ZÁPADOČESKÁ UNIVERZITA
se sídlem v Plzni

Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Sbírka řešených příkladů z počtu pravděpodobnosti

Jan Brousek
Zdeněk Ryjáček

Plzeň, 1992

ISBN 80 – 7082 – 063 – 2

Obsah

Předmluva

Tato skripta jsou určena především posluchačům FAV, FEL a FSI Západočeské univerzity jako doplňkový text k předmětům, zabývajících se počtem pravděpodobnosti a matematickou statistikou, tj. k předmětům „Pravděpodobnost a statistika“ na FAV a FEL a předmětům „Matematika IV“ a „Statistická analýza“ na FSI.

Skripta jsou prvním dílem zamýšleného dvoudílného celku. V prvním dílu se zabýváme základními pojmy počtu pravděpodobnosti a jsou zde obsaženy též základní statistické tabulky, druhý díl, který je v současné době připravován, bude věnován matematické statistice. Text je koncipován jako sbírka příkladů a nikoliv jako učebnice. Přehled definic a vět, uváděný v úvodní části každé kapitoly je proto nutno chápat skutečně jen jako přehled, sloužící k připomenutí potřebných pojmů a vět - pouze u první kapitoly je výklad poněkud podrobnější, neboť obsažená látka by měla mít charakter opakování a prohlubování středoškolských znalostí a v některých z uvedených předmětů je proto probírána jen na cvičeních. Navíc je nám známo, že na některých středních školách není uvedená látka probírána vůbec nebo jen velmi povrchně.

Těžiště skript je tedy ve druhé části každé kapitoly, nazvané Příklady, kde si čtenář může samostaně prověřit stupeň pochopení učiva z přednášek; některé příklady, mající teoretický charakter, slouží navíc ke zdůraznění některých závažných souvislostí. Každá kapitola je potom ukončena krátkou částí nazvanou Kontrolní otázky a cvičení, která by měla sloužit ke zopakování si základních pojmů a typů příkladů. Většina uvedených otázek a cvičení je tudíž bez výsledků.

Je naší milou povinností poděkovat RNDr. Jiřímu Reifovi, CSc. za cenné připomínky a náměty, které podstatnou měrou přispěly ke zkvalitnění textu. Rovněž děkujeme RNDr. Světlaně Tomiczkové a sekretářkám katedry matematiky Janě Lepičové a Ivě Sulkové za nevšední píli a péči, kterou věnovaly přepisu rukopisu skript. Jsme si vědomi toho, že žádný text není a nemůže být dokonalý, a proto uvítáme jakékoliv připomínky či náměty, které by mohly přispět ke zkvalitnění skript v jejich případném dalším vydání.

Plzeň, duben 1992

Autoři

Kapitola 1

Elementární počet pravděpodobnosti

Přehled definic a vět

1.1 Náhodný pokus, náhodný jev

U některých pokusů se při dodržení stejných podmínek pokusu dostaví vždy týž výsledek. Počet pravděpodobnosti se však zabývá těmi pokusy, u kterých nelze výsledek předpovědět ani při týchž podmínkách při jeho provádění z toho prostého důvodu, že výsledky mohou být různé. Jedná se např. o hazardní hry, jejichž studiem ostatně byly položeny základy počtu pravděpodobnosti, ale také například o jakost namátkou vybraného výrobku ze zásilky, počet telefonních hovorů na ústředně za jednotku času apod. Z této vlastnosti takových pokusů vycházejí dvě základní definice počtu pravděpodobnosti.

Definice Náhodný pokus *je každá činnost, jejíž výsledek není předem jednoznačně určen podmínkami, za nichž probíhá, a která je, alespoň teoreticky, neomezeně opakovatelná.*
Náhodný jev *je jakékoli tvrzení o výsledku náhodného pokusu, o kterém lze po skončení pokusu říci, jestli nastalo nebo ne. U termínu náhodný jev budeme v dalším textu většinou slovo náhodný vynechávat a budeme mluvit pouze o jevu. Jevy značíme většinou velkými písmeny latinské abecedy.*

U náhodného pokusu tedy nelze dopředu říci, jaký bude výsledek a o většině jevů nemůžeme dopředu říci, zda nastanou nebo ne. Ke každému jevu lze ovšem přiřadit číslo, které nám udává, jak často asi daný jev nastává. Tomuto číslu se říká pravděpodobnost jevu. Tuto pravděpodobnost je však třeba přesně definovat. V minulosti, prakticky až do minulého století, se používaly dvě definice, které vycházejí každá z jiného přístupu - pravděpodobnostního nebo statistického.

Pravděpodobnostní přístup spočívá v tom, že na základě úvahy o podstatě jevu usuzujeme o výsledku experimentu. V minulosti vedl tento přístup k tzv. klasické definici pravděpodobnosti. Naproti tomu při statistickém přístupu usuzujeme na podstatu jevu na základě experimentu. Při tomto přístupu se dostaneme ke statistické definici pravděpodobnosti. Čili při pravděpodobnostním uvažování postupujeme od teorie k praxi, při statistickém od praxe k teorii. Podívejme se nyní na to, jak to vypadá ve skutečnosti. Náhodným pokusem pro nás bude hod kostkou a náhodným jevem, budeme jej značit jev A tvrzení „padlo sudé číslo“.

Statistický přístup: opakujeme náhodný pokus a sledujeme výskyt jevu A. Označme nyní
N počet opakování náhodného pokusu,
N_A počet výskytů jevu A, tj. počet pokusů, při kterých jev A nastal.

Poměr $h(A) = \frac{N_A}{N}$ se nazývá *relativní četnost výskytu jevu A*. Při mnohonásobném opakování se potom mohou relativní četnosti vyvíjet např. takto: $\frac{7}{10}, \frac{12}{20}, \frac{23}{50}, \frac{53}{100}, \frac{256}{500}, \frac{482}{1000}$. Při zvětšujícím se počtu pokusů zjišťujeme, že relativní četnosti čím dále tím méně kolísají kolem jistého čísla, které pak nazveme pravděpodobností jevu A, přesněji

Definice (statistická definice pravděpodobnosti:) *Pravděpodobnost $P(A)$ jevu A je rovna*

$$P(A) = \lim_{N \to \infty} \frac{N_A}{N}.$$

Pravděpodobnostní přístup: provedeme myšlenkový experiment. Označme
n počet možných výsledků pokusu,
n_A počet výsledků pokusu, při nichž nastane jev A.

Předpokládejme, že možných výsledků je konečně mnoho a že všechny jsou „stejně pravděpodobné“ (zatím v intuitivním slova smyslu). Potom můžeme zavést následující definici.

Definice (Klasická definice pravděpodobnosti)

$$P(A) = \frac{n_A}{n}.$$

Tato definice se populárně vyslovuje ve tvaru zlomku

$$P(A) = \frac{\text{počet případů příznivých}}{\text{počet případů možných}}.$$

Historicky nejstarší je klasická definice pravděpodobnosti, bohužel se však záhy ukázalo, že na jejím základě nelze řešit zdaleka všechny situace, které praxe přinášela. Důvody jsou naznačeny již v předpokladech uvedených před touto definicí. Počet všech možných výsledků totiž konečný být nemusí a i v případě, že konečný je, nemusí být tyto výsledky „stejně pravděpodobné“.

Tyto problémy se pokusila v 19. století řešit statistická definice, která má však také velmi vážné nedostatky. Především předpokládá „nekonečné“ opakování pokusu, což samozřejmě není možné a dále existence limity ve statistické definici není nijak zaručena a tato definice nemůže tuto otázku sama o sobě vyřešit. Navíc tuto limitu nelze chápat jako limitu posloupnosti v obvyklém smyslu, nýbrž se jedná o tzv. konvergenci podle pravděpodobnosti. K této problematice se vrátíme ve čtvrté kapitole.

1.2 Operace s náhodnými jevy

Operace s náhodnými jevy připomínají množinové operace. Mají také obdobné vlastnosti, neboť jakýkoli jev lze interpretovat také jako „množinu všech příznivých výsledků pokusu“.

Definice *Řekneme, že jev A implikuje jev B nebo také, že jev A je podjevem jevu B (značíme $A \subset B$), jestliže jev B nastane vždy, kdykoli nastane jev A.*
Řekneme, že jevy A, B jsou si rovny nebo že jsou rovnocené, jestliže $A \subset B$. Značíme $A = B$.

Jev, který nastane nutně při každém opakování náhodného pokusu, se nazývá *jev jistý* a značí se Ω.
Jev, který nemůže nastat při žádné realizaci náhodného pokusu, se nazývá *jev nemožný* a značí se $\emptyset$.
Jev *opačný* (nebo též *doplňkový*) k jevu A (značený $\bar{A}$), je takový jev, který nastává právě tehdy, když nenastává jev A.
Průnikem jevů A, B (značeným $A \cap B$) rozumíme jev, který nastane právě tehdy, nastanou-li oba jevy A, B zároveň.
Sjednocením jevů A, B (značeným $A \cup B$) rozumíme jev, který nastane, kdykoli nastane alespoň jeden z jevů A, B.
Jevy, pro které $A \cap B = \emptyset$ nazýváme jevy *neslučitelnými*.
Rozdílem jevů A, B (značeným $A \setminus B$) rozumíme jev, který nastane právě tehdy, když jev A nastane, ale jev B nenastane.

