

ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA

se sídlem v Plzni

Fakulta aplikovaných věd

LINEÁRNÍ ALGEBRA II

Úvod do diskrétní matematiky

Katedra matematiky

Doc. RNDr. Jiří Holenda, CSc.

Doc. RNDr. Zdeněk Ryjáček, CSc.

II. část

Ediční středisko ZČU

Plzeň 1992

O b s a h

I. část

Předmluva	5
1. Relační struktury	7
1.1 Binární relace	7
A) Zobrazení	16
B) Binární operace	17
C) Ekvivalence	19
D) Tolerance	22
E) Uspořádání	23
1.2 Částečně uspořádané množiny (posety)	24
1.3 Srovnatelná zobrazení a matematické struktury	34
1.4 Booleovy algebry	41
1.5 Reprezentace Booleových algeber	49
1.6 Grafy	56
2. Neorientované grafy	67
2.1 Stupeň uzlu; souvislost, komponenty grafu	67
2.2 Stromy; kostry grafu	79
2.3 Ohodnocený graf; minimální kostra a metrika grafu	86
2.4 Eulerovské a hamiltonovské grafy	91
3. Orientované grafy	95
3.1 Stupeň uzlu; souvislost a silná souvislost	95
3.2 Acyklické grafy; kvazikomponenty a kondenzace grafu	102
3.3 Ohodnocený orientovaný graf	109

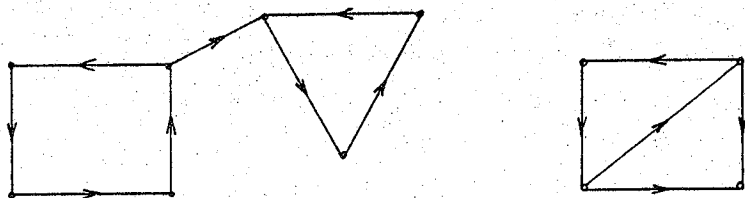
II. část

4. Matice grafů a jejich vlastnosti	111
4.1 Různé popisy neorientovaného grafu	112
4.2 Různé popisy orientovaného grafu	114
4.3 Incidenční matice	116
4.4 Matice sousednosti	128
A) Matice sousednosti neorientovaného grafu	129
B) Matice sousednosti orientovaného grafu	134
C) Laplaceova matice sousednosti	137
D) Znaménková matice	143
4.5 Matice kružnic	149
4.6 Matice hranových řezů	155
5. Aplikace teorie grafů	163
5.1 Minimální kostra	163
5.2 Minimální cesta	168
5.3 Kritická cesta	172
5.4 Distanční matice grafu	178
5.5 Problém obchodního cestujícího; NP-úplné problémy	183
5.6 Toky v sítích	192
A) Existence toku v síti	192
B) Maximální tok	196
C) Optimální tok	204
Přehled literatury	216

Poznámka: navazuje na stránku 110 z I. části skript.

4. Matice grafů a jejich vlastnosti

Seznámili jsme se již se základními druhy grafů, které jsme v mnoha případech určovali obrázkem. Jak již víme, všechny vzájemně izomorfní grafy se dají znázornit stejným obrázkem. Grafické znázornění v případě menšího počtu uzlů a hran grafu má řadu výhod. Obrázek lze nakreslit rychle a je-li nakreslený vhodně, je přehledný, názorný a mnohdy zvýrazňuje určitou vlastnost grafu, takže v sobě skrývá víc, než jen pouhé určení množiny uzlů a množiny hran grafu. Tak například graf \vec{G}

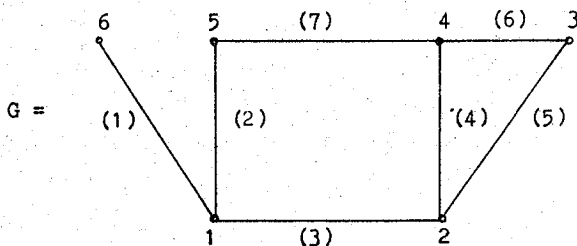


má 11 uzlů, 13 hran, dvě komponenty, jednu volnou hranu, dvě kvazikomponenty, obsahuje tři cykly atd. Zadat graf obrázkem je však možné pouze člověku. Není však možné zadat graf uvedeným obrázkem počítači. Rovněž při obecných teoretických úvahách a při řešení praktických úloh se zadáním grafů obrázky nevystačíme. V další části této kapitoly uvádíme popisy, které předpokládají numeraci uzlů a v některých případech i numeraci hran, nebo některých částí grafů. Pojem grafu je samozřejmě na očíslování jeho uzlů a hran nezávislý. Vyjadřujeme-li graf obrázkem, upouštíme vlastně od individuálních vlastností uzlů a hran daného grafu, takže obrázek reprezentuje celou třídu vzájemně izomorfních grafů.

Těžištěm této kapitoly je především výklad maticového popisu grafů, který je sice méně vhodný při zadávání grafu do počítače, ale má značný význam pro teoretické úvahy i pro tvorbu prakticky použitelných algoritmů. Zvláště se zaměřujeme na možnosti algebraického vyjádření různých charakteristik grafů pomocí charakteristik příslušných tříd matic. Nejprve však v následujících dvou odstavcích uvádíme stručný přehled různých popisů neorientovaných a orientovaných grafů.

4.1. Různé popisy neorientovaného grafu

V přehledu uvádíme různá možná zadání grafu. Ve všech případech předpokládáme požadované očíslování uzlů i hran. Protože jde o velmi jednoduchou záležitost omezujeme se na základní charakteristiku a ilustraci zadání pro případ grafu G vyjádřeného obrázkem



a) Výčtem vrcholů a hran

$G: (6,7; \{1,6\}, \{1,5\}, \{1,2\}, \{2,4\}, \{2,3\}, \{3,4\}, \{4,5\})$.

Před středníkem uvádíme počet uzlů a počet hran. Dále uvádíme jmenovitě výčet všech hran. Uvážíme-li, že množinové zápornky jsou při uvádění hran zbytečné, můžeme graf G zadat pomocí $2 |H(G)| + 2$ údajů ve tvaru

$G: (6,7; 1,6,1,5,1,2,2,4,2,3,3,4,4,5)$.

b) Vyjádřením relace incidence ϱ hran a uzlů

b₁) pomocí množiny set(ϱ) všech incidujících dvojic (hrana, uzel);

$$\text{set}(\varrho) = \{(1,1), (1,6), (2,1), (2,5), (3,1), (3,2), (4,2), (4,4), (5,2), (5,3), (6,3), (6,4), (7,4), (7,5)\}.$$

Tímto zadáním nejsou zachyceny případné izolované uzly grafu.

b₂) pomocí množiny suc(ϱ) všech trojic (hrana, uzel, uzel), tj. trojic kde na prvním místě je uvedená hrana a dále dva uzly s ní incidující;

$$\text{suc}(\varrho) = \{(1,1,6), (2,1,5), (3,1,2), (4,2,4), (5,2,3), (6,3,4), (7,4,5)\}.$$

Tímto způsobem opět nejsou evidovány případné izolované uzly grafu.

b₃) pomocí množiny suc(ϱ^{-1}) všech uspořádaných x-tic, vyjadřující relaci incidence ϱ^{-1} , tj. incidenci uzlů a hran grafu;

$$\text{suc}(\varrho^{-1}) = \{(1,1,2,3), (2,3,4,5), (3,5,6), (4,4,6,7), (5,2,7), (6,1)\}.$$

b₄) v případě obyčejného grafu úplnou incidenční maticí

$M = [m_{ij}]$ typu $|U(G)|/|H(G)|$, kde $m_{ij} = 1$, je-li $u_i \in h_j$,
 $m_{ij} = 0$ všude jinde;

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

c) Vyjádřením relace sousednosti ω uzlů grafu

c₁) pomocí množiny set(ω) všech dvojic (i,j) sousedních uzlů pro $i \leq j$ (toto zadání se liší jen nepatrně od zadání uvedeného ad a);

$$\text{set } (\omega) = \{(1,2), (1,5), (1,6), (2,3), (2,4), (3,4), (4,5)\}.$$

c₂) pomocí množiny $\text{suc } (\omega)$ vyjadřující výčet všech okolí všech uzlů grafu;

$$\text{suc}(\omega) = \{(1,2,5,6), (2,1,3,4), (3,2,4), (4,2,3,5), (5,4,1), (6,1)\}.$$

c₃) v případě obyčejného grafu maticí sousednosti $S = [s_{ij}]$ řádu $|U(G)|$, kde

$$s_{ij} = 1 \quad \text{pro } \{i,j\} \in H(G),$$

$$s_{ij} = 0 \quad \text{pro } \{i,j\} \notin H(G);$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

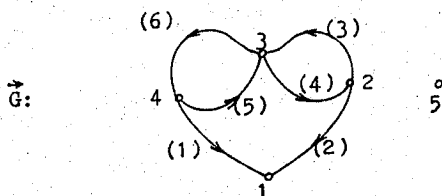
d) Výčtem uzlů s jejich stupni a sousedy

$$G \quad (1,3,2,5,6,2,3,1,3,4,3,2,2,4,4,3,2,3,5,5,2,4,1,6,1,1).$$

Všechny uvedené způsoby jsou v zásadě ekvivalentní a výběr závisí na povaze úlohy, kterou máme na grafu řešit.

4.2. Různé popisy orientovaného grafu

K popisu orientovaného grafu máme v podstatě stejné možnosti jako pro popis grafu neorientovaného. Protože však přece jen nepatrné rozdíly jsou, uvádíme v tomto odstavci přehled základních způsobů zadání orientovaného grafu. Omezujeme se opět na stručný popis zadání v obecném případě a příslušný popis ilustrujeme v celém odstavci na příkladu orientovaného grafu \vec{G} určeného obrázkem



Samozřejmě ve všech případech vycházíme z daného očíslování množiny uzlů a hran.

a) Popisy vycházející ze znalosti relace σ incidence hran a uzlů

a₁) výčtem prvků množiny $\text{set}(\vec{\sigma})$, tj. výčtem uspořádaných trojic (i, j, k) takových, že $h_i = (u_j, u_k)$;

\vec{G} : $(1, 4, 1), (2, 2, 1), (3, 2, 3), (4, 3, 2), (5, 4, 3), (6, 3, 4)$.

V obecném případě je tímto způsobem graf \vec{G} určen až na případné izolované uzly.

a₂) V případě obyčejného grafu úplnou incidenční maticí

$M = [m_{ij}]$ typu $|U(\vec{G})|/|H(\vec{G})|$,

kde $m_{ij} = 1$, je-li $h_j = (u_i, u_k)$ pro nějaké k ,

$m_{ij} = -1$ je-li $h_j = (u_k, u_i)$ pro nějaké k ,

$m_{ij} = 0$ všude jinde;

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podrobněji o incidenční matici pojednáváme ve 3. odstavci této kapitoly, kde uvádíme i její některé zajímavé vlastnosti. Poznáváme, že zadání orientovaného grafu \vec{G} pomocí množiny $\text{suc}(\sigma)$ a $\text{suc}(\sigma^{-1})$ není možné.

b) Popisy vycházející ze znalosti relace ω následnosti uzlů

b₁) výčtem prvků množiny $\text{set}(\omega)$, tj. výčtem všech orientovaných hren;

$$\vec{G}: \{ (4,1), (2,1), (2,3), (3,2), (4,3), (3,4) \}$$

graf je určen až na izolované uzly;

b₂) výčtem prvků množiny $\text{suc}(\omega)$, tj. soupisem všech uzlů s udáním všech jejich následovníků;

$$\vec{G}: \{ (1), (2,1,3), (3,2,4), (4,1,3), (5) \};$$

b₃) výčtem prvků množiny $\text{suc}(\omega^{-1})$, tj. soupisem všech uzlů s udáním všech jejich „předchůdců“;

$$\vec{G}: \{ (1,4,2), (2,3), (3,2,4), (4,3), (5) \};$$

b₄) v případě prostého grafu \vec{G} maticí sousednosti

$S = [s_{ij}]$ řádu $|U(\vec{G})|$, kde

$$s_{ij} = 1, \text{ je-li } (u_i, u_j) \in H(\vec{G}),$$

$$s_{ij} = 0 \text{ všude jinde.}$$

O matici sousednosti grafu \vec{G} pojednáváme podrobněji ve 4. odstavci této kapitoly. Pro sledovaný příklad je zřejmé

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4.3. Incidenční matice

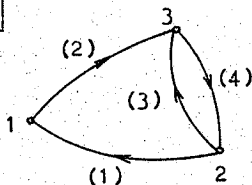
Definice. Uvažujme orientovaný graf \vec{G} bez smyček s daným očíslováním uzlů a hren. Nechť je $U(\vec{G}) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, $H(\vec{G}) = \{h_1, h_2, \dots, h_m\}$. Maticí $M = [m_{ik}]$ typu n/m , definovanou vztahy:

$m_{ik} = 1$, je-li u_i počáteční uzel hrany h_k ,
 $m_{ik} = -1$, je-li u_i koncový uzel hrany h_k ,
 $m_{ik} = 0$, jestliže uzel u_i neinciduje s hranou h_k ,
 nazýváme úplnou incidenční (také uzlo-hranovou) maticí grafu G ,
 stručněji incidenční maticí.

Tak například matice

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

je incidenční matice grafu



Incidenční matice grafu \vec{G} je speciálním případem tzv. totálně unimodulárních matic, které mají širší uplatnění i v rámci aplikací teorie grafů a proto o nich v tomto odstavci stručně pojednáme.

Definice. Řekneme, že matice $A = [a_{ij}]$ je totálně unimodulární, jestliže platí:

- $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$;
- determinant každé čtvercové podmatice matice A je roven 0 nebo ± 1 .

Nyní uvedeme některé postačující podmínky, při kterých je matice totálně unimodulární.

Věta 4.3.1. Nechť A je matice s prvky $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$ taková, že žádný sloupec nemá více než dva prvky nenulové. Pak

A je totálně unimodulární, právě když množinu řádkových indexů lze rozložit na množiny $N_1, N_2, N_1 \cap N_2 = \emptyset$ tak, že

- (1) jestliže dva nenulové prvky téhož sloupce jsou stejné, pak řádkový index prvního prvku patří do množiny N_1 a druhého prvku do množiny N_2 ;
- (2) jestliže dva nenulové prvky téhož sloupce mají opačná znamení, pak řádkové indexy obou prvků patří shodně buď do N_1 nebo do N_2 .

Důkaz. Nechť A je totálně unimodulární matice, která má v každém sloupci dva nenulové prvky. Protože sloupce, kde je nanejvýš jeden prvek různý od 0, nehrají v tom, co chceme dokázat, žádnou roli, budeme předpokládat, že v každém sloupci jsou právě dva prvky nenulové. Ukážeme, že množiny N_1 a N_2 splňující požadavky (1) a (2) lze najít. S maticí A sdružíme neorientovaný graf G s n uzly u_i a n hranami h_j : hrana h_j bude incidovat s vrcholy u_i a u_k , když $a_{ij} \neq 0$ a $a_{kj} \neq 0$. Takovou hranu nazveme „speciální“, budou-li mít prvky a_{ij} a a_{kj} stejné znamení. Nechť $C = u_1, u_2, \dots, u_k, u_1$ je jednoduchá kružnice grafu s hranami h_1, h_2, \dots, h_k . Kružnice C bude sdružena s čtvercovou podmaticí B matice A tvaru

$$B = \begin{array}{c} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_k \end{array} \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & & & h_k \\ \alpha_1 & 0 & & & \beta_k \\ \beta_1 & \alpha_2 & 0 & & \\ 0 & \beta_2 & \alpha_3 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \beta_{k-1} & \alpha_k \end{bmatrix}$$

kde $\alpha_j = \pm 1$ a $\beta_j = \pm 1$ a $\alpha_j = \beta_j$, když h_j je „speciální“ hrana, a $\alpha_j = -\beta_j$, když h_j není „speciální“. Je-li v podmatici

B p „speciálních“ hran, pak máme

$$\begin{aligned} \det(B) &= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k + (-1)^{k-1} \beta_1 \beta_2 \dots \beta_k = \\ &= \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k + (-k)^{k-1} (-1)^{k-p} \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k = \\ &= (1 + (-1)^{p+1}) \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k = \pm (1 + (-1)^{p+1}). \end{aligned}$$

Z uvedeného vyplývá, že p musí být sudé, neboť jinak by platilo $\det(B) = \pm 2$. Tudíž každá jednoduchá kružnice v matici A má sudý počet speciálních hran.

V případě nespeciálních hran z obou incidujících uzlů vytvoříme nový uzel a hranu zanedbáme. V nově vytvořeném grafu již nebude žádná kružnice liché délky a tudíž graf je dvoubarevný. Definujme množinu $N_h = \{ i | v_i \text{ má barvu } h \}$, pro $h = 1, 2$. Vrcholy původního grafu, které byly spojeny v nový vrchol, budou patřit do množiny N_h , do které přísluší tento nový vrchol. Je jasné, že množiny N_1 a N_2 splňují požadavky (1) a (2) věty.

K důkazu v opačném směru (v důkazu postačitelnosti) předpokládejme, že platí (1) a (2) a B je čtvercová podmatice matice A. Matice B tudíž také splňuje požadavky (1) a (2). Je-li B řádu 1, pak $\det(B) = 0$ nebo ± 1 . Tvrzení věty dokážeme indukcí podle řádu p podmatice B. Předpokládejme, že $\det(B_{p-1}) = 0$ nebo ± 1 pro všechny podmatice B_{p-1} řádu (p-1) a nechť B_p je libovolná podmatice řádu p matice A. Mohou nastat tři případy:

(i) všechny sloupce podmatice B_p mají právě dva nenulové prvky a tudíž pro všechna j platí (jak plyne z podmínek (1) a (2)):

$$\sum_{i \in N_1} b_{ij} = \sum_{i \in N_2} b_{ij}$$

a tudíž řádky podmatice B_p jsou lineárně závislé a $\det(B_p) = 0$,

(ii) existuje nulový sloupec podmatice B_p a tudíž $\det(B_p) = 0$,

(iii) existuje sloupec např. j-tý ve kterém je právě jeden prvek nenulový, např. b_{sj} , pak ale

$$\det(B_p) = (-1)^{s+j} b_{sj} \det(B_{p-1})$$

a tvrzení $(\det(B_p) = 0 \text{ nebo } \pm 1)$ platí podle indukčního předpokladu. Tím je důkaz věty dokončen.

Bez důkazu uveďme ještě následující 3 tvrzení.

Věta 4.3.2. Nechť A je matice s prvky $a_{ij} \in \{0, 1, -1\}$, pak A je totálně unimodulární matice, platí-li zároveň:

- (1) $a_{ij} = a_{kj} \neq 0 \Rightarrow \underline{a}_i > \underline{a}_k \text{ nebo } \underline{a}_k > \underline{a}_i$;
- (2) $a_{ij} = -a_{kj} \neq 0 \Rightarrow \underline{a}_i > -\underline{a}_k \text{ nebo } \underline{a}_k > -\underline{a}_i$.

(Uspořádání $>$ řádků matice A definujeme takto:

$$\underline{a}_i > \underline{a}_k \text{ jestliže pro všechna } j \text{ platí } a_{kj} \neq 0 \Rightarrow a_{ij} = a_{kj}.$$

Věta 4.3.3. Nechť matice A, B mají stejný počet sloupců a prvky 0 nebo 1. Jestliže obě matice splňují podmínku (1) věty 4.3.2, pak bloková matice

$$C = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \text{ je totálně unimodulární.}$$

Věta 4.3.4. Nechť $A = [A_1, A_2]$ je bloková totálně unimodulární matice, pak bloková matice

$$Q = \begin{bmatrix} A_1, A_2 \\ +I, 0 \end{bmatrix}$$

je také totálně unimodulární.

Tím jsme ukončili stručný přehled některých postačujících podmínek při jejichž splnění je matice A totálně unimodulární. Nyní již můžeme dokázat tvrzení, jehož závažnost se projeví v dalším textu.

Věta 4.3.5. Incidenční matice M typu n/m grafu \vec{G} je totálně unimodulární.

Důkaz. Matice M splňuje evidentně požadavky věty 4.3.1, položíme-li $N_1 = \{1, 2, \dots, n\}$ a $N_2 = \emptyset$.

Incidenční matice M je pochopitelně závislá na pořadí, v jakém jsme očíslovali uzly i hrany grafu. Změna očíslování uzlů však způsobí pouze permutaci řádků matice M , zatímco změna očíslování hran způsobuje pouze permutaci sloupců matice M , takže je možné formulovat následující tvrzení.

Věta 4.3.6. Dva grafy \vec{G}_1, \vec{G}_2 o stejném počtu n uzlů a m hran s incidenčními maticemi M_1, M_2 jsou izomorfní, právě když existují permutační matice P (řádu n) a Q (řádu m) tak, že platí:

$$M_1 = P M_2 Q .$$

Na základě nutné a postačující podmínky uvedené ve větě je možné rozhodnout početně (a to je důležité) o izomorfismu dvou grafů. Uvážíme-li však, že všech permutačních matic řádu k je $k!$, vidíme, že k rozhodnutí o izomorfismu dvou grafů o n uzlech a m hranách můžeme vyzkoušet až $m! n!$ možností součinů typu $P M_2 Q$. To je prakticky evidentně neúnosné.

Je zřejmé, že všechny charakteristiky incidenční matice M , které zůstávají zachovány násobením permutačními maticemi P a Q , popisují svým způsobem i nějakou vlastnost příslušného grafu nezávislou na očíslování uzlů a hran. Takové charakteristiky pak přísluší celé třídě izomorfních grafů. Jednou z takových charakteristik je hodnota matice M , která pak je hodnotou grafu \vec{G} .

Věta 4.3.7. Je-li M incidenční matice grafu \vec{G} o n uzlech, pak pro její hodnotu platí:

$$\text{hod}(M) \leq n - 1.$$

Důkaz. Podle definice incidenční matice M je součet všech jejích řádků roven nulovému řádku a tedy jsou její řádky lineárně závislé.

Věta 4.3.8. Libovolný řádek incidenční matice M grafu \vec{G} lze psát ve tvaru

$$\underline{m}_k = - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n \underline{m}_j .$$

Důkaz plyne z evidentního tvrzení $\sum_{j=1}^n \underline{m}_j = 0$.

Věta 4.3.9. Množina r řádků incidenční matice M typu n/m je lineárně závislá právě když v ní existuje s řádků ($1 \leq s \leq r$) takových, že jejich součet je nulový.

Důkaz. Protože postačitelnost vyplývá z věty 4.3.8, omezíme se na důkaz nutnosti uvedené podmínky. Nechť pro součet uvažovaných r řádků-označme je $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_r$ - platí:

$$\sum_{j=1}^r \underline{a}_j = \underline{z} ,$$

kde \underline{z} je řádek, který má p prvků nenulových ($\neq 1$) a $m - p$ prvků nulových. Podle předpokladu lineární závislosti řádků $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \dots, \underline{a}_r$ je $p < r$. Vypustíme-li všechny ty řádky, které působí v řádku \underline{z} vznik nenulového prvku, má zbývajících $r - p$ řádků nulový součet. Stačí položit $s = r - p$ a důkaz je ukončen.

Věta 4.3.10. Je-li \vec{G} souvislý graf o n uzlech a $0 < r \leq n - 1$, pak libovolných r řádků incidenční matice M grafu \vec{G} je lineárně nezávislých.

Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme, že nějaké řádky v počtu r jsou lineárně závislé, tj. podle věty 4.3.9 existuje mezi nimi s ($1 \leq s \leq r$) řádků, jejichž součet je nulový. Pak ale existují permutační matice P (řádu n), Q (řádu m) takové, že

$$PM = \begin{bmatrix} S \\ \vdots \\ Z \end{bmatrix} \quad \text{a} \quad PMQ = \begin{bmatrix} \tilde{S} & 0 \\ \vdots & \tilde{Z} \\ 0 & \vdots \end{bmatrix},$$

kde matice S odpovídá s řádkům s nulovým součtem;

matice Z odpovídá zbývajícím $n - s$ řádkům a má nutně také nulový součet;

matice $[\tilde{S} \mid 0] = SQ$ vznikla permutací sloupců matice S tak, aby sloupce \tilde{S} byly nenulové; pak zřejmě $ZQ = [0 \mid \tilde{Z}]$.

Mohou nastat pouze dva případy ($s < n$):

a) Matice \tilde{Z} je nulová, pak ale v grafu \vec{G} existují izolované uzly, což je spor se souvislostí grafu.

b) Matice \tilde{Z} je nenulová, pak ale neexistuje žádná hrana mezi uzly, které odpovídají řádkům matice S a uzly určenými maticí Z , tj. v grafu existují alespoň dvě komponenty. To je opět spor s předpokladem souvislosti grafu. Tvrzení věty tudíž platí.

Důsledek 1 (věty 4.3.10). Je-li \vec{G} souvislý graf o n uzlech a M jeho incidenční matice, pak platí:

$$\text{hod}(M) = n - 1.$$

Důsledek 2 (věty 4.3.10). Je-li G graf o n uzlech a M jeho incidenční matice, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

1. $\text{hod}(M) = n - k$,
2. graf \vec{G} má k komponent.

Důkaz. Nechť má graf \vec{G} k komponent. Při vhodném očíslování uzlů a hran grafu lze zřejmě incidenční matici M grafu G psát ve tvaru

$$M = \begin{bmatrix} M_1, & 0, & \dots & 0 \\ 0, & M_2, & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots & M_k \end{bmatrix},$$

kde M_j je incidenční matice j -té komponenty (jako samostatného grafu) o n_j uzlech. Zřejmě je $\sum_{j=1}^k n_j = n$, $\text{hod}(M_j) = n_j - 1$ (komponenta je souvislý graf) a $\text{hod}(M) = \sum_{j=1}^k \text{hod}(M_j) = \sum_{j=1}^k (n_j - 1) = n - k$.

