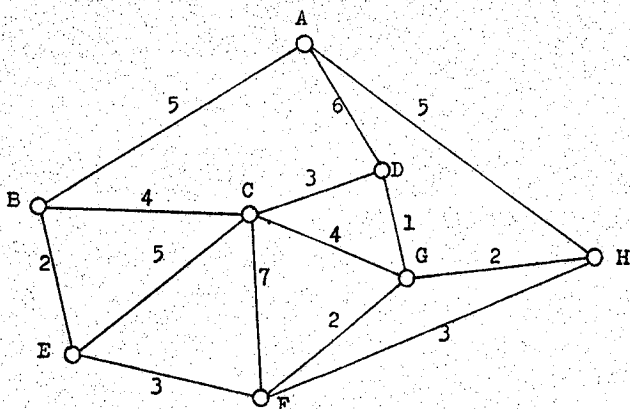


## 5. Aplikace teorie grafů

V této kapitole si všimneme některých z mnoha aplikací teorie grafů, přičemž jednotlivé odstavce představují pouhý výběr z mnoha různorodých oblastí, v nichž teorie grafů nachází uplatnění. Podle povahy jednotlivých aplikací, z nichž některé jsou praktického charakteru, jiné spíše teoretické, budeme pracovat s orientovanými i s neorientovanými grafy.

### 5.1. Minimální kostra

Představme si, že ohodnocený neorientovaný graf  $G$  na obr. 5.1.1 představuje silniční síť, spojující města  $A, B, C, D, E, F, G, H$  nějakého fiktivního okresu, přičemž ohodnocení hran interpretujeme jako náklady, potřebné k provádění zimní údržby (protahování, posyp) jednotlivých silnic. Vedoucí pracovníci správy silnic mají za úkol rozhodnout, které silnice mají být v zimě udržovány, tak, aby z kteréhokoliv města bylo možno dojet do všech ostatních měst okresu a aby celkové náklady byly minimální. Označíme-li  $G'$  podgraf grafu  $G$ , tvořený těmi hranami, jež odpovídají udržovaným silnicím, pak z požadavku vzájemné dosažitelnosti v  $G'$  všech měst okresu (tj. uzlů grafu  $G$ ) ihned vyplývá, že  $G'$  musí být souvislý faktor grafu  $G$ ; s uvážením věty 2.3.1 zjistíme, že hledaný podgraf  $G'$  je minimální kostrou grafu  $G$ .



obr. 5.1.1.

Stojíme tak před otázkou, jak v daném ohodnoceném neorientovaném grafu  $G$  jeho minimální kostru prakticky najít. Často se lze v podobné situaci setkat s názorem, že vzhledem ke konečnosti grafu  $G$  bude všech jeho koster konečný počet (existence alespoň jedné kostry vyplývá ze souvislosti  $G$  a z věty 2.2.3) a tedy s použitím dobrého počítače nebude problémem kostru probrat a vybrat z nich tu, pro kterou je součet ohodnocení minimální. Tvrzení o konečném počtu koster je sice pravdivé, ale přesto je řešení úlohy metodou "probírání všech možností" v praxi neschůdné i v nepříliš komplikovaných případech - ukážeme si to na následujícím příkladu.

Příklad. Máme za úkol navrhnout rozvod elektrické energie mezi rozvodnou a 19 obcemi tak, aby celkové náklady na výstavbu vedení byly minimální; předpokládáme přitom, že stáva-

jící vedení jsou natolik zastaralá, že jejich použití v nové síti není možné. Musíme tedy vzít v úvahu možnost propojení všech dvojic z našich 20 míst (tím získáme hrany grafu), u každé dvojice provést odhad nákladů na výstavbu přímého vedení (získáme ohodnocení hran) a ve vzniklém grafu - bude to ohodnocený úplný graf  $K_{20}$  - hledat minimální kostru.

Počet hran našeho grafu (tj. počet vstupních údajů pro počítač) je

$$|H(K_{20})| = \binom{20}{2} = 190 ,$$

což není nijak mnoho. Potíž nastane jinde: z poznámky před větou 2.2.3 vyplývá, že v průběhu výpočtu bude nutno vyhodnotit  $20^{18}$  koster - kdyby náš počítač byl schopen vyhodnotit za jednu sekundu  $10^6$  koster, tak by náš výpočet trval (rok má 31 356 000  $\approx 32 \cdot 10^6$  sekund)

$$\frac{20^{18}}{32 \cdot 10^6 \cdot 10^6} = 2^{13} \cdot 10^6 \approx 8 \cdot 10^9 \text{ let.}$$

Vidíme, že ani podstatné zvýšení rychlosti výpočtu nám nemůže pomoci a musíme hledat vhodnější metodu řešení.

#### Algoritmus 5.1.1. (minimální kostra grafu G)

1. Polož  $G_0 = G$ ,  $i := 0$ .

2. Existuje v  $G_i$  kružnice  $C_i$  ?

- ano: v  $C_i$  najdi hranu  $h_i$  s maximálním ohodnocením,

označ  $G_{i+1} = (U(G_i), H(G_i) \setminus \{h_i\})$ ,

$i := i+1$  a opakuj bod (2),

- ne:  $G_i$  je hledaná minimální kostra.

Důkaz. V každém kroku algoritmu obdržíme podgraf  $G_{i+1}$ , který je faktorem  $G$  a podle věty 2.2.1 je souvislý. Výsledný graf je tedy souvislým faktorem bez kružnic, tj. kostrou grafu  $G$ . Minimalita vyplývá ihned z věty 2.3.2.

Algoritmus 5.1.2. (minimální kostra grafu  $G$ )

1. Zvol libovolně uzel  $u \in U(G)$  a polož

$$G_0 = ( \{u\}, \emptyset ) ; i := 0 .$$

2. Je  $G_i$  faktor grafu  $G$  ?

- ne: mezi všemi hranami  $\{x,y\}$ , pro něž  $x \in U(G_i)$  a  $y \notin U(G_i)$ , najdi tu, která má nejmenší ohodnocení, a polož

$$G_{i+1} = ( U(G_i) \cup \{y\}, H(G_i) \cup \{ \{x,y\} \} ) ,$$

$i := i+1$  a opakuj bod (2) ,

- ano:  $G_i$  je hledaná minimální kostra.

Důkaz. Z popsaného postupu je zřejmé, že každý z postupně sestrojovaných podgrafů  $G_{i+1} \subset G$  je souvislý (což je zaručeno požadavkem  $x \in U(G_i)$ ) a bez kružnic (díky podmínce  $y \notin U(G_i)$ ); výsledný graf je tedy souvislý faktor bez kružnic, tj. kostra grafu  $G$ . Označíme-li takto sestrojenou kostru  $K$ , zbývá dokázat, že  $K$  je minimální.

Z konstrukce je zřejmé, že pro každý uzel  $u \in U(G)$  existuje číslo  $i$  tak, že  $u \in U(G_i)$ , ale  $u \notin U(G_{i-1})$  - toto číslo označíme  $i(u)$  a analogicky pro každou hranu  $h \in H(K)$  definujeme číslo  $i(h)$ . Zvolme libovolnou hranu  $h \in H(G) \setminus H(K)$ , sestrojme příslušnou kružnici  $C_h$  (viz věta 2.3.2) a označme

$M_h$  množinu všech hran  $h' \in H(C_h)$ , pro něž platí

$$w(h') = \max \{w(k); k \in H(C_h)\}$$

(tj. v  $M_h$  jsou všechny hrany kružnice  $C_h$  s maximálním ohodnocením).

Kdyby  $h \notin M_h$ , tak by pro tu hranu  $h' \in M_h$ , která má ze všech hran z  $M_h$  největší  $i(h')$ , nutně při  $i(h')$  -tém kroku algoritmu byla v  $C_h$  k dispozici pro připojení k  $G_{i(h')}$  jiná hrana s nižším ohodnocením (neboť  $h'$  je poslední nepřipojená hrana s maximálním ohodnocením v  $C_h$ ); tj. v  $i(h')$  -tém kroku by byla připojena jiná hrana než  $h'$ , což není možné. Tedy nutně  $h \in M_h$  a podle věty 2.3.2 je kostra  $K$  minimální.

Příklad. Pomocí algoritmů 5.1.1 a 5.1.2 najděte minimální kostru grafu na obr. 5.1.1. (jsou dvě - obě mají součet ohodnocení hran 18).

Poznámka. Algoritmus 5.1.1 nalezne minimální kostru souvislého ohodnoceného grafu v  $c(G)$  krocích, algoritmus 5.1.2 splní stejný úkol v  $h(G)$  krocích. Použijeme-li algoritmus 5.1.2 na řešení úlohy o elektrifikaci 19 obcí, pak algoritmus proběhne ve 20 krocích a při každém kroku bude probírat (horní odhad) 190 hran. Při dané rychlosti stroje je výpočet otázkou zlomku sekundy.

## 5.2. Minimální cesta

Vrátíme-li se nyní k interpretaci ohodnoceného neorientovaného grafu jako silniční, telekomunikační apod. sítě, pak další přirozenou otázkou je nalezení minimální cesty, spojující dané dva uzly - aplikace typu nejlevnější, nejrychlejší apod. trasy jsou zřejmé. Ukážeme si nyní úlohu o nalezení minimální cesty v ohodnoceném grafu v poněkud jiné situaci.

Je dán libovolný systém, který je možno převádět různými operacemi z výchozího stavu do jiných stavů, z nichž jeden je cílový; operace mají přitom různou dobu trvání (resp. cenu apod.). Úkolem je nalézt takovou posloupnost operací, která systém převede z výchozího do cílového stavu v minimálním čase (resp. s minimální cenou). Přiřadíme-li každému stavu systému uzel a každé operaci hranu grafu (orientovanou, je-li operace nevratná, a neorientovanou, je-li operace vratná), s ohodnocením daným dobou, trváním, cenou apod. příslušné operace, je úloha převedena na nalezení minimální cesty v ohodnoceném grafu. Pro ilustraci zde uvedeme jednu klasickou hříčku, známou z oblasti rekreační matematiky ("vážnější" aplikace jsou obdobné).

Příklad. Na levém břehu řeky se nachází převozník (s loďkou), koza, vlk a zelí. Před převozníkem stojí úkol převézt kozu, vlka a zelí na pravý břeh - do loďky se však vejde s převozníkem pouze jeden "cestující" (koza, vlk nebo zelí) a koza nesmí zůstat na břehu bez dozoru s vlkem (neboť by jí byla sežrána) ani se zelím (neboť by ho sežrala). Převoz prázdné loďky trvá převozníkovi 1 hodinu, převoz zelí 2 hodiny, převoz kozy 3 hodiny a převoz vlka 4 hodiny. Hledáme odpověď



Ve složitějších případech samozřejmě nalezení minimální cesty není tak jednoduché, jako na obr. 5.2.1 - situace je obdobná, jako u úlohy na nalezení minimální kostry. Algoritmus, který zde uvádíme, je formulován pro orientované grafy, ale čtenář snadno nahlédne, že algoritmus je možno použít i pro nalezení minimální cesty v neorientovaném grafu tak, že zkoumaný graf nahradíme jeho symetrickou orientací.

Algoritmus 5.2.1. (minimální cesta z uzlu  $u$  do uzlu  $v$  v grafu  $\vec{G}$ )

1. Uzlu  $u$  přiřaď trvalou hodnotu  $th(u) = 0$ , ostatním uzlům dočasnou hodnotu  $\infty$ .
2. Je-li  $x$  poslední uzel, jemuž byla přiřazena trvalá hodnota  $th(x)$ , pak všem  $y$ , pro něž  $(x,y) \in H(\vec{G})$  a které ještě nemají trvalou hodnotu, přiřaď novou dočasnou hodnotu

$$dh(y) := \min \{dh(y), th(x) + w(x,y)\} .$$

3. Pro uzel  $z$  s nejmenší dočasnou hodnotou polož  $th(z) = dh(z)$ .

4. Má uzel  $v$  trvalou hodnotu?

- ne: vrať se na (2),

- ano:  $th(v)$  je délka minimální cesty z  $u$  do  $v$  v  $\vec{G}$ ; minimální cesta je každá cesta z  $u$  do  $v$  v podgrafu určeném těmi hranami  $(x,y)$ , pro něž platí

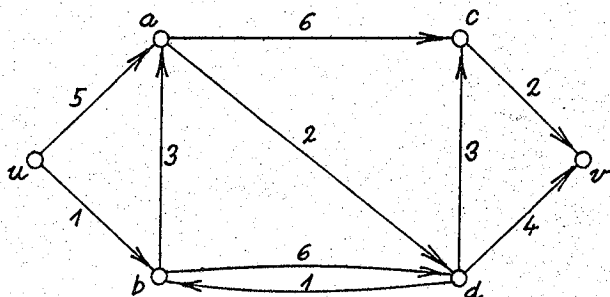
$$w(x,y) = th(y) - th(x) .$$

Důkaz správnosti algoritmu pouze naznačíme: dočasné hodnoty, přiřazované jednotlivým uzlům ve 2. části algoritmu, představují horní odhady jejich  $w$ -vzdálenosti od uzlu  $u$ ; v bodě (3)



se využívá té skutečnosti, že v uzlu, v němž je odhad  $w$ -vzdálenosti (dočasná hodnota) nejnižší, už tento odhad nemůže být zlepšen po žádné cestě, vedoucí přes uzly s vyšší dočasnou hodnotou, a tedy je roven  $w$ -vzdálenosti od uzlu  $u$  (trvalá hodnota). Rovnost  $w(x,y) = th(y) - th(x)$  tedy platí právě na těch hranách  $(x,y)$ , které leží na minimálních cestách z  $u$  do ostatních uzlů grafu  $\vec{G}$ .