Výše uvedené operace s jevy mají obdobné vlastnosti jako analogické operace s množinami. Shrneme si je v následující větě.

Věta 1.1 *Pro průnik a sjednocení jevů a pro jev opačný platí následující vztahy*

(a) $\emptyset \cap A = \emptyset, \emptyset \cup A = A,$

(b) $\Omega \cap A = A, \Omega \cup A = \Omega,$

(c) $\overline{\emptyset} = \Omega, \overline{\Omega} = \emptyset, \overline{\overline{A}} = A, A \cup \overline{A} = \Omega, A \cap \overline{A} = \emptyset,$

(d) de Morganovy vzorce

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B},$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

(e) distributivní zákony

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$$
$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

Pojmy průniku a sjednocení jevů můžeme, obdobně jako u množin, rozšířit na větší počet jevů. V následující definici budeme uvažovat (konečnou nebo nekonečnou) posloupnost jevů $A_1, A_2, \ldots$.

Definice Sjednocení *jevů* $A_1, A_2, \dots$ *(značíme* $A_1 \cup A_2 \cup \dots$ *nebo* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$*) je jev, který nastane právě tehdy, když nastane alespoň jeden z jevů* $A_1, A_2, \dots$. Průnikem *jevů* $A_1, A_2, \dots$ *(značíme* $A_1 \cap A_2 \cap \dots$ *nebo* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$*) rozumíme jev, který nastane právě tehdy, když nastanou všechny jevy* $A_1, A_2, \dots$*. Řekneme, že jevy* $A_1, A_2, \dots$ *jsou* neslučitelné, *jestliže* $\bigcap_{i=1}^{\infty} = \emptyset$*. Řekneme, že jevy* $A_1, A_2, \dots$ *jsou* párově neslučitelné, *jestliže pro každé* $i \neq j$ *platí* $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Jestliže pro párově neslučitelné jevy navíc platí $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$, pak o jevech $A_1, A_2, \dots$ říkáme, že tvoří *úplný systém neslučitelných jevů.*

Následující definice bude hrát klíčovou roli při tzv. axiomatické definici pravděpodobnosti.

Definice *Jev* E *se nazývá* elementárním jevem, *jestliže platí*

$$\emptyset \neq A \subset E \Rightarrow A = E$$

(tj. elementární jevy jsou minimální jevy různé od jevu nemožného). Množinu $\Omega = \{E_1, E_2, ...\}$ *budeme nazývat* prostor elementárních jevů. *Jevy, které nejsou elementární, se nazývají* složené.

Pro elementární jevy platí následující jednoduché, ale důležité tvrzení.

Věta 1.2 *Elementární jevy jsou párově neslučitelné, jinými slovy: jestliže* E_1, E_2 *jsou dva elementární jevy, pak buďto* $E_1 = E_2$ *nebo* $E_1 \cap E_2 = \emptyset$.

Důkaz Je-li $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$, pak z $(E_1 \cap E_2) \subset E_1$ vyplývá $E_1 \cap E_2 = E_1$ a z $(E_1 \cap E_2) \subset E_2$ vyplývá $E_1 \cap E_2 = E_2$ neboli $E_1 = E_2$.

■

Důsledek Právě jsme dokázali, že elementární jevy jsou párově neslučitelné. Jejich sjednocení je však evidentně jev jistý. Elementární jevy tudíž tvoří úplný systém neslučitelných jevů. Elementární jevy rovněž tvoří rozklad množiny Ω (je to nejpodrobnější možný rozklad této množiny, totiž rozklad na jednoprvkové podmnožiny množiny Ω). Obecně se dá říci, že jakýkoli úplný systém neslučitelných jevů tvoří rozklad množiny Ω a naopak jakýkoli rozklad této množiny definuje úplný systém neslučitelných jevů. Navíc jakýkoli jev A je podmnožinou Ω , je to množina všech elementárních jevů, které mají za následek nastoupení jevu A. Proto zápisy typu $A \cap B, A \setminus B$ atd. znamenají množinové operace v obvyklém smyslu, tudíž tvrzení uvedené v úvodu tohoto odstavce je oprávněné. Nemožný jev $\emptyset$ potom není ničím jiným než prázdnou množinou, jistý jev je potom celý prostor Ω.

1.3 σ-algebra jevů

Definice *Nechť Ω je neprázdná množina.*

Systém (tj. množina) $\mathcal{A}$ podmnožin množiny Ω se nazývá σ-algebra podmnožin množiny Ω, *jestliže platí*

(a) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(b) je-li $A \in \mathcal{A}$, *pak i* $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$,

(c) jsou-li $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \ldots$, *pak i* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$.

Pro σ-algebry dále platí

Věta 1.3 *Nechť $\mathcal{A}$ je σ-algebra podmnožin množiny Ω. Potom*

(a) $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathcal{A}$,

(b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$,

(c) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$,

(d) $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \ldots \Rightarrow \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Důkaz viz příklady.

■

σ-algebru tvoří např. systém všech podmnožin množiny Ω, který budeme značit $\exp \Omega$. V příkladech a v dalších kapitolách se potom seznámíme i s dalšími příklady σ-algeber.

1.4 Axiomatická definice pravděpodobnosti

Jak jsme již uvedli, klasická definice pravděpodobnosti je použitelná pouze v některých případech. Je tedy nutné její zobecnění, které však nesmí být s klasickou definicí v rozporu, lépe řečeno, klasická definice bude za jistých podmínek ekvivalentní definici axiomatické. Proto než uvedeme axiomatickou definici, provedeme nejprve několik jednoduchých pozorování.

Především je zřejmé, že pravděpodobnost jakéhokoli jevu nabývá hodnot pouze z intervalu $\langle 0, 1\rangle$. Dále je evidentně pravděpodobnost jistého jevu rovna jedné.

Uvažujme dále neslučitelné jevy A, B. Nechť jevu A je příznivých n_A případů, jevu B potom n_B případů. Potom jevu $A \cup B$ je příznivých $n_A + n_B$ případů a platí

$$P(A \cup B) = \frac{n_A + n_B}{n} = \frac{n_A}{n} + \frac{n_B}{n} = P(A) + P(B),$$

čili pravděpodobnost sjednocení dvou disjunktních jevů je rovna součtu pravděpodobností jednotlivých jevů. Klasická definice nám umožňuje rozšířit toto tvrzení na libovolný konečný počet neslučitelných jevů, není však schopna rozšířit ji i na nekonečný počet disjunktních jevů. Ukazuje se, že pozorované tři vlastnosti, tj. požadavek aby pravděpodobnost jakéhokoli jevu byla z intervalu $\langle 0, 1\rangle$, přitom pravděpodobnost jevu jistého rovna jedné a pravděpodobnost sjednocení neslučitelných jevů rovna součtu pravděpodobností, postačují ke vhodnému definování pravděpodobnosti.

Definice (Axiomatická definice pravděpodobnosti) *Nechť Ω je množina a $\mathcal{A} \subset \exp \Omega$ je σ-algebra podmnožin množiny Ω. Nechť $P : \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ je reálná funkce na $\mathcal{A}$, mající následující vlastnosti:*

(a) $0 \leq P(A) \leq 1$ *pro* $\forall A \in \mathcal{A}$

(b) $P(\Omega) = 1$

(c) Pro každou (konečnou nebo nekonečnou) posloupnost $\{A_i\}$ takovou, že $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2 \ldots$ a $A_i \cap A_j = \phi$ pro $i \neq j$, platí

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots.$$

Funkce P se potom nazývá pravděpodobnost *a uspořádaná trojice $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ se nazývá* pravděpodobnostní prostor.

Pravděpodobnost je tedy funkce, která každé množině $A \in \mathcal{A}$ přiřazuje reálné číslo.
Dále, neřekneme-li jinak, vždy předpokládáme, že je pevně zvolen pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$. Následující věta shrnuje základní vlastnosti pravděpodobnosti, které vyplývají přímo z definice.

Věta 1.4 *Pro každé jevy $A, B \in \mathcal{A}$ platí*

(a) Je-li $A \subset B$, pak $P(A) \leq P(B)$.

(b) Je-li $A = B$, pak $P(A) = P(B)$.

(c) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(d) $P(\emptyset) = 0$.

(e) $P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

(f) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Důkaz (a) $B = A \cup (\overline{A} \cap B)$ a $A, \overline{A} \cap B$ jsou neslučitelné, tedy
$P(B) = P(A) + P(\overline{A} \cap B)$, a tedy $P(B) \geq P(A)$.

(b) $A = B \Rightarrow A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$,
$A = B \Rightarrow B \subset A \Rightarrow P(B) \leq P(A)$, a tedy
$P(A) = P(B)$.

(c) $A \cup \overline{A} = \Omega, A \cap \overline{A} = \emptyset$, tedy
$P(A) + P(\overline{A}) = P(\Omega) = 1$,
$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(d) $\Omega \cup \emptyset = \Omega$ a $\Omega \cap \emptyset = \emptyset$, (neslučitelnost), tedy $P(\Omega) + P(\emptyset) = P(\Omega)$,
$1 + P(\emptyset) = 1$,
$P(\emptyset) = 0$.

(e) $A = (A \cap B) \cup (A \setminus B)$
a jevy $A \cap B$ a $A \setminus B$ jsou neslučitelné, tedy
$P(A) = P(A \cap B) + P(A \setminus B)$ a odtud
$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B)$.