Až dosud jsme se zabývali hodnotami celé incidenční matice M (typu n/m) grafu \vec{G} . Nyní se zaměříme na grafovou interpretaci hodnoty její podmatice, která odpovídá faktorů \vec{P} grafu \vec{G} . Omezíme se na rozbor situace v krajních případech, kdy:

- (i) $|H(\vec{P})| = m - 1$, tj. případ kdy faktor \vec{P} vznikl z grafu \vec{G} vypuštěním jediné hrany;
- (ii) $|H(\vec{P})| = n - 1$, tj. případ kdy faktor \vec{P} má o jednu hranu méně než uzlů, takže může být stromem.

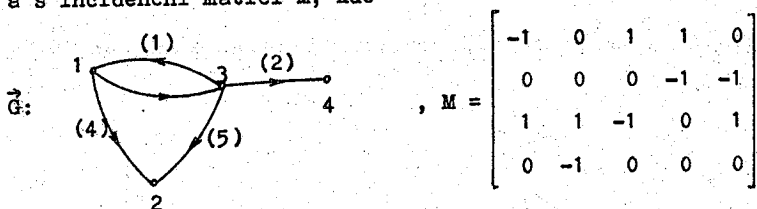
Věta 4.3.11. Je-li M_s matice typu $n/m-1$, která vznikla vypuštěním s -tého sloupce incidenční matice M grafu \vec{G} s daným očíslováním uzlů a hran a $\text{hod}(M_s) = \text{hod}(M) - 1$, pak hrana h_s je volná hrana grafu \vec{G} .

Důkaz. Matice M_s je incidenční matice faktorů \vec{P} grafu, který vznikl z grafu \vec{G} vypuštěním hrany h_s . Nechť $\text{hod}(M) = n - k$. Podle předpokladu je $\text{hod}(M_s) = \text{hod}(M) - 1 = n - k - 1 =$

$= n - (k + 1)$. To však podle věty 4.3.10 znamená, že graf \vec{G} má k komponent, zatímco faktor \vec{P} jich má $k + 1$. Odtud plyne, že hrana h_s je volná hrana grafu \vec{G} .

Uvedená věta je formulována jako implikace a nedá se obrátit jak ukazuje následující příklad.

Příklad. Uvažujme graf \vec{G} s daným očíslováním uzlů a hran a s incidenční maticí M , kde



V daném příkladě je:

$\text{hod}(M) = 3$, což odpovídá skutečnosti, že \vec{G} je souvislý;

$\text{hod}(M_2) = 2$ a rozdíl $\text{hod}(M) - \text{hod}(M_2) = 1$ signalizuje, že h_2 je volná hrana;

h_4 je také volná hrana, neboť nepřísluší žádnému cyklu grafu \vec{G} , ale rozdíl $\text{hod}(M) - \text{hod}(M_4)$ žádnou volnou hranu nesignalizuje, neboť je nulový. Je to dáno tím, že po odstranění této volné hrany h_4 zůstal faktor \vec{P} souvislý.

Věta 4.3.12. Nechť \vec{G} je obyčejný orientovaný graf a R matice tvořená libovolnými $n - 1$ sloupci incidenční matice M typu n/m grafu \vec{G} . Pak platí:

- (1) $\text{hod}(R) = n - 1$, právě když faktor \vec{R} (grafu \vec{G}) určený incidenční maticí R je strom a tudíž kostra grafu \vec{G} ;
- (2) $\text{hod}(R) < n - 1$, právě když faktor \vec{R} (grafu \vec{G}) není souvislý;
- (3) je-li R_s podmatice, která vznikla z matice R vyškrtnutím

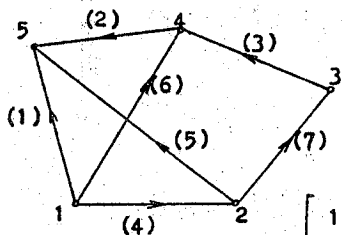
s-tého řádku, pak

(i) $\det(R_g) = 0$, právě když ve faktoru \vec{R} je alespoň jedna kružnice;

(ii) $\det(R_g) = \pm 1$, právě když faktor \vec{R} je kostra grafu \vec{G} .

Důkaz tvrzení uvedených ad(1) a (2) vyplývá z důsledku 2. aplikovaného na faktor \vec{R} . Myšlenku důkazu tvrzení ad (3) ilustrujeme následujícím příkladem.

Příklad. Uvažujme obyčejný souvislý orientovaný graf \vec{G} :

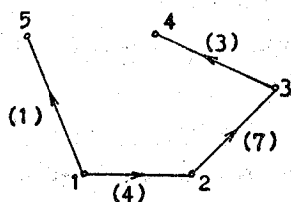


s incidenční maticí $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Nechť R je matice tvořená 1., 3., 4. a 7. sloupcem matice M , tj.

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

. Matice R odpovídá faktoru \vec{R} :



Hodnost matice R je rovna 4, což algebraicky vyjadřuje podle důsledku 2., že faktor \vec{R} je souvislý. Protože součet všech řádků matice R je roven nulovému řádku, je libovolný s -tý řádek kombinací ostatních řádků. Tudíž je $\text{hod}(R) = \text{hod}(R_g)$, kde matice R_g vznikla z matice R vynecháním s -tého řádku. V našem případě

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a dále je}$$

$$\det(R_1) = -1, \quad \det(R_2) = 1, \quad \det(R_3) = -1.$$

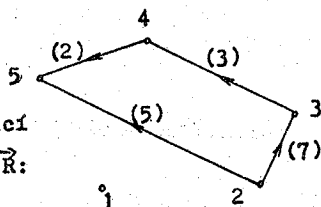
V obecném případě je zde $\text{hod}(R_g) = 4$, tudíž je to regulární matice. Protože však R_g je podmatice totálně unimodulární matice M je $\det(R_g) = \pm 1$.

Uvažujme dále jinou matici R tvořenou 2., 3., 5. a 7. sloupcem incidenční matice M .

Pak je

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

incidenční matice
faktoru \vec{R} :



Hodnost matice R je rovna 3, což podle důsledku 2. je algebraickým vyjádřením skutečnosti, že faktor \vec{R} má dvě komponenty. Protože součet všech řádků matice R je nulový řádek, je libovolný s -tý řádek matice R lineární kombinací ostatních řádků. Matice R_g , která vznikla z matice R vynecháním s -tého řádku, má tudíž stejnou hodnost jako matice R . Je tedy $\text{hod}(R) = \text{hod}(R_g) = 3$ a všechny matice R_g jsou singulární ($\det(R_g) = 0$). V našem případě je např.

$$R_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$R_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{a } \det(R_1) = \det(R_4) = \det(R_5) = 0.$$

Poznámka. Chceme-li využít výsledků tohoto odstavce při vyšetřování neorientovaných grafů bez smyček, pak máme dvě možnosti:

- a) grafu G přiřadíme libovolnou orientací hran graf \vec{G} a za incidenční matici grafu G prohlásíme incidenční matici grafu \vec{G} .
- b) grafu G přiřadíme matici $M = [m_{ij}]$ typu m/n , kde $m = |U(G)|$, $n = |H(G)|$ a $m_{ij} = 1$, je-li $\{u_i, u_j\} \in H(G)$ a $m_{ij} = 0$ všude jinde. V tomto případě však musíme uvažovat matici M nad tělesem zbytkových tříd mod 2, (uvažte, že $1 + 1 = 0 \Rightarrow 1 = -1$).

4.4. Matice sousednosti

V tomto odstavci se zabýváme maticemi sousednosti orientovaných i neorientovaných grafů. Společným znakem matic sousednosti je, že u nich - na rozdíl od incidenční matice - sloupce i řádky matice odpovídají uzlům grafu; hodnota prvku na místě (i, j) v matici pak vyjadřuje skutečnost, zda jsou i -tý a j -tý uzel spojeny hranou (tj. jsou sousední). V literatuře se též můžeme setkat s termínem uzlo-uzlová matice. Budeme se zabývat následujícími speciálními případy matic sousednosti:

- A) Maticí sousednosti neorientovaného grafu,
- B) Maticí sousednosti orientovaného grafu,
- C) Laplaceovou maticí sousednosti,
- D) Znaménkovou maticí.

A) Maticc sousednosti neorientovaného grafu

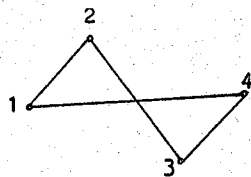
Definice. Maticí sousednosti obyčejného neorientovaného grafu G o n uzlech s daným očíslováním rozumíme matici $S = [s_{ik}]$ řádu n takovou, že:

$$s_{ik} = 1, \text{ je-li } \{u_i, u_k\} \in H(G) \text{ a}$$
$$s_{ik} = 0 \text{ v opačném případě.}$$

Tak například matice

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

je maticí sousednosti grafu G :



Podle definice je matice S symetrická ($S = S^T$) a zřejmě platí:

Věta 4.4.1. Nechť G_1, G_2 jsou dva obyčejné neorientované grafy se stejným počtem n uzlů a S_1, S_2 jejich matice sousednosti. Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

- (i) Grafy G_1, G_2 jsou izomorfní.
- (ii) Existuje permutační matice P řádu n tak, že $S_1 = P S_2 P^T$.

Význam uvedené věty spočívá v tom, že umožňuje algebraicky rozhodnout otázku izomorfismu grafů. Skutečnost, že všech různých permutačních matic řádu n je $n!$, však značně oslabuje praktickou možnost využití uvedené nutné a postačující podmínky izomorfismu grafů pro větší n .

Poznámka. Při počítání s maticí sousednosti je nutné uvážit, v jakém smyslu budeme chápat sčítání a násobení na množině $\{0,1\}$. Uvedené operace je totiž možné chápat 3 způsoby:

- a) jako běžné sčítání a násobení na množině celých čísel;
- b) jako operace na tělese zbytkových tříd mod (2);
- c) jako booleovské spojení a průsek, tj. jako logický součet a součin.

Každý uvedený případ má i své praktické oprávnění, jak dále ukážeme.

Věta 4.4.2. Nechť S je matice sousednosti obyčejného neorientovaného grafu G s n uzly; sčítání a násobení na množině $\{0,1\}$ chápejme jako běžné operace na množině celých čísel. Potom prvek $s_{ik}^{(v)}$ matice S^v udává počet sledů délky v mezi uzly u_i a u_k grafu G .

Důkaz provedeme indukcí podle v .

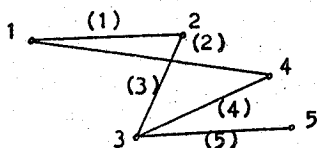
Pro $v = 1$ tvrzení platí, neboť $s_{ik}^{(1)} = s_{ik} = 1$ právě když $\{u_i, u_k\}$ je hrana a to je sled délky 1 a graf G je prostý.

Nechť tvrzení platí pro $v \geq 1$, pak je

$$S^{v+1} = S^v S \text{ a tedy } s_{ik}^{(v+1)} = \sum_{j=1}^n s_{ij}^{(v)} s_{jk}.$$

Podle indukčního předpokladu je $s_{ij}^{(v)}$ počet sledů z uzlu u_i do uzlu u_j délky v . Existuje-li hrana $\{u_j, u_k\}$ v grafu G , pak $s_{ij}^{(v)}$ udává počet sledů z uzlu u_i do uzlu u_k délky $v + 1$ specifikovaných vlastností, že poslední ve sledu je hrana $\{u_j, u_k\}$. Evidentně součtem přes všechny možné poslední hrany dostaneme celkový počet sledů délky $v + 1$.

Příklad. Pro graf G



je

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$S^3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 5 & 3 \\ 4 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a protože $s_{35} = 3$, existují tři různé sledy z uzlu u_3 do uzlu u_5 , a to:

$$u_3 u_2 u_3 u_5,$$

$$u_3 u_5 u_3 u_5,$$

$$u_3 u_4 u_3 u_5.$$

Věta 4.4.3. Nechť G je obyčejný neorientovaný graf s daným očíslováním uzlů a hran, M jeho incidenční matice typu n/m a S jeho matice sousednosti řádu n . Pak, počítáme-li v tělese zbytkových tříd mod 2, platí:

$$S = D + M M^T,$$

kde $D = [d_{ij}]$ je diagonální matice řádu n a $d_{jj} = \delta_j$; δ_j značí stupeň uzlu u_j pro $j = 1, 2, \dots, n$.

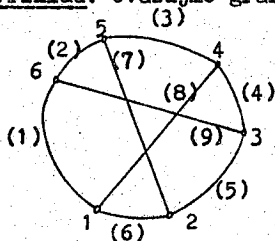
Důkaz. Nechť $B = [b_{ij}]$ a $B = D + M M^T$; zřejmě je $b_{jj} = 2 \delta_j$ a tedy při počítání mod 2 je $b_{jj} = 0$ pro $j = 1, 2, \dots, m$. Dále pro $i \neq j$ je $b_{ij} = \sum_{k=1}^m m_{ik} m_{kj} = \sum_{k=1}^m m_{ik} m_{jk}$. Avšak $m_{ik} m_{jk} = 1$, právě když hrana h_k inciduje jak s uzlem u_i , tak s uzlem u_j , tj. $\{u_i, u_j\} = h_k$. Graf G je však podle předpokladu obyčejný a tudíž v uvažovaném součtu, který vytváří prvek b_{ij} je nutně nanejvýš jeden součin nenulový. Je tedy

$b_{ij} = 1$, právě když $\{u_i, u_j\} \in H(G)$,

$b_{ij} = 0$ všude jinde.

Tvrzení věty tudíž platí, neboť skutečně $B = S$.

Příklad. Uvažujme graf G :



s incidenční maticí

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zřejmě je při počítání mod 2

$$MM^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, D = I, \text{ neboť všechny uzly jsou}$$

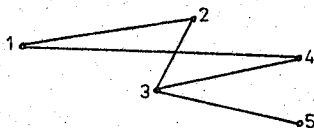
stupně 3. Jak se lehce přesvědčíme, je $D + MM^T$ skutečně maticí sousednosti S grafu G . Matice S vznikne z matice MM^T vynulováním diagonálních prvků ($1 + 1 = 0$).

Věta 4.4.4. Nechť S je matice sousednosti obyčejného neorientovaného grafu G s n uzly. Chápeme-li sčítání a násobení jako logické operace, je-li $V^k = (I + S)^k = [v_{ij}^{(k)}]$ a značí-li $d(u_i, u_j)$ vzdálenost uzlů u_i, u_j v grafu G , pak platí:

- (1) $d(u_i, u_j) \leq k$, právě když $v_{ij}^{(k)} = 1$;
 (2) $d(u_i, u_j) = \min \{ k \mid v_{ij}^{(k)} = 1 \}$;
 (3) graf G je souvislý, právě když $V^{n-1} = \mathbb{E}$, tj. $n - 1$ mocnina matice V má všechny prvky rovny jedné.

Důkaz. Při logickém sčítání (spojení) je $1 + 0 = 0 + 1 = 1$, $1 + 1 = 0$, $0 + 0 = 0$, při logickém násobení (průseku) je: $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$, $1 \cdot 1 = 1$. Zřejmě je $v_{ij}^{(2)} = \sum_{r=1}^n v_{ir}^{(1)} v_{rj}^{(1)} = 1$ právě když existuje index r tak, že $v_{ir}^{(1)} = 1$ a zároveň $v_{rj}^{(1)} = 1$, tj. $\{u_i, u_r\} \in H(G)$ a zároveň $\{u_r, u_j\} \in H(G)$. To však znamená, že $d(u_i, u_j) \leq 2$. Důkaz ad (1) lze dokončit stejnou úvahou indukcí podle k . Tvzení uvedená ad (2) a (3) jsou pak důsledkem tvrzení ad (1).

Příklad. Pro graf G :



je

$$V = I + S = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad V^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$V^3 = E = V^4 = \dots,$$

a protože $v_{15}^{(2)} = 0$, ale $v_{15}^{(3)} = 1$, je $d(u_1, u_5) = 3$.

Protože posloupnost matic V, V^2, \dots, V^{n-1} plně popisuje metriku grafu, je možné z uvedené posloupnosti zjistit i ostatní metrické vlastnosti grafu G , jako je excentricita uzlů, průměr grafu, poloměr grafu i střed grafu.

B) Matice sousednosti orientovaného grafu

Definice. Mechť \vec{G} je obyčejný orientovaný graf s daným očíslováním uzlů a $U(\vec{G}) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$. Maticí sousednosti grafu \vec{G} nazýváme čtvercovou matici $N = n_{ij}$ řádu n takovou, že

$$n_{ij} = 1, \text{ jestliže } (u_i, u_j) \in H(\vec{G}),$$

$$n_{ij} = 0 \text{ v každém jiném případě.}$$

Protože orientované grafy lišící se pouze očíslováním uzlů jsou izomorfní, platí evidentně následující tvrzení.

Věta 4.4.5. Jsou-li \vec{G}_1, \vec{G}_2 dva grafy a N_1, N_2 jejich matice sousednosti, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní.

(1) \vec{G}_1, \vec{G}_2 jsou izomorfní grafy.

(2) Existuje permutační matice P tak, že $P N_1 P^T = N_2$.

Věta dává principiální možnost rozhodnout algebraicky o izomorfismu orientovaných grafů a zároveň ukazuje, které charakteristiky matice sousednosti N mohou být charakteristikami grafů. Jsou to charakteristiky společné třídě matic $\{X \mid X = P N P^T, \text{ kde } P \text{ je libovolná permutační matice řádu } m\}$. Takovými charakteristikami jsou např. hod (N) , $\det(N)$, vlastní čísla matice N , atd. Vlastnosti grafu \vec{G} , které nezávisí na orientaci hran (např. souvislost, počet koster, počet komponent atd) lze zjistit zrušením orientace hran a vyšetřováním neorientovaného grafu G . Zřejmě matice sousednosti S grafu G je dána vztahem

$$S = N + N^T,$$

kde sčítání je chápáno booleovskly.

V dalším ukážeme, jak lze ze znalosti matice N různým chápáním sčítání a násobení na množině $\{0, 1\}$ a vhodnými postupy algebraicky charakterizovat některé vlastnosti grafu \vec{G} , závislé na orientaci.

Věta 4.4.6. Nechť \vec{G} je obyčejný orientovaný graf, $N = [n_{ij}]$ jeho matice sousednosti a sčítání i násobení na množině $\{0, 1\}$ uvažujeme jako běžné operace na množině celých čísel. Pak platí:

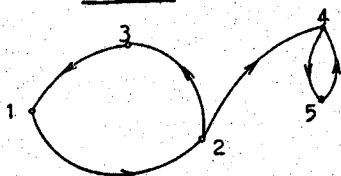
- (1) prvek $n_{ij}^{(k)}$ matice N^k udává počet orientovaných sledů délky k z uzlu u_i do uzlu u_j ;
- (2) položíme-li $d(u_i, u_j) = \min\{k | n_{ij}^{(k)} \neq 0\}$, je d nejmenší délka orientované cesty z uzlu u_i do uzlu u_j .

Důkaz lze provést obdobně jako u věty 4.4.4.

Věta 4.4.7. Nechť \vec{G} je obyčejný orientovaný graf, N jeho matice sousednosti a sčítání a násobení na množině $\{0, 1\}$ uvažujeme jako logické operace (booleovskly). Nechť dále $R = \sum_{k=0}^v N^k = [r_{ij}]$, kde $v = \min\{|H(\vec{G})|, |U(\vec{G})| - 1\}$ a $\tilde{R} = [\tilde{r}_{ij}]$ matice taková, že $\tilde{r}_{ij} = \min\{r_{ij}, r_{ji}\}$. Pak platí:

- (1) R je maticová reprezentace reflexivně tranzitivního uzávěru relace následnosti určené grafem \vec{G} ;
- (2) je-li $\tilde{r}_{ij} = 1$, pak uzly u_i, u_j patří do téže kvazikomponenty grafu \vec{G} ;
- (3) je-li $\tilde{R} = E$, tj. $\tilde{r}_{ij} = 1$ pro všechna i, j , je graf \vec{G} silně souvislý.

Příklad místo důkazu. Uvažujme orientovaný graf \vec{G} :



s maticí
sousednosti $N =$

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

V tomto případě je

$$N^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad N^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$N^4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \dots$$

$n_{25}^{(4)} = n_{23}^{(4)} = n_{24}^{(4)} = 1$, existuje tedy orientovaný sled z uzlu

u_2 do uzlů u_3, u_4, u_5 délky 4;

protože například $n_{15}^{(4)} = 0$, neexistuje orientovaný sled z u_1 do u_5 délky 4. Délka orientované cesty z u_1 do u_5 je rovna 3, neboť $\min \{k \mid n_{15}^{(k)} \neq 0\} = 3$. Dále je $v = 4$ a tudíž

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vidíme, že \vec{G} má dvě kvazikomponenty s množinami uzlů $\{u_1, u_2, u_3\}$ a $\{u_4, u_5\}$.

Věta 4.4.8. Nechť \vec{G} je obyčejný orientovaný graf s maticí sousednosti N řádu n . Pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (1) \vec{G} je acyklický.
- (2) N je nilpotentní matice.
- (3) Všechna vlastní čísla matice N jsou nulová.
- (4) $\det(xI - N) = x^n$.
- (5) Existuje $k < n$ tak, že je $(I - N)^{-1} = I + N + N^2 + \dots + N^k$.

Důkaz. (1) \Rightarrow (2): Je-li \vec{G} acyklický, je každý or. sled or. cestou, takže podle věty 4.4.6 nutně existuje $k < n$ tak, že $N^k = 0$, tj. N je nilpotentní matice.

(2) \Rightarrow (1): Je-li N nilpotentní, pak pro nějaké k je $N^k = 0$. To však podle věty 4.4.6 značí, že neexistuje mezi žádnou dvojicí uzlů or.sled délky k a delší. To však znamená, že v grafu G nemůže existovat žádný cyklus.

Ekvivalenci vlastností (2), (3), (4), (5) ponecháváme čtenáři jako cvičení.

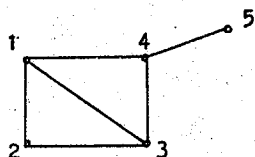
c) Laplaceova matice sousednosti

Definice. Pro daný obyčejný neorientovaný graf G s očíslovanými uzly u_1, u_2, \dots, u_n definujeme Laplaceovu matici

$L = [l_{ik}]$ řádu n vztahy:

- $l_{ik} = -1$ pro $\{u_i, u_k\} \in H(G)$,
- $l_{ik} = 0$ pro $i \neq k$ a zároveň $\{u_i, u_k\} \notin H(G)$,
- $l_{ii} = d(u_i)$ (= stupeň uzlu u_i).

Definici ilustrujeme maticí L , která přísluší grafu G na obrázku.



$$L = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Podle definice má matice L tyto základní vlastnosti:

- $L = L^T$, tj. je symetrická;
- $\sum_{k=1}^n l_{ik} = 0$ pro každé $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, tj. součet prvků v každém řádku (i sloupci, neboť je $L = L^T$) je roven nule;

- (3) $\det(L) = 0$;
- (4) $0 \in \mathcal{P}(L)$, tj. 0 je vlastním číslem matice L ;
- (5) Vlastnímu číslu 0 odpovídá vlastní vektor $e = [1, 1, \dots, 1]^T$.

Následující tvrzení je přímou analogií vět 4.4.1 a 4.4.5.

Věta 4.4.9. Jsou-li G_1, G_2 dva obyčejné neorientované grafy o stejném počtu m uzlů a L_1, L_2 příslušné matice sousednosti, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) G_1, G_2 jsou izomorfní grafy.
- (ii) Existuje permutační matice P řádu n taková, že

$$L_1 = P L_2 P^T.$$

Následující věta ukazuje souvislost Laplaceovy matice s incidenční maticí.

Věta 4.4.10. Je-li M incidenční matice grafu \vec{G} s n uzly, který vznikl z obyčejného neorientovaného grafu G libovolnou orientací hran, pak matice $L = [l_{ik}] = M M^T$ je Laplaceova matice sousednosti grafu G .

Důkaz. Podle definice součinu matic je $l_{ik} = \sum_{j=1}^m m_{ij} m_{jk}^{(T)} = \sum_{j=1}^m m_{ij} m_{kj}$. Odtud pro $i = k$ snadno plyne (uvážíme-li, že $m_{ij}^2 = 1$, když uzel u_i inciduje s hranou h_j v grafu G a $m_{ij}^2 = 0$, když u_i neinciduje s h_j) vztah c) z definice matice L , neboť $l_{ii} = \sum_{j=1}^m m_{ij}^2$. Je-li $i \neq k$, pak $m_{ij} m_{kj}$ je nenulové právě když hrana h_j inciduje jak s uzlem u_i tak i s uzlem u_k . V tomto případě podle předpokladu věty je jedno z čísel m_{ij}, m_{kj} rovno 1 a druhé -1. Sčítáme-li součiny $m_{ij} m_{kj}$ podle j dostaneme zřejmě vztahy a) a b), z definice matice L .

Poznámka. Matice $L = M M^T$ je nezávislá na očíslování hran v grafu G . Jsou-li totiž M a \tilde{M} dvě incidenční matice téhož grafu \vec{G} při stejném očíslování uzlů a různém očíslování hran, pak existuje permutační matice Q (její řád je roven počtu sloupců matice M a tedy i \tilde{M}) tak, že $M = \tilde{M} Q$. Dále zřejmž:

$$M M^T = (\tilde{M}Q)(\tilde{M}Q)^T = (\tilde{M}Q)(Q^T \tilde{M}^T) = \tilde{M}(QQ^T)\tilde{M}^T = \tilde{M} \tilde{M}^T,$$

neboť $Q Q^T = I$.

Věta 4.4.11. Je-li L Laplaceova matice sousednosti obyčejného neorientovaného grafu G s n uzly, pak následující tvrzení jsou ekvivalentní:

- (i) graf G má k komponent;
- (ii) $\text{hod}(L) = n - k$.

Důkaz. Podle věty 4.4.10 je $L = M M^T$, takže L je Gramova matice řádků matice M ($l_{ij} = m_i \cdot m_j^T$) a tudíž $\text{hod}(L) = \text{hod}(M)$. Matice M je však incidenční matice grafu \vec{G} , který vznikl z grafu G libovolnou orientací hran, a tedy oba grafy mají stejný počet komponent; dokazované tvrzení vyplývá z věty 4.3.10 (důsledek 2).