Příklad. Nalezneme minimální cestu z uzlu  $u$  do uzlu  $v$  v grafu  $\vec{G}$  na obr. 5.2.2.

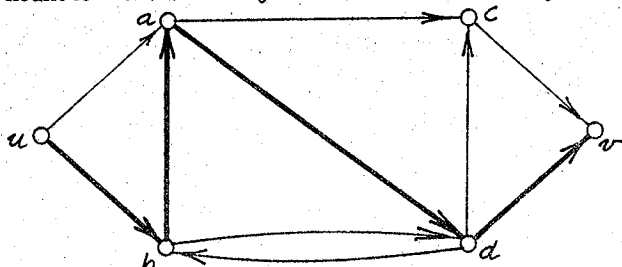


obr. 5.2.2.

Postup přiřazování dočasných a trvalých hodnot při jednotlivých krocích algoritmu je zřejmý z následující tabulky (podtržená čísla jsou trvalé hodnoty).

	u	a	b	c	d	v
1. krok	<u>0</u>	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
2. krok	<u>0</u>	5	<u>1</u>	$\infty$	$\infty$	$\infty$
3. krok	<u>0</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	$\infty$	7	$\infty$
4. krok	<u>0</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	10	<u>6</u>	$\infty$
5. krok	<u>0</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	<u>9</u>	<u>6</u>	10
6. krok	<u>0</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	<u>9</u>	<u>6</u>	<u>10</u>

Hodnota  $th(v) = 10$  je délka minimální cesty z  $u$  do  $v$ ;



obr. 5.2.3.

hrany minimální cesty jsou na obr. 5.2.3 vyznačeny silně (rovnost  $w(x,y) = th(y) - th(x)$  platí kromě hran minimální cesty též na hraně  $(d,c)$  ).

Poznámka. Algoritmus 5.2.1 je možno použít také pro nalezení nejkratší cesty, položíme-li ohodnocení všech hran rovné jedné.

### 5.3. Kritická cesta

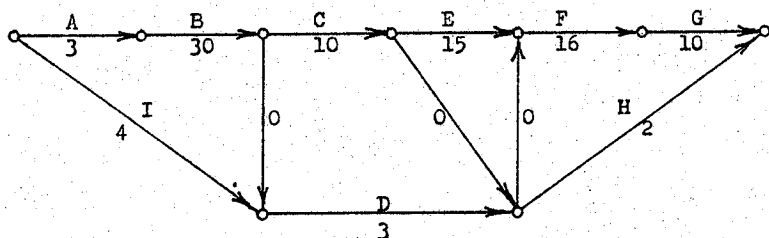
Uveďme si jako příklad akci, spočívající ve výstavbě rodinného domku. Celou akci si můžeme ve velmi zjednodušené podobě rozčlenit na tyto operace:

- A zemní práce
- B hrubá stavba
- C montáž krovu a krytiny
- D montáž oken
- E instalatérské práce
- F vnitřní omítky a podlahy
- G nátěry
- H fasáda .

Vzhledem k tomu, že projekt našeho domku počítá s atypickými okny, přibude ještě operace I - výroba oken.

Vzájemné návaznosti jednotlivých operací lze popsat pomocí ohodnoceného orientovaného grafu. Každé operaci přiřadíme orientovanou hranu (operace jsou nevratné) a každou hranu ohodnotíme předpokládanou dobou trvání operace (např. v týdnech); návaznost operací stanovíme zásadou, podle níž žádná operace nesmí být zahájena, dokud nejsou ukončeny všechny operace, které vedou do jejího počátečního uzlu (jinak řečeno: v každém uzlu mohou operace z uzlu vycházející být zahájeny až po ukončení všech operací do uzlu vcházejících).

V našem případě lze návaznosti operací A - I popsat pomocí grafu na obr. 5.3.1 (v technické praxi bývá používán termín "síťový graf" projektu).



obr. 5.3.1.

Povšimněme si zejména hran s nulovým ohodnocením - jedná se o tzv. fiktivní činnosti nulového trvání, bez jejichž použití by některé návaznosti nebylo možno postihnout (například skutečnosti, že zahájení D je podmíněno ukončením B i I, zatímco zahájení C je podmíněno pouze ukončením I; obdobně s činnostmi F a H).

Kdybychom podobně jako v odst. 5.2 zkoumali minimální cestu v našem grafu, dospěli bychom k evidentně absurdnímu výsledku, podle něhož postačí provést operace I, D a H (v celkové době 9 týdnů). Zásadní rozdíl oproti situaci z odstavce

5.2 je v tom, že zde musí být pro realizaci celé akce provedeny všechny operace - minimální doba trvání projektu je pak dána cestou maximální w-délky v  $\vec{G}$ , jež se nazývá kritická cesta. U operací, jež se nacházejí na kritické cestě, není žádná časová rezerva a jejich zpoždění má za následek zpoždění celého projektu, zatímco u operací mimo kritickou cestu je zpoždění možné. Celá záležitost má rozumný smysl jen v acyklickém grafu - snadno však nahlédneme, že v praktických situacích musí správně sestavený "síťový graf" být acyklickým ohodnoceným orientovaným grafem s jediným vstupním a jediným výstupním uzlem.

Definice. Buď  $\vec{G}$  acyklický ohodnocený orientovaný graf s jediným vstupním a jediným výstupním uzlem. Orientovaná cesta  $\vec{P} \subset \vec{G}$  maximální w-délky se nazývá kritická cesta grafu  $\vec{G}$ .

Poznámka. Je-li  $\vec{P} \subset \vec{G}$  kritická cesta, pak  $\vec{P}$  obsahuje vstupní i výstupní uzel grafu  $\vec{G}$ .

Algoritmus 5.3.1. (kritická cesta acyklického ohodnoceného orientovaného grafu  $\vec{G}$ )

- I. 1. Polož  $i = 1$  a  $\vec{G}_1 = \vec{G}$ .
2. Pro  $i = 1, \dots, n-1$  najdi v  $\vec{G}_i$  vstupní uzel, očísľuj ho číslem  $i$  a polož

$$\vec{G}_{i+1} = ( U(\vec{G}_i) \setminus \{i\} ; H(\vec{G}_i) \setminus \{(j,i); j < i\} ) .$$

3. Jediný uzel grafu  $G_n$  očísľuj číslem  $n$ .

II. 1. Uzlu 1 přiřadí  $t(1) = 0$ .

2. Pro  $i = 2, \dots, n$  uzlu  $i$  přiřadí

$$t(i) = \max \{ t(j) + w_{j,i} ; (j,i) \in H(\vec{G}) \} .$$

III. 1. Uzlu  $n$  přiřadí  $T(n) = t(n)$ .

2. Pro  $i = n-1, n-2, \dots, 1$  uzlu  $i$  přiřadí

$$T(i) = \min \{ T(j) - w_{i,j} ; (i,j) \in H(\vec{G}) \} .$$

IV. Kritická cesta prochází těmi uzly, pro něž  $T(i) = t(i)$ .

Poznámky. 1. V první části algoritmu se konstruuje číslování uzlů podle tvrzení (5) věty 3.2.3 a tedy se souběžně ověřuje acykličnost  $\vec{G}$  (existence cyklu v  $\vec{G}$  by se projevila neexistencí vstupního uzlu v některém  $\vec{G}_i$ ).

2. Čísla  $t(i)$ , přiřazená uzlům v 2. kroku II. části algoritmu, jsou definována pomocí  $t(j)$  pro  $(j,i) \in H(\vec{G})$ ; z očíslování uzlů vyplývá, že musí být  $j < i$  a tedy všechna potřebná  $t(j)$  jsou již v  $i$ -tém kroku určena (obdobně s čísly  $T(i)$  v III. části). Ohodnocení hrany  $(i,j)$  značíme  $w_{i,j}$ .

3. Čísla  $t(i)$ , sestrojená ve druhé části, bývají nazývána minimální časové ohodnocení uzlů a představují minimální časy, v nichž je možno dosáhnout stavu, popsaného uzlem.

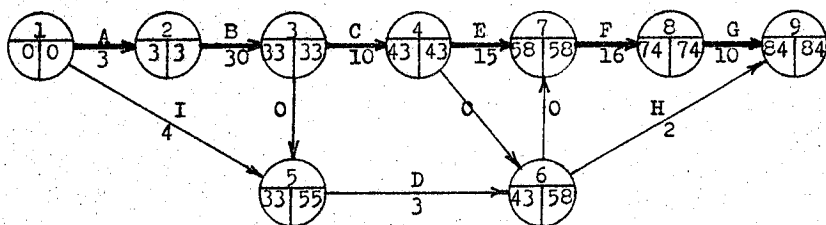
Čísla  $T(i)$ , sestrojená ve třetí části, bývají nazývána maximální časové ohodnocení uzlů a představují nejpozdější čas, kdy je nutno uzel opustit, aby nedošlo ke zpoždění celého projektu.

Rozdíl  $T(i) - t(i)$  bývá nazýván časová rezerva uzlu; kritická cesta prochází uzly s nulovou časovou rezervou.

Kritická cesta v  $\vec{G}$  nemusí být určena jednoznačně - obecně

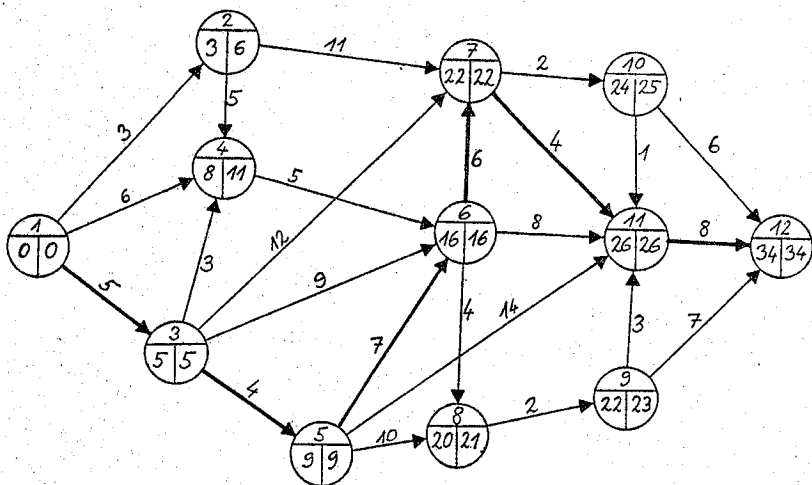
je kritickou každá orient. cesta, která obsahuje vstupní i výstupní uzel a prochází uzly s nulovou časovou rezervou.

Příklady. 1. Na obr. 5.3.2 je graf z obr. 5.3.1, vyhodnocený pomocí algoritmu 5.3.1; horní čísla jsou čísla uzlů, vlevo (resp. vpravo) dole je ohodnocení  $t(i)$  (resp.  $T(i)$ ).



obr. 5.3.2.

2. Další příklad grafu, vyhodnoceného podle algoritmu 5.3.1, je na obr. 5.3.3.



obr. 5.3.3.

Poznámky. 1. Je vypracováno mnoho metod řízení složitých činností, majících svůj princip ve vyhodnocování kritických cest grafů. Nejznámějšími názvy v této souvislosti jsou CPM (angl. Critical Path Method) a PERT (angl. Program Evaluation and Review Technique); metody byly vypracovány v USA v letech 1957-58 při vývoji raketových systémů. V metodách typu CPM se předpokládá, že doby trvání jednotlivých činností jsou předem známy; u metod typu PERT jsou tyto doby trvání náhodnými proměnnými se známým rozdělením pravděpodobnosti. U metod obou typů se řeší otázky minimalizace celkové doby trvání projektu, optimalizace harmonogramů jednotlivých činností atd. Z tohoto hlediska je náš algoritmus 5.3.1 jen elementárním úvodem do problematiky, jíž jsou věnovány celé knižní publikace.

2. Zatímco vyhodnocení "síťového grafu" je algoritmicky uspokojivě zpracováno, je sestavení tohoto grafu vysoce odbornou činností, jež vyžaduje důkladnou znalost konkrétního výrobního procesu; tato činnost je dosud odkázána převážně na "ruční práci", což souvisí s kombinatorickou složitostí problému - je například dokázáno, že problém minimalizace počtu fiktivních činností je NP-úplný (viz odst. 5.5).