(f) $A \cup B = B \cup (A \setminus B)$ a jevy B a $A \setminus B$ jsou neslučitelné, tedy
$P(A \cup B) = P(B) + P(A \setminus B)$ a podle e) dostaneme
$P(A \cup B) = P(B) + P(A) - P(A \cap B)$.

■

Poznámka Termín „množinová funkce," tj. zobrazení, jež libovolné množině přiřazuje reálné číslo, se může zdát dost nezvyklý. Ovšem běžně používané termíny jako délka, šířka, obsah objem, nejsou ničím jiným než množinovými funkcemi. Navíc tyto funkce splňují axiom (3) z definice pravděpodobnosti. Pro nezáporné množinové funkce s touto vlastností bývá používán termín „míra".

Před vyslovením další věty uvedeme nejprve jeden pojem z matematické analýzy, se kterým se čtenář dosud nemusel setkat.

Definice *Řekneme, že posloupnost* $\{x_1\}_{i=1}^{\infty}$ *reálných čísel* konverguje monotónně *k číslu* x_0, *jestliže je monotónní a jestliže* $\lim_{i \to \infty} x_i = x_0$. *Pokud je posloupnost* $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ *neklesající, značíme tento fakt* $x_i \nearrow x_0$, *pokud je nerostoucí, pak* $x_i \searrow x_0$.

Věta 1.5 *Nechť* $A_i \in \mathcal{A}, i = 1, 2, \ldots$.

(a) Je-li $A_i \subset A_{i+1}$ *pro všechna* $i = 1, 2\ldots$ *a* $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, *pak* $P(A_i) \nearrow P(A)$.

(b) Je-li $A_i \supset A_{i+1}$ *pro všechna* $i = 1, 2\ldots$ *a* $A = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$, *pak* $P(A_i) \searrow P(A)$.

Důkaz (a) Označme $B_i = A_{i+1} \setminus A_i$. Pak platí

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup (\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i).$$

Protože na pravé straně rovnosti je sjednocení disjunktních množin, dostáváme dále

$$P(A) = P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = P(A_1) + \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i)$$

a nyní podle definice součtu řady

$$P(A) = P(A_1) + \lim_{n\to\infty}(P(B_1) + ... + P(B_n)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}(P(A_1) + P(A_2 \setminus A_1) + ... + P(A_n \setminus A_{n-1})) = \lim_{n\to\infty} P(A_n).$$

(b)

Jestliže $A_i \supset A_{i+1}$ a $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A$, pak $\overline{A}_i \subset \overline{A}_{i+1}$ a $\bigcup_{i+1}^{\infty} \overline{A}_i = \overline{A}$, a proto

$$P(A) = P(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i) = P(\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} \overline{A_i}}) = 1 - P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = 1 - \lim_{i\to\infty} P(\overline{A_i}) =$$

$$= 1 - \lim_{i\to\infty}(1 - P(A_i)) = \lim_{i\to\infty} P(A_i).$$

■

Nyní jsme schopni přesně vymezit podmínky, za kterých je možno počítat pravděpodobnosti podle klasické definice. Označme $|M|$ počet prvků množiny M.

Věta 1.6 *Nechť pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ splňuje následující předpoklady:*

1.

$$|\Omega| = n < \infty,$$

2. pro každé dva elementární jevy $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ je $P(\omega_1) = P(\omega_2)$.

Potom pro každý jev $A \in \mathcal{A}$ platí

$$P(A) = \frac{n_A}{n},$$

kde

$$n_A = |A|.$$

Důkaz Protože $\Omega = \{\omega_1\} \cup \ldots \cup \{\omega_n\}$, nutně $P(\omega_i) = \frac{1}{n}, i = 1, \ldots, n$. Nechť $A = \{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_m}\}$. Potom

$$P(A) = P(\{\omega_{i_1}\} \cup \ldots \cup \{\omega_{i_m}\}) = P(\omega_{i_1}) + \ldots + P(\omega_{i_m}) = \frac{m}{n}.$$

■

Poznámka 1. n_A je vlastně počet těch elementárních jevů, které implikují jev A, neboli „počet případů příznivých“,

n je vlastně počet všech elementárních jevů, neboli „počet případů možných“.

2. Pravděpodobnostní prostor, splňující předpoklady věty 1.6, se nazývá *klasický pravděpodobnostní prostor.*

Při určování pravděpodobnosti pomocí klasické definice je nezbytná znalost kombinatorických vzorců. Než uvedeme jejich přehled, uvedeme nejprve dva příklady, kdy prostor elementárních jevů není konečný, a tudíž není možné tyto případy pomocí klasické definice řešit.

Příklad 1.1 Házíme opakovaně mincí a sledujeme, na kolikátý pokus se nám podaří hodit poprvé líc.
Proveďme rozbor, jak budou v našem případě vypadat elementární jevy. Líc můžeme hodit hned napoprvé. Označme tento jev $E_1 = L$. Pokud se nám líc podaří hodit poprvé až druhým pokusem, znamená to, že napoprvé jsme hodili rub. Tento jev označme $E_2 = RL$. Postupně takto můžeme označit všechny elementární jevy:
$E_3 = RRL$
$\vdots$
$E_n = RR\dots RL$
$\vdots$
$E_\infty = RR,\dots,RR\dots$ (tuto situaci také musíme připustit.)
Prostor elementárních jevů tedy je $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_\infty\}$. Potom můžeme pomocí klasické definice pravděpodobnosti určit pravděpodobnosti jednotlivých elementárních jevů s výjimkou jevu E_∞, o kterém se zmíníme záhy. Vyjde $P(E_1) = \frac{1}{2}, P(E_2) = \frac{1}{4}, \dots, P(E_n) = \frac{1}{2^n}$. Položíme-li $\mathcal{A} = \exp\Omega$ (systém všech podmnožin Ω) a pro $A \subset \Omega$ definujeme $P(A) = \sum\limits_{i, E_i \in A} P(E_i)$, pak $(\Omega, \mathcal{A})$ je pravděpodobnostní prostor. Ω je tedy spočetná nekonečná množina.
Uvedený příklad obsahuje ještě jednu zajímavost, jíž je jev E_∞. Jeho pravděpodobnost můžeme najít pomocí pravděpodobnosti opačného jevu, neboli jevu $\Omega \setminus E_\infty$. Protože platí
$P(\Omega \setminus E_\infty) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$, musí nutně platit $P(E_\infty) = 0$. Ovšem jev E_∞ není nemožný. Vidíme tedy, že zatímco pravděpodobnost nemožného jevu

je nutně rovna nule, obráceně toto tvrzení neplatí, neboli z nulové pravděpodobnosti jevu nevyplývá nutně jeho nemožnost. V dalších kapitolách se ostatně s jevy tohoto typu setkáme poměrně často.

□

Příklad 1.2 Nechť $\Omega \subset \mathbf{R}_2$ (resp. $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_3$) je množina konečného „obsahu" (délky, objemu) $\mu(\Omega)$, buď $\mathcal{A}$ systém všech podmnožin, jejichž obsah (délku, objem) „umíme spočítat" (přesněji se takové množiny nazývají měřitelné). Pak $\mathcal{A}$ je
σ-algebra a položíme-li

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \text{ pro } A \in \mathcal{A},$$

je $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravděpodobnostní prostor.

□

Poznámka

1. Skutečnost, že $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ je pravděpodobnostní prostor, neříká nic o tom, pro které praktické situace se jedná o vhodný model. Příslušnou podmínku odvodíme později.

2. Termín „umíme spočítat" je nutno chápat velmi obecně. Použijeme-li totiž Riemannova integrálu, dostaneme se velmi snadno do rozporu. Nechť např. $\Omega = \langle 0,1\rangle \times \langle 0,1\rangle$ a $a_1, a_2 ...$ je posloupnost všech bodů z Ω s racionálními souřadnicemi. Potom obsah každé jednobodové množiny $\{a_i\}, i = 1, 2 \ldots$, je roven 0, ale obsah množiny $\bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i\}$ „neumíme spočítat", takže se zdá, že $\mathcal{A}$ není σ-algebra. Obtíže lze překonat použitím obecnějšího Lebesgueova integrálu, ze kterého také vychází termín měřitelná množina.
   Uvedený příklad je příkladem pravděpodobnostního prostoru, kdy Ω je nespočetná množina.

1.5 Kombinatorické vzorce

Jak již bylo řečeno, při užití klasické definice pravděpodobnosti je nutná znalost kombinatorických vzorců. Vzhledem k tomu, že tyto vzorce by měly být známé ze střední školy, uvádíme pouze jejich přehled.

Pravidlo součinu
Nechť $\{a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n_1}\}, \{a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n_2}\} ... \{a_{k1}, a_{k2}, ..., a_{kn_k}\}$ je k skupin

libovolných prvků, přičemž počet prvků i-té skupiny je n_i. Potom počet různých $k-$tic $\{a_{1i_1}, a_{2i_k}\}$, které mají na prvním místě prvek z první skupiny, na druhém místě prvek z druhé skupiny, na i-tém místě prvek z i-té skupiny, je roven číslu $n_1.n_2...n_k$.