Důsledek. Je-li L Laplaceova matice sousednosti řádu n , pak příslušný graf G je souvislý, právě když $\text{hod}(L) = n - 1$.

Stanovení počtu různých koster grafu G umožňuje následující věta. Ukazuje se opět, že Laplaceova matice sousednosti nejenom graf G určuje (až na izomorfismus), ale zároveň obsahuje početně zpracovatelné algebraické údaje, které lze grafově interpretovat.

Věta 4.4.12. Nechť L je Laplaceova matice sousednosti obyčejného neorientovaného grafu G s n uzly a m hranami. Pak všechny hlavní minory řádu $n - 1$ matice L si jsou rovny a libovolný z nich udává počet různých koster grafu G .

Důkaz. Nechť L_s značí matici, která vznikla z matice L vynecháním s -tého řádku a s -tého sloupce. Značí-li dále M_s matici, která vznikla vyškrtnutím s -tého řádku incidenční matice M grafu \vec{G} (vznikl z G libovolnou orientací hran), pak zřejmě podle věty 4.4.10 je

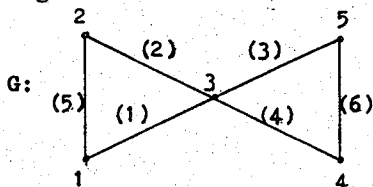
$$L_s = M_s M_s^T$$

Podle věty Binet-Cauchyovy však je

$$\det(L_s) = \sum_{(\kappa)} \det(M_s[\kappa]) \det(M_s[\kappa])^T = \sum_{(\kappa)} \det^2(M_s[\kappa]),$$

kde sčítáme přes všechny možné kombinace (κ) sloupců $(n-1)$. třídy z m sloupců matice M_s a kde $M_s[\kappa]$ značí podmatici tvořenou všemi řádky matice M_s a příslušnou kombinací (κ) sloupců matice M_s . Podle věty 4.3.12. je však $\det(M_s[\kappa]) = \pm 1$ právě když sloupce v kombinaci (κ) odpovídají hranám nějaké kostry. V ostatních případech je $\det(M_s[\kappa]) = 0$. Odtud plyne tvrzení dokazované věty.

Příklad. Uvažujme neorientovaný graf s daným očíslováním uzlů a hran. Pro graf



je při orientaci hran z uzlu s nižším indexem do uzlu s vyšším indexem matice

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

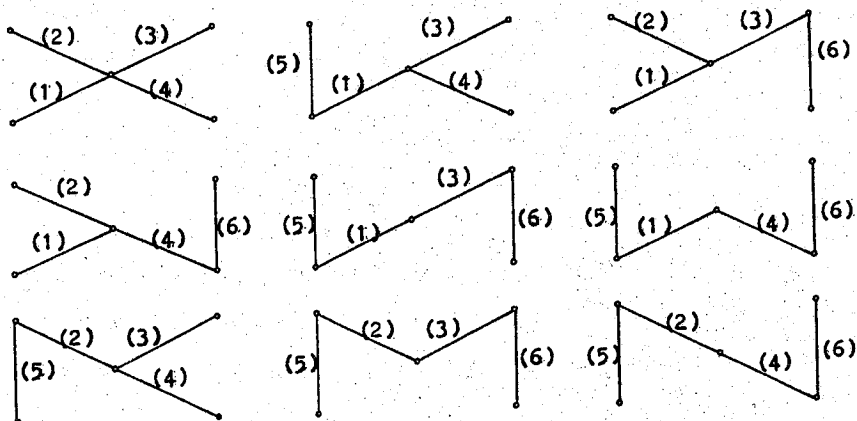
incidenční maticí. Snadno zjistíme, že platí

$$M M^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = L,$$

což je příslušná Laplaceova matice sousednosti. V našem případě například

$$\det(L_3) = \det \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = 9 = \det(L_1) = \det(L_2) = \det(L_4) = \det(L_5).$$

Graf G má tudíž (podle věty 4.4.12) 9 různých koster, a to :



Incidenční matice uvedených koster vzniknou vyškrtnutím 2 sloupců incidenční matice M, a to těch, které odpovídají vypuštěným

hranám grafu G. Zdůrazňujeme, že všechny incidenční matice koster v tomto příkladě mají hodnotu rovnou 4. Vyškrtnutím 2 sloupců v matici M vznikne dalších 6 podmatic. Jejich společná hodnota je však 3 a jim odpovídající faktory jsou nesouvislé. Ověřte si to!

Příklad. Určíme počet koster p úplného obyčejného grafu G o n uzlech. V tomto případě je Laplaceova matice sousednosti L řádu n a je

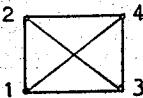
$$L = \begin{bmatrix} n-1, & -1, & -1, & \dots, & -1 \\ -1, & n-1, & -1, & \dots, & -1 \\ -1, & -1, & n-1, & \dots, & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1, & -1, & -1, & \dots, & n-1 \end{bmatrix}.$$

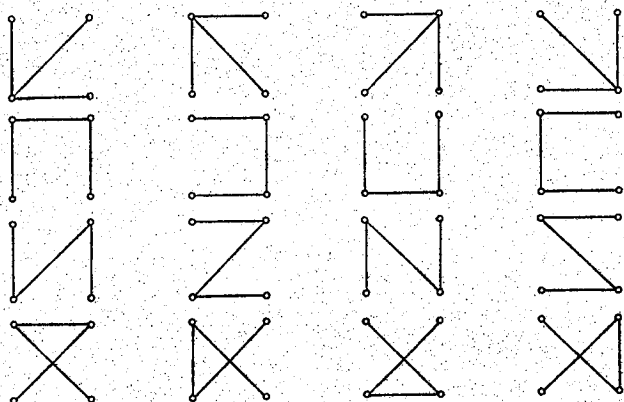
Samozeřejmě je $\det(L) = 0$. Počet p různých koster určuje hodnota libovolného hlavního subdeterminantu řádu $n-1$ matice L. V tomto případě jsou všechny hlavní podmatice řádu $n-1$ stejné a tedy $p = \det(nI_{n-1} - E_{n-1})$, kde I_{n-1} je jednotková matice řádu $n-1$ a E_{n-1} je matice samých jedniček téhož řádu. Z algebry víme, že pro matici A řádu r je:

a) $\det(A) = \prod_{i=1}^r \lambda_i$, kde λ_i jsou vlastní čísla matice A (opakují se s algebraickou násobností);

b) je-li $\lambda_i \in \mathcal{Y}(A)$ je $(\alpha \lambda_i + \beta) \in \mathcal{Y}(\alpha A + \beta I)$, tj. je-li λ_i vlastní číslo matice A násobnosti k, pak číslo $\alpha \lambda_i + \beta$ je vlastním číslem matice $\alpha A + \beta I$ stejné násobnosti k, a to pro libovolná čísla α, β .

V našem příkladě je $\mathcal{Y}(E_{n-1}) = \{n-1, 0\}$, kde 0 je $n-2$ násobná, podle b) je tedy $\mathcal{Y}(-E + nI) = \{1, n\}$ a podle a) je $p = \det(-E + nI) = n^{n-2}$.

Úplný graf $G =$  o čtyřech uzlech má následujících 16 různých koster, které přísluší do dvou izomorfních tříd:



D) Znaménková matice

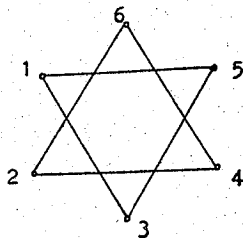
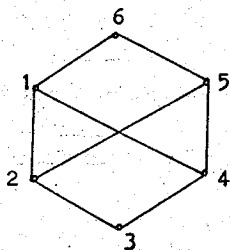
Definice. Pro obyčejný neorientovaný graf G , při daném očíslování uzlů ($U(G) = u_1, u_2, \dots, u_n$), zavádíme znaménkovou matici $Z = [z_{jk}]$ řádu n pro $j, k \in \{1, 2, \dots, n\}$ vztahy:

$$z_{jk} = +1, \text{ když } \{u_j, u_k\} \in H(G),$$

$$z_{jk} = -1, \text{ když } \{u_j, u_k\} \notin H(G),$$

$$z_{kk} = 0.$$

Znaménková matice Z je zřejmě symetrická ($Z = Z^T$). Bývá zvykem v matici Z uvádět pouze znaménka a nulové diagonální prvky. Tak například pro grafy G a \tilde{G} určené obrázkem



$$\text{je } Z = \begin{bmatrix} 0 & + & - & + & - & + \\ + & 0 & + & - & + & - \\ - & + & 0 & + & - & - \\ + & - & + & 0 & + & - \\ - & - & - & + & 0 & + \\ + & - & - & - & + & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{Z} = \begin{bmatrix} 0 & - & + & - & + & - \\ - & 0 & - & + & - & + \\ + & - & 0 & - & + & + \\ - & + & - & 0 & - & + \\ + & + & + & - & 0 & - \\ - & + & + & + & - & 0 \end{bmatrix}.$$

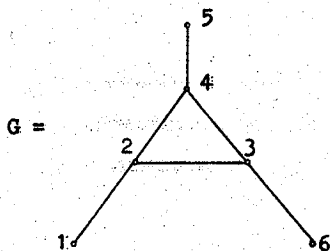
Graf \tilde{G} je zřejmě doplňkem (hranovým) grafu G , neboť $\{u_j, u_k\} \in \tilde{G}$, právě když $\{u_j, u_k\} \notin G$. Zároveň však je $\tilde{Z} = -Z$.

Zadání grafu znaménkovou maticí umožňuje popsat velmi jednoduchým způsobem i následující nepříliš přehlednou operaci s grafem G . V grafu G vybereme při daném očíslování uzel u_j a vytvoříme nový graf G_j tak, že platí:

1. $U(G_j) = U(G)$, tj. oba grafy mají stejné uzly.
2. Je-li $(s \neq j) \wedge (k \neq j)$, je $\{u_s, u_k\} \in H(G_j)$ právě když

$\{u_s, u_k\} \in H(G)$, tj. hrany, které neincidují v G s uzlem u_j , jsou beze změny i v G_j .

3. Pro $k \neq j$ je $\{u_j, u_k\} \in H(G_j)$ právě když je $\{u_j, u_k\} \notin H(G)$. Znaménkovou maticí Z_j grafu G_j dostaneme násobením j -tého řádku a zároveň j -tého sloupce matice Z grafu G číslem -1 , což ilustrujeme příkladem. Uvažujme graf



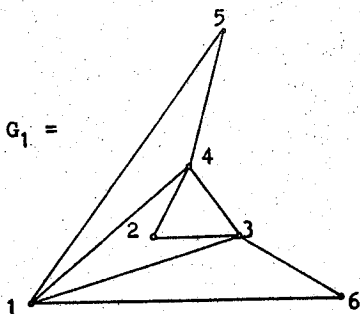
se znaménk.
maticí $Z =$

$$\begin{bmatrix} 0 & + & - & - & - & - \\ + & 0 & + & + & - & - \\ - & + & 0 & + & - & + \\ - & + & + & 0 & + & - \\ - & - & - & + & 0 & - \\ - & - & + & - & - & 0 \end{bmatrix}$$

Zřejmě pro $j = 1$

$$Z_1 = \begin{bmatrix} 0 & - & + & + & + & + \\ - & 0 & + & + & - & - \\ + & + & 0 & + & - & + \\ + & + & + & 0 & + & - \\ + & - & - & + & 0 & - \\ + & - & + & - & - & 0 \end{bmatrix}$$

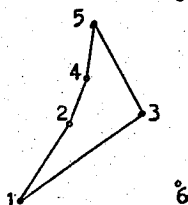
a tedy $G_1 =$



Obdobně pro $j = 3$ je zřejmě

$$Z_3 = \begin{bmatrix} 0 & + & + & - & - & - \\ + & 0 & - & + & - & - \\ + & - & 0 & - & + & - \\ - & + & - & 0 & + & - \\ - & - & + & + & 0 & - \\ - & - & - & - & - & 0 \end{bmatrix}$$

znaménkovou maticí
grafu $G_3 =$



Věta 4.4.13. Pro obyčejný graf s n uzly jsou následující tvrzení ekvivalentní:

- (1) G je pravidelný graf stupně k .
- (2) Existuje celé číslo r takové, že pro znaménkovou matici Z grafu G platí:

$$Z e = r e,$$

kde $e = [1, 1, \dots, 1]^T$ je n -rozměrný sloupec jedniček.

Navíc je $r = 2k - (n - 1)$.

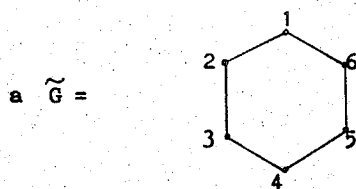
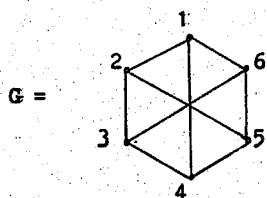
Důkaz. Nechť $Z = [z_{jk}]$ je znaménková matice řádu n popisující graf G . Označme $Ze = s = [s_1, s_2, \dots, s_n]^T$. Z významu součinnu matice Z a sloupce e plyne

$$s_j = \sum_{k=1}^n z_{jk} = (\text{stupeň uzlu } u_j) - (n - \text{stupeň uzlu } u_j) + 1.$$

Z předpokladu o pravidelnosti grafu a jeho stupni plyne že $s_j = 2k - (n - 1) = r$ pro všechna j a tedy $Ze = re$.

Naopak, je-li $Ze = re$, je graf G pravidelný se stupněm $k = \frac{1}{2}(r + n - 1)$.

Obsah uvedené věty ilustrujeme příklady. Nechť



jsou pravidelné grafy o stupních $k = 3$ a $k = 2$. Pro jejich znaménkové matice zřejmě je:

$$Z_e = \begin{bmatrix} 0 & + & - & + & - & + \\ + & 0 & + & - & + & - \\ - & + & 0 & + & - & + \\ + & - & + & 0 & + & - \\ - & + & - & + & 0 & + \\ + & - & + & - & + & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ tedy } r = 1$$

$$a \quad k = \frac{1}{2}(1 + 5) = 3;$$

$$Z_e = \begin{bmatrix} 0 & + & - & - & - & + \\ + & 0 & + & - & - & - \\ - & + & 0 & + & - & - \\ - & - & + & 0 & + & - \\ - & - & - & + & 0 & + \\ + & - & - & - & + & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ tedy } r = -1$$

$$a \quad k = \frac{1}{2}(-1 + 5) = 2.$$

Věta 4.4.14. Pro obyčejný graf G s n uzly jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(1) Existují reálná čísla s, t ($s > t$) taková, že je

$$(Z - sI)(Z - tI) = (n - 1 + st)E,$$

kde I je jednotková matice řádu n a E je matice řádu n , jejíž všechny prvky jsou rovny 1.

(2) Graf G není ani diskrétní ani úplný a velikost symetrické diference uzlových okolí (viz odst. 2.1) libovolných dvou uzlů x a y závisí pouze na tom, je-li $\{x, y\}$ hrana grafu nebo ne.

Navíc platí:

$$(i) \quad p(x, y) = - (s + 1)(t + 1),$$

$$(ii) \quad q(x, y) = - (s - 1)(t - 1),$$

kde p a q jsou příslušné mohutnosti symetrických diferencí okolí, tj.

$$p(x, y) = |U(x) \oplus U(y)| \quad \text{pro } \{x, y\} \in H(G),$$

$$q(x, y) = |U(x) \oplus U(y)| \quad \text{pro } \{x, y\} \notin H(G).$$

Důkaz. Pro příslušnou matici Z a libovolná reálná čísla s, t položíme:

$$(Z - sI)(Z - tI) = Z^2 - (s + t)Z + stI = P = [p_{ik}].$$

Podle definice součinu a součtu matic zřejmá je:

$$p_{ii} = \sum_{j=1}^n z_{ij} z_{ji} + st = n - 1 + st,$$

$$p_{ik} = \sum_{j=1}^n z_{ij} z_{jk} - (s + t)z_{ik} \quad \text{pro } i \neq k. \text{ Takže}$$

pro $\{u_i, u_k\} \in H(G)$ je $p_{ik} = n - 2 - p(u_i, u_k) - (s + t)$;

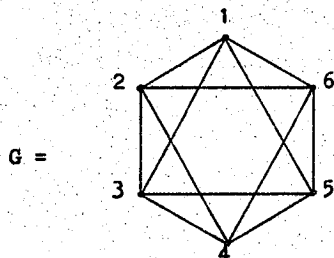
pro $\{u_i, u_k\} \notin H(G)$ je $p_{ik} = n - 2 - q(u_i, u_k) + s + t$.

Předpokládáme-li nyní, že velikost symetrické diference okolí libovolných dvou vrcholů x, y závisí pouze na tom, je-li $\{x, y\}$ hrana nebo ne a platí-li pro čísla s, t vztahy (i) a (ii), pak evidentně je

$$P = (n - 1 + st)E.$$

Naopak, je-li $P = (n - 1 + st)E$, musí platit nutně i vztahy (i), (ii) a také tvrzení věty ad 2.

Příklad. Uvažujme pravidelný graf G se znaménkovou maticí Z , kde



$$, Z = \begin{bmatrix} 0 & + & + & - & + & + \\ + & 0 & + & + & - & + \\ + & + & 0 & + & + & - \\ - & + & + & 0 & + & + \\ + & - & + & + & 0 & + \\ + & + & - & + & + & 0 \end{bmatrix}.$$

V našem případě je $p(x, y) = 4$ pro $\{x, y\} \in H(G)$ a dále je

$q(x, y) = 0$, je-li $\{x, y\} \in H(G)$. Tak například

$$p(1, 2) = |(\{2, 3, 5, 6\} \setminus \{1, 3, 4, 6\}) \cup (\{1, 3, 4, 6\} \setminus \{2, 3, 5, 6\})| = \\ = |\{2, 5\} \cup \{1, 4\}| = |\{1, 2, 4, 5\}|,$$

$$q(1, 4) = |(\{2, 3, 5, 6\} \setminus \{2, 3, 5, 6\}) \cup (\{2, 3, 5, 6\} \setminus \{2, 3, 5, 6\})| = \\ = |\emptyset| = 0.$$

Pro čísla s, t máme tedy podmínky:

$$4 = -(s + 1)(t + 1),$$

$$0 = -(s - 1)(t - 1), \text{ takže je } s = 1, t = -3.$$

Pro uvedené hodnoty čísel s a t skutečně platí

$$(Z - sI)(Z - tI) = Z^2 - (s + t)Z + stI = (n - 1 + st)E,$$

neboť je $Z^2 + 2Z - 3I =$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & -2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 2E.$$

4.5. Matice kružnic

V celém tomto odstavci termínem "graf" míníme obyčejný souvislý neorientovaný graf o n uzlech a m hranách. Je-li T kostra grafu G , pak symbolem $T + \{h\}$ označujeme faktor grafu G , který vznikl z T přidáním hrany h .

Věta 4.5.1. Nechť T je kostra grafu G a h libovolná tětiva¹⁾ grafu G vzhledem ke kostře T . Pak faktor $T + \{h\}$ obsahuje právě jednu kružnici.

Důkaz. Mezi krajními uzly u, v hrany h existuje v kostře T jediná cesta. Doplněním hrany h vznikne tedy jediná kružnice.

Definice. Nechť h_1, h_2, \dots, h_c je množina všech tětiv grafu G vzhledem ke kostře T , kde c je cykломatické číslo¹⁾ grafu G , nechť K_i je pro $i = 1, 2, \dots, c$ kružnice grafu $T + \{h_i\}$. Pak množinu kružnic K_1, K_2, \dots, K_c nazýváme fundamentální soustavou kružnic grafu G vzhledem ke kostře T .

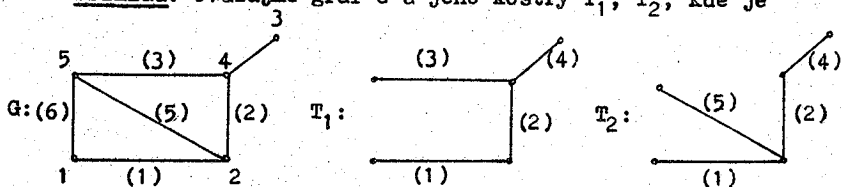
Různým kostrám grafu G o více než n hranách mohou samozřejmě odpovídat různé fundamentální soustavy, ale všechny fundamentální soustavy kružnic téhož grafu mají stejný počet prvků, a to c . Oprávněnost uvedené definice vyplývá z věty 4.5.1.

Definice. Nechť G je graf s hranami h_1, h_2, \dots, h_m a kružnicemi K_1, K_2, \dots, K_p . Úplnou maticí kružnic grafu G nazýváme maticí $K = k_{ij}$ typu p/m, jejíž prvky jsou dány vztahy:
 $k_{ij} = 1$, je-li $h_j \in H(K_i)$,
 $k_{ij} = 0$ v každém jiném případě, tj. $h_j \notin H(K_i)$.

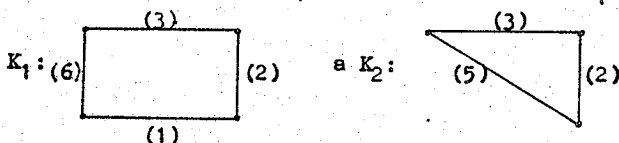
¹⁾ viz odst. 2.2.

Maticí K_F fundamentální soustavy kružnic F nazýváme pak podmaticí matice K , jejíž řádky odpovídají kružnicím ze soustavy F .

Příklad. Uvažujme graf G a jeho kostry T_1, T_2 , kde je



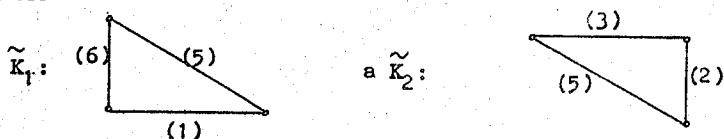
Fundamentální soustavu kružnic F_1 odpovídající kostře T_1 tvoří kružnice



takže matice K_{F_1} fundamentální soustavy kružnic F_1 je při daném očíslování hran a kružnic určena vztahem

$$K_{F_1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Fundamentální soustavu kružnic F_2 odpovídající kostře T_2 tvoří kružnice



takže v tomto případě je

$$K_{F_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Zřejmě K_1, K_2, K_3 ($K_3 = \tilde{K}_1$) jsou všechny kružnice grafu G a tudíž

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ je úplná matice kružnic grafu } G.$$

Pro motivaci dalšího postupu si všimneme, že v tomto případě je

$$a) MK^T = 0, \text{ kde } M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ je incidenční matice grafu } G$$

a kde počítáme mod 2;

$$b) \text{ hod}(K) = c = \text{hod}(F_1) \text{ a } c = n - \text{hod}(M) = 6 - 4 = 2;$$

c) 3. řádek matice K je součtem 1. a 2. řádku (mod 2).

Věta 4.5.2: Matice K_F libovolné fundamentální soustavy kružnic F obyčejného souvislého grafu o m uzlech a n hranách má plnou řádkovou hodnotu a platí:

(1) $\text{hod}(K_F) = c$, kde c je cyklotatické číslo grafu G ;

(2) Při vhodném očíslování kružnic a hran je $K_F = \begin{bmatrix} I_c & K_{12} \end{bmatrix}$, kde I_c je jednotková matice řádu c .

Důkaz. Hodnota matice K_F nezávisí evidentně ani na očíslování kružnic ve fundamentální soustavě ani na očíslování hran grafu G . Uvažujme tedy fundamentální soustavu kružnic $F = K_1, K_2, \dots, K_c$, odpovídající kostře T . Nechť dále h_1, h_2, \dots, h_c jsou všechny tětiny grafu G vzhledem ke kostře T a h_{c+1}, \dots, h_m zbývající hrany grafu, tedy větve grafu G vzhledem ke kostře T . Je-li očíslování kružnic provedeno tak, že K_i je pro $i = 1, 2, \dots, c$ jediná kružnice grafu $T + \{h_i\}$, pak podle definice matice fundamentální soustavy kružnic máme:

$K_F = \begin{bmatrix} I_c & K_{12} \end{bmatrix}$, kde I_c je jednotková matice řádu c a tudíž $\text{hod}(K_F) = c$ a zřejmě také platí (3).

Věta 4.5.3. Je-li G obyčejný, neorientovaný, souvislý graf s daným očíslováním uzlů u_1, u_2, \dots, u_n , hran h_1, h_2, \dots, h_m a kružnic K_1, K_2, \dots, K_p , M jeho incidenční matice, K úplná matice kružnic a c cyklotatické číslo, pak platí:

- (1) $MK^T = 0$, počítáme-li mod 2;
- (2) $\text{hod}(K) = c$;
- (3) $c \leq p \leq 2^c - 1$.

Důkaz. Položíme-li $R = MK^T = [r_{ij}]$, pak R je matice typu n/p a zřejmě podle definice součinu matic je

$$r_{ij} = \sum_{s=1}^n m_{is} k_{sj}^{(T)} = \sum_{s=1}^n m_{is} k_{js}.$$

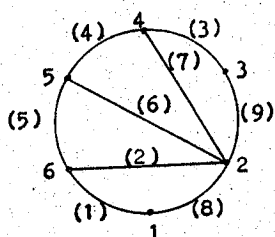
Součin $m_{is} k_{js}$ je však nenulový právě když hrana h_s inciduje s uzlem u_i a zároveň je-li $h_s \in H(K_j)$ - to však nastane buďto právě pro dvě hrany (pokud $u_i \in U(K_j)$), nebo pro žádnou hranu (je-li $u_i \notin U(K_j)$) a tedy, počítáme-li v aritmetice modulo 2, je vždy $r_{ij} = 0$.

Protože maximální počet lineárně nezávislých řešení soustavy $Mx = 0$ je roven defektu matice M , kde $\text{def}(M) = m - \text{hod}(M) = m - n + 1 = c$, máme pro hodnotu matice K^T (a tedy také K) horní odhad $\text{hod}(K) = \text{hod}(K^T) \leq c$. Podle věty 4.5.2 má však podmatice K_F matice K hodnotu c a tedy $c \leq \text{hod}(K)$, odkud dostáváme $\text{hod}(K) = c$.

