hdashline X \end{bmatrix}, \text{ kde } Q_{\tilde{F}} = \left[I_{n-1} \,\vdots\, Y \right]$$ je matice soustavy $\tilde{F}$ a kde I_{n-1} je jednotková matice řádu n - 1. Z uvedené úvahy plyne, že pro libovolnou kostru T je $\mathrm{hod}(Q_{\tilde{F}}) = n - 1$, čímž je celý důkaz věty ukončen.

__Věta 4.6.4.__ Je-li $\tilde{R}$ podmnožina potenční množiny 2^H hran grafu G, tvořená

(i) hranovými řezy grafu G,

(ii) sjednocením disjunktních hranových řezů,

(iii) prázdnou množinou,

pak operace symetrické diference je uzavřená na množině $\tilde{R}$.

__Důkaz__ je založen na úvahách analogických k těm, které jsou uvedeny v poznámce na konci odstavce 4.5.

__Věta 4.6.5.__ Je-li M incidenční matice grafu G o n uzlech a Q úplná matice hranových řezů grafu G, pak platí
$$\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(Q) ,$$
kde $\mathcal{L}(X)$ značí lineární obal řádků matice X, tj.
$$\mathcal{L}(X) = \left\{ \check{r} \mid \check{r} = \sum_{i=1}^{v} \varkappa_i x_i, \text{ kde } \varkappa_i \in \{0, 1\} \text{ a v je počet řádků matice X} \right\} .$$

__Důkaz__ plyne z vět 4.6.2., 4.6.3.

Poznámka. Incidenční matice M není samozřejmě shodná s maticí hranových řezů, ale obsahuje snadno algebraicky zpracovatelné informace o všech hranových řezech. K nalezení matice některé fundamentální soustavy hranových řezů stačí totiž vyškrtnout libovolný řádek matice M a tak vzniklou matici $\widetilde{M}$ typu $(n-1)/m$ upravit (sčítáním řádků mod 2 a jejich permutacemi) na tvar $[\, I_{m-1} \mid X \,]$. Pro počet s různých hranových řezů zřejmě platí: $m - 1 \leqq s \leqq 2^m - 1$. Stačí si totiž uvědomit, že pro množinu $\widetilde{R}$ (viz věta 4.6.4) platí: $|\widetilde{R}| = 2^m$.