Variace s opakováním
jinak též uspořádaný výběr s opakováním. Uvažujme skupinu n prvků. Z této skupiny vybereme k-krát po sobě jeden prvek, přičemž vybraný prvek před dalším výběrem vracíme. Potom počet všech různých (uspořádaných) k-tic, které lze takto utvořit (počet variací k-té třídy z u prvků s opakováním) je roven číslu

$$\overline{V}_k(n) = n^k.$$

Variace bez opakování
jinak též uspořádaný výběr bez opakování. Od předchozího případu se liší tím, že vybraný prvek do skupiny nevracíme. Zde již tedy musí platit $k \leq n$. Počet různých k-tic (variací k-té třídy) je v tomto případě roven

$$V_k(n) = n(n-1)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Permutace
jsou vlastně variací n-té třídy z n prvků bez opakování. Skupinu n různých prvků lze uspořádat v posloupnost

$$P(n) = n!$$

způsoby.

Kombinace
jinak též neuspořádaný výběr bez opakování. Počet různých k-prvkových podmnožin n-prvkové množiny (kombinací k-té třídy z n prvků) je roven

$$C_k(n) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

1.6 Podmíněná pravděpodobnost

Mějme dány dva náhodné jevy A, B. Často se zajímáme pouze o ty situace, kdy víme, že jev B nastal a zkoumáme potom pravděpodobnost jevu A. Podívejme se nyní opět na dva možné přístupy.

Statistický přístup: Opakujme náhodný pokus a vypusťme případy, kdy jev B nenastal. Počet zbývajících případů, kdy jev B nastal označme $n(B)$. Z nich potom vybereme ty, kdy nastal i jev A (tj. nastaly oba jevy současně) - jejich počet označme $n(A \cap B)$. Podíl

$$h(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)}$$

se nazývá *relativní četnost jevu A, podmíněná jevem B*. Následující tvrzení nám říká, že podmíněné relativní četnosti mají vlastnosti „obyčejných" relativních četností.

Věta 1.7 *(a)* $0 \leq h(A|B) \leq 1 \; \forall A, B \in \mathcal{A}$

(b) Jsou-li $A_1, A_2, \ldots,$ párově neslučitelné, pak

$$h(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} h(A_i|B)$$

(c) Jestliže $B \subset A$, pak $h(A|B) = 1$.

Důkaz je snadný.

■

Pravděpodobnostní přístup: Výskytu jevu B odpovídají jisté elementární jevy, z nichž některé jsou příznivé i jevu A - jsou to ty jevy, které implikují výskyt obou jevů A, B zároveň. Pravděpodobnost, že nastane jev B, je $P(B)$, pravděpodobnost, že nastanou oba jevy A, B zároveň je rovna $P(A \cap B)$.

Definice *Nechť $A, B \in \mathcal{A}$ jsou libovolné jevy, nechť pro jev B platí $P(B) \neq O$. Potom podíl*

$$P(A|B) = \frac{P(P \cap B)}{P(B)}$$

se nazývá pravděpodobnost jevu A, podmíněná jevem B.

Poznámka Je-li $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ pravděpodobnostní prostor a $B \in \mathcal{A}$, pak $\mathcal{B} = (A \cap B)|A \in \mathcal{A})$ je σ-algebra a funkce $P(\cdot|B)$, definovaná na $\mathcal{B}$ vztahem $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ je pravděpodobnost na $\mathcal{B}$. Ověření všech axiomů je snadné.

Z definice podmíněné pravděpodobnosti vychází další důležitý pojem, a to pojem nezávislých jevů. Tento termín vychází z následující úvahy: Častěji než o pouhou podmíněnou pravděpodobnost se zajímáme spíše o to, zda pravděpodobnost jevu A je ovlivněna výskytem jevu B či ne. Jako náhodný pokus například uvažujme tah libovolné karty z balíčku 32 karet. Nechť jev B představuje jev „na první pokus jsme vytáhli eso," jev A potom „na druhý pokus jsme vytáhli eso." Nechť dále jednou prvně vytaženou kartu vrátíme zpět do balíčku a podruhé nikoliv. Intuitivně se zdá být zřejmé, že pokud prvně vytaženou kartu vrátíme do balíčku a karty zamícháme, pak pravděpodobnost vytažení esa ve druhém pokusu není nijak ovlivněna tím, zda jsme vytáhli eso v prvním pokusu nebo ne. Jiná je situace v případě, že vytaženou kartu do balíčku vracet nebudeme. Potom vytažení esa v prvním tahu nám pravděpodobnost vytažení esa ve druhém pokusu změní (v našem případě sníží) z toho prostého důvodu, že v balíčku zbudou již pouze tři esa. Nezávislost jevů je tudíž intuitivně chápána jako fakt, že výskyt jevu B nijak neovlivní pravděpodobnost jevu A. Proto je přirozená následující definice.

Definice *Jevy A, B nazveme* nezávislé, *jestliže $P(A) = 0$ nebo $P(B) = 0$ nebo*

$$P(A|B) = P(A).$$

Uvedená definice je zdánlivě nejasná. Na první pohled bychom v případě, že $P(A|B) = P(A)$, měli říkat pouze, že jev A nezávisí na B a v případě, že $P(B|A) = P(B)$ bychom měli hovořit o nezávislosti jevu B na A. Místo toho používáme „symetrický" pojem „jevy A a B jsou nezávislé." Následující tvrzení nám však říká, že uvedená definice je korektní.

Lemma *Jestliže $P(A|B) = P(A)$ a $P(A) \neq 0$, pak též $P(B|A) = P(B)$.*

Důkaz

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} = \frac{P(A \cap B)}{\frac{P(A \cap B)}{P(B)}} = P(B).$$

■

Následující věta je sice velmi jednoduchá, zejména její tvrzení b), ale má velký význam, neboť nám umožňuje ověřit nezávislost jevů, aniž bychom museli počítat podmíněné pravděpodobnosti a umožňuje také jednoduchým způsobem rozšířit definici nezávislých jevů na větší počet jevů nežli dva.

Věta 1.8 (o násobení pravděpodobností)

(a) Pro libovolné dva jevy $A, B \in \mathcal{A}, P(B) \neq 0$, platí

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$$

(b) Jevy A, B jsou nezávislé, právě když

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Důkaz (a) Plyne přímo z definice podmíněné pravděpodobnosti.

(b) Nechť A, B jsou nezávislé. Pokud $P(A) = 0$, pak z toho, že $(A \cap B) \subset A$, vyplývá $P(A \cap B) = 0$ a věta platí, v případě $P(B) = 0$ postupujeme analogicky, a jinak

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = P(A) \cdot P(B).$$

Nechť naopak $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Podle a) však rovněž $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$, a proto $P(A) \cdot P(B) = P(A|B) \cdot P(B)$, z čehož buďto $P(B) = 0$ a A, B jsou nezávislé, nebo $P(A) = P(A|B)$ a A, B jsou opět nezávislé.

■

Nyní již můžeme přistoupit k definici nezávislosti více jevů.

Definice *Řekneme, že jevy $A_1, A_2 \ldots, A_n$ jsou nezávislé, jestliže pro libovolnou skupinu různých indexů $(k_1, k_2, \ldots, k_r)$, kde $r \leq n$ platí*

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_r}) = P(A_{k_1}) \cdot P(A_{k_2}) \cdot \ldots \cdot, P(A_{k_r}).$$

Je nutné upozornit, že důležitým slovem definice je slovo „libovolnou“. Z definice je zřejmé, že jestliže jsou všechny jevy nezávislé, pak je nezávislá také libovolná dvojice těchto jevů. Obráceně to však neplatí! Podobně tak nelze uvažovat na nezávislost jevů pouze z toho, že pravděpodobnost průniku všech těchto jevů je rovna součinu jejich pravděpodobností. Pro menší skupinu jevů to už nemusí platit a jestliže tuto menší skupinu tvoří jevy závislé, pak nemohou být nezávislé ani všechny jevy dohromady. Ukázky obou případů viz Příklady.

1.7 Dvě věty o pravděpodobnosti

V tomto odstavci uvedeme dvě už poněkud složitější věty, které nám umožňují řešit obtížnější příklady, jejichž řešení by bez znalosti těchto vět činilo potíže.

Věta 1.9 *Nechť $B_1, B_2, \dots, B_n \in \mathcal{A}$ je úplný systém neslučitelných jevů, nechť navíc $P(B_i) > 0$ pro každé $i = 1, 2, \dots, n$. Nechť $A \in \mathcal{A}$ je libovolný jev. Potom platí*

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i)P(B_i).$$

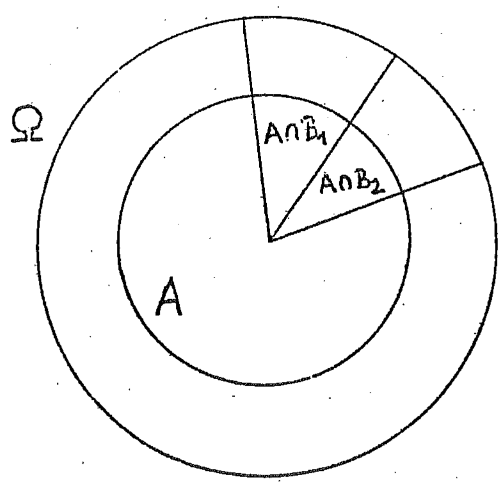
Důkaz Vzhledem k tomu, že $A \subset \Omega$ a jevy $B_1, \dots, B_n$ tvoří úplný systém neslučitelných jevů téhož prostoru Ω, nutně současně s jevem A nastane právě jeden z jevů $B_1, \dots, B_n$, neboli

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \dots \cup (A \cap B_n).$$

Na pravé straně této rovnosti je zřejmě sjednocení disjunktních jevů. Proto

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$$

a nyní stačí pravou stranu této rovnosti rozepsat podle věty 1.8, čímž je věta dokázána.