Dolní odhad pro počet kružnic p je zřejmý. Řádky matice K jsou však kombinacemi (mod 2) c řádků matice K_F a tudíž

$$p \leq \binom{c}{1} + \binom{c}{2} + \dots + \binom{c}{c} = 2^c - 1.$$

Příklad. Uvažujme graf G s daným očíslováním uzlů a hran



s incidenční maticí $M =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Najdeme lineárně nezávislá řešení homogenní soustavy $Mx = 0$ běžnou eliminační metodou (ovšem počítat budeme mod 2). Poslední řádek matice M nebudeme uvažovat, neboť je součtem ostatních. Dále k čtvrtému řádku přičteme řádek třetí a k pátému nový čtvrtý. Tím dospějeme k matici:

$$\tilde{M} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zřejmě je $\text{hod}(M) = \text{hod}(\tilde{M}) = 5$ a tedy $c = 9 - 5 = 4$. Hrany h_1, h_2, h_3, h_4, h_5 jsou větvemi grafu a hrany h_6, h_7, h_8, h_9 jsou tětivami grafu vzhledem ke kostře T , určené podmaticí P prvních pěti sloupců matice M .

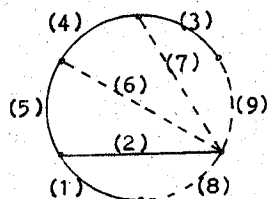
Protože existují 4 nezávislá řešení soustavy $Mx = 0$ a podmatice P má hodnotu 5, můžeme poslední čtyři neznámé volit. Volebné hodnoty podtrhujeme vlnovkou a ostatní neznámé spočítáme; tak dostaneme:

$$\begin{aligned} x_1 &= [0; 1, 0, 0, 1 \quad \underline{1, 0, 0, 0}]^T, \\ x_2 &= [0, 1, 0, 1, 1 \quad \underline{0, 1, 0, 0}]^T, \\ x_3 &= [1, 1, 0, 0, 0 \quad \underline{0, 0, 1, 0}]^T, \\ x_4 &= [0, 1, 1, 1, 1 \quad \underline{0, 0, 0, 1}]^T; \end{aligned}$$

matice $[x_1, x_2, x_3, x_4]$ je tudíž transponovanou maticí fundamentální soustavy kružnic K_1, K_2, K_3, K_4 , kde

$$\begin{aligned} \{h_2, h_5, h_6\} &= H(K_1), \\ \{h_2, h_4, h_5, h_7\} &= H(K_2), \\ \{h_1, h_2, h_8\} &= H(K_3), \\ \{h_2, h_3, h_4, h_5, h_9\} &= H(K_4). \end{aligned}$$

Všechny 4 uvedené kružnice odpovídají kostře grafu T ; na obrázku je kostra T silně vyznažena.



Libovolný řádek úplné matice kružnic dostaneme sečtením některých řádků matice K_F . Tak například řádek $[1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1, 1]$, který odpovídá kružnici určené hranami $h_1, h_8, h_9, h_3, h_4, h_5$, je roven součtu $x_3^T + x_4^T$. Avšak některé součty řádků matice K_F fundamentální soustavy kružnic neodpovídají žádnému řádku úplné matice kružnic; tak například $x_1^T + x_2^T + x_3^T = [1, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 1, 0]$, což není žádný řádek úplné matice kružnic, neboť hrany $h_1, h_2, h_4, h_6, h_7, h_8$ nepatří společně do žádné kružnice.

V příkladu byl naznačen možný algebraický postup stanovení matice K_F fundamentální soustavy rovnic, a to z incidenční matice grafu G (počítáním mod 2). Zároveň jsme ukázali, že horního odhadu pro počet kružnic p z věty 4. 5. 3 nemusí být vždy dosaženo. Obecně však nelze tento horní odhad zlepšit, jak vyplývá z 1. příkladu tohoto odstavce.

Poznámka. Naznačený postup, umožňující nalezení matice fundamentální soustavy kružnic z incidenční matice grafu G , vyplývá v obecném případě z věty 1.3.3 o izomorfismu grup $(2^H, \oplus)$ a $(\mathcal{M}, + \text{ mod } 2)$, dosadíme-li za H množinu všech hran grafu G . Dále je nutné provést následující úvahy:

1. Je-li \tilde{K}_i množina všech hran kružnice K_i , je $\tilde{K}_i \in 2^H$.
2. Je-li \hat{K} množina, jejíž prvky jsou:
 - a) množiny hran \tilde{K}_i všech kružnic grafu G ,
 - b) sjednocení disjunktních množin \tilde{K}_i ,
 - c) prázdná množina,
 pak $\hat{K} \in 2^H$.
3. Operace \oplus symetrické difference je uzavřená na množině \hat{K} a tedy (\hat{K}, \oplus) je podgrupa grupy $(2^H, \oplus)$.
4. Podgrupě (\hat{K}, \oplus) odpovídá izomorfní podgrupa $(\hat{\mathcal{M}}, + \text{ mod } 2)$, která je generována c řádky úplné matice kružnic takových, že součet libovolných z nich je nenulový řádek.
5. Existuje c nenulových řešení homogenní soustavy $Mx = 0$ (řešíme nad tělesem zbytkových tříd mod 2) takových, že součet libovolných z nich je nenulové řešení.
6. Různé součty řádků z $\hat{\mathcal{M}}$ odpovídají jednoznačně různým symetrickým diferencím na množině \hat{K} , která však není tvořena pouze jen množinami \tilde{K}_i .

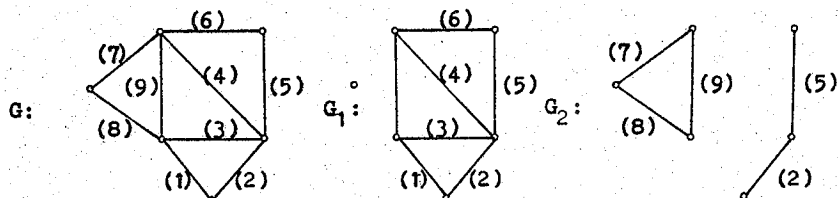
4.6. Matice hranových řezů

V tomto odstavci se budeme zabývat maticovým popisem hranových řezů obyčejného souvislého neorientovaného grafu G - - dále jen grafu G . Ukážeme, jaké výhody takový popis přináší. V páté kapitole pak uvidíme, jaký význam mají hranové řezy v aplikacích. Pro zjednodušení zápisů (je-li P faktor grafu G) označujeme symbolem $P \pm \{h_1, h_2, \dots, h_k\}$ faktor grafu G , který vznikne z grafu G odebráním (-) nebo přidáním (+) uvedené množiny hran grafu G .

Definice. Hranovým řezem grafu G rozumíme takovou minimální množinu R jeho hran, pro niž platí

$$\text{hod}(G - R) = \text{hod}(G) - 1.$$

Příklad. Uvažujme graf G určený obrázkem a zároveň faktory G_1, G_2 ,



kde $G_1 = G - \{h_7, h_8\}$, $G_2 = G - \{h_1, h_3, h_4, h_6\}$. Graf G je souvislý a jak již víme je $\text{hod}(G) = |U(G)| - 1 = 6 - 1 = 5$ avšak každý z faktorů G_1, G_2 má dvě komponenty, takže $\text{hod}(G_1) = 4 = \text{hod}(G_2)$. Obě množiny hran $R_1 = \{h_7, h_8\}$, $R_2 = \{h_1, h_3, h_4, h_6\}$ jsou tedy podle definice hranové řezy.

Z příkladu a z definice vyplývá, že:

1. Různé hranové řezy grafu G mohou mít různý počet prvků.
2. Je-li K kružnice grafu G a R jeho řez, pak $|H(K) \cap R| = 2k$ pro nějaké $k \in \mathbb{N}_0$, tj. každý řez grafu má s množinou hran kružnice grafu sudý počet společných hran (připouštíme i 0).
3. Je-li R řez grafu G , pak existuje disjunkttní rozklad množiny uzlů $U(G) = U_1(G) \cup U_2(G)$ takový, že:
 - (i) $h = \{u_1, u_2\} \in R$ právě když $(u_1 \in U_1(G)) \wedge (u_2 \in U_2(G))$.
 Naopak, je-li $U(G) = U_1(G) \cup U_2(G)$ disjunkttní rozklad množiny uzlů $U(G)$ a R je množina hran s vlastností (i), pak R je řezem grafu G .

Další méně zřejmé tvrzení vyslovíme jako samostatnou větu.

Věta 4.6.1. Podmnožina hran R souvislého grafu G je hranovým řezem grafu právě tehdy, je-li minimální množinou hran, která obsahuje alespoň jednu větev každé kostry grafu G .

Důkaz. Nutnost podmínky je zřejmá, neboť faktor $G - R$ grafu G , který obsahuje nějakou celou kostru grafu G je souvislý a má tedy stejnou hodnotu jako graf G . Aby množina R byla řezem, musí nutně obsahovat alespoň jednu větev každé kostry grafu G .

Předpokládejme, že R je minimální množina obsahující alespoň jednu hranu každé kostry grafu G . Pak však faktor $G - R$ neobsahuje žádnou kostru grafu G a tudíž není souvislý. Protože R je minimální taková množina, musí mít faktor $G - R$ právě dvě komponenty a tedy

$$\text{hod}(G) = \text{hod}(G - R) + 1.$$

Množina R je tedy podle definice hranovým řezem, čímž je dokázána i postačitelnost podmínky.

Vyjdeme-li z uvedené věty, můžeme pomocí libovolné kostry T grafu G konstruovat hranové řezy grafu následujícím způsobem:

- (i) Najdeme nějakou kostru T grafu G o n uzlech - s hranami h_1, h_2, \dots, h_{n-1} ; uvědomíme si, že jednoprvková množina $\{h_i\}$ $i = 1, 2, \dots, n - 1$ je hranovým řezem kostry T .
- (ii) Určíme rozklad množiny uzlů kostry T indukovaný řezem $\{h_i\}$. Faktor $T - \{h_i\}$ kostry T má dvě komponenty; označíme-li jejich množiny uzlů $U_j^{(i)}(T)$, $j = 1, 2$, pak zřejmě

$$U(G) = U_1^{(i)}(T) \cup U_2^{(i)}(T),$$

$$U_1^{(i)}(T) \cap U_2^{(i)}(T) = \emptyset,$$

$$U_j^{(i)}(T) \neq \emptyset \quad \text{pro } j = 1, 2.$$

(iii) Stanovíme řez R_i grafu G takto:

$$R_i = \{h_i\} \cup \{u_1, u_2\} / \{u_1, u_2\} \in H(G) \wedge u_1 \in U_1^{(i)}(T) \wedge u_2 \in U_2^{(i)}(T),$$

t.j. k hraně h_i přidáme všechny ty hrany grafu G , které mají jeden uzel v 1 komponentě faktoru $T - \{h_i\}$ a druhý uzel v komponentě druhé.

Definice. Nechť T je kostra obyčejného souvislého grafu G o n uzlech. Množinu R_i všech řezů zkonstruovaných pro $i = 1, 2, \dots, n - 1$ shora uvedeným způsobem nazýváme fundamentální soustavou hranových řezů grafu G příslušejících kostře T .

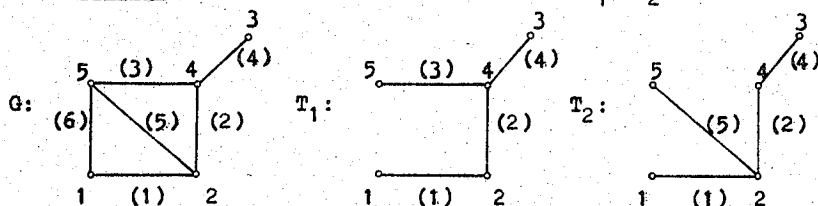
Definice. Nechť G je graf s daným očíslováním hran, $H = \{h_1, \dots, h_m\}$, s daným očíslováním všech hranových řezů R_1, R_2, \dots, R_s . Matici $Q = [q_{ij}]$ typu s/m , kde

$$q_{ij} = 1, \text{ právě když } h_j \in R_i,$$

$$q_{ij} = 0 \text{ všude jinde } (h_j \notin R_i),$$

nazýváme úplnou maticí hranových řezů grafu G . Maticí fundamentální soustavy hranových řezů F nazýváme podmatici Q_F matice Q tvořenou řádky, které odpovídají řezům soustavy F .

Příklad. Uvažujme graf G a jeho kostry T_1, T_2 , kde je



(Srovnejte s příkladem za větou 4.5.1.)

Fundamentální soustavu řezů \tilde{F}_1 grafu G vzhledem ke kostře T_1

tvoří hranové řezy $R_1 = \{h_1, h_6\}$, $R_2 = \{h_2, h_5, h_6\}$,
 $R_3 = \{h_3, h_5, h_6\}$, $R_4 = \{h_4\}$, které postupně odpovídají dis-
 junktním rozkladům $\{u_1\} \cup \{u_2, u_3, u_4, u_5\}$,
 $\{u_1, u_2\} \cup \{u_3, u_4, u_5\}$, $\{u_5\} \cup \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$
 a $\{u_3\} \cup \{u_1, u_2, u_4, u_5\}$ množiny uzlů grafu G.

V tomto případě pro dané očíslování řezů a hran je

$$Q_{F_1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

matice fundamentální soustavy hranových řezů grafu G vzhledem ke kostře T_1 .

Fundamentální soustavu řezů grafu G vzhledem ke kostře T_2 tvoří hranové řezy $\{h_1, h_6\}$, $\{h_2, h_3\}$, $\{h_4\}$, $\{h_5, h_3, h_6\}$.

V tomto případě při zřejmém očíslování řezů a hran je

$$Q_{F_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matice fundamentální soustavy hranových řezů grafu G vzhledem ke kostře T_2 .

Všimneme si, že v tomto případě platí

- a) $KQ_{F_1}^T = 0$ a také $KQ_{F_2}^T = 0$, kde K je úplná matice kružnic grafu G (viz příklad za větou 4.5.1);
 b) $\text{hod}(Q_{F_1}) = 4 = n - 1 = \text{hod}(Q_{F_2})$;
 c) $Q_{F_1} = [I_4; Y]$, kde I_4 je jednotková matice řádu 4.
 d) Součet některých řádků matice Q_{F_1} může určovat:

- (i) hranový řez - stačí sečíst 1. a 2. řádek matice Q_{F_1} ,
 (ii) sjednocení disjunktních hranových řezů - stačí sečíst 3. a 4. řádek matice Q_{F_1} nebo 2. a 3. řádek matice Q_{F_2} .

Věta 4.6.2. Úplná matice K kružnic a úplná matice hranových řezů Q téhož grafu G jsou při shodném očíslování hran a při počítání v aritmetice mod 2 vzájemně ortogonální, tj. platí

$$(i) \quad KQ^T = 0 \quad ,$$

$$(ii) \quad QK^T = 0^T.$$

Důkaz vyplývá z toho, že řez R má s množinou hran kružnice $H(K)$ sudý počet společných hran, tj. $|R \cap H(K)| = 2j$ pro nějaké j přirozené (připouštíme i 0). Vztah (ii) dostáváme ze vztahu (i) pouhým transponováním.

Věta 4.6.3. Je-li Q úplná matice hranových řezů obvyčejného souvislého grafu G o n uzlech, M incidenční matice téhož grafu, $Q_{\mathbb{F}}$ matice libovolné fundamentální soustavy hranových řezů, pak platí:

$$\text{hod}(Q_{\mathbb{F}}) = \text{hod}(Q) = \text{hod}(M) = n - 1.$$

Důkaz. Podle důsledku 1. (věty 4.3.10) je $\text{hod}(M) = n - 1$. Dále podle věty 4.5 je $\text{hod}(K) = c = m - n + 1$. Maximální počet všech existujících lineárně nezávislých řešení homogenní soustavy $Kx = 0$ však určuje defekt matice K ($d(K) = m - \text{hod}(K)$) a zřejmě je:

$$d(K) = m - c = m - (m - n + 1) = n - 1.$$

Avšak podle věty 4.6.2 platí $KQ^T = 0$, takže je $\text{hod}(Q^T) \leq n - 1$. Protože je $\text{hod}(Q) = \text{hod}(Q^T)$ a $Q_{\mathbb{F}}$ je podmaticí matice Q , evidentně máme:

$$\text{hod}(Q_{\mathbb{F}}) \leq \text{hod}(Q) \leq n - 1.$$

Uvažujme dále libovolnou kostru T grafu G a očíslovme hrany grafu G tak, aby $\{h_1, h_2, \dots, h_{n-1}\} = H(T)$. Řezy nechť jsou

očíslvány tak, že R_1, R_2, \dots, R_{n-1} tvoří fundamentální soustavu F hranových řezů grafu G příslušejících kostře T .

Pak zřejmě

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{\tilde{F}} \\ X \end{bmatrix},$$
 kde $Q_{\tilde{F}} = [I_{n-1} \ ; \ Y]$ je matice soustavy \tilde{F} a kde I_{n-1} je jednotková matice řádu $n - 1$. Z uvedené úvahy plyne, že pro libovolnou kostru T je $\text{hod}(Q_{\tilde{F}}) = n - 1$, čímž je celý důkaz věty ukončen.

Věta 4.6.4. Je-li \tilde{R} podmnožina potenční množiny 2^H hran grafu G , tvořená

- (i) hranovými řezy grafu G ,
- (ii) sjednocením disjunktních hranových řezů,
- (iii) prázdnou množinou,

pak operace symetrické diference je uzavřená na množině \tilde{R} .

Důkaz je založen na úvahách analogických k těm, které jsou uvedeny v poznámce na konci odstavce 4.5.

Věta 4.6.5. Je-li M incidenční matice grafu G o n uzlech a Q úplná matice hranových řezů grafu G , pak platí

$$\mathcal{L}(M) = \mathcal{L}(Q),$$

kde $\mathcal{L}(X)$ značí lineární obal řádků matice X , tj.

$$\mathcal{L}(X) = \left\{ \tilde{r} \mid \tilde{r} = \sum_{i=1}^v \alpha_i x_i, \text{ kde } \alpha_i \in \{0, 1\} \text{ a } v \text{ je počet řádků matice } X \right\}.$$

Důkaz plyne z vět 4.6.2., 4.6.3.

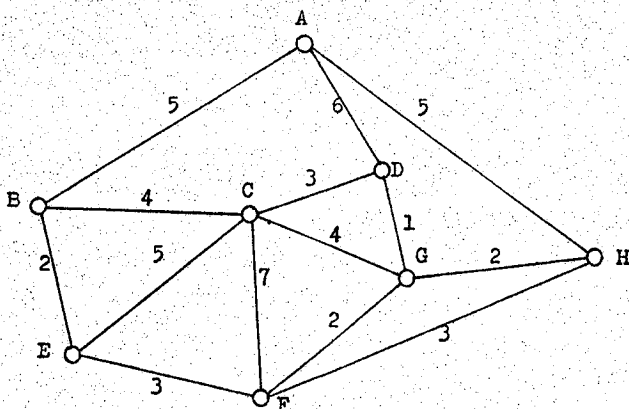
Poznámka. Incidenční matice M není samozřejmě shodná s maticí hranových řezů, ale obsahuje snadno algebraicky zpracovatelné informace o všech hranových řezech. K nalezení matice některé fundamentální soustavy hranových řezů stačí totiž vyškrtnout libovolný řádek matice M a tak vzniklou matici \tilde{M} typu $(n-1)/m$ upravit (sčítáním řádků mod 2 a jejich permutacemi) na tvar $[I_{m-1} \mid X]$. Pro počet s různých hranových řezů zřejmě platí: $m - 1 \leq s \leq 2^m - 1$. Stačí si totiž uvědomit, že pro množinu \tilde{R} (viz věta 4.6.4) platí: $|\tilde{R}| = 2^m$.

5. Aplikace teorie grafů

V této kapitole si všimneme některých z mnoha aplikací teorie grafů, přičemž jednotlivé odstavce představují pouhý výběr z mnoha různorodých oblastí, v nichž teorie grafů nachází uplatnění. Podle povahy jednotlivých aplikací, z nichž některé jsou praktického charakteru, jiné spíše teoretické, budeme pracovat s orientovanými i s neorientovanými grafy.

5.1. Minimální kostra

Představme si, že ohodnocený neorientovaný graf G na obr. 5.1.1 představuje silniční síť, spojující města A, B, C, D, E, F, G, H nějakého fiktivního okresu, přičemž ohodnocení hran interpretujeme jako náklady, potřebné k provádění zimní údržby (protahování, posyp) jednotlivých silnic. Vedoucí pracovníci správy silnic mají za úkol rozhodnout, které silnice mají být v zimě udržovány, tak, aby z kteréhokoliv města bylo možno dojet do všech ostatních měst okresu a aby celkové náklady byly minimální. Označíme-li G' podgraf grafu G , tvořený těmi hranami, jež odpovídají udržovaným silnicím, pak z požadavku vzájemné dosažitelnosti v G' všech měst okresu (tj. uzlů grafu G) ihned vyplývá, že G' musí být souvislý faktor grafu G ; s uvážením věty 2.3.1 zjistíme, že hledaný podgraf G' je minimální kostrou grafu G .



obr. 5.1.1.

Stojíme tak před otázkou, jak v daném ohodnoceném neorientovaném grafu G jeho minimální kostru prakticky najít. Často se lze v podobné situaci setkat s názorem, že vzhledem ke konečnosti grafu G bude všech jeho koster konečný počet (existence alespoň jedné kostry vyplývá ze souvislosti G a z věty 2.2.3) a tedy s použitím dobrého počítače nebude problémem kostry probrat a vybrat z nich tu, pro kterou je součet ohodnocení minimální. Tvrzení o konečném počtu koster je sice pravdivé, ale přesto je řešení úlohy metodou "probírání všech možností" v praxi neschůdné i v nepříliš komplikovaných případech - ukážeme si to na následujícím příkladu.

Příklad. Máme za úkol navrhnout rozvod elektrické energie mezi rozvodnou a 19 obcemi tak, aby celkové náklady na výstavbu vedení byly minimální; předpokládáme přitom, že stáva-

jící vedení jsou natolik zastaralá, že jejich použití v nové síti není možné. Musíme tedy vzít v úvahu možnost propojení všech dvojic z našich 20 míst (tím získáme hrany grafu), u každé dvojice provést odhad nákladů na výstavbu přímého vedení (získáme ohodnocení hran) a ve vzniklém grafu - bude to ohodnocený úplný graf K_{20} - hledat minimální kostru.

Počet hran našeho grafu (tj. počet vstupních údajů pro počítač) je

$$|H(K_{20})| = \binom{20}{2} = 190 ,$$

což není nijak mnoho. Potíž nastane jinde: z poznámky před větou 2.2.3 vyplývá, že v průběhu výpočtu bude nutno vyhodnotit 20^{18} koster - kdyby náš počítač byl schopen vyhodnotit za jednu sekundu 10^6 koster, tak by náš výpočet trval (rok má 31 356 000 $\approx 32 \cdot 10^6$ sekund)

$$\frac{20^{18}}{32 \cdot 10^6 \cdot 10^6} = 2^{13} \cdot 10^6 \approx 8 \cdot 10^9 \text{ let.}$$

Vidíme, že ani podstatné zvýšení rychlosti výpočtu nám nemůže pomoci a musíme hledat vhodnější metodu řešení.

Algoritmus 5.1.1. (minimální kostra grafu G)

1. Polož $G_0 = G$, $i := 0$.

2. Existuje v G_i kružnice C_i ?

- ano: v C_i najdi hranu h_i s maximálním ohodnocením,

označ $G_{i+1} = (U(G_i), H(G_i) \setminus \{h_i\})$,

$i := i+1$ a opakuj bod (2),

- ne: G_i je hledaná minimální kostra.

Důkaz. V každém kroku algoritmu obdržíme podgraf G_{i+1} , který je faktorem G a podle věty 2.2.1 je souvislý. Výsledný graf je tedy souvislým faktorem bez kružnic, tj. kostrou grafu G . Minimalita vyplývá ihned z věty 2.3.2.

Algoritmus 5.1.2. (minimální kostra grafu G)

1. Zvol libovolně uzel $u \in U(G)$ a polož

$$G_0 = (\{u\}, \emptyset) ; i := 0 .$$

2. Je G_i faktor grafu G ?

- ne: mezi všemi hranami $\{x,y\}$, pro něž $x \in U(G_i)$ a $y \notin U(G_i)$, najdi tu, která má nejmenší ohodnocení, a polož

$$G_{i+1} = (U(G_i) \cup \{y\}, H(G_i) \cup \{ \{x,y\} \}) ,$$

$i := i+1$ a opakuj bod (2) ,

- ano: G_i je hledaná minimální kostra.

Důkaz. Z popsaného postupu je zřejmé, že každý z postupně sestrojovaných podgrafů $G_{i+1} \subset G$ je souvislý (což je zaručeno požadavkem $x \in U(G_i)$) a bez kružnic (díky podmínce $y \notin U(G_i)$); výsledný graf je tedy souvislý faktor bez kružnic, tj. kostra grafu G . Označíme-li takto sestrojenou kostru K , zbývá dokázat, že K je minimální.

Z konstrukce je zřejmé, že pro každý uzel $u \in U(G)$ existuje číslo i tak, že $u \in U(G_i)$, ale $u \notin U(G_{i-1})$ - toto číslo označíme $i(u)$ a analogicky pro každou hranu $h \in H(K)$ definujeme číslo $i(h)$. Zvolme libovolnou hranu $h \in H(G) \setminus H(K)$, sestrojme příslušnou kružnici C_h (viz věta 2.3.2) a označme

M_h množinu všech hran $h' \in H(C_h)$, pro něž platí

$$w(h') = \max \{w(k); k \in H(C_h)\}$$

(tj. v M_h jsou všechny hrany kružnice C_h s maximálním ohodnocením).