#### 5.4. Distanční matice grafu

V tomto odstavci uvedeme, jak je možno určit matici vzdáleností a  $w$ -vzdáleností daného ohodnoceného grafu. Pro jednoduchost budeme přitom v celém odstavci pojednávat výhradně o ohodnocených orientovaných grafech. Čtenář se snadno přesvědčí, že všechny pojmy a výsledky jsou použitelné i pro neorientované grafy, jestliže místo daného neorientovaného grafu uvažujeme jeho symetrickou orientaci a lze je použít i pro neohodnocené grafy, jestliže všechny hrany ohodnotíme číslem 1.

**Definice.** Nechť  $\vec{G}$  je ohodnocený orientovaný graf s ohodnocením  $w: H(\vec{G}) \rightarrow (0, \infty)$ ; nechť  $U(\vec{G}) = \{u_1, \dots, u_n\}$ .

1. Čtvercová matice  $W(\vec{G}) = [w_{ij}]$  řádu  $n$ , definovaná

$$w_{ij} = w((u_i, u_j)), \text{ jestliže } (u_i, u_j) \in H(\vec{G}) \text{ a}$$

$$w_{ij} = 0, \text{ jestliže } (u_i, u_j) \notin H(\vec{G}),$$

se nazývá matice ohodnoceného grafu  $\vec{G}$ .

2. Čtvercová matice  $D(\vec{G}) = [d_{ij}]$  řádu  $n$ , definovaná předpisem  $d_{ij} = d_{\vec{G}}(u_i, u_j)$  pro  $1 \leq i, j \leq n$  se nazývá distanční matice grafu  $\vec{G}$ .

3. Čtvercová matice  $D^w(\vec{G}) = [d_{ij}^w]$  řádu  $n$ , definovaná předpisem  $d_{ij}^w = d_{\vec{G}}^w(u_i, u_j)$  pro  $1 \leq i, j \leq n$  se nazývá  $w$ -distanční matice grafu  $\vec{G}$ .

Metodu, umožňující nalezení matice  $D(\vec{G})$ , už v podstatě známe z odst. 4.4:



Věta 5.4.1. Prvek  $d_{ij}$  matice  $D(\bar{G})$  je pro  $i \neq j$  roven nejmenšímu přirozenému číslu  $k$ , pro které je prvek na místě  $i, j$  v  $k$ -té mocnině matice  $W(\bar{G})$  nenulový.

Důkaz věty je obdobný důkazu vět 4.4.2 a 4.4.6.

Definice. Čtvercová matice  $C(\bar{G}) = [c_{ij}]$  řádu  $n$ , definovaná předpisem:  $c_{ij} = 0$  pro  $i = j$ ,  
 $c_{ij} = \infty$  pro  $i \neq j$  a  $(u_i, u_j) \notin H(\bar{G})$ ,  
 $c_{ij} = w_{ij}$  pro  $i \neq j$  a  $(u_i, u_j) \in H(\bar{G})$   
 se nazývá cenová matice grafu  $\bar{G}$ .

Matici  $D^W(\bar{G})$  ohodnoceného grafu  $\bar{G}$  je možno určit pomocí množením cenové matice  $C(\bar{G})$  grafu  $\bar{G}$ , ale je přitom nutno použít pozměněných operací: definujeme "nové" násobení vztahem  $a \odot b = a + b$  a "nové" sčítání vztahem  $a \oplus b = \min\{a, b\}$ . Tak například je  $3 \odot 5 = 8$  a  $3 \oplus 5 = 3$ . Se symbolem  $\infty$  se pracuje podle obvyklých pravidel, tj. např.  $3 \odot \infty = \infty$ ,  $3 \oplus \infty = 3$ ,  $\infty \odot \infty = \infty$ ,  $\infty \oplus \infty = \infty$ . Je téměř okamžitě vidět, že operace  $\odot$  a  $\oplus$  jsou komutativní a asociativní. Je-li  $k$  přirozené číslo, pak  $k$ -tou mocninou  $\odot C(\bar{G})$  matice  $C(\bar{G})$  definujeme obvyklým způsobem, ale s použitím pozměněných operací  $\odot$  a  $\oplus$ .

Věta 5.4.2. Buď  $r$  nejmenší přirozené číslo, pro něž platí  $\odot C(\bar{G}) = \odot^{r+1} C(\bar{G})$ . Pak je  $D^W(\bar{G}) = \odot^r C(\bar{G})$ .

Důkaz. Pro  $r = 2$  je prvek  $\odot c_{ij}$  matice  $\odot C(\vec{G})$  roven výrazu

$$\odot c_{ij} = \left( \sum_{k=1}^n c_{ik} \odot c_{kj} \right) = \min \{ c_{ik} + c_{kj} ; k=1, \dots, n \},$$

což je minimální w-délka orientované cesty délky nejvýše 2 z  $u_i$  do  $u_j$ ; pro libovolné  $r$  snadno indukcí ukážeme, že prvek  $\odot c_{ij}$  matice  $\odot C(\vec{G})$  je roven minimální w-délce orientované cesty délky nejvýše  $r$  z  $u_i$  do  $u_j$ .

Následující algoritmus je založen na myšlence věty 5.4.2 s tím, že vhodným způsobem výpočtu matic  $D_k$  je snížen celkový počet operací.

Algoritmus 5.4.1. (w-distanční matice ohodnoceného orientovaného grafu  $\vec{G}$ )

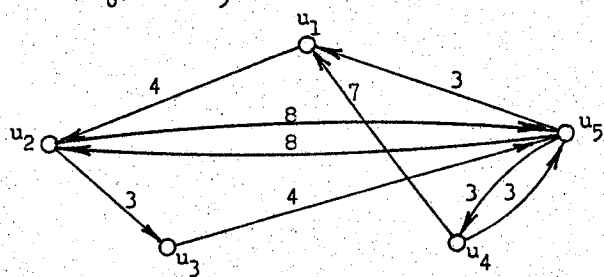
1. Polož  $D_0 = C(\vec{G})$ ;  $n = |U(\vec{G})|$ .
2. Pro  $k = 1, \dots, n$  postupně vypočítáváme matice  $D_k = [d_{ij}^k]$ , kde  $d_{ij}^k = \min \{ d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1} \}$ .
3.  $D_n = D^w(\vec{G})$ .

Důkaz. Indukcí podle  $k$  dokážeme, že  $d_{ij}^k$  je minimální w-délka orientované cesty  $\vec{P}$  takové, že pro její uzly platí  $U(\vec{P}) \subset \{u_i, u_j\} \cup \{u_1, \dots, u_k\}$ .

1. Pro  $k = 0$  je tvrzení zřejmé.
2. Nechť tvrzení platí pro  $k-1 \leq n$ ; zvolme pevně indexy  $i, j$  tak, že  $1 \leq i, j \leq n$ . Je-li  $\vec{P}$  orientovaná cesta z  $u_i$  do  $u_j$  minimální w-délky taková, že  $U(\vec{P}) \subset \{u_i, u_j\} \cup \{u_1, \dots, u_k\}$ , pak buďto  $u_k \notin U(\vec{P})$ , a pak je podle indukčního předpokladu

její w-délka rovna  $d_{ij}^{k-1}$ , nebo  $u_k \in U(\vec{P})$ , a pak je její w-délka (opět podle indukčního předpokladu)  $d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$ .

Příklady. 1. Pro graf na obr. 5.4.1 postupně vypočítáme matice  $D_0, \dots, D_5 = D^W(\vec{G})$ .



obr. 5.4.1

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 8 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 7 & \infty & \infty & 0 & 3 \\ 3 & 8 & \infty & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$; D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 8 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 7 & 11 & \infty & 0 & 3 \\ 3 & 7 & \infty & 3 & 0 \end{bmatrix} ;$$

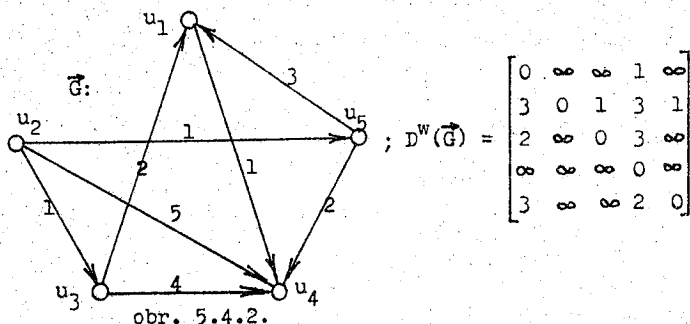
$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & \infty & 12 \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 8 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 7 & 11 & 14 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$; D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & \infty & 11 \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 7 & 11 & 14 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & \infty & 11 \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 7 & 11 & 14 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$; D_5 = D^W(\vec{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & 14 & 11 \\ 10 & 0 & 3 & 10 & 7 \\ 7 & 11 & 0 & 7 & 4 \\ 6 & 10 & 13 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Pro graf na obr. 5.4.2 obdobně nalezneme distanční matici  $D^W(G)$  :



$$D^w(\vec{G}) = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 3 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

**Poznámka.** Znalost distanční a w-distanční matice grafu je užitečná nejen v aplikacích (tím, že známe délky minimálních cest pro všechny dvojice uzlů grafu), ale i pro snadné vyšetření dalších vlastností grafu: umožňuje ověření souvislosti a silné souvislosti, acykličnosti (graf z prvního příkladu je silně souvislý, graf z druhého příkladu je acyklický - - porovnejte jejich w-distanční matice), určení komponent a kvazikomponent atd. Nahradíme-li například v matici  $D^w(\vec{G})$  obyčejného orientovaného grafu  $\vec{G}$  symbol  $\infty$  nulou a nenulové prvky číslem 1, obdržíme matici tranzitivního uzávěru relace (tj. orientovaného grafu)  $\vec{G}$ .

## 5.5 Problém obchodního cestujícího; NP-úplné problémy

Příklady. 1. Na víceúčelovém stroji má být postupně provedeno  $n$  různých operací  $u_1, \dots, u_n$ , přičemž při seřizení stroje z  $i$ -té operace na  $j$ -tou operaci vznikne prostoje  $w_{ij}$  minut. Najděte takové pořadí operací, při němž je součet všech prostoje minimální.

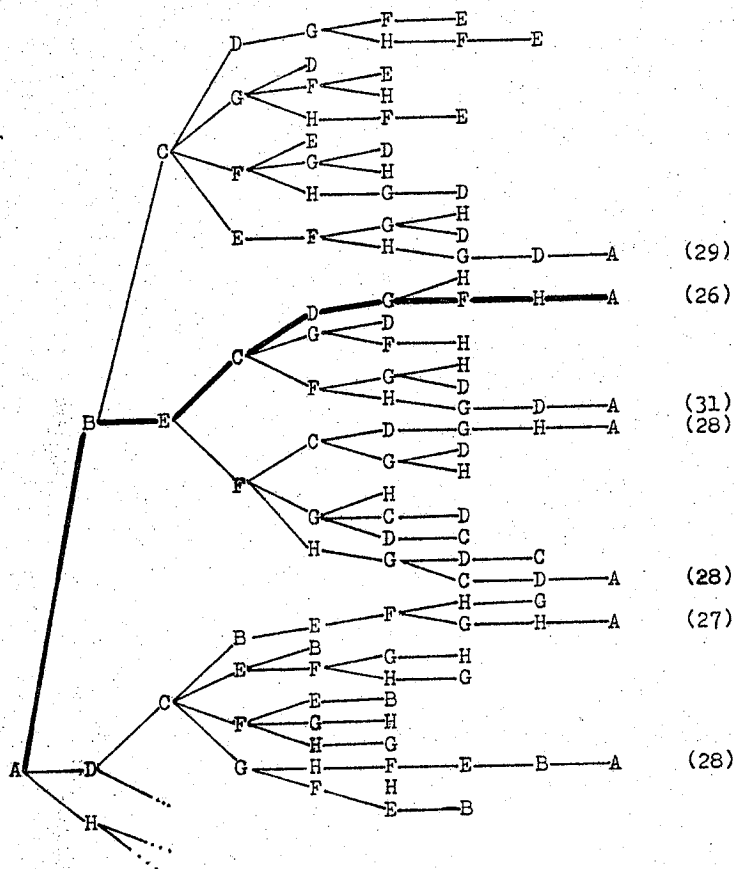
2. Uvažujme graf na obr. 5.1.1, v němž uzly představují města a hrany silnice mezi nimi; ohodnocení hran má význam vzdálenosti v kilometrech. Obchodní cestující má za úkol postupně navštívit všechna města, nabídnout v nich vzorky zboží a vrátit se zpět do podniku. Cestu má podniknout tak, aby celková ujetá vzdálenost byla minimální.

Z druhého příkladu ihned dostáváme formulaci následující úlohy.

Problém obchodního cestujícího. V ohodnoceném neorientovaném grafu  $G$  najděte hamiltonovskou kružnici  $C$ , pro kterou je číslo  $\sum_{h \in H(C)} w(h)$  minimální.