■

Tato věta je známa pod názvem *věta o úplné pravděpodobnosti.* Jevy $B_1, \ldots, B_n$ se běžně nazývají *alternativy* nebo *hypotézy*. Jejím jistým protipólem je následující věta.

Věta 1.10 (Bayesova) *Nechť $B_1, B_2, \ldots, B_n \in \mathcal{A}$ tvoří úplný systém neslučitelných jevů, nechť $P(B_i) > 0$ pro každé $i = 1, 2, \ldots, n$. Pak pro libovolný jev $A \in \mathcal{A}$, pro který je $P(A) > 0$, platí*

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \mid B_k)P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A \mid B_i)P(B_i)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Důkaz Z definice podmíněné pravděpodobnosti dostáváme

$$P(B_k \mid A) = \frac{P(A \cap B_k)}{P(A)}.$$

Nyní úpravou čitatele podle věty 1.8 a jmenovatele podle věty o úplné pravděpodobnosti obdržíme žádaný výraz.

■

Poznámka Z hypotéz $B_1, \ldots, B_n$ nastane při provedení pokusu právě jedna; jejich pravděpodobnosti před provedením pokusu jsou $P(B_i)$ - *pravděpodobnosti a priori.* Víme-li však, zda při provedení pokusu nastal jev A či nikoliv, pak tento fakt mění pravděpodobnosti alternativ na $P(B_i \mid A)$ - *pravděpodobnosti a posteriori.*

Z početního hlediska věta obrací smysl podmíněnosti. Někdy se jí říká *„věta o inverzní pravděpodobnosti“* nebo *„věta o pravděpodobnosti hypotéz“*.

Příklady

1.1 Jako náhodný pokus uvažujeme hod kostkou. Jev ‚padla jednotka' budeme značit $\{1\}$ apod. Uvažujeme následující jevy:

$$A = \{1,2,4,5\}, B = \{2,3,5,6\}, C = \{1,4,6\}, D = \{2,3,6\}, E = \{2,6\},$$

$$F = \{4\}, G = \{1,3\}.$$

Procvičte si na těchto jevech základní definice.

Řešení Jistý jev je v našem případě

$$\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}.$$

Elementárním jevem je jev F, ostatní jevy jsou složené. Nyní např.:

$$A \cap B = \{2,5\}, \ A \cup B = \Omega, \ A \cup E = \{1,2,4,5,6\}, \ E \subset B.$$

Jevy C, D jsou k sobě vzájemně opačné, tj.

$$\bar{C} = D, \bar{D} = C.$$

Jevy F, G jsou neslučitelné. Jevy A, C, E jsou neslučitelné, nejsou však párově neslučitelné. Jevy E, F, G jsou párově neslučitelné. Ověřme nyní např. na jevech A, C platnost deMorganových pravidel:

$$A \cup C = \{1,2,4,5,6\}, \overline{A \cup C} = \{3\},$$

$$\bar{A} = \{3,6\}, \bar{C} = \{2,3,5\}, \bar{A} \cap \bar{C} = \{3\},$$

$$A \cap C = \{1,4\}, \overline{A \cap C} = \{2,3,5,6\}, \bar{A} \cup \bar{C} = \{2,3,5,6\}.$$

1.2 Nechť A, B, C jsou libovolné náhodné jevy z téže σ - algebry $\mathcal{A}$. Rozhodněte, zda potom jevy

$$A \cap B, C \setminus B, \bar{A} \cap \bar{C}, A \cap \bar{B} \cap \bar{C}, \bar{A} \cap B \cap C$$

tvoří úplný systém neslučitelných jevů.

Řešení Nejprve musíme ověřit, že uvedené jevy jsou párově neslučitelné. Pro zjednodušení si uvědomme, že

$$C \setminus B = C \cap \bar{B}.$$

Ověření párové neslučitelnosti nyní není obtížné. Např. pro první dva jevy platí

$$(A \cap B) \cap (C \cap \bar{B}) = (B \cap \bar{B} \cap A \cap C) \subset B \cap \bar{B} = \emptyset$$

a analogickým způsobem se ověří neslučitelnost zbylých dvojic jevů. Při důkazu, že uvedené jevy dávají po sjednocení jistý jev, je třeba si uvědomit, že $C \cup \bar{C} = \Omega$, a proto

$$A \cap B = (A \cap B) \cap (C \cup \bar{C})$$

a podle distributivního zákona

$$A \cap B = (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}).$$

Po úpravách nyní dostaneme

$$(A \cap B) \cup (C \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) =$$

$$= (A \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) =$$

$$= (A \cap B \cap C) \cup (\bar{A} \cap B \cap C) \cup (A \cap B \cap \bar{C}) \cup (A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}) =$$

$$= ((A \cup \bar{A}) \cap (B \cup C)) \cup ((B \cup \bar{B}) \cap (A \cap \bar{C})) \cup (C \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}) =$$

$$(B \cap C) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}) =$$

$$= (B \cap C) \cup (\bar{B} \cap C) \cup (A \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}) = C \cup \bar{C} = \Omega.$$

1.3 Dokažte větu 1.3

Řešení

(a) Použijeme vlastnost (3) z definice σ -algebry na posloupnost $A_1, A_2, \ldots, An, \emptyset, \emptyset \ldots$

(b) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A}, \bar{B} \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \cup \bar{B} \in \mathcal{A}$; podle de Morganova pravidla pak
$\overline{A \cap B} \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$.

(c) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

(d) $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \overline{(\bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}_i)}$

1.4 Nechť $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$. Najděte minimální σ – algebru takovou, která obsahuje jevy $A = \{1,2\}, B = \{1,3\}$

Řešení Má-li σ –algebra $\mathcal{A}$ obsahovat jevy A, B, musí podle věty 1.3 obsahovat i jev

$$C = A \setminus B = \{1\}.$$

Podle téže věty musí obsahovat i jevy

$$A \setminus C = \{2\}, B \setminus C = \{3\}, A \cup (B \setminus C) \cup (A \setminus C) = \{1,2,3\},$$

$$\overline{A \cup (B \setminus C) \cup (A \setminus C)} = \{4,5\}.$$

Určitě tedy obsahuje jevy

$$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{3\}, A_4 = \{4,5\}$$

a musí obsahovat libovolná jejich sjednocení. Dostáváme tedy následující systém množin

$$A_0 = \emptyset, A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}, A_3 = \{3\}, A_4 = \{4,5\},$$

$$A_5 = \{1,2\}, A_6 = \{1,3\}, A_7 = \{1,4,5\}, A_8 = \{2,3\},$$

$$A_a = \{2,4,5\}, A_{10} = \{3,4,5\}, A_{11} = \{1,2,3\}, A_{12} = \{1,2,4,5\},$$

$$A_{13} = \{1,3,4,5\}, A_{14} = \{2,3,4,5\}, A_{15} = \{1,2,3,4,5\}.$$

Snadno se již ověří, že tento systém tvoří σ–algebru (povšimněme si toho, že σ–algebra všech podmnožin téže množiny Ω má $|\exp \Omega| = 2^5 = 32$ prvků), zatímco tento systém pouze $2^4 = 16$ prvků.

1.5 Nechť náhodným pokusem je hod kostkou. Spočtěte pravděpodobnosti jevů $A, B, \bar{B}$, $A \cap B, A \cup B, A \setminus B$, jestliže
jev A – padne liché číslo,
jev B – padne číslo větší než 4.

Řešení $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, elementárními jevy jsou
$E_1 = \{1\}, E_2 = \{2\}, E_3 = \{3\}, E_4 = \{4\}, E_5 = \{5\}, E_6 = \{6\}$.