Kdyby $h \notin M_h$, tak by pro tu hranu $h' \in M_h$, která má ze všech hran z M_h největší $i(h')$, nutně při $i(h')$ -tém kroku algoritmu byla v C_h k dispozici pro připojení k $G_{i(h')}$ jiná hrana s nižším ohodnocením (neboť h' je poslední nepřipojená hrana s maximálním ohodnocením v C_h); tj. v $i(h')$ -tém kroku by byla připojena jiná hrana než h' , což není možné. Tedy nutně $h \in M_h$ a podle věty 2.3.2 je kostra K minimální.

Příklad. Pomocí algoritmů 5.1.1 a 5.1.2 najděte minimální kostru grafu na obr. 5.1.1. (jsou dvě - obě mají součet ohodnocení hran 18).

Poznámka. Algoritmus 5.1.1 nalezne minimální kostru souvislého ohodnoceného grafu v $c(G)$ krocích, algoritmus 5.1.2 splní stejný úkol v $h(G)$ krocích. Použijeme-li algoritmus 5.1.2 na řešení úlohy o elektrifikaci 19 obcí, pak algoritmus proběhne ve 20 krocích a při každém kroku bude probírat (horní odhad) 190 hran. Při dané rychlosti stroje je výpočet otázkou zlomku sekundy.

5.2. Minimální cesta

Vrátíme-li se nyní k interpretaci ohodnoceného neorientovaného grafu jako silniční, telekomunikační apod. sítě, pak další přirozenou otázkou je nalezení minimální cesty, spojující dané dva uzly - aplikace typu nejlevnější, nejrychlejší apod. trasy jsou zřejmé. Ukážeme si nyní úlohu o nalezení minimální cesty v ohodnoceném grafu v poněkud jiné situaci.

Je dán libovolný systém, který je možno převádět různými operacemi z výchozího stavu do jiných stavů, z nichž jeden je cílový; operace mají přitom různou dobu trvání (resp. cenu apod.). Úkolem je nalézt takovou posloupnost operací, která systém převede z výchozího do cílového stavu v minimálním čase (resp. s minimální cenou). Přiřadíme-li každému stavu systému uzel a každé operaci hranu grafu (orientovanou, je-li operace nevratná, a neorientovanou, je-li operace vratná), s ohodnocením daným dobou, trváním, cenou apod. příslušné operace, je úloha převedena na nalezení minimální cesty v ohodnoceném grafu. Pro ilustraci zde uvedeme jednu klasickou hříčku, známou z oblasti rekreační matematiky ("vážnější" aplikace jsou obdobné).

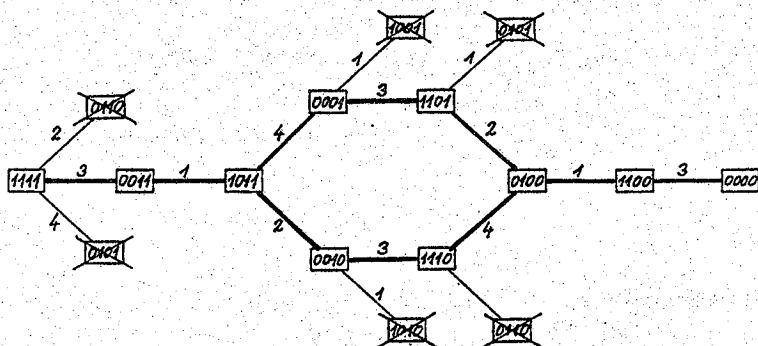
Příklad. Na levém břehu řeky se nachází převozník (s loďkou), koza, vlk a zelí. Před převozníkem stojí úkol převést kozu, vlka a zelí na pravý břeh - do loďky se však vejde s převozníkem pouze jeden "cestující" (koza, vlk nebo zelí) a koza nesmí zůstat na břehu bez dozoru s vlkem (neboť by jí byla sežrána) ani se zelím (neboť by ho sežrala). Převoz prázdné loďky trvá převozníkovi 1 hodinu, převoz zelí 2 hodiny, převoz kozy 3 hodiny a převoz vlka 4 hodiny. Hledáme odpověď

na tyto otázky:

- a) zda lze převoz uskutečnit,
- b) jestliže ano, v jakém minimálním čase,
- c) kolik má úloha celkem minimálních řešení.

Stav našeho systému je jednoznačně určen čtveřicí čísel p, k, v, z , kde p (resp. k, v, z) je počet převozníků (resp. koz, vlků, zelí) na levém břehu řeky; čísla p, k, v, z nabývají hodnot 0, 1. Výchozí stav systému je 1111, cílový stav je 0000; stavy 0111, 0110, 0101, 1000, 1001, 1010 jsou podle podmínek úlohy nepřipustné. Všechny operace jsou vratné a tedy budeme pracovat s neorientovaným grafem.

Ve stavu 1111 má převozník tři možnosti: převést přes řeku zeli (za 2 hod.- vznikne nepřipustný stav 0110), převést vlka (4 hod.- vznikne nepřipustný stav 0101) nebo převést kozu (za 3 hod. - vznikne přípustný stav 0011). Obdobně pokračujeme dále a obdržíme ohodnocený graf na obr. 5.2.1, z něhož ihned vidíme, že naše úloha má dvě minimální řešení s celkovou dobou trvání 17 hodin.



obr. 5.2.1.

Ve složitějších případech samozřejmě nalezení minimální cesty není tak jednoduché, jako na obr. 5.2.1 - situace je obdobná, jako u úlohy na nalezení minimální kostry. Algoritmus, který zde uvádíme, je formulován pro orientované grafy, ale čtenář snadno nahlédne, že algoritmus je možno použít i pro nalezení minimální cesty v neorientovaném grafu tak, že zkoumaný graf nahradíme jeho symetrickou orientací.

Algoritmus 5.2.1. (minimální cesta z uzlu u do uzlu v v grafu \vec{G})

1. Uzlu u přiřaď trvalou hodnotu $th(u) = 0$, ostatním uzlům dočasnou hodnotu ∞ .
2. Je-li x poslední uzel, jemuž byla přiřazena trvalá hodnota $th(x)$, pak všem y , pro něž $(x,y) \in H(\vec{G})$ a které ještě nemají trvalou hodnotu, přiřaď novou dočasnou hodnotu

$$dh(y) := \min \{dh(y), th(x) + w(x,y)\} .$$
3. Pro uzel z s nejmenší dočasnou hodnotou polož

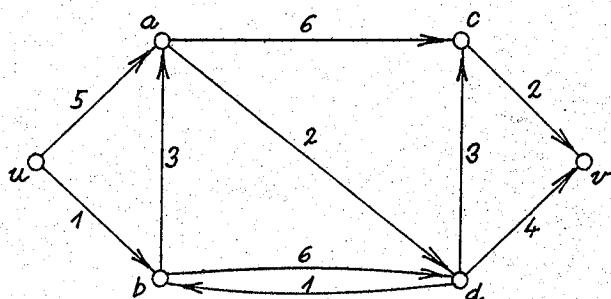
$$th(z) = dh(z) .$$
4. Má uzel v trvalou hodnotu?
 - ne: vrať se na (2),
 - ano: $th(v)$ je délka minimální cesty z u do v v \vec{G} ; minimální cesta je každá cesta z u do v v podgrafu určeném těmi hranami (x,y) , pro něž platí

$$w(x,y) = th(y) - th(x) .$$

Důkaz správnosti algoritmu pouze naznačíme: dočasné hodnoty, přiřazované jednotlivým uzlům ve 2. části algoritmu, představují horní odhady jejich w -vzdálenosti od uzlu u ; v bodě (3)

se využívá té skutečnosti, že v uzlu, v němž je odhad w -vzdálenosti (dočasná hodnota) nejnižší, už tento odhad nemůže být zlepšen po žádné cestě, vedoucí přes uzly s vyšší dočasnou hodnotou, a tedy je roven w -vzdálenosti od uzlu u (trvalá hodnota). Rovnost $w(x,y) = th(y) - th(x)$ tedy platí právě na těch hranách (x,y) , které leží na minimálních cestách z u do ostatních uzlů grafu \vec{G} .

Příklad. Nalezneme minimální cestu z uzlu u do uzlu v v grafu \vec{G} na obr. 5.2.2.

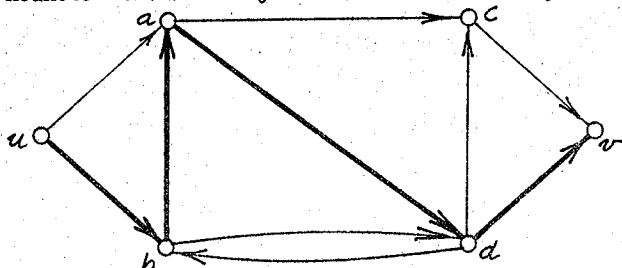


obr. 5.2.2.

Postup přiřazování dočasných a trvalých hodnot při jednotlivých krocích algoritmu je zřejmý z následující tabulky (podtržená čísla jsou trvalé hodnoty).

	u	a	b	c	d	v
1. krok	<u>0</u>	∞	∞	∞	∞	∞
2. krok	<u>0</u>	5	<u>1</u>	∞	∞	∞
3. krok	<u>0</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	∞	7	∞
4. krok	<u>0</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	10	<u>6</u>	∞
5. krok	<u>0</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	<u>9</u>	<u>6</u>	10
6. krok	<u>0</u>	<u>4</u>	<u>1</u>	<u>9</u>	<u>6</u>	<u>10</u>

Hodnota $th(v) = 10$ je délka minimální cesty z u do v ;



obr. 5.2.3.

hrany minimální cesty jsou na obr. 5.2.3 vyznačeny silně (rovnost $w(x,y) = th(y) - th(x)$ platí kromě hran minimální cesty též na hraně (d,c)).

Poznámka. Algoritmus 5.2.1 je možno použít také pro nalezení nejkratší cesty, položíme-li ohodnocení všech hran rovné jedné.

5.3. Kritická cesta

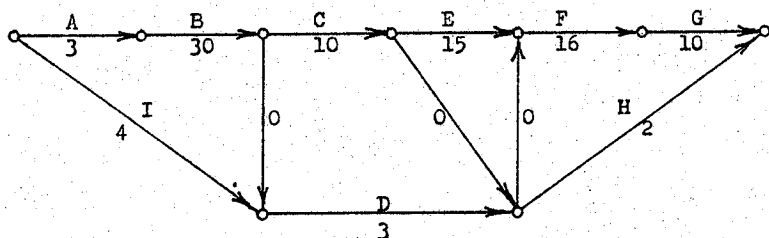
Uveďme si jako příklad akci, spočívající ve výstavbě rodinného domku. Celou akci si můžeme ve velmi zjednodušené podobě rozčlenit na tyto operace:

- A zemní práce
- B hrubá stavba
- C montáž krovu a krytiny
- D montáž oken
- E instalatérské práce
- F vnitřní omítky a podlahy
- G nátěry
- H fasáda .

Vzhledem k tomu, že projekt našeho domku počítá s atypickými okny, přibude ještě operace I - výroba oken.

Vzájemné návaznosti jednotlivých operací lze popsat pomocí ohodnoceného orientovaného grafu. Každé operaci přiřadíme orientovanou hranu (operace jsou nevratné) a každou hranu ohodnotíme předpokládanou dobou trvání operace (např. v týdnech); návaznost operací stanovíme zásadou, podle níž žádná operace nesmí být zahájena, dokud nejsou ukončeny všechny operace, které vedou do jejího počátečního uzlu (jinak řečeno: v každém uzlu mohou operace z uzlu vycházející být zahájeny až po ukončení všech operací do uzlu vcházejících).

V našem případě lze návaznosti operací A - I popsat pomocí grafu na obr. 5.3.1 (v technické praxi bývá používán termín "síťový graf" projektu).



obr. 5.3.1.

Povšimněme si zejména hran s nulovým ohodnocením - jedná se o tzv. fiktivní činnosti nulového trvání, bez jejichž použití by některé návaznosti nebylo možno postihnout (například skutečnosti, že zahájení D je podmíněno ukončením B i I, zatímco zahájení C je podmíněno pouze ukončením I; obdobně s činnostmi F a H).

Kdybychom podobně jako v odst. 5.2 zkoumali minimální cestu v našem grafu, dospěli bychom k evidentně absurdnímu výsledku, podle něhož postačí provést operace I, D a H (v celkové době 9 týdnů). Zásadní rozdíl oproti situaci z odstavce

5.2 je v tom, že zde musí být pro realizaci celé akce provedeny všechny operace - minimální doba trvání projektu je pak dána cestou maximální w-délky v \vec{G} , jež se nazývá kritická cesta. U operací, jež se nacházejí na kritické cestě, není žádná časová rezerva a jejich zpoždění má za následek zpoždění celého projektu, zatímco u operací mimo kritickou cestu je zpoždění možné. Celá záležitost má rozumný smysl jen v acyklickém grafu - snadno však nahlédneme, že v praktických situacích musí správně sestavený "síťový graf" být acyklickým ohodnoceným orientovaným grafem s jediným vstupním a jediným výstupním uzlem.

Definice. Buď \vec{G} acyklický ohodnocený orientovaný graf s jediným vstupním a jediným výstupním uzlem. Orientovaná cesta $\vec{P} \subset \vec{G}$ maximální w-délky se nazývá kritická cesta grafu \vec{G} .

Poznámka. Je-li $\vec{P} \subset \vec{G}$ kritická cesta, pak \vec{P} obsahuje vstupní i výstupní uzel grafu \vec{G} .

Algoritmus 5.3.1. (kritická cesta acyklického ohodnoceného orientovaného grafu \vec{G})

- I. 1. Polož $i = 1$ a $\vec{G}_1 = \vec{G}$.
2. Pro $i = 1, \dots, n-1$ najdi v \vec{G}_i vstupní uzel, očísľuj ho číslem i a polož

$$\vec{G}_{i+1} = (U(\vec{G}_i) \setminus \{i\} ; H(\vec{G}_i) \setminus \{(j, i); j < i\}) .$$

3. Jediný uzel grafu G_n očísľuj číslem n .

II. 1. Uzlu 1 přiřadí $t(1) = 0$.

2. Pro $i = 2, \dots, n$ uzlu i přiřadí

$$t(i) = \max \{ t(j) + w_{j,i} ; (j,i) \in H(\vec{G}) \} .$$

III. 1. Uzlu n přiřadí $T(n) = t(n)$.

2. Pro $i = n-1, n-2, \dots, 1$ uzlu i přiřadí

$$T(i) = \min \{ T(j) - w_{i,j} ; (i,j) \in H(\vec{G}) \} .$$

IV. Kritická cesta prochází těmi uzly, pro něž $T(i) = t(i)$.

Poznámky. 1. V první části algoritmu se konstruuje číslování uzlů podle tvrzení (5) věty 3.2.3 a tedy se souběžně ověřuje acykličnost \vec{G} (existence cyklu v \vec{G} by se projevila neexistencí vstupního uzlu v některém \vec{G}_i).

2. Čísla $t(i)$, přiřazená uzlům v 2. kroku II. části algoritmu, jsou definována pomocí $t(j)$ pro $(j,i) \in H(\vec{G})$; z očíslování uzlů vyplývá, že musí být $j < i$ a tedy všechna potřebná $t(j)$ jsou již v i -tém kroku určena (obdobně s čísly $T(i)$ v III. části). Ohodnocení hrany (i,j) značíme $w_{i,j}$.

3. Čísla $t(i)$, sestrojená ve druhé části, bývají nazývána minimální časové ohodnocení uzlů a představují minimální časy, v nichž je možno dosáhnout stavu, popsaného uzlem.

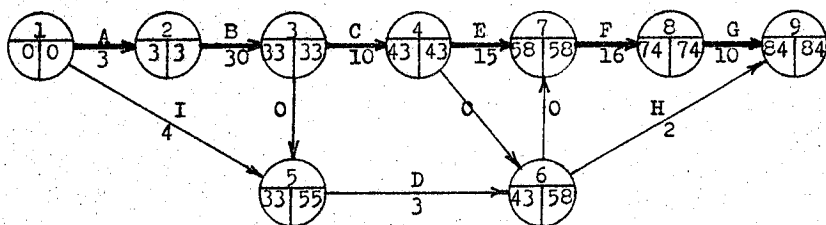
Čísla $T(i)$, sestrojená ve třetí části, bývají nazývána maximální časové ohodnocení uzlů a představují nejpozdější čas, kdy je nutno uzel opustit, aby nedošlo ke zpoždění celého projektu.

Rozdíl $T(i) - t(i)$ bývá nazýván časová rezerva uzlu; kritická cesta prochází uzly s nulovou časovou rezervou.

Kritická cesta v \vec{G} nemusí být určena jednoznačně - obecně

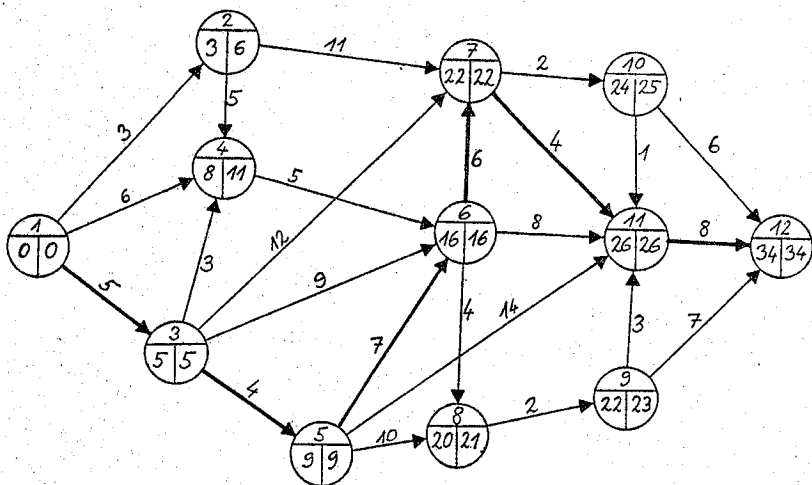
je kritickou každá orient. cesta, která obsahuje vstupní i výstupní uzel a prochází uzly s nulovou časovou rezervou.

Příklady. 1. Na obr. 5.3.2 je graf z obr. 5.3.1, vyhodnocený pomocí algoritmu 5.3.1; horní čísla jsou čísla uzlů, vlevo (resp. vpravo) dole je ohodnocení $t(i)$ (resp. $T(i)$).



obr. 5.3.2.

2. Další příklad grafu, vyhodnoceného podle algoritmu 5.3.1, je na obr. 5.3.3.



obr. 5.3.3.

Poznámky. 1. Je vypracováno mnoho metod řízení složitých činností, majících svůj princip ve vyhodnocování kritických cest grafů. Nejznámějšími názvy v této souvislosti jsou CPM (angl. Critical Path Method) a PERT (angl. Program Evaluation and Review Technique); metody byly vypracovány v USA v letech 1957-58 při vývoji raketových systémů. V metodách typu CPM se předpokládá, že doby trvání jednotlivých činností jsou předem známy; u metod typu PERT jsou tyto doby trvání náhodnými proměnnými se známým rozdělením pravděpodobnosti. U metod obou typů se řeší otázky minimalizace celkové doby trvání projektu, optimalizace harmonogramů jednotlivých činností atd. Z tohoto hlediska je náš algoritmus 5.3.1 jen elementárním úvodem do problematiky, jíž jsou věnovány celé knižní publikace.

2. Zatímco vyhodnocení "síťového grafu" je algoritmicky uspokojivě zpracováno, je sestavení tohoto grafu vysoce odbornou činností, jež vyžaduje důkladnou znalost konkrétního výrobního procesu; tato činnost je dosud odkázána převážně na "ruční práci", což souvisí s kombinatorickou složitostí problému - je například dokázáno, že problém minimalizace počtu fiktivních činností je NP-úplný (viz odst. 5.5).

5.4. Distanční matice grafu

V tomto odstavci uvedeme, jak je možno určit matici vzdáleností a w -vzdáleností daného ohodnoceného grafu. Pro jednoduchost budeme přitom v celém odstavci pojednávat výhradně o ohodnocených orientovaných grafech. Čtenář se snadno přesvědčí, že všechny pojmy a výsledky jsou použitelné i pro neorientované grafy, jestliže místo daného neorientovaného grafu uvažujeme jeho symetrickou orientaci a lze je použít i pro neohodnocené grafy, jestliže všechny hrany ohodnotíme číslem 1.

Definice. Nechť \vec{G} je ohodnocený orientovaný graf s ohodnocením $w: H(\vec{G}) \rightarrow (0, \infty)$; nechť $U(\vec{G}) = \{u_1, \dots, u_n\}$.

1. Čtvercová matice $W(\vec{G}) = [w_{ij}]$ řádu n , definovaná

$$w_{ij} = w((u_i, u_j)), \text{ jestliže } (u_i, u_j) \in H(\vec{G}) \text{ a}$$

$$w_{ij} = 0, \text{ jestliže } (u_i, u_j) \notin H(\vec{G}),$$

se nazývá matice ohodnoceného grafu \vec{G} .

2. Čtvercová matice $D(\vec{G}) = [d_{ij}]$ řádu n , definovaná předpisem $d_{ij} = d_{\vec{G}}(u_i, u_j)$ pro $1 \leq i, j \leq n$ se nazývá distanční matice grafu \vec{G} .

3. Čtvercová matice $D^w(\vec{G}) = [d_{ij}^w]$ řádu n , definovaná předpisem $d_{ij}^w = d_{\vec{G}}^w(u_i, u_j)$ pro $1 \leq i, j \leq n$ se nazývá w -distanční matice grafu \vec{G} .

Metodu, umožňující nalezení matice $D(\vec{G})$, už v podstatě známe z odst. 4.4:

Věta 5.4.1. Prvek d_{ij} matice $D(\bar{G})$ je pro $i \neq j$ roven nejmenšímu přirozenému číslu k , pro které je prvek na místě i, j v k -té mocnině matice $W(\bar{G})$ nenulový.

Důkaz věty je obdobný důkazu vět 4.4.2 a 4.4.6.

Definice. Čtvercová matice $C(\bar{G}) = [c_{ij}]$ řádu n , definovaná předpisem: $c_{ij} = 0$ pro $i = j$,
 $c_{ij} = \infty$ pro $i \neq j$ a $(u_i, u_j) \notin H(\bar{G})$,
 $c_{ij} = w_{ij}$ pro $i \neq j$ a $(u_i, u_j) \in H(\bar{G})$
 se nazývá cenová matice grafu \bar{G} .

Matici $D^W(\bar{G})$ ohodnoceného grafu \bar{G} je možno určit pomocí množením cenové matice $C(\bar{G})$ grafu \bar{G} , ale je přitom nutno použít pozměněných operací: definujeme "nové" násobení vztahem $a \odot b = a + b$ a "nové" sčítání vztahem $a \oplus b = \min\{a, b\}$. Tak například je $3 \odot 5 = 8$ a $3 \oplus 5 = 3$. Se symbolem ∞ se pracuje podle obvyklých pravidel, tj. např. $3 \odot \infty = \infty$, $3 \oplus \infty = 3$, $\infty \odot \infty = \infty$, $\infty \oplus \infty = \infty$. Je téměř okamžitě vidět, že operace \odot a \oplus jsou komutativní a asociativní. Je-li k přirozené číslo, pak k -tou mocninou $\odot C(\bar{G})$ matice $C(\bar{G})$ definujeme obvyklým způsobem, ale s použitím pozměněných operací \odot a \oplus .

Věta 5.4.2. Buď r nejmenší přirozené číslo, pro něž platí $\odot C(\bar{G}) = \odot^{r+1} C(\bar{G})$. Pak je $D^W(\bar{G}) = \odot C(\bar{G})$.

Důkaz. Pro $r = 2$ je prvek $\odot c_{ij}$ matice $\odot C(\vec{G})$ roven výrazu

$$\odot c_{ij} = \left(\sum_{k=1}^n c_{ik} \odot c_{kj} \right) = \min \{ c_{ik} + c_{kj} ; k=1, \dots, n \},$$

což je minimální w-délka orientované cesty délky nejvýše 2 z u_i do u_j ; pro libovolné r snadno indukci ukážeme, že prvek $\odot c_{ij}$ matice $\odot C(\vec{G})$ je roven minimální w-délce orientované cesty délky nejvýše r z u_i do u_j .

Následující algoritmus je založen na myšlence věty 5.4.2 s tím, že vhodným způsobem výpočtu matic D_k je snížen celkový počet operací.

Algoritmus 5.4.1. (w-distanční matice ohodnoceného orientovaného grafu \vec{G})

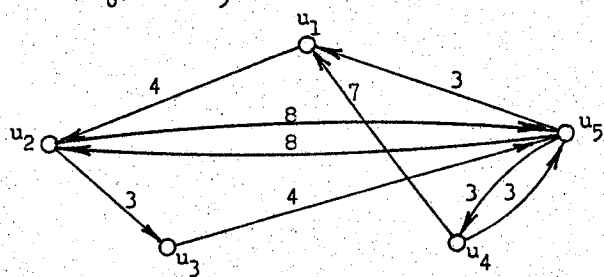
1. Polož $D_0 = C(\vec{G})$; $n = |U(\vec{G})|$.
2. Pro $k = 1, \dots, n$ postupně vypočítáváme matice $D_k = [d_{ij}^k]$, kde $d_{ij}^k = \min \{ d_{ij}^{k-1}, d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1} \}$.
3. $D_n = D^w(\vec{G})$.

Důkaz. Indukcí podle k dokážeme, že d_{ij}^k je minimální w-délka orientované cesty \vec{P} takové, že pro její uzly platí $U(\vec{P}) \subset \{u_i, u_j\} \cup \{u_1, \dots, u_k\}$.

1. Pro $k = 0$ je tvrzení zřejmé.
2. Nechť tvrzení platí pro $k-1 \leq n$; zvolme pevně indexy i, j tak, že $1 \leq i, j \leq n$. Je-li \vec{P} orientovaná cesta z u_i do u_j minimální w-délky taková, že $U(\vec{P}) \subset \{u_i, u_j\} \cup \{u_1, \dots, u_k\}$, pak buďto $u_k \notin U(\vec{P})$, a pak je podle indukčního předpokladu

její w-délka rovna d_{ij}^{k-1} , nebo $u_k \in U(\vec{P})$, a pak je její w-délka (opět podle indukčního předpokladu) $d_{ik}^{k-1} + d_{kj}^{k-1}$.