Snadno zjistíme, že značí-li v první úloze operace uzly a seřizování stroje hrany grafu, pak se úloha převede na problém obchodního cestujícího v ohodnoceném úplném grafu  $K_n$ .

Při jednom z možných způsobů řešení úlohy si proces rozhodování cestujícího znázorníme tzv. rozhodovacím stromem - taktó je možno znázornit každý rozhodovací proces, v němž v každém kroku rozhodujeme mezi konečně mnoha možnostmi. Rozhodovací proces znázorníme stromem, v němž z každého uzlu vychází tolik hran, kolik má cestující možností dalšího pokračování.



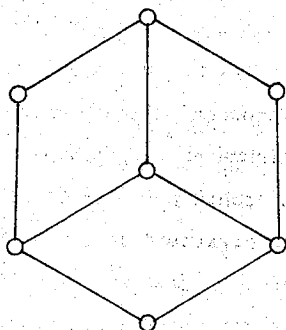
obr. 5.5.1.

čování v cestě (aby přijel v G do uzlu, v němž ještě nebyl). Část vzniklého stromu vidíme na obr. 5.5.1; zbývající část stromu si pilný čtenář snadno doplní. Z obrázku ihned vidíme hamiltonovské kružnice, jichž má graf na obr. 5.1.1 sedm (v rozhodovacím stromu jich vyjde čtrnáct, neboť každou kružnici obdržíme ve dvou "exemplářích", lišících se "orientací oběhu". Vyhodnocením čísel  $\sum w_{ij}$  (v obr. 5.5.1 čísla

v závorekách) získáme řešení úlohy.

Vidíme, že tato metoda řešení není v podstatě ničím jiným než "organizovaným" probíráním všech možností. Situace je však taková, že podobně, jako není známa charakterizační věta pro existenci hamiltonovské kružnice (viz poznámky před větou 2.4.2), není ani znám efektivní algoritmus pro řešení problému obchodního cestujícího (ale není ani dokázána jeho neexistence).

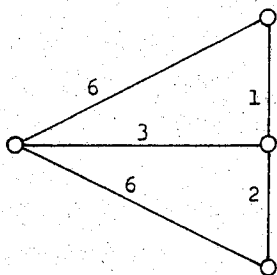
Kdyby měl náš cestující řešit svoji úlohu v grafu na obr. 5.5.2, zjistil by, že graf není hamiltonovský. V praxi by ovšem cestující věc vyřešil tak, že by do některého města zajel a vrátil se zpět. Můžeme tedy formulovat modifikovaný problém obchodního cestujícího jako úlohu nalézt v  $G$  uzavřený sled obsahující všechny uzly s minimálním



obr. 5.5.2.

součtem ohodnocení hran. Z grafu na obr. 5.5.3 vidíme, že v situaci, kdy  $G$  je hamiltonovský,

mají řešení oba problémy, a řešení modifikovaného problému může mít menší  $w$ -délku než řešení problému původního. Situace s algoritmickým řešením je zde obdobná jako u "obyčejného"



obr. 5.5.3.

problému obchodního cestujícího:

efektivní algoritmus není znám, ale není ani dokázána jeho neexistence.

Zde je ovšem třeba říci, co míníme pod pojmem "efektivní" algoritmus. Nejčastěji se používá přístup, založený na následujícím pozorování.

Algoritmy, které bývají považované za rychlé, potřebují zpravidla ke zpracování vstupních dat velikosti  $n$  čas, který je shora omezen funkcemi typu  $n^2$ ,  $n^3$ ,  $n \log n$  apod. - k hornímu odhadu časové náročnosti výpočtu je tedy možno použít vhodný polynom. O algoritmech tohoto typu budeme hovořit jako o polynomiálních algoritmech. Naproti tomu algoritmy, které pracují metodou probírání všech možností (jako například postup, naznačený na obr. 5.5.1 nebo v příkladu v odst. 5.1), potřebují pro probrání všech těchto možností alespoň  $2^n$  kroků (pokud probíráme všechny podmnožiny dané  $n$ -prvkové množiny), nebo je dolní odhad počtu kroků ještě pesimističtější ( $n!$  při probírání všech permutací dané  $n$ -prvkové množiny, resp.  $n^n$  při probírání všech jejích zobrazení do sebe). U těchto algoritmů je tedy závislost počtu kroků na rozměru vstupních dat vyjádřena alespoň exponenciální funkcí. Takové algoritmy se nazývají exponenciální algoritmy.

Rozdíl mezi polynomiálními a exponenciálními algoritmy náznorně vynikne v tabulce 5.5.1, v níž je vyjádřen čas, potřebný ke zpracování dat velikosti  $n$ , pro různé funkce  $f(n)$  za předpokladu, že provedení jedné operace trvá jednu mikrosekundu.

Tabulka 5.5.2 ilustruje danou skutečnost možná ještě názorněji. Vycházíme v ní z předpokladu, že jsme schopni daným algoritmem s časovou náročností  $f(n)$  zpracovat v daném časovém limitu vstupní data velikosti  $n = 100$  a ptáme se, jak se zvětší velikost úloh, které jsme schopni zpracovat ve stejném časovém limitu, jestliže zvýšíme rychlost výpočtu  $10x$ ,  $100x$ ,



resp. 1000x. Názorně zde vidíme, že pro exponenciální algoritmy je typické, že nad jistou mezní velikostí vstupních dat narážíme na bariéru, nad níž ani zvýšení rychlosti výpočtu o několik řádů nemůže znatelně zvětšit velikost zpracovatelných úloh.

velikost vstupních dat n	počet operací f(n)				
	$n^2$	$n^3$	$n^4$	$2^n$	$n!$
10	0,1 ms	1 ms	10 ms	1 ms	3,6 s
15	0,2 ms	3 ms	50 ms	33 ms	15 dní
20	0,4 ms	8 ms	0,2 s	1 s	77000 let
40	1,6 ms	64 ms	2,6 s	12 dní	-
70	4,9 ms	0,3 s	24 s	$37 \cdot 10^6$ let	-
100	10 ms	1 s	100 s	-	-
500	0,25 s	125 s	17 hod	-	-
1000	1 s	17 min	12 dní	-	-

tab. 5.5.1

zrychlení výpočtu	počet operací f(n)				
	$n^2$	$n^3$	$n^4$	$2^n$	$n!$
1x	100	100	100	100	100
10x	316	215	177	103	100
100x	1000	464	316	106	100
1000x	3162	1000	562	109	101

tab. 5.5.2

Bylo by zde možno namítat, že u algoritmů, jejichž časová náročnost je vyjádřena polynomem  $n^{100}$ ,  $2^{100}n$  a podobně, se jedná o polynomiální algoritmy a přesto budou v praxi nepoužitelné - zkušenost však ukazuje, že u úloh, u nichž se podaří najít polynomiální algoritmus, se zpravidla dalším vývojem

podání snížit stupeň polynomu na "rozumnou" hodnotu (zpravidla nejvýše 3 - 4) a i koeficienty nebývají příliš velké. Jedinou dosud známou výjimkou zde je úloha reálného lineárního programování - v praxi běžně používaný simplexový algoritmus má v nejhorším možném případě exponenciální časový odhad, a přesto je pro úlohy "z praxe" výhodnější než nedávno nalezený polynomiální (Chačijanův) algoritmus. Nelze však vyloučit, že se tato situace změní s dalším vývojem a zdokonalováním zatím poměrně nového algoritmu.

Za efektivní algoritmy budeme tedy považovat algoritmy, pracující v polynomiálně omezeném čase a problémy, řešitelné polynomiálními (efektivními) algoritmy budeme nazývat problémy třídy P. Do třídy P patří všechny problémy, které jsme až dosud - před odst. 5.5 - poznali: minimální kostra, minimální a kritická cesta, distanční matice. Všimněme si, že algoritmy, řešící tyto úlohy, pracují vesměs deterministicky, tj. v každém kroku je jednoznačně určen krok následující.

Na druhé straně, existuje třída úloh, pro které prostě z principiálních důvodů není možné získat efektivní algoritmus. Uvažme např. problém generování všech koster daného souvislého neorientovaného grafu: počet koster může dosahovat  $n^{n-2}$  a trvá-li generování jedné kostry c časových jednotek, pak pro generování všech koster může být třeba až  $c \cdot n^{n-2}$  časových jednotek. Podobná situace je u problémů generování cyklů, kružnic, cest, řezů atd.

Vedle těchto dvou skupin je třetí skupina úloh, pro které dosud není nalezen algoritmus, pracující v polynomiálně omezeném čase, ale není také dokázána jeho neexistence. Pro tyto úlohy je charakteristické, že podaří-li se nám "náhodou"

nalézt řešení, pak je možné v polynomiálním čase prověřit jeho správnost; ovšem k nalezení tohoto řešení jsou známy pouze algoritmy nedeterministické (tj. v podstatě probírající všechny možnosti), jejichž počet kroků je nejméně exponenciální. Stejnou náročnost má ovšem i zodpovězení otázky existence řešení v případě, kdy odpověď je záporná.

Snadnost důkazu správnosti řešení je zřejmá u úloh, které mají konstruktivní nebo rozhodovací charakter (např. úloha nalezení hamiltonovské kružnice), není však tak zřejmá u optimalizačních úloh typu "nalezněte přípustné řešení s minimální hodnotou" (např. úloha obchodního cestujícího). Každé takové úloze je však možno přiřadit rozhodovací úlohu typu "rozhodněte, jestli existuje přípustné řešení s hodnotou nejvýše  $k$ " a z její složitosti usuzovat na složitost původní úlohy - tato rozhodovací úloha již vlastnost snadného důkazu správnosti má.

Třída těchto úloh, řešitelných nedeterministicky v polynomiálním čase, se nazývá třída NP (nedeterministicky polynomiální) a obecně platí  $P \subset NP$ . Není ale dosud známo, jestli je  $P = NP$  nebo jestli platí  $P \neq NP$ . A co více: ve třídě NP existuje celá řada úloh, o nichž je dokázáno, že v případě, kdyby se nám podařilo najít polynomiální algoritmus pro některou z nich, pak bychom byli schopni z něj zjistit v polynomiálním čase řešení všech ostatních úloh. Úlohy této podskupiny třídy NP jsou tedy co do efektivnosti řešení ekvivalentní - buďto jsou všechny řešitelné v polynomiálním čase, nebo jsou všechny exponenciální. Dosud však není známo, který z těchto dvou případů nastává. Tyto úlohy se nazývají NP-úplné a z úloh, které jsme dosud poznali, do této skupiny

náleží problém existence hamiltonovské kružnice, problém obchodního cestujícího a modifikovaný problém obchodního cestujícího. V současné době je známo přes 300 NP-úplných problémů a jejich počet stále roste. Patří sem úlohy z nejrůznějších oblastí: z kombinatoriky a teorie grafů (např. problém nalezení maximálního úplného podgrafu, problém nalezení cesty maximální w-délky bez předpokladu acykličnosti, problém nalezení cesty minimální w-délky v grafu s obecným reálným - tj. i záporným - ohodnocením hran a všechny analogie těchto problémů v orientovaných, resp. neorientovaných grafech), dále úlohy z operační analýzy a teorie rozvrhování, z teorie kódování, celočíselného lineárního programování (pro úlohu reálného lineárního programování je znám polynomiální algoritmus), z teorie čísel aj. Problém efektivní řešitelnosti těchto úloh, tj. otázka, zda je  $P = NP$  nebo  $P \neq NP$ , zvaný NP-problém, je zařazován mezi nejdůležitější otevřené problémy v celé moderní matematice a přes velké úsilí zůstává dosud nevyřešen. Všeobecně se ale předpokládá, že tyto třídy rovny nejsou, neboť jinak by existovaly pro stovky dosud popsanych NP-úplných problémů efektivní algoritmy. Někteří autoři dokonce hovoří o NP-úplných problémech jako o úlohách z praktického hlediska neřešitelných.

V optimalizačních úlohách (jako např. problém obchodního cestujícího), má smysl hledat alespoň aproximaci optima. Takový aproximační algoritmus bývá nazýván též heuristický nebo stručně heuristika. Takové algoritmy jsou založeny na nějakém kritériu, na základě kterého při probírání rozhodovacího stromu jsou při řešení úlohy některé směry probírání (tj. některé části stromu řešení) zavrhovány jakožto

"neperspektivní", čímž obdržíme deterministický algoritmus a časová náročnost algoritmu se velmi podstatně sníží. Je ovšem zřejmé, že nemáme-li k dispozici charakterizační větu, což je u NP-úplných problémů pravidlem, může se nám stát, že zavrhneme jako neperspektivní tu část stromu, jež vede k optimálnímu řešení. Heuristický algoritmus nám tedy jako výsledek poskytuje nikoliv skutečné optimum, ale jen jeho aproximaci - je však evidentní, že nalezení heuristiky, která by tuto "nectnost" neměla, by bylo ekvivalentní s důkazem, že  $P = NP$ , tj s kladným řešením NP-problému.