Platnost podmínek pro použití klasické definice je splněna, platí $|\Omega| = 6$, a proto

$$P(A) = P(E_1 \cup E_3 \cup E_5) = \frac{3}{6},$$

$$P(B) = P(E_5 \cup E_6) = \frac{2}{6},$$

$$P(\bar{B}) = P(E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup E_4) = \frac{4}{6},$$

$$P(A \cap B) = P(E_5) = \frac{1}{6},$$

$$P(A \cup B) = P(E_1 \cup E_3 \cup E_5 \cup E_6) = \frac{4}{6},$$

$$P(A \setminus B) = P(E_1 \cup E_3) = \frac{2}{6}.$$

1.6 S jakou pravděpodobností padne při jednom vrhu dvěma kostkami součet 8?

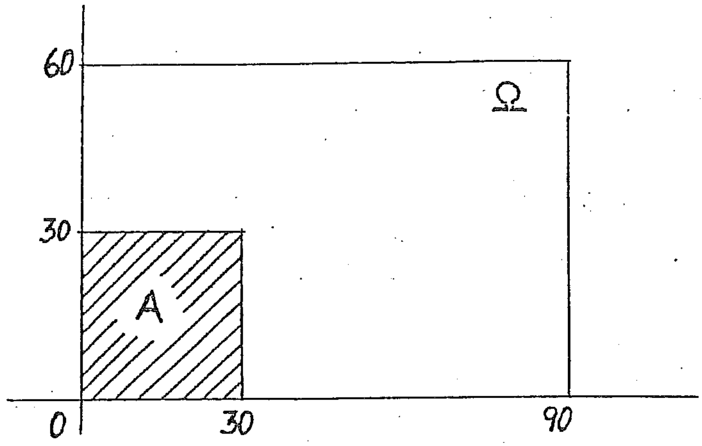
Řešení Budeme uvažovat rozlišitelné kostky. Je to z toho důvodu, abychom mohli použít klasické definice. Pokud bychom pracovali s nerozlišitelnými kostkami, nebyla by splněna druhá podmínka o stejné pravděpodobnosti elementárních jevů. Prostorem elementárních jevů Ω je tedy množina všech uspořádaných dvojic (i, j), pro které $i, j = 1, 2 \dots 6$. Platí $|\Omega| = 36$. Hledáme tedy pravděpodobnost jevu $A = \{(i, j); i + j = 8\}$; snadno se přesvědčíme, že elementárními jevy příznivými jevu A jsou jevy $E_1 = (2, 6), E_2 = (3, 5), E_3 = (4, 4), E_4 = (5, 3), E_5 = (6, 2)$ a tedy

$$P(A) = \frac{5}{36}.$$

1.7 Obchod má dva dodavatele, kteří jej zásobují každý den. První z nich přijíždí mezi 6.00 a 7.30, druhý mezi 6.00 a 7.00. Skutečná doba příjezdu v tomto intervalu je zcela náhodná a tyto doby jsou v daném intervalu rovnoměrně rozloženy. S jakou pravděpodobností přijedou oba dodavatelé do 6.30 hod?

Řešení Klasické definice nelze použít, neboť skutečný čas příjezdu může nabývat nekonečně mnoha hodnot. Použijeme geometrické pravděpodobnosti. Označme

X - 1. dodavatel přijede x minut po šesté,
Y - 2. dodavatel přijede y minut po šesté.
Je zřejmé, že X může nabývat libovolných hodnot z intervalu $\langle 0, 90\rangle, Y$ potom z intervalu $\langle 0, 60\rangle$. Prostor Ω je tedy vhodné interpertovat jako obdélník $\langle 0, 90\rangle \times \langle 0, 60\rangle$. Elementární jev je pak reprezentován každým bodem uvnitř nebo na hranici tohoto obdélníka. Elementární jevy příznivé námi sledovanému jevu jsou pak všechny ty, které $x \leq 30$ a zároveň $y \leq 30$.



Hledaná pravděpodobnost bude nyní rovna poměru obsahu vyšrafované části a celého obdélníka, tj.

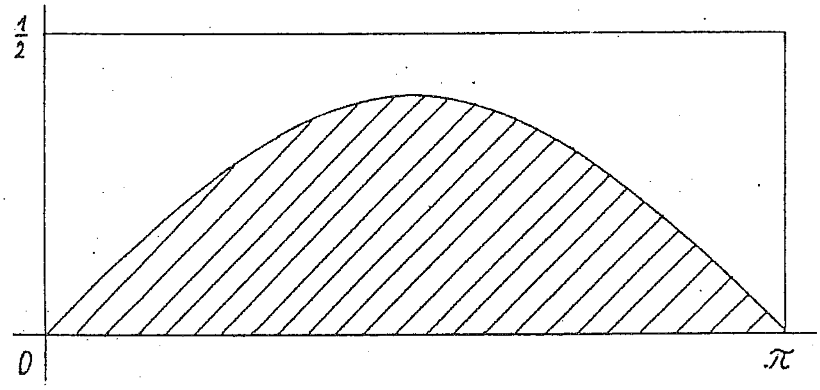
$$P(A) = \frac{30.30}{90.60} = \frac{1}{6}.$$

1.8 Buffonova úloha
Na množinu rovnoběžek, jejichž vzdálenost je rovna 1, hodíme jehlu délky $l \leq 1$. Jaká je pravděpodobnost, že jehla protne některou z rovnoběžek?

Řešení Označme y vzdálenost středu jehly od nejbližší rovnoběžky a x odchylku jehly od rovnoběžky. Zřejmě $x \in \langle 0, \pi\rangle, y \in \langle 0, \frac{1}{2}\rangle$. Proto můžeme volit $\Omega = \langle 0, \pi\rangle \times \langle 0; \frac{1}{2}\rangle$. Jestliže má jehla protnout rovnoběžku, musí platit

$$0 \leq y \leq \frac{l}{2} \sin x.$$

Nyní na Ω vyznačme množinu, vyhovující našim nerovnostem.



Dostáváme

$$\mu(\Omega) = \frac{\pi}{2},$$

$$\mu(X) = \int_0^\pi \frac{l}{2} \sin x dx = \frac{l}{2}[-\cos x]_0^\pi = l,$$

$$P(X) = \frac{l}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2l}{\pi}.$$

Pro $l = \frac{1}{2}$ tedy speciálně dostáváme převrácenou hodnotu čísla π. Při použití statistického přístupu, tj. mnohonásobného opakování pokusu, tak můžeme experimentálně ověřit velikost čísla π.

1.9 Kolik existuje možných výsledků

(a) Sazky,

(b) Matesa,

(c) Sportky včetně dodatkového čísla.

Řešení

(a) výsledky Sazky můžeme interpertovat jako 13 člennou posloupnost složenou z čísel 0, 1, 2. Na pořadí, v jakém se uvedená čísla vyskytují, záleží, jedná se tedy o variace, a to variace 13. třídy ze 3 prvků s opakováním, kterých je

$$\overline{V_{13}(3)} = 3^{13} = 1594323.$$

(b) V Matesu se losuje 5 čísel z 35, vylosované číslo se již do osudí nevrací, na pořadí, v jakém byla čísla vytažena, nezáleží. Jedná se tedy o kombinace a počet možných výsledků Matesa je roven

$$\binom{35}{5} = \frac{35}{5!30!} = 324632.$$

(c) Při kompletním tahu sportky nejprve vylosujeme 6 čísel ze 49. To můžeme provést $\binom{49}{6}$ způsoby. Poté ještě vylosujeme dodatkové číslo, na které nám zbývá 43 možností. Celkový možný počet různých výsledků je tedy roven

$$\binom{49}{6} \cdot 43 \doteq 600000000.$$

1.10 S jakou pravděpodobností vyhrajeme ve Sportce 5. pořadí?

Řešení 5. pořadí vyhráváme, jestliže jsme správně tipovali 3 čísla. Na dodatkové číslo nemusíme brát zřetel, v tomto případě nehraje žádnou roli. Rozdělme si 49 čísel na dvě skupiny - v první skupině bude 6 námi tipovaných čísel, ve druhé 43 ostatních. Páté pořadí vyhráváme v případě, že tři vylosovaná čísla budou ze skupiny námi tipovaných 6 čísel, zbylá tři vylosovaná čísla pak ze skupiny ostatních 43 čísel. Tři čísla ze šesti je možno vybrat $\binom{6}{3}$ způsoby, ze 43 pak $\binom{43}{3}$ způsoby. Podle pravidel součinu dostáváme tedy $\binom{6}{3} \cdot \binom{43}{3}$ příznivých výsledků. Možných výsledků je $\binom{49}{6}$ a hledaná pravděpodobnost

$$P(A) = \frac{\binom{6}{3}\binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} = \frac{\frac{6!43!}{3!3!3!40}}{\frac{49!}{6!43!}} \doteq 0,01765 \approx \frac{1}{56}.$$

1.11 U kulatého stolu sedí N lidí, 2 z nich jsou agenti StB. S jakou pravděpodobností budou sedět vedle sebe?

Řešení

(a) 1, neboť vrána k vráně sedá.

(b) Předpokládejme, že místa u stolu jsou losována. N lidí se může na N míst posadit N! způsoby. Při určování ‚příznivých' případů vyjdeme z následující úvahy:
Nejprve posadíme 1. agenta. To můžeme udělat N způsoby. Druhého můžeme posadit 2 způsoby tak, aby seděli vedle sebe. Zbývá N-2 zájemců o N-2 míst. Ty už můžeme rozesadit libovolně, což lze provést (N-2)! způsoby. Celkem tedy máme 2N(N-2)! příznivých případů a hledaná pravděpodobnost je

$$P(A) = \frac{2\mathrm{N}(\mathrm{N}-2)!}{\mathrm{N}!} = \frac{2}{\mathrm{N}-1}.$$

Poznámka Pro N = 2 není vzorec správný. Proč?

1.12 V urně je 5 bílých koulí. Kolik musíme přidat černých koulí, aby pravděpodobnost, že při náhodném tahu 2 koulí budou obě vytažené koule černé, byla aspoň 0,5? Vytažené koule nevracíme.

Řešení Označme počet černých koulí n. V urně tudíž máme $n+5$ koulí. Celkem můžeme 2 koule vytáhnout $\binom{n+5}{2}$ způsoby. Dvě černé koule můžeme vytáhnout $\binom{n}{2}$ způsoby. Naše úloha tedy spočívá v řešení nerovnice

$$\frac{\binom{n}{2}}{\binom{n+5}{2}} \geq 0,5,$$

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}} \geq 0,5,$$

$$n^2 - 11n - 20 \geq 0.$$

Kořeny této rovnice jsou $n_1 \doteq 12,59$ a $n_2 \doteq -1,59$, z čehož pro nerovnici vychází $n \geq 12,59$ nebo $n \leq -1,59$. Protože n je přirozené číslo, nutně v našem případě $n \geq 13$.