Příklady. 1. Pro graf na obr. 5.4.1 postupně vypočítáme matice $D_0, \dots, D_5 = D^W(\vec{G})$.



obr. 5.4.1

$$D_0 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 8 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 7 & \infty & \infty & 0 & 3 \\ 3 & 8 & \infty & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$; D_1 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 8 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 7 & 11 & \infty & 0 & 3 \\ 3 & 7 & \infty & 3 & 0 \end{bmatrix} ;$$

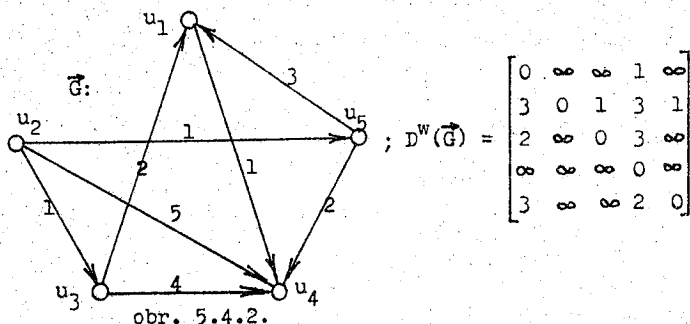
$$D_2 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & \infty & 12 \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 8 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 7 & 11 & 14 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$; D_3 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & \infty & 11 \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 7 & 11 & 14 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 0 \end{bmatrix} ;$$

$$D_4 = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & \infty & 11 \\ \infty & 0 & 3 & \infty & 7 \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 4 \\ 7 & 11 & 14 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$; D_5 = D^W(\vec{G}) = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 7 & 14 & 11 \\ 10 & 0 & 3 & 10 & 7 \\ 7 & 11 & 0 & 7 & 4 \\ 6 & 10 & 13 & 0 & 3 \\ 3 & 7 & 10 & 3 & 0 \end{bmatrix} .$$

2. Pro graf na obr. 5.4.2 obdobně nalezneme distanční matici $D^W(G)$:



$$D^w(\vec{G}) = \begin{bmatrix} 0 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 3 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & \infty & 0 & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 0 & \infty \\ 3 & \infty & \infty & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Poznámka. Znalost distanční a w-distanční matice grafu je užitečná nejen v aplikacích (tím, že známe délky minimálních cest pro všechny dvojice uzlů grafu), ale i pro snadné vyšetření dalších vlastností grafu: umožňuje ověření souvislosti a silné souvislosti, acykličnosti (graf z prvního příkladu je silně souvislý, graf z druhého příkladu je acyklický - - porovnejte jejich w-distanční matice), určení komponent a kvazikomponent atd. Nahradíme-li například v matici $D^w(\vec{G})$ obyčejného orientovaného grafu \vec{G} symbol ∞ nulou a nenulové prvky číslem 1, obdržíme matici tranzitivního uzávěru relace (tj. orientovaného grafu) \vec{G} .

5.5 Problém obchodního cestujícího; NP-úplné problémy

Příklady. 1. Na víceúčelovém stroji má být postupně provedeno n různých operací u_1, \dots, u_n , přičemž při seřizení stroje z i -té operace na j -tou operaci vznikne prostoj w_{ij} minut. Najděte takové pořadí operací, při němž je součet všech prostojů minimální.

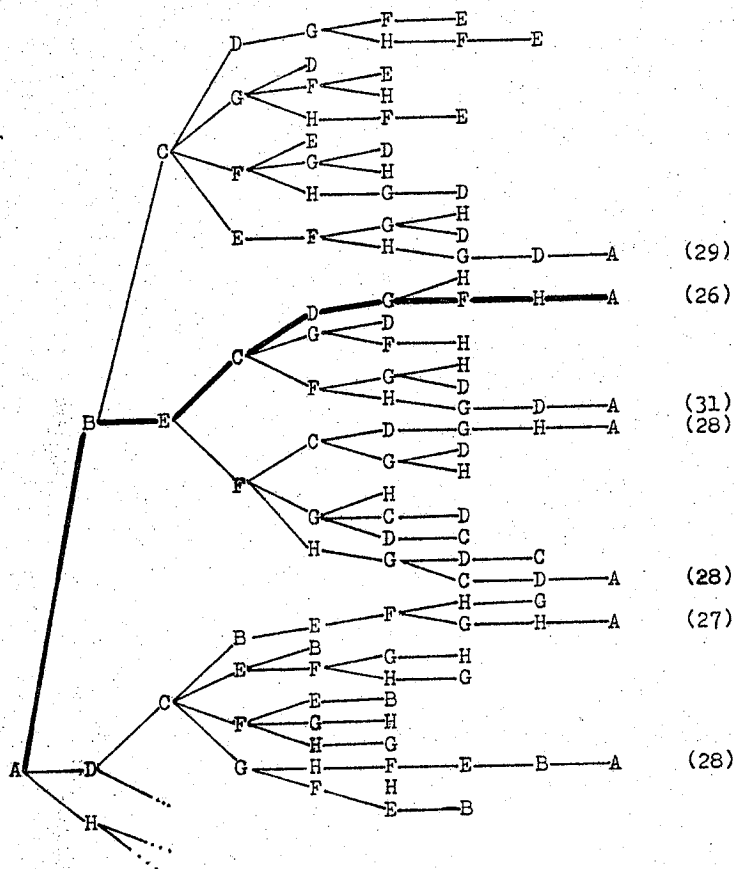
2. Uvažujme graf na obr. 5.1.1, v němž uzly představují města a hrany silnice mezi nimi; ohodnocení hran má význam vzdálenosti v kilometrech. Obchodní cestující má za úkol postupně navštívit všechna města, nabídnout v nich vzorky zboží a vrátit se zpět do podniku. Cestu má podniknout tak, aby celková ujetá vzdálenost byla minimální.

Z druhého příkladu ihned dostáváme formulaci následující úlohy.

Problém obchodního cestujícího. V ohodnoceném neorientovaném grafu G najděte hamiltonovskou kružnici C , pro kterou je číslo $\sum_{h \in H(C)} w(h)$ minimální.

Snadno zjistíme, že značí-li v první úloze operace uzly a seřizování stroje hrany grafu, pak se úloha převede na problém obchodního cestujícího v ohodnoceném úplném grafu K_n .

Při jednom z možných způsobů řešení úlohy si proces rozhodování cestujícího znázorníme tzv. rozhodovacím stromem - - takto je možno znázornit každý rozhodovací proces, v němž v každém kroku rozhodujeme mezi konečně mnoha možnostmi. Rozhodovací proces znázorníme stromem, v němž z každého uzlu vychází tolik hran, kolik má cestující možností dalšího pokračování.



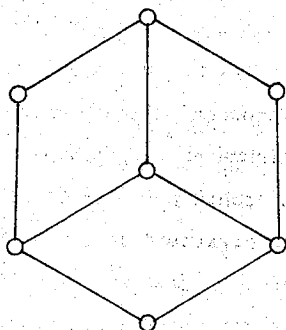
obr. 5.5.1.

čování v cestě (aby přijel v G do uzlu, v němž ještě nebyl). Část vzniklého stromu vidíme na obr. 5.5.1; zbývající část stromu si pilný čtenář snadno doplní. Z obrázku ihned vidíme hamiltonovské kružnice, jichž má graf na obr. 5.1.1 sedm (v rozhodovacím stromu jich vyjde čtrnáct, neboť každou kružnici obdržíme ve dvou "exemplářích", lišících se "orientací oběhu". Vyhodnocením čísel $\sum w_{ij}$ (v obr. 5.5.1 čísla

v závorekách) získáme řešení úlohy.

Vidíme, že tato metoda řešení není v podstatě ničím jiným než "organizovaným" probíráním všech možností. Situace je však taková, že podobně, jako není známa charakterizační věta pro existenci hamiltonovské kružnice (viz poznámky před větou 2.4.2), není ani znám efektivní algoritmus pro řešení problému obchodního cestujícího (ale není ani dokázána jeho neexistence).

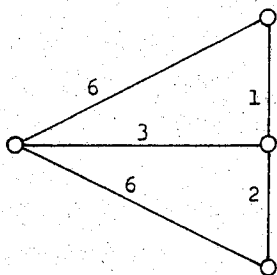
Kdyby měl náš cestující řešit svoji úlohu v grafu na obr. 5.5.2, zjistil by, že graf není hamiltonovský. V praxi by ovšem cestující věc vyřešil tak, že by do některého města zajel a vrátil se zpět. Můžeme tedy formulovat modifikovaný problém obchodního cestujícího jako úlohu nalézt v G uzavřený sled obsahující všechny uzly s minimálním



obr. 5.5.2.

součtem ohodnocení hran. Z grafu na obr. 5.5.3 vidíme, že v situaci, kdy G je hamiltonovský,

mají řešení oba problémy, a řešení modifikovaného problému může mít menší w -délku než řešení problému původního. Situace s algoritmickým řešením je zde obdobná jako u "obyčejného"



obr. 5.5.3.

problému obchodního cestujícího:

efektivní algoritmus není znám, ale není ani dokázána jeho neexistence.

Zde je ovšem třeba říci, co míníme pod pojmem "efektivní" algoritmus. Nejčastěji se používá přístup, založený na následujícím pozorování.

Algoritmy, které bývají považované za rychlé, potřebují zpravidla ke zpracování vstupních dat velikosti n čas, který je shora omezen funkcemi typu n^2 , n^3 , $n \log n$ apod. - k hornímu odhadu časové náročnosti výpočtu je tedy možno použít vhodný polynom. O algoritmech tohoto typu budeme hovořit jako o polynomiálních algoritmech. Naproti tomu algoritmy, které pracují metodou probírání všech možností (jako například postup, naznačený na obr. 5.5.1 nebo v příkladu v odst. 5.1), potřebují pro probrání všech těchto možností alespoň 2^n kroků (pokud probíráme všechny podmnožiny dané n -prvkové množiny), nebo je dolní odhad počtu kroků ještě pesimističtější ($n!$ při probírání všech permutací dané n -prvkové množiny, resp. n^n při probírání všech jejích zobrazení do sebe). U těchto algoritmů je tedy závislost počtu kroků na rozměru vstupních dat vyjádřena alespoň exponenciální funkcí. Takové algoritmy se nazývají exponenciální algoritmy.

Rozdíl mezi polynomiálními a exponenciálními algoritmy národně vynikne v tabulce 5.5.1, v níž je vyjádřen čas, potřebný ke zpracování dat velikosti n , pro různé funkce $f(n)$ za předpokladu, že provedení jedné operace trvá jednu mikrosekundu.

Tabulka 5.5.2 ilustruje danou skutečnost možná ještě názorněji. Vycházíme v ní z předpokladu, že jsme schopni daným algoritmem s časovou náročností $f(n)$ zpracovat v daném časovém limitu vstupní data velikosti $n = 100$ a ptáme se, jak se zvětší velikost úloh, které jsme schopni zpracovat ve stejném časovém limitu, jestliže zvýšíme rychlost výpočtu $10x$, $100x$,

resp. 1000x. Názorně zde vidíme, že pro exponenciální algoritmy je typické, že nad jistou mezní velikostí vstupních dat narážíme na bariéru, nad níž ani zvýšení rychlosti výpočtu o několik řádů nemůže zřetelně zvětšit velikost zpracovatelných úloh.

velikost vstupních dat n	počet operací f(n)				
	n^2	n^3	n^4	2^n	$n!$
10	0,1 ms	1 ms	10 ms	1 ms	3,6 s
15	0,2 ms	3 ms	50 ms	33 ms	15 dní
20	0,4 ms	8 ms	0,2 s	1 s	77000 let
40	1,6 ms	64 ms	2,6 s	12 dní	-
70	4,9 ms	0,3 s	24 s	$37 \cdot 10^6$ let	-
100	10 ms	1 s	100 s	-	-
500	0,25 s	125 s	17 hod	-	-
1000	1 s	17 min	12 dní	-	-

tab. 5.5.1

zrychlení výpočtu	počet operací f(n)				
	n^2	n^3	n^4	2^n	$n!$
1x	100	100	100	100	100
10x	316	215	177	103	100
100x	1000	464	316	106	100
1000x	3162	1000	562	109	101

tab. 5.5.2

Bylo by zde možno namítat, že u algoritmů, jejichž časová náročnost je vyjádřena polynomem n^{100} , $2^{100}n$ a podobně, se jedná o polynomiální algoritmy a přesto budou v praxi nepoužitelné - zkušenost však ukazuje, že u úloh, u nichž se podaří najít polynomiální algoritmus, se zpravidla dalším vývojem

podání snížit stupeň polynomu na "rozumnou" hodnotu (zpravidla nejvýše 3 - 4) a i koeficienty nebývají příliš velké. Jedinou dosud známou výjimkou zde je úloha reálného lineárního programování - v praxi běžně používaný simplexový algoritmus má v nejhorším možném případě exponenciální časový odhad, a přesto je pro úlohy "z praxe" výhodnější než nedávno nalezený polynomiální (Chačijanův) algoritmus. Nelze však vyloučit, že se tato situace změní s dalším vývojem a zdokonalováním zatím poměrně nového algoritmu.

Za efektivní algoritmy budeme tedy považovat algoritmy, pracující v polynomiálně omezeném čase a problémy, řešitelné polynomiálními (efektivními) algoritmy budeme nazývat problémy třídy P. Do třídy P patří všechny problémy, které jsme až dosud - před odst. 5.5 - poznali: minimální kostra, minimální a kritická cesta, distanční matice. Všimněme si, že algoritmy, řešící tyto úlohy, pracují vesměs deterministicky, tj. v každém kroku je jednoznačně určen krok následující.

Na druhé straně, existuje třída úloh, pro které prostě z principiálních důvodů není možné získat efektivní algoritmus. Uvažme např. problém generování všech koster daného souvislého neorientovaného grafu: počet koster může dosahovat n^{n-2} a trvá-li generování jedné kostry c časových jednotek, pak pro generování všech koster může být třeba až $c \cdot n^{n-2}$ časových jednotek. Podobná situace je u problémů generování cyklů, kružnic, cest, řezů atd.

Vedle těchto dvou skupin je třetí skupina úloh, pro které dosud není nalezen algoritmus, pracující v polynomiálně omezeném čase, ale není také dokázána jeho neexistence. Pro tyto úlohy je charakteristické, že podaří-li se nám "náhodou"

nalézt řešení, pak je možné v polynomiálním čase prověřit jeho správnost; ovšem k nalezení tohoto řešení jsou známy pouze algoritmy nedeterministické (tj. v podstatě probírající všechny možnosti), jejichž počet kroků je nejméně exponenciální. Stejnou náročnost má ovšem i zodpovězení otázky existence řešení v případě, kdy odpověď je záporná.

Snadnost důkazu správnosti řešení je zřejmá u úloh, které mají konstruktivní nebo rozhodovací charakter (např. úloha nalezení hamiltonovské kružnice), není však tak zřejmá u optimalizačních úloh typu "nalezněte přípustné řešení s minimální hodnotou" (např. úloha obchodního cestujícího). Každé takové úloze je však možno přiřadit rozhodovací úlohu typu "rozhodněte, jestli existuje přípustné řešení s hodnotou nejvýše k " a z její složitosti usuzovat na složitost původní úlohy - tato rozhodovací úloha již vlastnost snadného důkazu správnosti má.

Třída těchto úloh, řešitelných nedeterministicky v polynomiálním čase, se nazývá třída NP (nedeterministicky polynomiální) a obecně platí $P \subset NP$. Není ale dosud známo, jestli je $P = NP$ nebo jestli platí $P \neq NP$. A co více: ve třídě NP existuje celá řada úloh, o nichž je dokázáno, že v případě, kdyby se nám podařilo najít polynomiální algoritmus pro některou z nich, pak bychom byli schopni z něj zjistit v polynomiálním čase řešení všech ostatních úloh. Úlohy této podskupiny třídy NP jsou tedy co do efektivnosti řešení ekvivalentní - buďto jsou všechny řešitelné v polynomiálním čase, nebo jsou všechny exponenciální. Dosud však není známo, který z těchto dvou případů nastává. Tyto úlohy se nazývají NP-úplné a z úloh, které jsme dosud poznali, do této skupiny

náleží problém existence hamiltonovské kružnice, problém obchodního cestujícího a modifikovaný problém obchodního cestujícího. V současné době je známo přes 300 NP-úplných problémů a jejich počet stále roste. Patří sem úlohy z nejrůznějších oblastí: z kombinatoriky a teorie grafů (např. problém nalezení maximálního úplného podgrafu, problém nalezení cesty maximální w-délky bez předpokladu acykličnosti, problém nalezení cesty minimální w-délky v grafu s obecným reálným - tj. i záporným - ohodnocením hran a všechny analogie těchto problémů v orientovaných, resp. neorientovaných grafech), dále úlohy z operační analýzy a teorie rozvrhování, z teorie kódování, celočíselného lineárního programování (pro úlohu reálného lineárního programování je znám polynomiální algoritmus), z teorie čísel aj. Problém efektivní řešitelnosti těchto úloh, tj. otázka, zda je $P = NP$ nebo $P \neq NP$, zvaný NP-problém, je zařazován mezi nejdůležitější otevřené problémy v celé moderní matematice a přes velké úsilí zůstává dosud nevyřešen. Všeobecně se ale předpokládá, že tyto třídy rovny nejsou, neboť jinak by existovaly pro stovky dosud popsanych NP-úplných problémů efektivní algoritmy. Někteří autoři dokonce hovoří o NP-úplných problémech jako o úlohách z praktického hlediska neřešitelných.

V optimalizačních úlohách (jako např. problém obchodního cestujícího), má smysl hledat alespoň aproximaci optima. Takový aproximační algoritmus bývá nazýván též heuristický nebo stručně heuristika. Takové algoritmy jsou založeny na nějakém kritériu, na základě kterého při probírání rozhodovacího stromu jsou při řešení úlohy některé směry probírání (tj. některé části stromu řešení) zavrhovány jakožto

"neperspektivní", čímž obdržíme deterministický algoritmus a časová náročnost algoritmu se velmi podstatně sníží. Je ovšem zřejmé, že nemáme-li k dispozici charakterizační větu, což je u NP-úplných problémů pravidlem, může se nám stát, že zavrhneme jako neperspektivní tu část stromu, jež vede k optimálnímu řešení. Heuristický algoritmus nám tedy jako výsledek poskytuje nikoliv skutečné optimum, ale jen jeho aproximaci - je však evidentní, že nalezení heuristiky, která by tuto "nectnost" neměla, by bylo ekvivalentní s důkazem, že $P = NP$, tj s kladným řešením NP-problému.

5.6 Toky v sítích

Teorie toků v sítích je motivována úlohami z kategorie tzv. dopravních problémů, v nichž je cílem optimalizovat přepravu nějakého produktu v transportní síti, ale nachází řadu aplikací i v jiných oblastech.

A) Existence toku v síti

Definice. Síť je orientovaný graf \vec{G} s ohodnocením hran $r: H(\vec{G}) \rightarrow (0, \infty)$ a s ohodnocením uzlů $a: U(\vec{G}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Síť je tedy orientovaný graf s kladným ohodnocením hran a reálným (připouštíme i záporné hodnoty) ohodnocením uzlů.

V tomto odstavci budeme vždy považovat uzly grafu \vec{G} za očíslované čísla $1, \dots, n$ (kde $n = |U(\vec{G})|$). Ohodnocení $a(i)$ uzlu $i \in U(\vec{G})$ budeme krátce značit a_i a obdobně ohodnocení $r((i,j))$ hrany $(i,j) \in H(\vec{G})$ budeme krátce značit r_{ij} ($i, j = 1, \dots, n$). Obdobný je i význam čísel x_{ij} v následující definici.

Definice. Buď \vec{G} síť s ohodnocením uzlů a_i a ohodnocením hran r_{ij} . Tok v síti je nezáporné hranové ohodnocení $x: H(\vec{G}) \rightarrow \langle 0, \infty \rangle$, splňující následující podmínky:

1. pro každý uzel $i \in U(\vec{G})$ platí

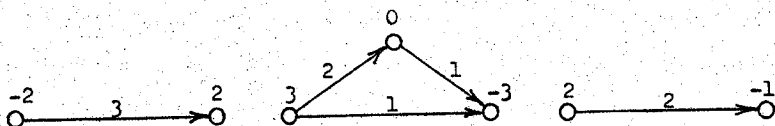
$$\sum_{j; (i,j) \in H(\vec{G})} x_{ij} - \sum_{j; (j,i) \in H(\vec{G})} x_{ji} = a_i,$$

2. pro každou hranu $(i,j) \in H(\vec{G})$ platí $0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}$.

Příklad. Máme jistou množinu měst očíslovaných čísly $1, \dots, n$ a tato města jsou spojena železniční sítí. Sestrojíme graf \vec{G} na n uzlech tak, že $(i, j) \in H(\vec{G})$ právě tehdy, jestliže i -té město je bezprostředně spojeno železnicí s j -tým městem (předpokládáme-li obousměrnost tratí, dostaneme vždy dvojici hran (i, j) a (j, i)). Ve zmíněných městech se vyrábí a spotřebovává tentýž produkt. Velikost výroby v i -tém městě za jednotku času označme b_i , velikost spotřeby za jednotku času označme c_i a položíme $a_i = b_i - c_i$ ($i = 1, \dots, n$). Označme r_{ij} celkové množství produktu, které lze převézt po trati (i, j) za jednotku času (obecně nemusí být $r_{ij} = r_{ji}$). Jestliže čísla x_{ij} mají význam skutečného množství produktu, které se za jednotku času přepraví po trati (i, j) , tj. z i -tého města do j -tého města, pak evidentně pro každou trať $(i, j) \in H(\vec{G})$ bude platit $0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}$, což je podmínka (2) z definice; v každém uzlu pak musí platit "zákon zachování", podle něhož rozdíl celkového množství produktu vyvezeného ("vytékajícího") z uzlu i po všech hranách $(i, j) \in H(\vec{G})$ a celkového množství produktu přivezeného ("vtékajícího") do uzlu i po všech hranách $(j, i) \in H(\vec{G})$ musí být rovno množství produktu, jež se v i -tém uzlu "nedostává" při $a_i < 0$, resp. jež v i -tém uzlu "přebývá" při $a_i > 0$, což je podmínka (1) naší definice.

Definice. Je-li $i \in U(\vec{G})$, pak se číslo a_i nazývá intenzita uzlu i ; pro $(i, j) \in H(\vec{G})$ se číslo r_{ij} nazývá propustnost hrany (i, j) . Pro $a_i > 0$ se uzel i nazývá zdroj, při $a_i < 0$ se uzel i nazývá stok. Je-li $a_i = 0$, budeme říkat, že uzel i je neutrální uzel.

Poznámka. Příklady sítí na obr. 5.6.1 ukazují, že v dané síti obecně nemusí tok existovat. Naším prvním úkolem tedy bude vyjasnění podmínek existence toku v síti.



obr. 5.6.1.

Definice. Pro každou množinu uzlů $A \subset U(\vec{G})$ označme $\bar{A} = U(\vec{G}) \setminus A$. Množina hran

$$(A, \bar{A}) = \{(x, y); x \in A, y \in \bar{A}\}$$

se nazývá řez sítě.

Poznámka. Čtenář se snadno přesvědčí, že naše definice řezu je orientovanou analogií pojmu hranového řezu, zavedeného v odst. 4.6: je-li G symetrizací souvislého orientovaného grafu \vec{G} a je-li R hranový řez G , pak z podmínky

$$\text{hod}(G - R) = \text{hod}(G) - l$$

vyplývá, že graf $G - R$ má právě dvě komponenty a označíme-li jejich množiny uzlů A a \bar{A} , bude $R = (A, \bar{A}) \cup (\bar{A}, A)$.

Označení. Buď G síť, $A \subset U(\vec{G})$ množina uzlů.

Je-li $f: U(\vec{G}) \rightarrow \mathbb{R}$ funkce na $U(\vec{G})$, označíme

$$f(A) = \sum_{i \in A} f_i$$

Je-li $g: H(\vec{G}) \rightarrow \mathbb{R}$ funkce na $H(\vec{G})$, označíme

$$g(A, \bar{A}) = \sum_{(i, j) \in (A, \bar{A})} g_{ij}$$

Věta 5.6.1. V síti existuje tok právě když $a(U(\vec{G})) = 0$ a pro každou množinu $A \subset U(\vec{G})$ je $a(A) \leq r(A, \bar{A})$.

Důkaz. 1. Dokážeme, že podmínky věty jsou pro existenci toku nutné. Předpokládejme tedy, že v síti existuje tok. Pak pro každou množinu $A \subset U(\vec{G})$ platí:

$$\begin{aligned} a(A) &= \sum_{i \in A} a_i = \sum_{i \in A} \left(\sum_{j; (i,j) \in H(\vec{G})} x_{ij} - \sum_{j; (j,i) \in H(\vec{G})} x_{ji} \right) = \\ &= \sum_{i \in A} \sum_{j; (i,j) \in H(\vec{G})} x_{ij} - \sum_{i \in A} \sum_{j; (j,i) \in H(\vec{G})} x_{ji} . \end{aligned}$$

V tomto výrazu je první člen roven celkovému součtu toků, vytékajících ze všech uzlů množiny A - z těchto toků některé směřují do jiných uzlů z A , některé do uzlů z \bar{A} ; první výraz je tedy roven $x(A,A) + x(A,\bar{A})$. Obdobně druhý výraz je roven celkovému součtu toků, vtékajících do všech uzlů A , z nichž některé přicházejí z uzlů z A , jiné z uzlů z \bar{A} , takže je roven výrazu $x(A,A) + x(\bar{A},A)$. Odtud dostáváme

$$a(A) = (x(A,A) + x(A,\bar{A})) - (x(A,A) + x(\bar{A},A)) ,$$

odkud

$$a(A) = x(A,\bar{A}) - x(\bar{A},A) . \quad \dots (*)$$

Protože $0 \leq x_{ij} \leq r_{ij}$, je $x(A,\bar{A}) \leq r(A,\bar{A})$ a $x(\bar{A},A) \geq 0$;

z (*) tedy vyplývá

$$a(A) \leq r(A,\bar{A})$$

a speciálně pro $A = U(\vec{G})$ je $\bar{A} = \emptyset$, takže $a(U(\vec{G})) = 0$.