## 5.6 Toky v sítích

Teorie toků v sítích je motivována úlohami z kategorie tzv. dopravních problémů, v nichž je cílem optimalizovat přepravu nějakého produktu v transportní síti, ale nachází řadu aplikací i v jiných oblastech.

### A) Existence toku v síti

Definice. Síť je orientovaný graf  $\vec{G}$  s ohodnocením hran  $r: H(\vec{G}) \rightarrow (0, \infty)$  a s ohodnocením uzlů  $a: U(\vec{G}) \rightarrow R$ .

Síť je tedy orientovaný graf s kladným ohodnocením hran a reálným (připouštíme i záporné hodnoty) ohodnocením uzlů.

V tomto odstavci budeme vždy považovat uzly grafu  $\vec{G}$  za očíslované čísla  $1, \dots, n$  (kde  $n = |U(\vec{G})|$ ). Ohodnocení  $a(i)$  uzlu  $i \in U(\vec{G})$  budeme krátce značit  $a_i$  a obdobně ohodnocení  $r((i,j))$  hrany  $(i,j) \in H(\vec{G})$  budeme krátce značit  $r_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Obdobný je i význam čísel  $x_{ij}$  v následující definici.

Definice. Buď  $\vec{G}$  síť s ohodnocením uzlů  $a_i$  a ohodnocením hran  $r_{ij}$ . Tok v síti je nezáporné hranové ohodnocení  $x: H(\vec{G}) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$ , splňující následující podmínky:

1. pro každý uzel  $i \in U(\vec{G})$  platí

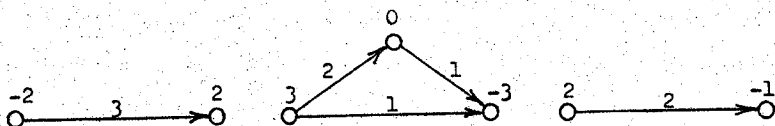
$$\sum_{j; (i,j) \in H(\vec{G})} x_{ij} - \sum_{j; (j,i) \in H(\vec{G})} x_{ji} = a_i,$$

2. pro každou hranu  $(i,j) \in H(\vec{G})$  platí  $0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}$ .

Příklad. Máme jistou množinu měst očíslovaných čísly  $1, \dots, n$  a tato města jsou spojena železniční sítí. Sestrojíme graf  $\vec{G}$  na  $n$  uzlech tak, že  $(i, j) \in H(\vec{G})$  právě tehdy, jestliže  $i$ -té město je bezprostředně spojeno železnicí s  $j$ -tým městem (předpokládáme-li obousměrnost tratí, dostaneme vždy dvojici hran  $(i, j)$  a  $(j, i)$ ). Ve zmíněných městech se vyrábí a spotřebovává tentýž produkt. Velikost výroby v  $i$ -tém městě za jednotku času označme  $b_i$ , velikost spotřeby za jednotku času označme  $c_i$  a položíme  $a_i = b_i - c_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ). Označme  $r_{ij}$  celkové množství produktu, které lze převézt po trati  $(i, j)$  za jednotku času (obecně nemusí být  $r_{ij} = r_{ji}$ ). Jestliže čísla  $x_{ij}$  mají význam skutečného množství produktu, které se za jednotku času přepraví po trati  $(i, j)$ , tj. z  $i$ -tého města do  $j$ -tého města, pak evidentně pro každou trať  $(i, j) \in H(\vec{G})$  bude platit  $0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}$ , což je podmínka (2) z definice; v každém uzlu pak musí platit "zákon zachování", podle něhož rozdíl celkového množství produktu vyvezeného ("vytékajícího") z uzlu  $i$  po všech hranách  $(i, j) \in H(\vec{G})$  a celkového množství produktu přivezeného ("vtékajícího") do uzlu  $i$  po všech hranách  $(j, i) \in H(\vec{G})$  musí být rovno množství produktu, jež se v  $i$ -tém uzlu "nedostává" při  $a_i < 0$ , resp. jež v  $i$ -tém uzlu "přebývá" při  $a_i > 0$ , což je podmínka (1) naší definice.

Definice. Je-li  $i \in U(\vec{G})$ , pak se číslo  $a_i$  nazývá intenzita uzlu  $i$ ; pro  $(i, j) \in H(\vec{G})$  se číslo  $r_{ij}$  nazývá propustnost hrany  $(i, j)$ . Pro  $a_i > 0$  se uzel  $i$  nazývá zdroj, při  $a_i < 0$  se uzel  $i$  nazývá stok. Je-li  $a_i = 0$ , budeme říkat, že uzel  $i$  je neutrální uzel.

Poznámka. Příklady sítí na obr. 5.6.1 ukazují, že v dané síti obecně nemusí tok existovat. Naším prvním úkolem tedy bude vyjasnění podmínek existence toku v síti.



obr. 5.6.1.

Definice. Pro každou množinu uzlů  $A \subset U(\vec{G})$  označme  $\bar{A} = U(\vec{G}) \setminus A$ . Množina hran

$$(A, \bar{A}) = \{(x, y); x \in A, y \in \bar{A}\}$$

se nazývá řez sítě.

Poznámka. Čtenář se snadno přesvědčí, že naše definice řezu je orientovanou analogií pojmu hranového řezu, zavedeného v odst. 4.6: je-li  $G$  symetrizací souvislého orientovaného grafu  $\vec{G}$  a je-li  $R$  hranový řez  $G$ , pak z podmínky

$$\text{hod}(G - R) = \text{hod}(G) - l$$

vyplývá, že graf  $G - R$  má právě dvě komponenty a označíme-li jejich množiny uzlů  $A$  a  $\bar{A}$ , bude  $R = (A, \bar{A}) \cup (\bar{A}, A)$ .

Označení. Buď  $G$  síť,  $A \subset U(\vec{G})$  množina uzlů.

Je-li  $f: U(\vec{G}) \rightarrow \mathbb{R}$  funkce na  $U(\vec{G})$ , označíme

$$f(A) = \sum_{i \in A} f_i$$

Je-li  $g: H(\vec{G}) \rightarrow \mathbb{R}$  funkce na  $H(\vec{G})$ , označíme

$$g(A, \bar{A}) = \sum_{(i, j) \in (A, \bar{A})} g_{ij}$$



**Věta 5.6.1.** V síti existuje tok právě když  $a(U(\vec{G})) = 0$  a pro každou množinu  $A \subset U(\vec{G})$  je  $a(A) \leq r(A, \bar{A})$ .

**Důkaz.** 1. Dokážeme, že podmínky věty jsou pro existenci toku nutné. Předpokládejme tedy, že v síti existuje tok. Pak pro každou množinu  $A \subset U(\vec{G})$  platí:

$$\begin{aligned}
 a(A) &= \sum_{i \in A} a_i = \sum_{i \in A} \left( \sum_{j; (i,j) \in H(\vec{G})} x_{ij} - \sum_{j; (j,i) \in H(\vec{G})} x_{ji} \right) = \\
 &= \sum_{i \in A} \sum_{j; (i,j) \in H(\vec{G})} x_{ij} - \sum_{i \in A} \sum_{j; (j,i) \in H(\vec{G})} x_{ji}.
 \end{aligned}$$

V tomto výrazu je první člen roven celkovému součtu toků, vytékajících ze všech uzlů množiny  $A$  - z těchto toků některé směřují do jiných uzlů z  $A$ , některé do uzlů z  $\bar{A}$ ; první výraz je tedy roven  $x(A,A) + x(A,\bar{A})$ . Obdobně druhý výraz je roven celkovému součtu toků, vtékajících do všech uzlů  $A$ , z nichž některé přicházejí z uzlů z  $A$ , jiné z uzlů z  $\bar{A}$ , takže je roven výrazu  $x(A,A) + x(\bar{A},A)$ . Odtud dostáváme

$$a(A) = (x(A,A) + x(A,\bar{A})) - (x(A,A) + x(\bar{A},A)),$$

odkud

$$a(A) = x(A,\bar{A}) - x(\bar{A},A). \quad \dots (*)$$

Protože  $0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}$ , je  $x(A,\bar{A}) \leq r(A,\bar{A})$  a  $x(\bar{A},A) \geq 0$ ;

z (\*) tedy vyplývá

$$a(A) \leq r(A,\bar{A})$$

a speciálně pro  $A = U(\vec{G})$  je  $\bar{A} = \emptyset$ , takže  $a(U(\vec{G})) = 0$ .

2. Tvrzení o tom, že podmínky věty jsou postačující, dokážeme později po vyšetření jednoho důležitého speciálního případu.

## B) Maximální tok

Jako speciální případ uvažujme síť s jedním zdrojem  $z$  a jedním stokem  $s$ ; všechny ostatní uzly sítě nechť jsou neutrální. Je-li intenzita zdroje rovna číslu  $a \geq 0$ , pak nutně musí mít stok intenzitu  $-a$ . Je-li  $a = 0$ , pak položíme-li  $x_{ij} = 0$ , jsou splněny obě podmínky z definice toku a tedy  $x_{ij}$  je tok. Položíme si následující otázku: jaká je maximální hodnota  $a$ , pro kterou v dané síti existuje tok. Takový tok se nazývá maximální tok ze  $z$  do  $s$  a příslušné číslo  $a$  se nazývá jeho velikost.

Definice. Buď  $(A, \bar{A})$  řez sítě  $\vec{G}$ . Číslo  $r(A, \bar{A})$  se nazývá propustnost řezu  $(A, \bar{A})$ , řez s nejmenší propustností se nazývá minimální řez.

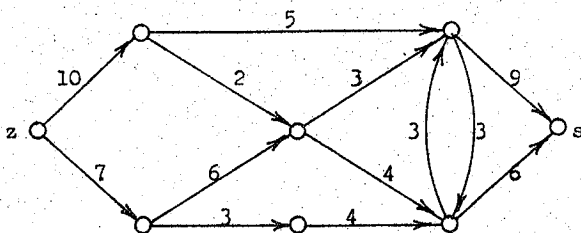
Jsou-li  $u, v \in U(\vec{G})$  dva uzly, pak řekneme, že řez  $(A, \bar{A})$  odděluje uzly  $u, v$  (v tomto pořadí!), jestliže  $u \in A$  a  $v \in \bar{A}$ .

Věta 5.6.2 (Fordova-Fulkersonova). Buď  $\vec{G}$  síť s jediným zdrojem  $z$  a jediným stokem  $s$ . Velikost maximálního toku ze  $z$  do  $s$  je rovna propustnosti minimálního řezu, oddělujícího uzly  $z$  a  $s$ .

Speciálně, je-li  $(i, j)$  hrana minimálního řezu a  $x$  je maximální tok, pak  $x_{ij} = r_{ij}$ .

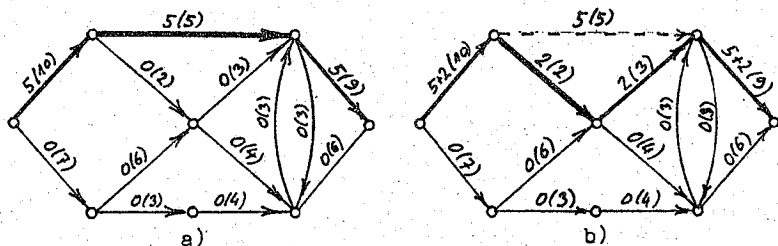
Poznámka. Jestliže pro hranu  $(i, j)$  platí  $x_{ij} = r_{ij}$ , pak říkáme, že hrana  $(i, j)$  je nasycená.

Příklad. Nalezněte maximální tok ze  $z$  do  $s$  v síti na obr. 5.6.2.

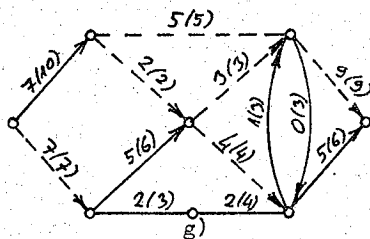
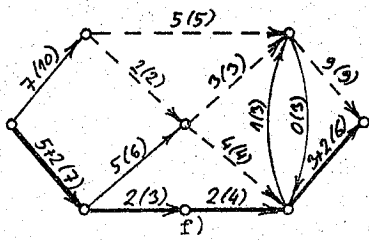
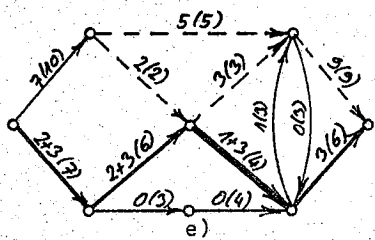
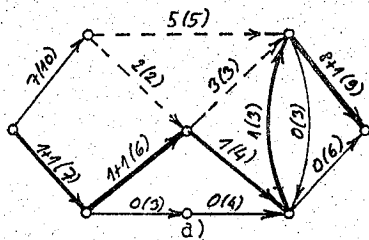
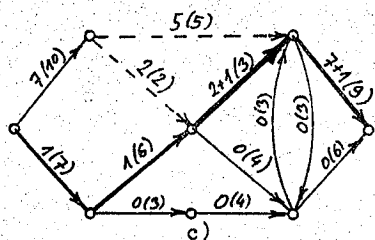


obr. 5.6.2.