1.13 (paradox narozenin) Nechť je v místnosti n lidí. Uzavřu sázku, že alespoň dva z nich mají ve stejný den narozeniny. Při jakém n je sázka čestná, tzn. pravděpodobnost výhry je přibližně 0,5? Při jakém n je pravděpodobnost faktu, že dva lidé ve skupině mají narozeniny ve stejný den, alespoň 0,99?

Řešení Nejprve vyslovíme dva předpoklady, které nám podstatně zjednoduší výpočet. Budeme předpokládat, že ve skupině není nikdo

narozen 29. 2. a také to, že pravděpodobnost narození je pro všechna data v roce stejná. (Není to pravda, skutečně se dá statisticky dokázat, že např. 9 měsíců po Silvestru je tato pravděpodobnost vyšší, ale rozdíly nejsou tak podstatné, aby je bylo nutno brát v potaz.)
Tento příklad se nazývá paradoxem narozenin z toho důvodu, že výsledky jsou velmi překvapující. Necháme-li kohokoli správný výsledek odhadnout, většinou hádá n podstatně vyšší, než je skutečnost. Přitom sázka je nejspravedlivější při $n = 23$ a k tomu, aby s pravděpodobností 0,99 se ve skupině nacházeli dva lidé s narozeninami ve stejný den, stačí, aby bylo přítomno 55 lidí. Provedeme nyní přesný výpočet. Rok má 365 dní. Pro zjednodušení výpočtu budeme lidi ve skupině vybírat podle předem stanoveného pořadí. Budeme tedy počítat s variacemi. Nechť je ve skupině n lidí. Počet všech možných případů dat narození je roven počtu variací n-té třídy z 365 prvků a s opakováním, neboli 365^n. Počet případů, kdy mají všichni různé datum narození, je ovšem roven počtu variací bez opakování, neboli $\frac{365!}{(365-n)!}$.Nás zajímá případ, kdy alespoň dva lidé mají totéž datum narození, což je ovšem jev opačný k jevu, že všichni mají různé datum narození. Označíme A_n jev „ve skupině n lidí existují dva se stejným datem narození", potom pro jeho pravděpodobnost platí

$$P(A_n) = 1 - P(\overline{An}) = 1 - \frac{V_n(365)}{\overline{V}_n(365)} = 1 - \frac{365.364\ldots(365-n+1)}{365^n}.$$

Pravděpodobnosti tohoto jevu pro různá n jsou uvedeny v následující tabulce

n	$P(A_n)$
10	0,117
20	0,411
21	0,444
22	0,476
23	0,507
25	0,569
30	0,706
40	0,891
50	0,870
60	0,994
100	0,999 997

Skutečné výsledky tedy doopravdy neodpovídají očekávaným představám.

1.14 120 studentů absolvovalo zkoušky z matematiky a z fyziky. 30 z nich nesložilo obě zkoušky, 8 nesložilo pouze zkoušku z matematiky, 5 nesložilo pouze zkoušku z fyziky. Určete pravděpodobnost toho, že náhodně vybraný student složil zkoušku z matematiky, víme-li, že nesložil zkoušku z fyziky a pravěpodobnost toho, že složil zkoušku z fyziky, víme-li, že nesložil zkoušku z matematiky.

Řešení Označme jev A - student složil zkoušku z matematiky, jev B - student složil zkoušku z fyziky.
Máme vlastně určit podmíněné pravděpodobnosti $P(B \mid \bar{A})$ a $P(A \mid \bar{B})$. Přitom podle definice

$$P(A \mid \bar{B}) = \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})}, \qquad P(B \mid \bar{A}) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})}.$$

Proto

$$P(A \mid \bar{B}) = \frac{\frac{5}{120}}{\frac{35}{120}} = \frac{5}{35}, \qquad P(B \mid \bar{A}) = \frac{8}{38}.$$

1.15 Nechť A, B jsou neslučitelné jevy. Mohou být i nezávislé?

Řešení Podle věty 1.8 pro nezávislé jevy platí

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Pro neslučitelné jevy z toho vyplývá

$$P(A) \cdot P(B) = 0 \qquad (= P(A \cap B))$$

neboli $P(A) = 0$ nebo $P(B) = 0$.
Poučení Tento jednoduchý příklad jednoznačně ukazuje, že nelze zaměňovat nezávislost a neslučitelnost jevů. Jsou to pojmy, které se dokonce prakticky vzájemně vylučují. Uvedený fakt se většinou uvádí ve formě následujícího tvrzení:
Jsou-li A, B neslučitelné jevy s nenulovou pravděpodobností, pak jsou *závislé*!

1.16 Uvažujeme hod kostkou a následující jevy
A - padne sudé číslo

B - padne liché číslo
C - padne 1 nebo 6
D - padne „velká“, neboli jedno z čísel 4,5,6.
Které dvojice uvedených jevů jsou nezávislé?

Řešení Budeme brát jednu dvojici po druhé.
A, B: Jedná se o jevy neslučitelné, oba s nenulovou pravděpodobností, podle předchozího příkladu tudíž nejsou nezávislé.
A, C: $P(A) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{3}, A \cap C = \{6\}, P(A \cap C) = \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(C)$, jevy A, C jsou tedy nezávislé,
A, D: $P(A) = \frac{1}{2}, P(D) = \frac{1}{2}, A \cap D = \{4, 6\}, P(A \cap D) = \frac{1}{3} \neq P(A) \cdot P(D)$, jevy A, D tedy nejsou nezávislé,
B, C :$P(B \cap C) = \frac{1}{6}$, $P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{6}$, jsou nezávislé,
B, D : $P(B \cap D) = \frac{1}{6}$, $P(B) \cdot P(D) = \frac{1}{4}$, nejsou nezávislé,
C, D :$P(C \cap D) = \frac{1}{6}$, $P(C) \cdot P(D) = \frac{1}{6}$, jsou nezávislé.

1.17 Nechť A, B jsou nezávislé jevy. Dokažte, že i jevy $\bar{A}, \bar{B}$ jsou nezávislé.

Řešení Jestliže $P(B) = 1$, pak $P(\bar{B}) = 0$ a jevy $\bar{A}, \bar{B}$ jsou nezávislé. Jinak

$$P(\bar{A} \mid \bar{B}) = \frac{P(\bar{A} \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} =$$

$$= \frac{P(\overline{A \cup B})}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(A \cup B)}{P(\bar{B})} = \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)}{1 - P(B)} =$$

$$= \frac{1 - P(A) - P(B) + P(A)P(B)}{1 - P(B)} = 1 - \frac{P(A)(1 - P(B))}{1 - P(B)} = 1 - P(A) = P(\bar{A})$$

a jevy $\bar{A}, \bar{B}$ jsou opět nezávislé.

1.18 Házejme dvěma mincemi. Označme
A - na první minci padl líc,
B - na druhé minci padl líc,
C - líc padl na právě jedné minci.
Rozeberte tyto tři jevy z hlediska nezávislosti, nejprve jednotlivé dvojice a poté všechny tři jevy najednou.

Řešení Strana, které padla na první minci, evidentně nezávisí na straně, která padla na druhé minci. Jsou možné 4 výsledky pokusu, a to LL, RL, LR, RR, všechny s pravděpodobností $\frac{1}{4}$. Jevy A, B jsou zřejmě nezávislé. Uvažujeme jevy $A, C : P(A) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{2}$, přitom $A \cap C = \{LR\}$ a tudíž $P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(C)$. Jevy A, C jsou tedy nezávislé. Obdobným způsobem dojdeme k závěru, že i jevy B, C jsou nezávislé. Vidíme tedy, že jakákoli dvojice jevů $A, B; A, C; B, C$ je nezávislá. Přitom však z výskytu libovolných dvou jevů můžeme usoudit, zda třetí jev nastal či ne! Všechny tři jevy A, B, C tedy nezávislé být nemohou, mimo jiné i z toho důvodu, že jsou též neslučitelné. Tudíž z toho, že libovolná dvojice z jisté množiny jevů je tvořena z jevů nezávislých, ještě nevyplývá, že se jedná o množinu nezávislých jevů. Zde dokonce výskyt třetího jevu na výskytu zbylých dvou závisí naprosto plně. Právě pro tuto svou extrémnost bývá tento příklad nazýván paradoxem nezávislosti.

1.19 Z osudí s čísly 1,2, ..., 16 náhodně vylosujeme jedno číslo.
Rozhodněte, zda jsou nezávislé následující jevy:
A - vytáhneme jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,
B - vytáhneme jedno z čísel 1, 2, 3, 4, 9, 10, 11, 12,
C - vytáhneme jedno z čísel 1, 2, 7, 8, 13, 14, 15, 16.

Řešení Tento příklad je v jistém smyslu protipólem k příkladu předchozímu.

Vezmeme-li totiž všechny tři jevy najednou, potom

$$A \cap B \cap C = \{1, 2\},$$

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{2},$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C),$$

a zdálo by se tedy, že jevy A, B, C jsou nezávislé. Ovšem rovnost pravděpodobnosti průniku a součinu pravděpodobností musí platit pro libovolnou podmnožinu množiny jevů. Snadno se však přesvědčíme, že pro dvojici jevů B, C dostáváme

$$B \cap C = \{1, 2\} \Rightarrow P(B \cap C) \neq P(B) \cdot P(C).$$

Jevy B, C tedy nejsou nezávislé a tudíž nemohou být nezávislé ani jevy A, B, C.