2. Tvrzení o tom, že podmínky věty jsou postačující, dokážeme později po vyšetření jednoho důležitého speciálního případu.

B) Maximální tok

Jako speciální případ uvažujme síť s jedním zdrojem z a jedním stokem s ; všechny ostatní uzly sítě nechť jsou neutrální. Je-li intenzita zdroje rovna číslu $a \geq 0$, pak nutně musí mít stok intenzitu $-a$. Je-li $a = 0$, pak položíme-li $x_{ij} = 0$, jsou splněny obě podmínky z definice toku a tedy x_{ij} je tok. Položíme si následující otázku: jaká je maximální hodnota a , pro kterou v dané síti existuje tok. Takový tok se nazývá maximální tok ze z do s a příslušné číslo a se nazývá jeho velikost.

Definice. Buď (A, \bar{A}) řez sítě \vec{G} . Číslo $r(A, \bar{A})$ se nazývá propustnost řezu (A, \bar{A}) , řez s nejmenší propustností se nazývá minimální řez.

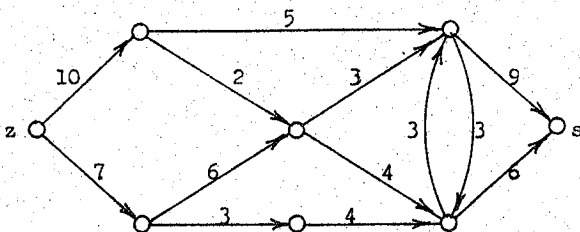
Jsou-li $u, v \in U(\vec{G})$ dva uzly, pak řekneme, že řez (A, \bar{A}) odděluje uzly u, v (v tomto pořadí!), jestliže $u \in A$ a $v \in \bar{A}$.

Věta 5.6.2 (Fordova-Fulkersonova). Buď \vec{G} síť s jediným zdrojem z a jediným stokem s . Velikost maximálního toku ze z do s je rovna propustnosti minimálního řezu, oddělujícího uzly z a s .

Speciálně, je-li (i, j) hrana minimálního řezu a x je maximální tok, pak $x_{ij} = r_{ij}$.

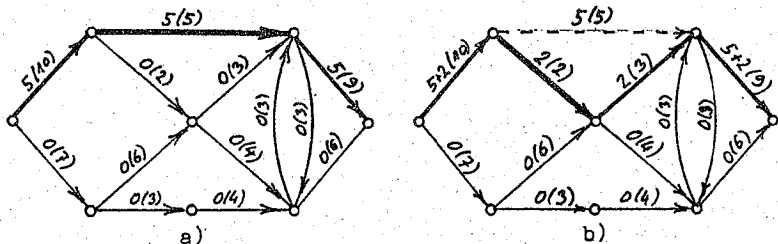
Poznámka. Jestliže pro hranu (i, j) platí $x_{ij} = r_{ij}$, pak říkáme, že hrana (i, j) je nasycená.

Příklad. Nalezněte maximální tok ze z do s v síti na obr. 5.6.2.

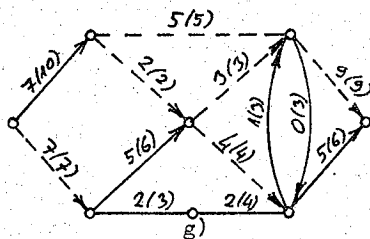
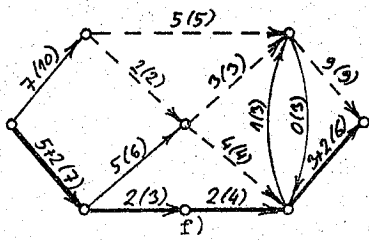
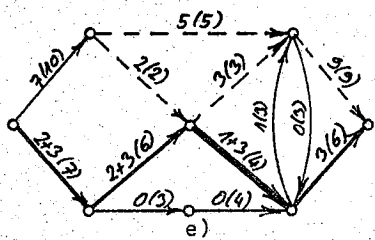
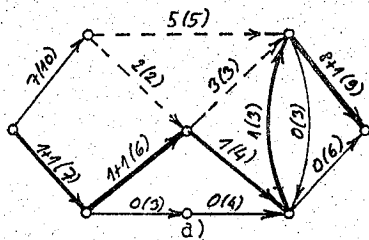
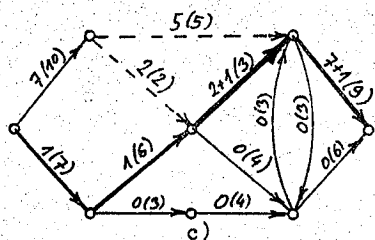


obr. 5.6.2.

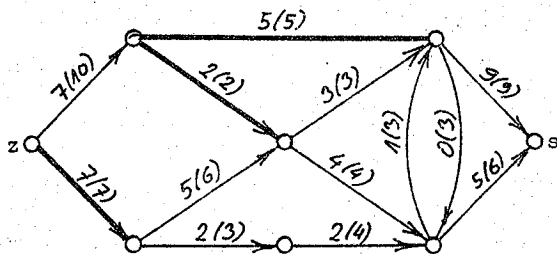
Hledaný maximální tok lze v jednoduchých případech najít "ručně" tzv. metodou horního obrysu, při níž vyjdeme z nulového toku a střídavě provádíme dva kroky: v prvním kroku zvyšujeme předchozí tok po cestě, představované horním obrysem sítě až do nasycení některé hrany této cesty a ve druhém kroku vypuštěním nasycené hrany (nebo hran) přecházíme k novému "hornímu obrysu". Postup řešení je ukázán na obr. 5.6.3 a) - g), kde je horní obrys vyznačen silně; výsledné řešení je na obr. 5.6.4, nasycené hrany minimálního řezu jsou vyznačeny silně. Velikost maximálního toku je 14 a snadno se přesvědčíme, že řešení není jediné (ale všechna řešení mají stejnou velikost toku 14). Pro rozlišení čísel x_{ij} a r_{ij} píšeme na obrázcích hodnoty propustností r_{ij} do závorek.



obr. 5.6.3.



obr. 5.6.3.



obr. 5.6.4.

Povšimněme si ještě této skutečnosti: jestliže v okamžiku, kdy se v procesu vypouštění nasycených hran stane graf \bar{G} nesouvislým (to je na obr. 5.6.3 g)) označíme A množinu uzlů komponenty, obsahující zdroj z , pak (A, \bar{A}) je minimální řez.

Důkaz věty 5.6.2. Je-li a velikost maximálního toku a (A, \bar{A}) libovolný řez, pak z věty 5.6.1 vyplývá, že platí $a \leq r(A, \bar{A})$. Mezi všemi řezy, oddělujícími z a s , najdeme takový, pro který nastává rovnost $a = r(A, \bar{A})$; takový řez je nutně minimální. Řez (A, \bar{A}) sestrojíme rekurentně následujícím postupem:

- a) $z \in A$,
- b) je-li $i \in A$ a pro některé $j \in U(\bar{G})$ platí $x_{ij} < r_{ij}$, pak také $j \in A$,
- c) je-li $i \in A$ a pro některé $j \in U(\bar{G})$ platí $x_{ji} > 0$, pak také $j \in A$.

Proces pokračuje, dokud je v síti nějaká hrana, splňující předpoklady kroku b) nebo kroku c).

Pro takto sestrojenou množinu A nutně $s \notin A$. Kdyby totiž bylo $s \in A$, tak by v symetrizaci \bar{G} existovala neorientovaná cesta P ze zdroje z do stoku s , která má tyto vlastnosti:

- hrany orientované od z k s (v P) jsou nenasycené,
- hrany orientované od s k z (v P) mají nenulový tok.

Označme:

$$\theta_1 = \min \{ r_{ij} - x_{ij} ; \{i, j\} \in H(P) \text{ a } (i, j) \text{ je orientovaná od } z \text{ k } s \}$$

$$\theta_2 = \min \{ x_{ij} ; \{i, j\} \in H(P) \text{ a } (i, j) \text{ je orientovaná od } s \text{ k } z \}$$

$$\theta = \min \{ \theta_1, \theta_2 \}$$

Definujme nový tok x' předpisem

$$x'_{ij} = x_{ij} + \theta, \text{ jestliže } \{i, j\} \in H(P) \text{ a } (i, j) \text{ je} \\ \text{orientována od } z \text{ k } s,$$

$$x'_{ij} = x_{ij} - \theta, \text{ jestliže } \{i, j\} \in H(P) \text{ a } (i, j) \text{ je} \\ \text{orientována od } s \text{ k } z,$$

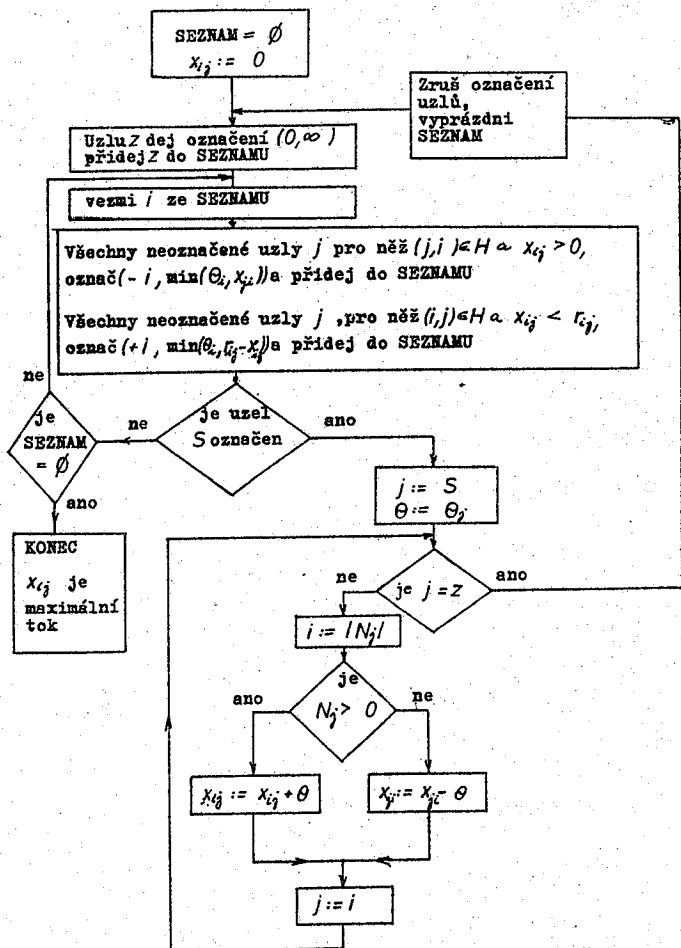
$$x'_{ij} = x_{ij}, \text{ jestliže } \{i, j\} \notin H(P).$$

Pak takto definovaný tok x' má větší velikost než x , což je spor s maximalitou toku x , Tím je dokázáno, že $s \notin A$.

Zbývá dokázat, že $a = r(A, \bar{A})$, ale to je zřejmé z toho, že $x(A, \bar{A}) = r(A, \bar{A})$ (neboť pro $(i, j) \in (A, \bar{A})$ je $x_{ij} = r_{ij}$), $x(\bar{A}, A) = 0$ (neboť pro $(i, j) \in (\bar{A}, A)$ je $x_{ij} = 0$) a ze vztahu (*) z důkazu věty 5.6.1.

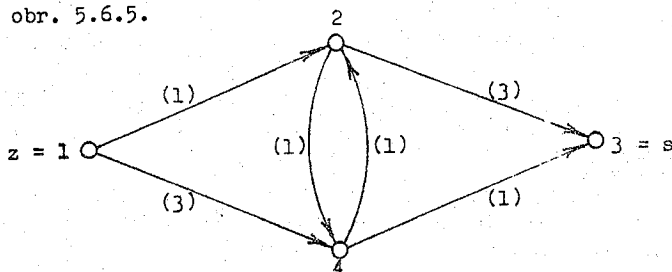
Na myšlenku, použité v důkazu věty 5.6.2 je založen algoritmus umožňující nalezení maximálního toku. Algoritmus vychází z nějakého výchozího toku (například nulového) a pracuje střídavě ve dvou etapách. V první etapě postupně od zdroje ke stoku prohledává nenасыcené hrany orientované od z k s a hrany s nenulovým tokem orientované od s k z , vyhodnocuje "rezervy" pro zvětšení toku a pomocí označování uzlů dvojicemi čísel (N_i, θ_i) hledá cestu od z k s , umožňující zvýšení toku - θ_i je hodnota, o kterou lze tok ze z do i zvětšit a N_i je uzel, přes který vede příslušná cesta. Ve druhé etapě je po takto nalezené cestě zvýšen předchozí tok a celý proces se opakuje, dokud v síti existuje cesta, umožňující zvýšení toku. Algoritmus se zastaví v okamžiku, kdy nenechá cestu umožňující zvýšení toku, a označíme-li A množinu uzlů, které při zastavení algoritmu mají označení, pak (A, \bar{A}) je minimální řez.

Algoritmus 5.6.1. (maximální tok v síti)



Poznámka. Algoritmus 5.6.1 pochází od Edmondse a Karpa (1972) a je zdokonalením původního Fordova-Fulkersonova algoritmu. Lze ukázat, že v síti s n uzly nalezneme maximální tok v nejvýše n^5 krocích. Nejlepší známé algoritmy jsou schopny nalézt maximální tok v n^3 krocích.

Příklad. Nalezněte maximální tok ze z do s v síti na obr. 5.6.5.



obr. 5.6.5.

Označení uzlů a hodnoty toku x_{ij} , které v jednotlivých krocích algoritmus 5.6.1 konstruuje, jsou shrnuty v následující tabulce.

	Označení uzlů				Hodnoty toku					
	1	2	3	4	x_{12}	x_{14}	x_{23}	x_{24}	x_{42}	x_{43}
1.krok	$(0, \infty)$	$(1, 1)$	$(2, 1)$	$(1, 3)$	1	0	1	0	0	0
2.krok	$(0, \infty)$	$(4, 1)$	$(4, 1)$	$(1, 3)$	1	1	1	0	0	1
3.krok	$(0, \infty)$	$(4, 1)$	$(2, 1)$	$(1, 2)$	1	2	2	0	1	1
4.krok	$(0, \infty)$			$(1, 1)$						

Minimální řez je (A, \bar{A}) , kde $A = \{1, 4\}$.

Příklad ("úloha diverzanta"). Graf \vec{G} popisuje telegrafní síť, A, B jsou dva uzly. Jaký minimální počet kabelů je nutno přerušit, aby z A do B nebylo možno poslat telegram?

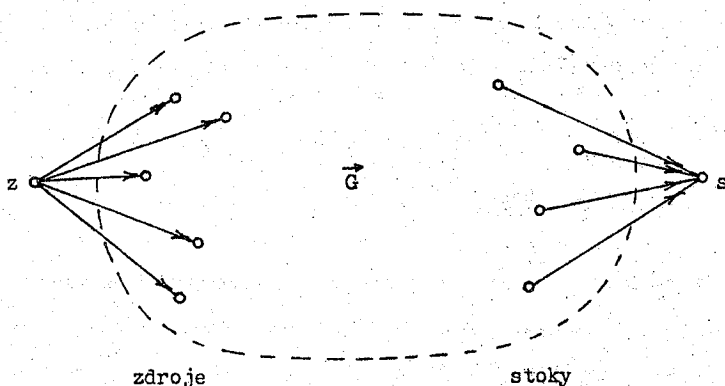
Přiřadíme-li všem hranám grafu \vec{G} propustnost $r_{ij} = 1$, pak je zřejmé hledaný počet kabelů (tj. hran \vec{G}) roven velikosti maximálního toku z A do B a hledaná minimální množina hran, která popisuje příslušné kabely, je množina hran minimálního řezu, oddělujícího A a B .

Dokončení důkazu věty 5.6.1. Vrátime se nyní k obecnému případu a dokážeme tvrzení o tom, že podmínky věty 5.6.1 jsou postačující pro existenci toku v síti s více zdroji a více stoky. Tvrzení dokážeme tak, že tok sestrojíme převedením na větu 5.6.2.

Nechť tedy v síti \vec{G} je $a(U(\vec{G})) = 0$ a pro každý řez (A, \bar{A}) je $a(A) \leq r(A, \bar{A})$. Sestrojíme novou síť s jedním zdrojem a jedním stokem tak, že k \vec{G} přidáme nový "fiktivní" zdroj z a nový "fiktivní" stok s a spojíme je s uzly sítě \vec{G} podle těchto pravidel:

- je-li $a_i > 0$, pak přidej hranu (z, i) s propustností a_i a uzlu i dej novou intenzitu $a_i = 0$,
- je-li $a_i < 0$, pak přidej hranu (i, s) s propustností $-a_i$ a uzlu i dej novou intenzitu $a_i = 0$,
- je-li $a_i = 0$, pak nedělej nic;

$i = 1, \dots, |U(\vec{G})|$ (viz obr. 5.6.6).



obr. 5.6.6.

Z předpokladu $a(A) \leq r(A, \bar{A})$ vyplývá, že řez $(\{z\}, \{\bar{z}\})$ je minimálním řezem, oddělujícím z a s ; podle věty 5.6.2 tedy existuje v nové síti tok, který nasycuje hrany řezu $(\{z\}, \{\bar{z}\})$. Je však zřejmé, že restrikce takto sestrojeného toku na \bar{G} je hledaný tok v \bar{G} .

Poznámka. V důkazu věty 5.6.1 je ukázána metoda, která umožňuje použít algoritmus 5.6.1 k nalezení toku v síti s více zdroji a více stoky v případě, kdy intenzity uzlů jsou pevně daná čísla (při pevně daných intenzitách ovšem nezkoumáme maximalitu, nýbrž existenci toku).

Pro síť s více zdroji a více stoky je však také možno formulovat analogii úlohy o maximálním toku - v takovém případě nejsou intenzity zdrojů a stoků předem dány, nýbrž se naopak ptáme na jejich maximální možné hodnoty, při nichž v síti existuje tok. Je zřejmé, že se úloha převede na úlohu o maximálním toku v síti s jedním zdrojem a stokem stejným obratem jen s tím rozdílem, že propustnosti nově přidaných hran se uvažují nekonečné (v praxi dostatečně velké číslo).

C) Optimální tok

V této části budeme uvažovat síť s více zdroji a více stoky s pevně danými intenzitami a budeme předpokládat, že v síti existuje tok. Obecně takových toků existuje více a je možno hledat tok z některého hlediska optimální. Přiřadíme proto každé hraně grafu \bar{G} další číslo c_{ij} , které budeme podle jednoho způsobu jeho interpretace nazývat cenou.

Definice. Buď \vec{G} síť s propustnostmi hran r_{ij} a s intenzitami uzlů a_i . Nechť pro každou hranu $(i, j) \in H(\vec{G})$ je dáno číslo $c_{ij} \in \mathbb{R}$, nazývané cena. Je-li x tok v \vec{G} , pak se číslo

$$c(x) = \sum_{(i, j) \in H(\vec{G})} c_{ij} x_{ij}$$

nazývá cena toku x . Tok v \vec{G} , který má minimální cenu, se nazývá optimální tok v \vec{G} .

Příklad (plánování přepravy nákladů). Jestliže v situaci, uvažované v příkladu na str. 171, mají čísla c_{ij} význam ceny za přepravu jednotky produktu po hraně (i, j) , pak má cena toku $c(x)$ význam celkových přepravních nákladů; optimální tok představuje rozvozní plán, který uspokojí dané přepravní nároky s minimálními celkovými náklady.

Příklad (plánování výroby a skladování). Uvažujme podnik, který musí každý měsíc plánovat svoji výrobu tak, aby byl schopen zabezpečit výrobu podle zadaného grafikonu, jehož hodnoty jsou kolísavé. V této situaci jsou různé způsoby řešení: je například možno každý měsíc vyrobit přesně tolik, kolik žádá grafikon - v tom případě však narůstají ztráty, způsobené kolísáním výroby. Je též možno udržovat konstantní výrobu a kolísání poptávky zabezpečovat pomocí skladu - při malé poptávce vyrábět pro sklad, při velké sklad vyprázdnit. V tomto případě narůstají skladovací náklady. Úkolem je nalézt takový plán výroby, aby celkové ztráty byly minimální.

Předpokládejme, že se na začátku ve skladu nachází d_0 jednotek produktu a označme:

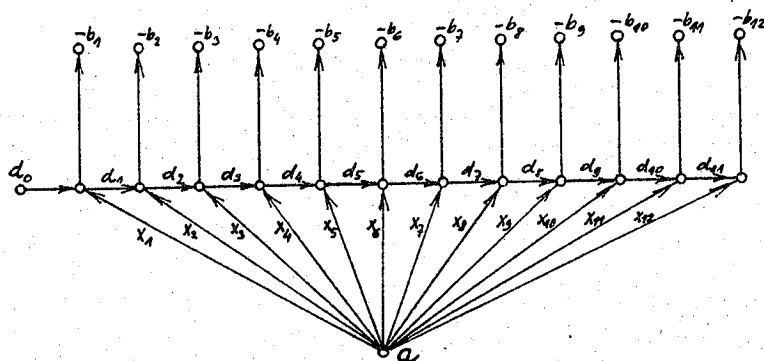
x_m produkci závodu v m -tém měsíci,

- b_m množství produktu, potřebné v m -tém měsíci,
 d_m množství produktu, nepoužitého na konci m -tého měsíce (tj. zásobu),
 c_m náklady na rozšíření výroby mezi m -tým a $(m+1)$ -tým měsícem,
 p_m náklady na skladování jednotky produktu mezi m -tým a $(m+1)$ -tým měsícem.

Pak se snadno přesvědčíme, že řešení naší úlohy se převede na úlohu o optimálním toku v síti na obr. 5.6.7, kde čísla x_m a d_m interpretujeme jako hodnoty toku a čísla c_m a p_m interpretujeme jako ceny; cena toku (kterou minimalizujeme), je dána výrazem

$$\sum_{m=1}^{11} c_m (x_{m+1} - x_m) + \sum_{m=1}^{11} p_m d_m ;$$

propustnosti všech hran se uvažují nekonečné.



obr. 5.6.7.

Intenzita a uzlu, z něhož vycházejí toky x_1, \dots, x_{12} , je dána výrazem $a = \sum_{i=1}^{12} b_i - d_0$; v i -tém neutrálním uzlu platí $x_i + d_{i-1} - d_i = b_i$, což je v souladu s formulací úlohy.

V předchozích dvou příkladech z podstaty úlohy vyplývalo, že ceny c_{ij} musí být kladná čísla. V následujícím příkladu uvidíme, že v praktických situacích se mohou vyskytnout i záporné ceny a tedy náš předpoklad $c_{ij} \in \mathbb{R}$ z definice optimálního toku má opodstatnění.

Příklad (úloha o skladu). Ve skladu, do něhož se vejde nejvýše k výrobků, je k dispozici k_0 výrobků. V průběhu n dnů se realizuje prodej a nákup těchto výrobků. Předpokládejme, že jsou známy:

- p_i - cena při prodeji jednoho výrobku v i -tý den,
- q_i - kupní cena (od dodavatele) jednoho výrobku v i -tý den pro doplnění skladu,
- s_i - náklady na skladování jednoho výrobku v i -tý den,
- Q - celkový počet výrobků, které je možno od dodavatele obdržet za uvažovaných n dnů.

Úkolem je určit:

- α_i - počet výrobků, prodaných v i -tý den,
- β_i - počet výrobků, koupených od dodavatele v i -tý den,
- r_i - počet skladovaných výrobků po prodeji starých,
- δ_i - počet skladovaných výrobků po koupi nových;

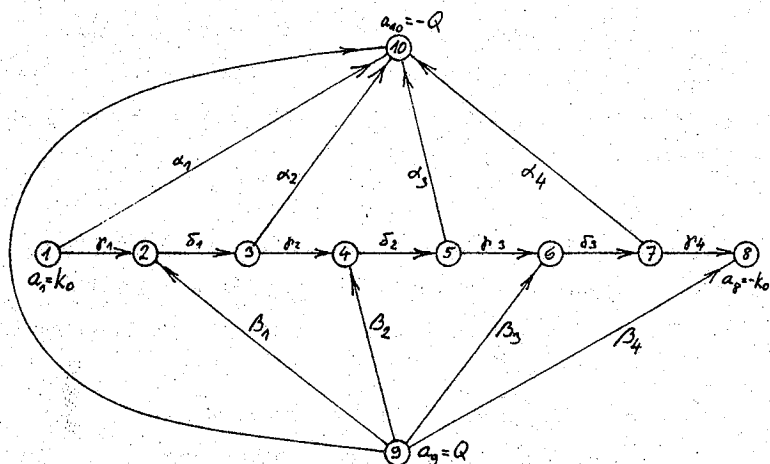
přičemž má být maximalizován celkový zisk

$$\sum_{i=1}^n (p_i \alpha_i - q_i \beta_i - s_i r_i) \quad ,$$

což je zřejmě ekvivalentní s minimalizací výrazu

$$\sum_{i=1}^n (-p_i \alpha_i + q_i \beta_i + s_i r_i) \quad .$$

Pro zjednodušení předpokládejme, že se požaduje, aby v n -tý den bylo ve skladu opět k_0 výrobků. Úloha se převede na úlohu o optimálním toku v síti, jež je pro $n = 4$ na obr. 5.6.8.



obr. 5.6.8.