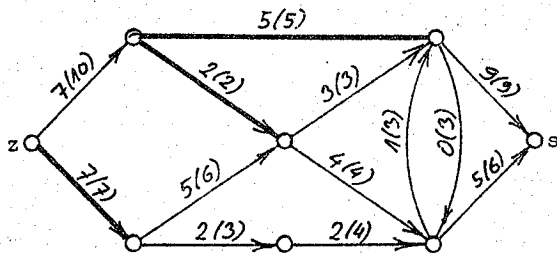
Hledaný maximální tok lze v jednoduchých případech najít "ručně" tzv. metodou horního obrysu, při níž vyjdeme z nulového toku a střídavě provádíme dva kroky: v prvním kroku zvyšujeme předchozí tok po cestě, představované horním obrysem sítě až do nasycení některé hrany této cesty a ve druhém kroku vypuštěním nasycené hrany (nebo hran) přecházíme k novému "hornímu obrysu". Postup řešení je ukázán na obr. 5.6.3 a) - g), kde je horní obrys vyznačen silně; výsledné řešení je na obr. 5.6.4, nasycené hrany minimálního řezu jsou vyznačeny silně. Velikost maximálního toku je 14 a snadno se přesvědčíme, že řešení není jediné (ale všechna řešení mají stejnou velikost toku 14). Pro rozlišení čísel  $x_{ij}$  a  $r_{ij}$  píšeme na obrázcích hodnoty propustností  $r_{ij}$  do závorek.



obr. 5.6.3.



obr. 5.6.3.



obr. 5.6.4.

Povšimněme si ještě této skutečnosti: jestliže v okamžiku, kdy se v procesu vypouštění nasycených hran stane graf  $\bar{G}$  nesouvislým (to je na obr. 5.6.3 g) ) označíme  $A$  množinu uzlů komponenty, obsahující zdroj  $z$ , pak  $(A, \bar{A})$  je minimální řez.

Důkaz věty 5.6.2. Je-li  $a$  velikost maximálního toku a  $(A, \bar{A})$  libovolný řez, pak z věty 5.6.1 vyplývá, že platí  $a \leq r(A, \bar{A})$ . Mezi všemi řezy, oddělujícími  $z$  a  $s$ , najdeme takový, pro který nastává rovnost  $a = r(A, \bar{A})$ ; takový řez je nutně minimální. Řez  $(A, \bar{A})$  sestrojíme rekurentně následujícím postupem:

- a)  $z \in A$ ,
- b) je-li  $i \in A$  a pro některé  $j \in U(\bar{G})$  platí  $x_{ij} < r_{ij}$ , pak také  $j \in A$ ,
- c) je-li  $i \in A$  a pro některé  $j \in U(\bar{G})$  platí  $x_{ji} > 0$ , pak také  $j \in A$ .

Proces pokračuje, dokud je v síti nějaká hrana, splňující předpoklady kroku b) nebo kroku c).

Pro takto sestrojenou množinu  $A$  nutně  $s \notin A$ . Kdyby totiž bylo  $s \in A$ , tak by v symetrizaci  $\bar{G}$  existovala neorientovaná cesta  $P$  ze zdroje  $z$  do stoku  $s$ , která má tyto vlastnosti:

- hrany orientované od  $z$  k  $s$  (v  $P$ ) jsou nenasycené,
- hrany orientované od  $s$  k  $z$  (v  $P$ ) mají nenulový tok.

Označme:

$$\theta_1 = \min \{ r_{ij} - x_{ij} ; \{i, j\} \in H(P) \text{ a } (i, j) \text{ je orientovaná od } z \text{ k } s \}$$

$$\theta_2 = \min \{ x_{ij} ; \{i, j\} \in H(P) \text{ a } (i, j) \text{ je orientovaná od } s \text{ k } z \}$$

$$\theta = \min \{ \theta_1, \theta_2 \}$$

Definujme nový tok  $x'$  předpisem

$$x'_{ij} = x_{ij} + \theta, \text{ jestliže } \{i, j\} \in H(P) \text{ a } (i, j) \text{ je} \\ \text{orientována od } z \text{ k } s,$$

$$x'_{ij} = x_{ij} - \theta, \text{ jestliže } \{i, j\} \in H(P) \text{ a } (i, j) \text{ je} \\ \text{orientována od } s \text{ k } z,$$

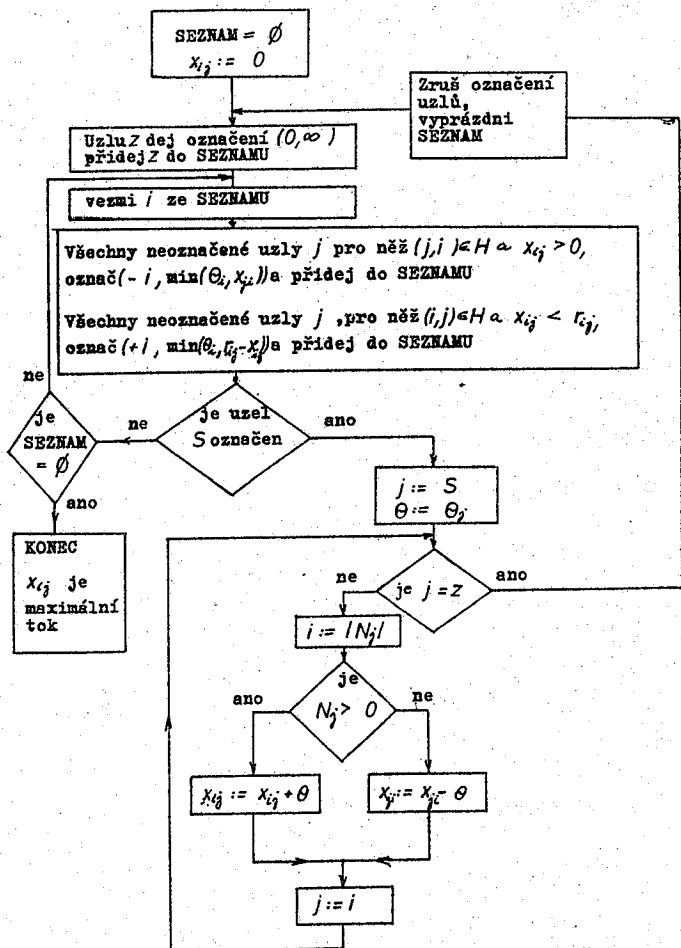
$$x'_{ij} = x_{ij}, \text{ jestliže } \{i, j\} \notin H(P).$$

Pak takto definovaný tok  $x'$  má větší velikost než  $x$ , což je spor s maximalitou toku  $x$ , Tím je dokázáno, že  $s \notin A$ .

Zbývá dokázat, že  $a = r(A, \bar{A})$ , ale to je zřejmé z toho, že  $x(A, \bar{A}) = r(A, \bar{A})$  (neboť pro  $(i, j) \in (A, \bar{A})$  je  $x_{ij} = r_{ij}$ ),  $x(\bar{A}, A) = 0$  (neboť pro  $(i, j) \in (\bar{A}, A)$  je  $x_{ij} = 0$ ) a ze vztahu (\*) z důkazu věty 5.6.1.

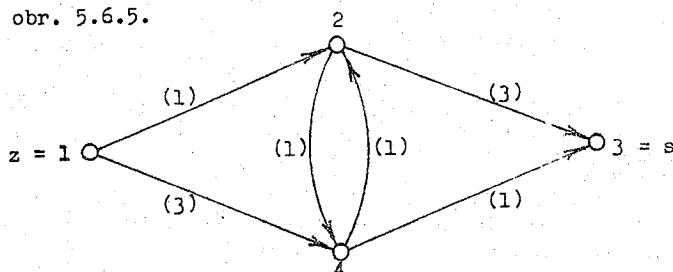
Na myšlence, použité v důkazu věty 5.6.2 je založen algoritmus umožňující nalezení maximálního toku. Algoritmus vychází z nějakého výchozího toku (například nulového) a pracuje střídavě ve dvou etapách. V první etapě postupně od zdroje ke stoku prohledává nenасыcené hrany orientované od  $z$  k  $s$  a hrany s nenulovým tokem orientované od  $s$  k  $z$ , vyhodnocuje "rezervy" pro zvětšení toku a pomocí označování uzlů dvojicemi čísel  $(N_i, \theta_i)$  hledá cestu od  $z$  k  $s$ , umožňující zvýšení toku -  $\theta_i$  je hodnota, o kterou lze tok ze  $z$  do  $i$  zvětšit a  $N_i$  je uzel, přes který vede příslušná cesta. Ve druhé etapě je po takto nalezené cestě zvýšen předchozí tok a celý proces se opakuje, dokud v síti existuje cesta, umožňující zvýšení toku. Algoritmus se zastaví v okamžiku, kdy neneleze cestu umožňující zvýšení toku, a označíme-li  $A$  množinu uzlů, které při zastavení algoritmu mají označení, pak  $(A, \bar{A})$  je minimální řez.

Algoritmus 5.6.1. (maximální tok v síti)



Poznámka. Algoritmus 5.6.1 pochází od Edmondse a Karpa (1972) a je zdokonalením původního Fordova-Fulkersonova algoritmu. Lze ukázat, že v síti s n uzly nalezneme maximální tok v nejvýše  $n^5$  krocích. Nejlepší známé algoritmy jsou schopny nalézt maximální tok v  $n^3$  krocích.

Příklad. Nalezněte maximální tok ze  $z$  do  $s$  v síti na obr. 5.6.5.



obr. 5.6.5.

Označení uzlů a hodnoty toku  $x_{ij}$ , které v jednotlivých krocích algoritmus 5.6.1 konstruuje, jsou shrnuty v následující tabulce.

	Označení uzlů				Hodnoty toku					
	1	2	3	4	$x_{12}$	$x_{14}$	$x_{23}$	$x_{24}$	$x_{42}$	$x_{43}$
1.krok	$(0, \infty)$	$(1, 1)$	$(2, 1)$	$(1, 3)$	1	0	1	0	0	0
2.krok	$(0, \infty)$	$(4, 1)$	$(4, 1)$	$(1, 3)$	1	1	1	0	0	1
3.krok	$(0, \infty)$	$(4, 1)$	$(2, 1)$	$(1, 2)$	1	2	2	0	1	1
4.krok	$(0, \infty)$			$(1, 1)$						

Minimální řez je  $(A, \bar{A})$ , kde  $A = \{1, 4\}$ .

Příklad ("úloha diverzanta"). Graf  $\vec{G}$  popisuje telegrafní síť,  $A, B$  jsou dva uzly. Jaký minimální počet kabelů je nutno přerušit, aby z  $A$  do  $B$  nebylo možno poslat telegram?

Přiřadíme-li všem hranám grafu  $\vec{G}$  propustnost  $r_{ij} = 1$ , pak je zřejmé hledaný počet kabelů (tj. hran  $\vec{G}$ ) roven velikosti maximálního toku z  $A$  do  $B$  a hledaná minimální množina hran, která popisuje příslušné kabely, je množina hran minimálního řezu, oddělujícího  $A$  a  $B$ .

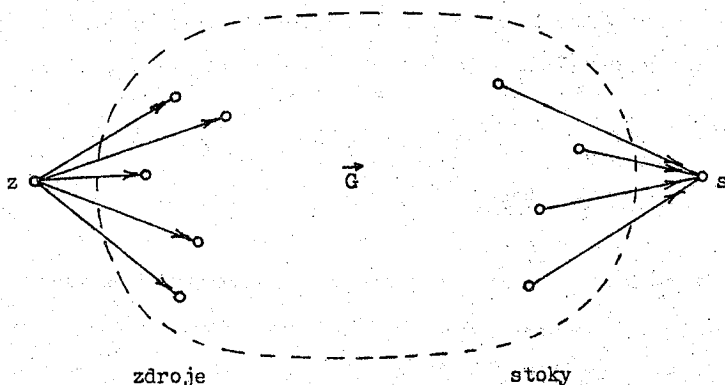


Dokončení důkazu věty 5.6.1. Vrátime se nyní k obecnému případu a dokážeme tvrzení o tom, že podmínky věty 5.6.1 jsou postačující pro existenci toku v síti s více zdroji a více stoky. Tvrzení dokážeme tak, že tok sestrojíme převedením na větu 5.6.2.

Nechť tedy v síti  $\vec{G}$  je  $a(U(\vec{G})) = 0$  a pro každý řez  $(A, \bar{A})$  je  $a(A) \leq r(A, \bar{A})$ . Sestrojíme novou síť s jedním zdrojem a jedním stokem tak, že k  $\vec{G}$  přidáme nový "fiktivní" zdroj  $z$  a nový "fiktivní" stok  $s$  a spojíme je s uzly sítě  $\vec{G}$  podle těchto pravidel:

- je-li  $a_i > 0$ , pak přidej hranu  $(z, i)$  s propustností  $a_i$  a uzlu  $i$  dej novou intenzitu  $a_i = 0$ ,
- je-li  $a_i < 0$ , pak přidej hranu  $(i, s)$  s propustností  $-a_i$  a uzlu  $i$  dej novou intenzitu  $a_i = 0$ ,
- je-li  $a_i = 0$ , pak nedělej nic;

$i = 1, \dots, |U(\vec{G})|$  (viz obr. 5.6.6).



obr. 5.6.6.

Z předpokladu  $a(A) \leq r(A, \bar{A})$  vyplývá, že řez  $(\{z\}, \{\bar{z}\})$  je minimálním řezem, oddělujícím  $z$  a  $s$ ; podle věty 5.6.2 tedy existuje v nové síti tok, který nasycuje hrany řezu  $(\{z\}, \{\bar{z}\})$ . Je však zřejmé, že restrikce takto sestrojeného toku na  $\bar{G}$  je hledaný tok v  $\bar{G}$ .

Poznámka. V důkazu věty 5.6.1 je ukázána metoda, která umožňuje použít algoritmus 5.6.1 k nalezení toku v síti s více zdroji a více stoky v případě, kdy intenzity uzlů jsou pevně daná čísla (při pevně daných intenzitách ovšem nezkoumáme maximalitu, nýbrž existenci toku).

Pro síť s více zdroji a více stoky je však také možno formulovat analogii úlohy o maximálním toku - v takovém případě nejsou intenzity zdrojů a stoků předem dány, nýbrž se naopak ptáme na jejich maximální možné hodnoty, při nichž v síti existuje tok. Je zřejmé, že se úloha převede na úlohu o maximálním toku v síti s jedním zdrojem a stokem stejným obratem jen s tím rozdílem, že propustnosti nově přidávaných hran se uvažují nekonečné (v praxi dostatečně velké číslo).

### C) Optimální tok

V této části budeme uvažovat síť s více zdroji a více stoky s pevně danými intenzitami a budeme předpokládat, že v síti existuje tok. Obecně takových toků existuje více a je možno hledat tok z některého hlediska optimální. Přiřadíme proto každé hraně grafu  $\bar{G}$  další číslo  $c_{ij}$ , které budeme podle jednoho způsobu jeho interpretace nazývat cenou.

Definice. Buď  $\vec{G}$  síť s propustnostmi hran  $r_{ij}$  a s intenzitami uzlů  $a_i$ . Nechť pro každou hranu  $(i, j) \in H(\vec{G})$  je dáno číslo  $c_{ij} \in \mathbb{R}$ , nazývané cena. Je-li  $x$  tok v  $\vec{G}$ , pak se číslo

$$c(x) = \sum_{(i, j) \in H(\vec{G})} c_{ij} x_{ij}$$

nazývá cena toku  $x$ . Tok v  $\vec{G}$ , který má minimální cenu, se nazývá optimální tok v  $\vec{G}$ .

Příklad (plánování přepravy nákladů). Jestliže v situaci, uvažované v příkladu na str. 171, mají čísla  $c_{ij}$  význam ceny za přepravu jednotky produktu po hraně  $(i, j)$ , pak má cena toku  $c(x)$  význam celkových přepravních nákladů; optimální tok představuje rozvozní plán, který uspokojí dané přepravní nároky s minimálními celkovými náklady.

Příklad (plánování výroby a skladování). Uvažujme podnik, který musí každý měsíc plánovat svoji výrobu tak, aby byl schopen zabezpečit výrobu podle zadaného grafikonu, jehož hodnoty jsou kolísavé. V této situaci jsou různé způsoby řešení: je například možno každý měsíc vyrobit přesně tolik, kolik žádá grafikon - v tom případě však narůstají ztráty, způsobené kolísáním výroby. Je též možno udržovat konstantní výrobu a kolísání poptávky zabezpečovat pomocí skladu - při malé poptávce vyrábět pro sklad, při velké sklad vyprázdnit. V tomto případě narůstají skladovací náklady. Úkolem je nalézt takový plán výroby, aby celkové ztráty byly minimální.

Předpokládejme, že se na začátku ve skladu nachází  $d_0$  jednotek produktu a označme:

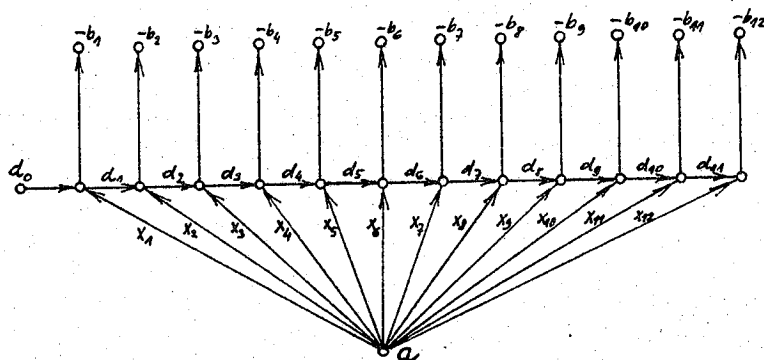
$x_m$  produkci závodu v  $m$ -tém měsíci,

- $b_m$  množství produktu, potřebné v  $m$ -tém měsíci,  
 $d_m$  množství produktu, nepoužitého na konci  $m$ -tého měsíce (tj. zásobu),  
 $c_m$  náklady na rozšíření výroby mezi  $m$ -tým a  $(m+1)$ -tým měsícem,  
 $p_m$  náklady na skladování jednotky produktu mezi  $m$ -tým a  $(m+1)$ -tým měsícem.

Pak se snadno přesvědčíme, že řešení naší úlohy se převede na úlohu o optimálním toku v síti na obr. 5.6.7, kde čísla  $x_m$  a  $d_m$  interpretujeme jako hodnoty toku a čísla  $c_m$  a  $p_m$  interpretujeme jako ceny; cena toku (kterou minimalizujeme), je dána výrazem

$$\sum_{m=1}^{11} c_m (x_{m+1} - x_m) + \sum_{m=1}^{11} p_m d_m ;$$

propustnosti všech hran se uvažují nekonečné.



obr. 5.6.7.

Intenzita  $a$  uzlu, z něhož vycházejí toky  $x_1, \dots, x_{12}$ , je dána výrazem  $a = \sum_{i=1}^{12} b_i - d_0$ ; v  $i$ -tém neutrálním uzlu platí  $x_i + d_{i-1} - d_i = b_i$ , což je v souladu s formulací úlohy.

V předchozích dvou příkladech z podstaty úlohy vyplývalo, že ceny  $c_{ij}$  musí být kladná čísla. V následujícím příkladu uvidíme, že v praktických situacích se mohou vyskytnout i záporné ceny a tedy náš předpoklad  $c_{ij} \in \mathbb{R}$  z definice optimálního toku má opodstatnění.

Příklad (úloha o skladu). Ve skladu, do něhož se vejde nejvýše  $k$  výrobků, je k dispozici  $k_0$  výrobků. V průběhu  $n$  dnů se realizuje prodej a nákup těchto výrobků. Předpokládejme, že jsou známy:

- $p_i$  - cena při prodeji jednoho výrobku v  $i$ -tý den,
- $q_i$  - kupní cena (od dodavatele) jednoho výrobku v  $i$ -tý den pro doplnění skladu,
- $s_i$  - náklady na skladování jednoho výrobku v  $i$ -tý den,
- $Q$  - celkový počet výrobků, které je možno od dodavatele obdržet za uvažovaných  $n$  dnů.

Úkolem je určit:

- $\alpha_i$  - počet výrobků, prodaných v  $i$ -tý den,
- $\beta_i$  - počet výrobků, koupených od dodavatele v  $i$ -tý den,
- $r_i$  - počet skladovaných výrobků po prodeji starých,
- $\delta_i$  - počet skladovaných výrobků po koupi nových;

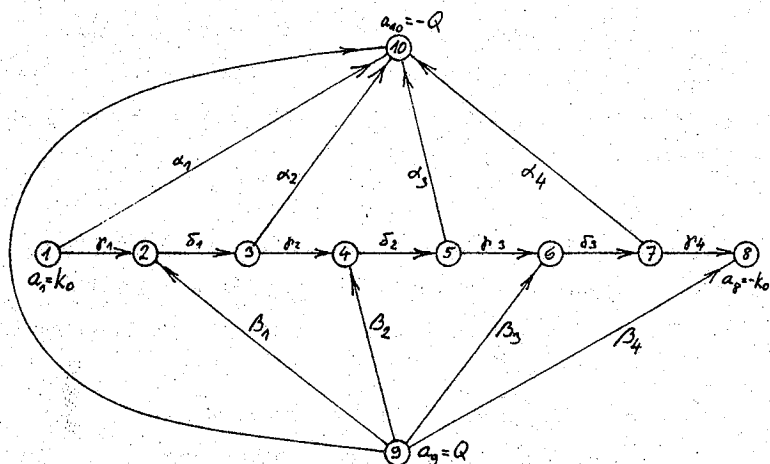
přičemž má být maximalizován celkový zisk

$$\sum_{i=1}^n (p_i \alpha_i - q_i \beta_i - s_i r_i) \quad ,$$

což je zřejmě ekvivalentní s minimalizací výrazu

$$\sum_{i=1}^n (-p_i \alpha_i + q_i \beta_i + s_i r_i) \quad .$$

Pro zjednodušení předpokládejme, že se požaduje, aby v  $n$ -tý den bylo ve skladu opět  $k_0$  výrobků. Úloha se převede na úlohu o optimálním toku v síti, jež je pro  $n = 4$  na obr. 5.6.8.



obr. 5.6.8.

Uzly 1, ..., 8 odpovídají stavům, v nichž se sklad nachází v jednotlivé dny: uzel 1 popisuje výchozí stav a má proto intenzitu  $a_1 = k_0$ , uzel 2 popisuje stav po prodeji části výrobků v první den atd., až uzel 8 popisuje konečný stav skladu a má proto intenzitu  $a_8 = -k_0$ ; intenzity uzlů 2, ..., 7 jsou rovny nule. Uzel 9 odpovídá dodavateli, uzel 10 zákazníkovi. Protože  $a_1 = -a_8$ , musí také být  $a_9 = -a_{10} = Q$ . Vzhledem k tomu, že je možné, aby se koupilo a prodalo i méně než  $Q$  výrobků, je v síti fiktivní hrana (9,10) s nulovou cenou a nekonečnou propustností. Propustnosti hran  $(i, i+1)$  pro  $i = 1, \dots, 7$  jsou  $k$ , ostatní hrany mají nekonečnou propustnost. Hledaná čísla  $\alpha_i$ ,  $\beta_i$ ,  $r_i$  interpretujeme jako hodnoty toku, čísla  $-p_i$ ,  $q_i$  a  $s_i$  jako ceny a hledáme tok, který minimalizuje cenovou funkci

$$\sum_{i=1}^n (-p_i \alpha_i + q_i \beta_i + s_i r_i) .$$

Věta 5.6.3. Tok  $x_{ij}$  je optimální právě když existuje takové ohodnocení uzlů čísla  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , že

$$V_j - V_i \leq c_{ij}, \text{ jestliže } x_{ij} = 0,$$

$$V_j - V_i = c_{ij}, \text{ jestliže } 0 < x_{ij} < r_{ij},$$

$$V_j - V_i \geq c_{ij}, \text{ jestliže } x_{ij} = r_{ij}.$$

Čísla  $V_i$  jsou určena jednoznačně až na aditivní konstantu a lze je učinit nezápornými.

Čísla  $V_i$ , o nichž hovoří věta 5.6.3, se nazývají potenciály uzlů.

Před důkazem věty dokážeme jedno pomocné tvrzení.

Lemma. Pro každý tok  $x_{ij}$  a pro každá čísla  $V_i$ ,  $r_{ij} \geq 0$ , pro která platí

$$V_j - V_i - r_{ij} \leq c_{ij},$$

platí nerovnost

$$\sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} c_{ij} x_{ij} \geq - \sum_{i=1}^n V_i a_i - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} r_{ij} r_{ij}.$$

Důkaz lemmatu. Z předpokladu lemmatu a z definice toku

vyplývá, že

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} c_{ij} x_{ij} \geq \\ & \equiv \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} V_j x_{ij} - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} V_i x_{ij} - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} r_{ij} x_{ij} = \\ & = - \sum_{i=1}^n V_i \left( \sum_{j; (i,j) \in H(\vec{G})} x_{ij} - \sum_{j; (j,i) \in H(\vec{G})} x_{ji} \right) - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} r_{ij} x_{ij} \geq \\ & \equiv - \sum_{i=1}^n V_i a_i - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} r_{ij} r_{ij}. \end{aligned}$$

Důkaz věty 5.6.3. 1. Dokážeme, že jestliže pro tok

$x_{ij}$  existují potenciály uzlů  $V_i$  s vlastnostmi, danými větou 5.6.3, pak je tok  $x_{ij}$  optimální. Optimálnost toku dokážeme pomocí lemmatu: nerovnost, která je v něm dokázána, dává dolní odhad ceny toku pro libovolný tok v síti a tedy tok, pro který v nerovnosti nastává rovnost, je nutně optimální.