Uzly 1, ..., 8 odpovídají stavům, v nichž se sklad nachází v jednotlivé dny: uzel 1 popisuje výchozí stav a má proto intenzitu $a_1 = k_0$, uzel 2 popisuje stav po prodeji části výrobků v první den atd., až uzel 8 popisuje konečný stav skladu a má proto intenzitu $a_8 = -k_0$; intenzity uzlů 2, ..., 7 jsou rovny nule. Uzel 9 odpovídá dodavateli, uzel 10 zákazníkovi. Protože $a_1 = -a_8$, musí také být $a_9 = -a_{10} = Q$. Vzhledem k tomu, že je možné, aby se koupilo a prodalo i méně než Q výrobků, je v síti fiktivní hrana (9,10) s nulovou cenou a nekonečnou propustností. Propustnosti hran $(i, i+1)$ pro $i = 1, \dots, 7$ jsou k , ostatní hrany mají nekonečnou propustnost. Hledaná čísla α_i , β_i , r_i interpretujeme jako hodnoty toku, čísla $-p_i$, q_i a s_i jako ceny a hledáme tok, který minimalizuje cenovou funkci

$$\sum_{i=1}^n (-p_i \alpha_i + q_i \beta_i + s_i r_i) .$$

Věta 5.6.3. Tok x_{ij} je optimální právě když existuje takové ohodnocení uzlů čísla V_i , $i = 1, \dots, n$, že

$$V_j - V_i \leq c_{ij}, \text{ jestliže } x_{ij} = 0,$$

$$V_j - V_i = c_{ij}, \text{ jestliže } 0 < x_{ij} < r_{ij},$$

$$V_j - V_i \geq c_{ij}, \text{ jestliže } x_{ij} = r_{ij}.$$

Čísla V_i jsou určena jednoznačně až na aditivní konstantu a lze je učinit nezápornými.

Čísla V_i , o nichž hovoří věta 5.6.3, se nazývají potenciály uzlů.

Před důkazem věty dokážeme jedno pomocné tvrzení.

Lemma. Pro každý tok x_{ij} a pro každá čísla V_i , $r_{ij} \geq 0$, pro která platí

$$V_j - V_i - r_{ij} \leq c_{ij},$$

platí nerovnost

$$\sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} c_{ij} x_{ij} \geq - \sum_{i=1}^n V_i a_i - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} r_{ij} r_{ij}.$$

Důkaz lemmatu. Z předpokladu lemmatu a z definice toku

vyplývá, že

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} c_{ij} x_{ij} \geq \\ & \equiv \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} V_j x_{ij} - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} V_i x_{ij} - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} r_{ij} x_{ij} = \\ & = - \sum_{i=1}^n V_i \left(\sum_{j; (i,j) \in H(\vec{G})} x_{ij} - \sum_{j; (j,i) \in H(\vec{G})} x_{ji} \right) - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} r_{ij} x_{ij} \geq \\ & \equiv - \sum_{i=1}^n V_i a_i - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} r_{ij} r_{ij}. \end{aligned}$$

Důkaz věty 5.6.3. 1. Dokážeme, že jestliže pro tok

x_{ij} existují potenciály uzlů V_i s vlastnostmi, danými větou 5.6.3, pak je tok x_{ij} optimální. Optimálnost toku dokážeme pomocí lemmatu: nerovnost, která je v něm dokázána, dává dolní odhad ceny toku pro libovolný tok v síti a tedy tok, pro který v nerovnosti nastává rovnost, je nutně optimální.

Nechť je tedy dán tok x_{ij} a příslušné potenciály V_i . Z vlastností potenciálů vyplývá, že definujeme-li pro každou hranu $(i,j) \in H(\vec{G})$ číslo

$$r_{ij} = \max \{ 0, -c_{ij} - V_i + V_j \},$$

pak

$$V_j - V_i - r_{ij} \leq c_{ij}$$

a tedy čísla r_{ij} vyhovují předpokladům lemmatu. Protože však pro $x_{ij} > 0$ je $r_{ij} = V_j - V_i - c_{ij}$, platí

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} c_{ij} x_{ij} = \\ & = \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} V_j x_{ij} - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} V_i x_{ij} - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} r_{ij} x_{ij} = \\ & = - \sum_{i=1}^n V_i a_i - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} r_{ij} r_{ij} ; \end{aligned}$$

podle lemmatu tedy pro tok x_{ij} dosahuje cenová funkce své nejmenší možné hodnoty a tedy tok x_{ij} je optimální.

2. Nyní budeme naopak předpokládat, že tok x_{ij} je optimální a nalezneme potenciály uzlů V_i , splňující tvrzení věty. Označme $H(x)$ množinu všech hran (i,j) , pro které platí $0 < x_{ij} < r_{ij}$. Faktor $\vec{G}_x = (U(\vec{G}), H(x))$ grafu \vec{G} nazveme opora toku x_{ij} . Vždy lze bez újmy obecnosti předpokládat, že opora je souvislý graf (říkáme-li, že orientovaný graf je souvislý, míníme tím ovšem slabou souvislost). Kdyby tomu

tak nebylo, můžeme síť poněkud rozšířit tak, že tok ve staré síti se nezmění a opora toku v rozšířené síti bude již souvislá: v každé komponentě opory zvolíme jeden uzel, jehož intenzitu zmenšíme o dostatečně malé číslo ε , zavedeme nový fiktivní uzel s intenzitou $k \cdot \varepsilon$ (kde k je počet komponent opory) a vybrané uzly s tímto novým uzlem spojíme hranami s nulovou cenou a nekonečnou propustností. Je zřejmé, že optimální toky v obou sítích se na původním grafu shodují a opora nového toku je již souvislý graf.

Potenciály uzlů sestrojíme nyní následujícím postupem.

Zvolíme jeden uzel $i_0 \in U(\vec{G})$ a položíme $V_{i_0} = 0$. Pro všechny uzly $j \in U(\vec{G})$, pro něž je $(i_0, j) \in H(x)$, položíme

$$V_j = V_{i_0} + c_{i_0 j}$$

a pro všechny uzly $j \in U(\vec{G})$, pro něž je $(j, i_0) \in H(x)$, položíme

$$V_j = V_{i_0} - c_{j i_0}.$$

Tímto způsobem lze na základě hodnoty potenciálu každého uzlu určit hodnoty potenciálu pro všechny uzly, které s ním jsou v opoře spojeny hranou a pro které ještě není určen. Protože opora je souvislý faktor grafu \vec{G} , jsou tím určeny potenciály pro všechny uzly sítě.

Dokážeme, že při takto definovaných číslech V_i platí pro každou hranu $(i, j) \in H(x)$ vztah

$$V_j - V_i = c_{ij}.$$

Nechť tedy existuje hrana $(s, t) \in H(x)$ taková že

$V_t - V_s \neq c_{st}$. Jestliže spojíme v opoře $(U(\vec{G}), H(x))$ uzly

s a t s uzlem i_0 cestami P_s, P_t , pomocí nichž byl potenciál definován, a uvážíme-li, že hrana (s, t) nemůže patřit

žádné z těchto cest (neboť pak by bylo $V_t - V_s = c_{st}$), zís-

káme v symetrizaci grafu \vec{G} kružnici, obsahující hrany těchto dvou cest a hranu $\{s,t\}$; tuto kružnici označme C .

a) Nechť $V_t - V_s > c_{st}$. Pro každou hranu $(i,j) \in H(\vec{G})$ definujeme číslo y_{ij} takto:

$$y_{ij} = x_{ij} + \theta, \text{ jestliže } \{i,j\} \in H(C) \text{ a orientace hrany } (i,j) \text{ v } C \text{ souhlasí s orientací } (s,t),$$

$$y_{ij} = x_{ij} - \theta, \text{ jestliže } \{i,j\} \in H(C) \text{ a orientace hrany } (i,j) \text{ v } C \text{ je opačná než orientace } (s,t),$$

$$y_{ij} = x_{ij}, \text{ jestliže } \{i,j\} \notin H(C),$$

kde $\theta > 0$ je dostatečně malé číslo (lze je definovat obdobně jako v důkazu věty 5.6.2). Je zřejmé, že y_{ij} je také tokem v naší síti; přitom však platí

$$\begin{aligned} & \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} c_{ij} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in H(\vec{G})} c_{ij} y_{ij} = \\ &= \sum_{(i,j) \in H(C)} c_{ij} x_{ij} - \sum_{(i,j) \in H(C)} c_{ij} y_{ij} = \\ &= \sum_{(i,j) \in H(C)} c_{ij} (\pm \theta) = \\ &= - \sum_{(i,j) \in H(P_s)} c_{ij} (\pm \theta) + c_{st} \cdot \theta - \sum_{(i,j) \in H(P_t)} c_{ij} (\pm \theta) = \\ &= - (V_s \cdot \theta + c_{st} \cdot \theta - V_t \cdot \theta) = \theta (V_t - V_s - c_{st}) > 0, \end{aligned}$$

což je spor s optimalitou toku x_{ij} .

b) Jestliže $V_t - V_s < c_{st}$, pak definujeme tok y_{ij} analogicky pro $\theta < 0$ a dostaneme obdobný spor.

Platí tedy $V_t - V_s = c_{st}$ pro všechny hrany (s,t) opory toku.

Obdobným způsobem lze ověřit, že potenciály V_i mají i všechny další vlastnosti, o nichž se hovoří ve větě 5.6.3.

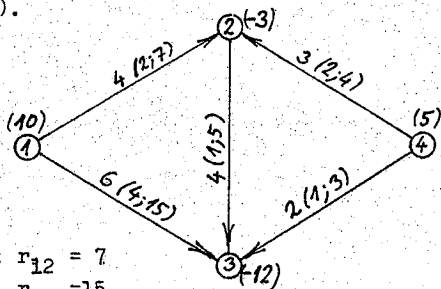
Postup, kterým jsme v důkazu věty sestrojili potenciály V_i , nám poskytuje metodu pro praktické sestrojení optimálního toku v síti.

Známe-li v síti nějaký výchozí tok (jenž se dá sestrojít například postupem ukázaným v druhé části důkazu věty 5.6.2), pak definujeme postupně (za předpokladu souvislosti opory - o jeho splnitelnosti jsme hovořili v důkazu věty 5.6.3) potenciály jednotlivých uzlů sítě a narazíme-li při jejich konstrukci na hranu, na níž nejsou splněny podmínky optimality, pak tok podle některé kružnice "vylepšíme". K takto vylepšenému toku pak opět sestrujeme potenciály a celý postup opakujeme tak dlouho, dokud v síti nacházíme hrany, na nichž nejsou splněny podmínky optimality. Výsledkem tohoto iteračního postupu je tedy optimální tok. Popsaná metoda nalezení optimálního toku se nazývá metoda potenciálů.

Příklad. V síti na obr. 5.6.9 nalezněte optimální tok (u každé hrany (i,j) píšeme do závorky čísla $(c_{ij}; r_{ij})$, bez závorek píšeme hodnoty toku).

intenzity: $a_1 = 10$
 $a_2 = -3$
 $a_3 = -12$
 $a_4 = 5$

ceny: $c_{12} = 2$ propustnosti: $r_{12} = 7$
 $c_{13} = 4$ $r_{13} = 15$
 $c_{23} = 1$ $r_{23} = 5$
 $c_{42} = 2$ $r_{42} = 4$
 $c_{43} = 1$ $r_{43} = 3$

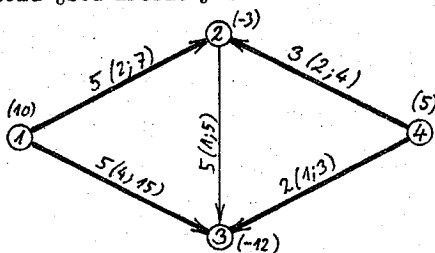


obr. 5.6.9.

V síti na obr. 5.6.9 je nakreslen výchozí tok $x_{12}=4$,

$x_{13}=6, x_{23}=4, x_{42}=3, x_{43}=2$. Protože ve všech hranách je nenulový tok a žádná není nasycená, je oporou toku celý graf. Budeme definovat potenciály uzlů: zvolíme $V_1 = 0$ a dále dostáváme

$V_1 = 0 \Rightarrow V_2 = 2$ (neboť $c_{12}=2$) $\Rightarrow V_3 = 3$ (neboť $c_{23}=1$), ale to je spor, protože $V_3 - V_1 = 3$, ale $c_{13} = 4$. Na hraně (1,3) je tedy rozdíl potenciálů menší než cena, a tedy tok touto hranou je třeba snížit pomocí změny podél kružnice s uzly 1, 2, 3, 1. To lze provést nejvýše o 1, neboť pak už se hrana (2,3) nasytí. Vylepšený tok vypadá takto: $x_{12} = 5, x_{13} = 5, x_{23} = 5, x_{42} = 3, x_{43} = 2$ (viz obr. 5.6.10; hrany opory nového toku jsou kresleny silně).



obr. 5.6.10.

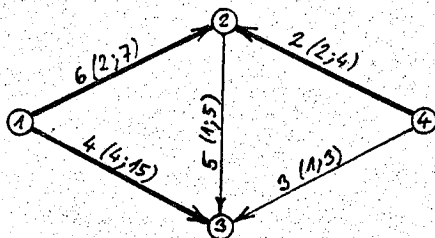
Pro tento tok opět definujeme potenciály:

$$V_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} V_2 = 2 & (\text{pomocí hrany } (1,2)) \\ V_3 = 4 & (\text{pomocí hrany } (1,3)) \end{cases}$$

Na hraně (2,3) platí $V_3 - V_2 = 2$ a $c_{23} = 1$, což je v souladu s podmínkami optimality ($V_3 - V_2 \geq c_{23}$, neboť hrana již je nasycená a tedy nepatří do opory). Definujeme tedy dále pomocí hrany (4,2) $V_4 = 0$. Na hraně (4,3) tak získáme $V_3 - V_4 = 4$ a $c_{43} = 1$, což je opět spor. Tok x_{43} je třeba zvětšit (rozdíl potenciálů je větší než cena) - podél kružnice s uzly 1, 2, 4, 3, 1 změním tok o 1 (o víc nelze, neboť hrana (4,3) se nasytí). Dostaneme tak tok $x_{12} = 6, x_{13} = 4, x_{23} = 5, x_{42} = 2, x_{43} = 3$ - viz obr. 5.6.11; hrany opory

jsou opět kresleny silně. Můžeme opět definovat potenciály:

$$V_1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} V_2 = 2 \\ V_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow V_4 = 0$$



obr. 5.6.11.

a podmínky optimality jsou již nyní splněny, takže tento tok je optimální.

Povšimněme si, že celková cena výchozího toku byla $8+24+4+6+2=44$, prvního opraveného toku $10+20+5+6+2=43$; celková cena výsledného optimálního toku je $12+16+5+4+3=40$.

Poznámky. 1. Na úlohy o tocích v sítích je možno převést i řadu grafových úloh, ve kterých "nikde nic neteče". Jestliže například v ohodnoceném orientovaném grafu \vec{G} (ve smyslu odst. 3.3) interpretujeme ohodnocení hran jako ceny, propustnosti považujeme za nekonečné, dva zvolené uzly u , v ohodnotíme intenzitami l a $-l$ a všechny ostatní uzly nulovými intenzitami, pak, je-li x_{ij} optimální tok, určuje množina hran (i,j) , pro něž $x_{ij} \neq 0$, minimální cestu z u do v .

2. Metodu potenciálů zde uvádíme pro její názornost. Jsou známy i jiné metody nalezení optimálního toku, jejich výklad však přesahuje rámec tohoto textu. Zájemce odkazujeme na speciální literaturu - např. [30], [12], [18].

Přehled literatury

V přehledu uvádíme knižní publikace v českém a slovenském jazyce a z cizojazyčných publikací díla nejzákladnějšího významu nebo relativně nejdostupnější.

Základními učebnicemi všeobecného charakteru, zahrnujícími více oblastí diskrétní matematiky, jsou publikace [28], [22], [42] a poněkud aplikačněji zanářená [6]. Výhradně směrem k obsahu 1. kapitoly těchto skript jsou zaměřeny publikace [29], [15] a [48].

Z publikací, zabývajících se výhradně nebo převážně teorií grafů, jsou elementárními učebnicemi, poskytujícími základní poučení, např. knížky [45], [8], [36], [53] a [14]. Kniha [37] je monografií, v níž je možno nalézt základní informaci o většině témat a množství odkazů na další literaturu pro hlubší studium. Charakter učebnice má i publikace [27]. Z cizojazyčné literatury jsou pracemi základního významu např. publikace [20], [55], [56], [52], [38], [2], [13], [5], [4], [10], [47], [32], [50] a mnohé jiné. Mnoho základních výsledků v přehledné formě lze nalézt v obsáhlé knize [33] a ve velmi pěkné učebnici [7]. V některých z těchto publikací lze kromě definicí a vět najít i jiné informace: např. [8] obsahuje stručný rusko-slovenský, anglicko-slovenský a česko-slovenský slovník odborných termínů z teorie grafů, [33] obsahuje poznámky z historie teorie grafů a v [20] čtenář nalezne seznam všech neizomorfních neorientovaných grafů do 6 uzlů, orientovaných grafů do 4 uzlů a stromů do 10 uzlů.

Základní poučení o grafech se zřetelem na aplikace lze nalézt v knihách [12], [19], [46], [26], [24] a [40] a v již citovaných [6] a [42]. Hlubší poučení o algoritmických aspektech grafových problémů včetně otázek NP-úplnosti čtenář nalezne např. v [30], [41], [35], [21], [39], [34] a [43]. Specializovanou knihou o NP-problému s dosud nejúplnějším seznamem NP-úplných problémů je [18].

Specializovanými publikacemi, zabývajícími se teorií toků v sítích, jsou především klasická monografie [17] (jež je však výborná i jako učebnice) a dále [18], [23] a [3]; kapitola o této problematice je však obsažena v téměř každé učebnici - namátkou [27], [30], [12], [6], [44],... Algoritmické aspekty toků v sítích jsou podrobně diskutovány v [30]. Publikace [51] a [54] se zabývají výhradně otázkami souvisejícími s plánováním pomocí kritické cesty.

Práce typu [9], [25], [1] jsou specializovanými monografiemi, jejichž studium předpokládá jisté předběžné znalosti. Použití teorie grafů v lineární algebře jsou věnovány některé pasáže knihy [16], naopak o aplikacích algebraických metod v teorii grafů se lze poučit např. v [11], [49], [3] a [31].

- [1] Aigner, M.: Combinatorial theory. Springer, 1979. Ruský překlad: Mir, Moskva, 1982.
- [2] Andrásfai, B.: Introductory graph theory. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1977.
- [3] Andrásfai, B.: Graph theory: Flows, matrices. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1991.
- [4] Behzad, M., Chartrand, G.: Introduction to the theory of graphs. Allyn and Bacon, Boston, 1971.

- [5] Berge, C.: Graphs and hypergraphs. North-Holland Publ. Co., Amsterdam, 1973.
- [6] Bertziss, A.T.: Štruktúry dát. Alfa, Bratislava, 1979.
- [7] Bondy, J.A., Murty, U.S.R.: Graph theory with applications. MacMillan Press Ltd., London, 1979.
- [8] Bosák, J.: Grafy a ich aplikácie. Alfa, Bratislava, 1980.
- [9] Bosák, J.: Rozklady grafov. Veda, Bratislava, 1986.
- [10] Busacker, R.G., Saaty, T.L.: Finite graphs and networks. New York, McGraw-Hill, 1968. Ruský preklad Nauka, Moskva, 1974.
- [11] Cvetkovic, D.M., Doob, M., Sachs, H.: Spectra of graphs - Theory and application. VEB Deutscher Verlag der Wiss., Berlin, 1982.
- [12] Čulík, K., Doležal, V., Fiedler, M.: Kombinatorická analýza v praxi. SNTL, Praha, 1967.
- [13] Deo, N.: Graph theory with applications to engineering and computer science. Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1974. Poľský preklad PWN, Warszawa, 1980.
- [14] Demel, J.: Grafy. MVŠT, sešit XXXIV, SNTL, Praha, 1988.
- [15] Faure, R., Heurgonová, E.: Uspořádání a Booleovy algebry. Academia, Praha, 1984.
- [16] Fiedler, M.: Speciální matice a jejich použití v numerické matematice. SNTL, Praha, 1981.
- [17] Ford, L.R., Fulkerson, D.R.: Flows in networks. Princeton Univ. Press, 1962. Ruský preklad Mir, Moskva, 1966.
- [18] Garey, M.R., Johnson, D.S.: Computers and intractability: A guide to the theory of NP-completeness. W.H. Freeman & Co., San Francisco, 1979. Ruský preklad Mir, Moskva, 1982.
- [19] Gluškov, V.M.: Počítačové sítě. SNTL, Praha, 1982.
- [20] Harary, F.: Graph theory. Reading, Addison Wesley, 1969. Ruský preklad Mir, Moskva, 1973.
- [21] Christofides, N.: Graph theory, An algorithmic approach. Academic Press, London, 1975. Ruský preklad Moskva, 1978.
- [22] Jablonskij, S.V.: Úvod do diskretnéj matematiky. Alfa, Bratislava + SNTL, Praha, 1984.

- [23] Jermoljev, Ju.M., Melnik, I.M.: Ekstremalnyje zadači na grafach. Naukova Dumka, Kyjev, 1968.
- [24] Jevstignějev, V.A.: Primenenije teorii grafov v programmirovanii. Nauka, Moskva, 1985.
- [25] Jucovič, E.: Konvexné mnohosteny. Veda, Bratislava, 1981.
- [26] Kaufmann, A.: Introduction a la combinatorique en vue des applications. Dunod, Paris, 1968. Ruský překlad (Vvedenije v prikladnuju kombinatoriku), Nauka, Moskva, 1975.
- [27] Kolář, J.: Grafy. Skripta ČVUT - FE, Praha, 1984.
- [28] Kolář, J., Štěpánková, O., Chytil, M.: Logika, algebry a grafy. SNTL, Praha, 1989.
- [29] Kopka, J." Svazy a Booleovy algebry. Univerzita J. E. Purkyně, Ústí n.L., 1992.
- [30] Kučera, L.: Kombinatorické algoritmy. SNTL, Praha, 1983.
- [31] Kučera, L., Nešetřil, J." Algebraické metody diskrétní matematiky. SNTL, Praha, 1989.
- [32] Kulikowski, L.T.: Zarys teorii grafów. PWN, Warszawa, 1986.
- [33] Lovász, L.: Combinatorial problems and exercises. Akadémiai Kiadó, Budapest, 1979.
- [34] Minieka, E.: Optimization algorithms for networks and graphs. M. Dekker, New York, 1978. Ruský překlad Moskva, 1981.
- [35] Morávek, J.: Složitost výpočtů a optimální algoritmy. Cesta k věděni, Academia, Praha, 1984.
- [36] Nečas, J.,: Grafy a jejich použití. SNTL, Praha, 1978.
- [37] Nešetřil, J.: Teorie grafů. SNTL, Praha, 1979.
- [38] Ore, O.: Theory of graphs. AMS, Providence, 1962. Ruský překlad Mir, Moskva, 1968.
- [39] Papadimitriou, Ch.H., Steiglitz, K.: Combinatorial optimization: Algorithms and complexity. Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1982. Ruský překlad Mir, Moskva, 1985.
- [40] Phillips, D.T., Garcia-Diaz, A.: Fundamentals of network analysis. Prentice-Hall, 1981. Ruský překlad Mir, Moskva, 1984.

- [41] Plesník, J.: Grafové algoritmy. Veda, Bratislava, 1983.
- [42] Preparata, F.P., Yeh, R.T.: Úvod do teórie diskretných matematických štruktúr. Alfa, Bratislava, 1982.
- [43] Rheingold, E.M., Nivergelt, J., Deo, N.: Combinatorial algorithms: theory and practice. Prentice-Hall, 1977. Ruský preklad" Mir, Moskva, 1980.
- [44] Rybnikov, K.A.: Vvedeniye v kombinatornyy analiz. Izd. Mosk. Univ., Moskva, 1985.
- [45] Sedláček, J.: Úvod do teorie grafů. Academia, Praha, 1981.
- [46] Seshu, S., Reed, M.B.: Linear graphs and electrical networks. Reading, Addison-Wesley Publ. Co., 1961.
- [47] Swamy, M.N.S., Thulasiraman, K.: Graphs, networks and algorithms. John Wiley, New York, 1981. Ruský preklad Mir, Moskva, 1984.
- [48] Šalát, T.: Algebra a teoretická aritmetika. Alfa, Bratislava, 1986.
- [49] Tarakanov, V.E.: Kombinatornyye zadači i $(0,1)$ -matricy. Nauka, Moskva, 1985.
- [50] Tutte, W.T.: Graph theory. Addison-Wesley, 1984. Ruský preklad Mir, Moskva, 1988.
- [51] Walter, J., Vejmola, S., Fiala, P.: Aplikace metod síťové analýzy v řízení a plánování. SNTL, Praha, 1989.
- [52] Wilson, R.J.: Introduction to graph theory. Oliver and Boyd, Edinburgh, 1972. Polský preklad PWN, Warszawa, 1985.
- [53] Zelinka, B.: Rovinné grafy. Mladá fronta, Praha, 1977.
- [54] Zuchovickij, S.I., Radčiková, I.A.: Matematické metody síťové analýzy. SNTL, Praha, 1973.
- [55] Zykov, A.A.: Teoriya konečnych grafov I. Nauka, Novosibirsk, 1969.
- [56] Zykov, A.A.: Osnovy teorii grafov. Nauka, Moskva, 1987.

Název:	Lineární algebra II - I. + II. část Úvod do diskrétní matematiky
Autor:	Doc.RNDr. Jiří Holenda, CSc. Doc.RNDr. Zdeněk Ryjáček, CSc.
Vydavatel:	Západočeská univerzita v Plzni
Určeno:	I. roč. FAV - všechna zaměření
Vedoucí katedry:	Prof.RNDr. Pavel Drábek, DrSc.
Vyšlo:	duben 1992
Počet stran celkem:	220
Počet obrázků celkem:	123
Počet příloh celkem:	-
AA / VA celkem:	10,13 / 10,71
Vydání:	I.
Náklad:	400 výtisků
Číslo publikace:	516
Tiskárna:	ZČU v Plzni
Cena za I. + II. část:	27,— Kčs

55 - 070 - 92

17/31 Kčs 27,—