Nechť je tedy dán tok  $x_{ij}$  a příslušné potenciály  $V_i$ . Z vlastností potenciálů vyplývá, že definujeme-li pro každou hranu  $(i,j) \in H(\vec{G})$  číslo

$$r_{ij} = \max \{ 0, -c_{ij} - V_i + V_j \},$$

pak

$$V_j - V_i - r_{ij} \leq c_{ij}$$

a tedy čísla  $r_{ij}$  vyhovují předpokladům lemmatu. Protože však pro  $x_{ij} > 0$  je  $r_{ij} = V_j - V_i - c_{ij}$ , platí

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} c_{ij} x_{ij} = \\ & = \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} V_j x_{ij} - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} V_i x_{ij} - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} r_{ij} x_{ij} = \\ & = - \sum_{i=1}^n V_i a_i - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} r_{ij} r_{ij} ; \end{aligned}$$

podle lemmatu tedy pro tok  $x_{ij}$  dosahuje cenová funkce své nejmenší možné hodnoty a tedy tok  $x_{ij}$  je optimální.

2. Nyní budeme naopak předpokládat, že tok  $x_{ij}$  je optimální a nalezneme potenciály uzlů  $V_i$ , splňující tvrzení věty. Označme  $H(x)$  množinu všech hran  $(i,j)$ , pro které platí  $0 < x_{ij} < r_{ij}$ . Faktor  $\vec{G}_x = (U(\vec{G}), H(x))$  grafu  $\vec{G}$  nazveme opora toku  $x_{ij}$ . Vždy lze bez újmy obecnosti předpokládat, že opora je souvislý graf (říkáme-li, že orientovaný graf je souvislý, míníme tím ovšem slabou souvislost). Kdyby tomu



tak nebylo, můžeme síť poněkud rozšířit tak, že tok ve staré síti se nezmění a opora toku v rozšířené síti bude již souvislá: v každé komponentě opory zvolíme jeden uzel, jehož intenzitu zmenšíme o dostatečně malé číslo  $\varepsilon$ , zavedeme nový fiktivní uzel s intenzitou  $k \cdot \varepsilon$  (kde  $k$  je počet komponent opory) a vybrané uzly s tímto novým uzlem spojíme hranami s nulovou cenou a nekonečnou propustností. Je zřejmé, že optimální toky v obou sítích se na původním grafu shodují a opora nového toku je již souvislý graf.

Potenciály uzlů sestrojíme nyní následujícím postupem.

Zvolíme jeden uzel  $i_0 \in U(\vec{G})$  a položíme  $V_{i_0} = 0$ . Pro všechny uzly  $j \in U(\vec{G})$ , pro něž je  $(i_0, j) \in H(x)$ , položíme

$$V_j = V_{i_0} + c_{i_0 j}$$

a pro všechny uzly  $j \in U(\vec{G})$ , pro něž je  $(j, i_0) \in H(x)$ , položíme

$$V_j = V_{i_0} - c_{j i_0}.$$

Tímto způsobem lze na základě hodnoty potenciálu každého uzlu určit hodnoty potenciálu pro všechny uzly, které s ním jsou v opoře spojeny hranou a pro které ještě není určen. Protože opora je souvislý faktor grafu  $\vec{G}$ , jsou tím určeny potenciály pro všechny uzly sítě.

Dokážeme, že při takto definovaných číslech  $V_i$  platí pro každou hranu  $(i, j) \in H(x)$  vztah

$$V_j - V_i = c_{ij}.$$

Nechť tedy existuje hrana  $(s, t) \in H(x)$  taková že  $V_t - V_s \neq c_{st}$ . Jestliže spojíme v opoře  $(U(\vec{G}), H(x))$  uzly  $s$  a  $t$  s uzlem  $i_0$  cestami  $P_s, P_t$ , pomocí nichž byl potenciál definován, a uvážíme-li, že hrana  $(s, t)$  nemůže patřit žádné z těchto cest (neboť pak by bylo  $V_t - V_s = c_{st}$ ), zís-

káme v symetrizaci grafu  $\vec{G}$  kružnici, obsahující hrany těchto dvou cest a hranu  $\{s,t\}$ ; tuto kružnici označme  $C$ .

a) Nechť  $V_t - V_s > c_{st}$ . Pro každou hranu  $(i,j) \in H(\vec{G})$  definujeme číslo  $y_{ij}$  takto:

$$y_{ij} = x_{ij} + \theta, \text{ jestliže } \{i,j\} \in H(C) \text{ a orientace hrany } (i,j) \text{ v } C \text{ souhlasí s orientací } (s,t),$$

$$y_{ij} = x_{ij} - \theta, \text{ jestliže } \{i,j\} \in H(C) \text{ a orientace hrany } (i,j) \text{ v } C \text{ je opačná než orientace } (s,t),$$

$$y_{ij} = x_{ij}, \text{ jestliže } \{i,j\} \notin H(C),$$

kde  $\theta > 0$  je dostatečně malé číslo (lze je definovat obdobně jako v důkazu věty 5.6.2). Je zřejmé, že  $y_{ij}$  je také tokem v naší síti; přitom však platí

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} c_{ij} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} c_{ij} y_{ij} = \\ &= \sum_{(i,j) \in H(C)} c_{ij} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in H(C)} c_{ij} y_{ij} = \\ &= \sum_{(i,j) \in H(C)} c_{ij} (\pm \theta) = \\ &= - \sum_{(i,j) \in H(P_s)} c_{ij} (\pm \theta) + c_{st} \cdot \theta - \sum_{(i,j) \in H(P_t)} c_{ij} (\pm \theta) = \\ &= - (V_s \cdot \theta + c_{st} \cdot \theta - V_t \cdot \theta) = \theta (V_t - V_s - c_{st}) > 0, \end{aligned}$$

což je spor s optimalitou toku  $x_{ij}$ .

b) Jestliže  $V_t - V_s < c_{st}$ , pak definujeme tok  $y_{ij}$  analogicky pro  $\theta < 0$  a dostaneme obdobný spor.

Platí tedy  $V_t - V_s = c_{st}$  pro všechny hrany  $(s,t)$  opory toku.

Obdobným způsobem lze ověřit, že potenciály  $V_i$  mají i všechny další vlastnosti, o nichž se hovoří ve větě 5.6.3.

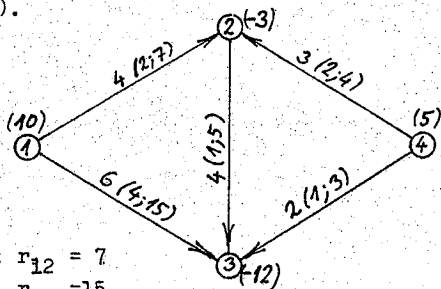
Postup, kterým jsme v důkazu věty sestrojili potenciály  $V_i$ , nám poskytuje metodu pro praktické sestrojení optimálního toku v síti.

Známe-li v síti nějaký výchozí tok (jenž se dá sestrojít například postupem ukázaným v druhé části důkazu věty 5.6.2), pak definujeme postupně (za předpokladu souvislosti opory - o jeho splnitelnosti jsme hovořili v důkazu věty 5.6.3) potenciály jednotlivých uzlů sítě a narazíme-li při jejich konstrukci na hranu, na níž nejsou splněny podmínky optimality, pak tok podle některé kružnice "vylepšíme". K takto vylepšenému toku pak opět sestrojujeme potenciály a celý postup opakujeme tak dlouho, dokud v síti nacházíme hrany, na nichž nejsou splněny podmínky optimality. Výsledkem tohoto iteračního postupu je tedy optimální tok. Popsaná metoda nalezení optimálního toku se nazývá metoda potenciálů.

Příklad. V síti na obr. 5.6.9 nalezněte optimální tok (u každé hrany  $(i,j)$  píšeme do závorky čísla  $(c_{ij}; r_{ij})$ , bez závorek píšeme hodnoty toku).

intenzity:  $a_1 = 10$   
 $a_2 = -3$   
 $a_3 = -12$   
 $a_4 = 5$

ceny:  $c_{12} = 2$  propustnosti:  $r_{12} = 7$   
 $c_{13} = 4$   $r_{13} = 15$   
 $c_{23} = 1$   $r_{23} = 5$   
 $c_{42} = 2$   $r_{42} = 4$   
 $c_{43} = 1$   $r_{43} = 3$

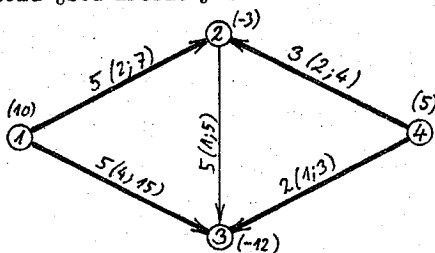


obr. 5.6.9.

V síti na obr. 5.6.9 je nakreslen výchozí tok  $x_{12}=4$ ,

$x_{13}=6, x_{23}=4, x_{42}=3, x_{43}=2$ . Protože ve všech hranách je nenulový tok a žádná není nasycená, je oporou toku celý graf. Budeme definovat potenciály uzlů: zvolíme  $V_1 = 0$  a dále dostáváme

$V_1 = 0 \Rightarrow V_2 = 2$  (neboť  $c_{12}=2$ )  $\Rightarrow V_3 = 3$  (neboť  $c_{23}=1$ ), ale to je spor, protože  $V_3 - V_1 = 3$ , ale  $c_{13} = 4$ . Na hraně (1,3) je tedy rozdíl potenciálů menší než cena, a tedy tok touto hranou je třeba snížit pomocí změny podél kružnice s uzly 1, 2, 3, 1. To lze provést nejvýše o 1, neboť pak už se hrana (2,3) nasytí. Vylepšený tok vypadá takto:  $x_{12} = 5, x_{13} = 5, x_{23} = 5, x_{42} = 3, x_{43} = 2$  (viz obr. 5.6.10; hrany opory nového toku jsou kresleny silně).



obr. 5.6.10.

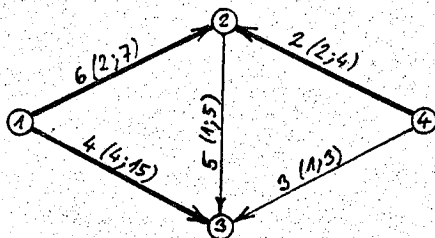
Pro tento tok opět definujeme potenciály:

$$V_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} V_2 = 2 & (\text{pomocí hrany } (1,2)) \\ V_3 = 4 & (\text{pomocí hrany } (1,3)) \end{cases}$$

Na hraně (2,3) platí  $V_3 - V_2 = 2$  a  $c_{23} = 1$ , což je v souladu s podmínkami optimality ( $V_3 - V_2 \geq c_{23}$ , neboť hrana již je nasycená a tedy nepatří do opory). Definujeme tedy dále pomocí hrany (4,2)  $V_4 = 0$ . Na hraně (4,3) tak získáme  $V_3 - V_4 = 4$  a  $c_{43} = 1$ , což je opět spor. Tok  $x_{43}$  je třeba zvětšit (rozdíl potenciálů je větší než cena) - podél kružnice s uzly 1, 2, 4, 3, 1 změním tok o 1 (o víc nelze, neboť hrana (4,3) se nasytí). Dostaneme tak tok  $x_{12} = 6, x_{13} = 4, x_{23} = 5, x_{42} = 2, x_{43} = 3$  - viz obr. 5.6.11; hrany opory

jsou opět kresleny silně. Můžeme opět definovat potenciály:

$$V_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} V_2 = 2 \\ V_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow V_4 = 0$$



obr. 5.6.11.

a podmínky optimality jsou již nyní splněny, takže tento tok je optimální.

Povšimněme si, že celková cena výchozího toku byla  $8+24+4+6+2=44$ , prvního opraveného toku  $10+20+5+6+2=43$ ; celková cena výsledného optimálního toku je  $12+16+5+4+3=40$ .

Poznámky. 1. Na úlohy o tocích v sítích je možno převést i řadu grafových úloh, ve kterých "nikde nic neteče". Jestliže například v ohodnoceném orientovaném grafu  $\vec{G}$  (ve smyslu odst. 3.3) interpretujeme ohodnocení hran jako ceny, propustnosti považujeme za nekonečné, dva zvolené uzly  $u, v$  v ohodnotíme intenzitami  $1$  a  $-1$  a všechny ostatní uzly nulovými intenzitami, pak, je-li  $x_{ij}$  optimální tok, určuje množina hran  $(i, j)$ , pro něž  $x_{ij} \neq 0$ , minimální cestu z  $u$  do  $v$ .

2. Metodu potenciálů zde uvádíme pro její názornost. Jsou známy i jiné metody nalezení optimálního toku, jejich výklad však přesahuje rámec tohoto textu. Zájemce odkazujeme na speciální literaturu - např. [30], [12], [18].