1.20 V XVII. století byla oblíbená následující hra: Hráč A měl 4× hodit jednou kostkou. Úspěšný byl v případě, že alespoň jednou hodil šestku. Hráč B měl hodit 24× dvěma kostkami a úspěšný byl v případě, že alespoň jednou hodil kombinaci $\{6,6\}$, měl tedy 6× více pokusů, ale pravděpodobnost úspěchu v jednom pokusu byla šestkrát menší. Je tato hra spravedlivá nebo má jeden z hráčů výhodu?

Řešení Na první pohled je vše v pořádku. Ovšem již v době, kdy tato hra byla velice oblíbená, si hráči stěžovali, že příliš často vyhrává hráč A. Jak je to tedy ve skutečnosti?
Označme A_i jev „hráč A byl v i-tém pokusu úspěšný".
B_j jev „hráč B byl v j-tém pokusu úspěšný".
Pak hráč A je úspěšný v případě, že nastane jev $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$, hráč B potom v případě, že nastane jev $\bigcup_{j=1}^{24} B_j$. Jevy A_i, A_j a podobně B_i, B_j nejsou neslučitelné, proto počítat pravděpodobnost sjednocení je dosti problematické. Jsou však evidentně nezávislé, a protože $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$, je výhodné přejít k doplňku. Dostáváme

$$P(A) = \frac{1}{6}, P(\bar{A}) = \frac{5}{6}, P(B) = \frac{1}{36}, P(\bar{B}) = \frac{35}{36},$$

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3} \cap \overline{A_4}) =$$

$$= 1 - P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) \cdot P(\bar{A}_4) = 1 - (\frac{5}{6})^4 \doteq 0,518,$$

$$P(\bigcup_{j=1}^{24} B_j) = 1 - (\frac{35}{36})^{24} \doteq 0,491$$

a hráč A tedy skutečně má větší šanci na úspěch. Zajímavé je, že by oba hráči měli prakticky stejnou šanci na úspěch, kdyby hráč B měl 26 pokusů.

1.21 Přístroj se skládá z 500 součástek. Spolehlivost každé součástky je rovna

(a) 99%
(b) 99,5%
(c) 99,9%

Přístroj funguje, jsou-li všechny součástky v provozu. Poruchy jednotlivých součástek jsou na sobě nezávislé. S jakou pravděpodobností bude přístroj v pořádku?

Řešení Označme A_i jev „ $i-$ tá součástka je v pořádku". Jedná se o nezávislé jevy, nechť $B = \bigcap_{i=1}^{500} A_i$ je jev „přístroj je v pořádku". Nyní

(a) $P(B) = 0,99^{500} \doteq 0,0066$,

(b) $P(B) = 0,995^{500} \doteq 0,0816$,

(c) $P(B) = 0,999^{500} \doteq 0,606$.

To jsou překvapivé výsledky, když zdánlivě malé zvýšení spolehlivosti součástky podstatně zvyšuje spolehlivost celku. Je však nutné si uvědomit, že zvýšení spolehlivosti z 99% na 99,9% je vlastně desetinásobné, neboť v prvém případě je vadná v průměru 1 součástka ze 100, kdežto ve druhém 1 z tisíce.

1.22 Protože nelze spolehlivost součástek zvyšovat donekonečna, mohlo by se zdát, že přístroj, který obsahuje příliš mnoho součástek nebude fungovat prakticky nikdy. V těchto případech je nutno přistoupit ke zdvojování součástek. Představme si přístroj skládající se opět z 500 součástek, každá z nich je ovšem zdvojena. Lépe řečeno se tedy přístroj skládá z 500 bloků, každý blok pak ze dvou součástek. Blok je v pořádku, jestliže funguje alespoň jedna z jeho součástek, celý přístroj potom funguje, jestliže fungují všechny jeho bloky. Nechť spolehlivost každé součástky je 99,5%. Určete spolehlivost celého přístroje.

Řešení Je zřejmé, že spolehlivost všech bloků bude stejná. Určeme tedy spolehlivost 1. bloku. Nechť jev A_i znamená „i-tá součástka 1. bloku je v pořádku", jev B_1 znamená 1.„ blok je v pořádku". Potom

$$P(A_1) = P(A_2) = 0,995, P(\bar{A}_1) = P(\bar{A}_2) = 0,005,$$

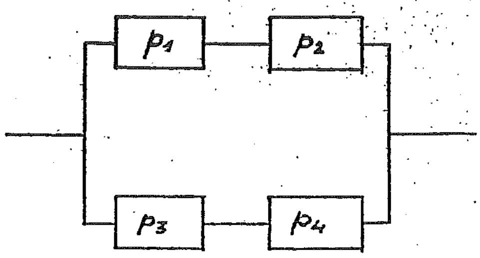
$$P(B_1) = P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(\overline{A_1}) \cdot P(\overline{A_2}) = 0,999975.$$

Pravděpodobnost, že celý přístroj bude v pořádku, je tedy

$$P(C) = 0,999975^{500} \doteq 0,988,$$

neboli proti předchozímu příkladu nesrovnatelně vyšší.

1.23 Zařízení se skládá ze čtyř součástek, které jsou uspořádány podle následujícího schématu.



Pravděpodobnost, že součástka A_i bude v pořádku, je p_i. Blok, ve kterém jsou součástky řazeny v sérii, funguje, jestliže fungují všechny jeho součátky. Blok, ve kterém jsou součátky řazeny paralelně, funguje, jestliže funguje aspoň jedna z jeho součástek. S jakou pravděpodobností bude fungovat celé zařízení?

Řešení Zařízení se skládá ze dvou paralelně vedených bloků, každý blok pak ze dvou sériově řazených součástek. Horní blok bude pracovat s pravděpodobností p_1p_2, spodní pak s pravděpodobností p_3p_4. Pro výpočet celkové pravděpodobnosti přejdeme k doplňku a dostaneme

$$P = 1 - (1 - p_1p_2)(1 - p_3p_4) = p_1p_2 + p_3p_4 - p_1p_2p_3p_4.$$

1.24 Pravděpodobnost, že tkanina nevydrží zkoušku pevnosti v tahu, je 0,1. Kolikrát je nutno zkoušku opakovat, aby pravděpodobnost, že tkanina aspoň 2× nevydrží, byla nejméně 0,9?

Řešení Opět je vhodné přejít k doplňku. Otázku v zadání je možno formulovat také následovně: Kolik je nutno provést zkoušek, aby pravděpodobnost, že tkanina nevydrží nejvýše jednou, byla maximálně 0,1? Provedeme n zkoušek. Pravděpodobnost, že tkanina vydrží všechny zkoušky, je rovna $0,9^n$. Pravděpodobnost, že nevydrží právě jednu zkoušku, je rovna $n \cdot 0,1 \cdot 0,9^{n-1}$ (v libovolné z n zkoušek nevydrží, pravděpodobnost je 0,1, ve zbylých vydrží, pravděpodobnost je 0,9). Dostáváme tedy nerovnici

$$0,9^n + n \cdot 0,1 \cdot 0,9^{n-1} < 0,1$$

Pro $n = 37$ na levé straně dostáváme 0,104, pro $n = 38$ pak 0,0953. Je tedy nutno provést alespoň 38 zkoušek.

1.25 Jsou dána tři stejná osudí.
V 1. osudí jsou 3 bílé a 5 černých koulí,
v 2. osudí jsou 4 bílé a 2 černé koule,
ve 3. osudí je 7 bílých koulí.

Z náhodně voleného osudí vytáhneme jednu kouli. Jaká je pravděpodobnost, že bude bílá?

Řešení Použijeme větu o úplné pravděpodobnosti. Označme
jev B_i - táhneme z i - tého osudí,
jev A - táhneme bílou kouli.
Jevy B_1, B_2, B_3 splňují předpoklady věty 1.9, takže

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + P(A|B_3) \cdot P(B_3) =$$

$$\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{49}{72}.$$

1.26 Na šachovnici postavíme náhodně dva jezdce. S jakou pravděpodobností se budou napadat?

Řešení Na šachovnici jsou celkem 4 pole, z nichž jezdec ohrožuje další dvě pole, 8 polí, z nichž ohrožuje 3 pole, 4 pole ohrožuje celkem z 20 polí, 6 polí ze 16 polí a konečně ze 16 polí ohrožuje 8 polí - viz znázornění na šachovnici.

2	3	4	4	4	4	3	2
3	4	6	6	6	6	4	3
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
4	6	8	8	8	8	6	4
3	4	6	6	6	6	4	3
2	3	4	4	4	4	3	2

Označme B_i jev „jezdec ohrožuje i polí". Položíme-li

$$\Omega = B_2 \cup B_3 \cup B_4 \cup B_6 \cup B_8$$

pak všechny uvedené jevy splňují předpoklady věty o úplné pravděpodobnosti a podle ní pak

$$P(A) = \frac{4}{64} \cdot \frac{2}{63} + \frac{8}{64} \cdot \frac{3}{63} + \frac{20}{64} \cdot \frac{4}{63} + \frac{16}{64} \cdot \frac{6}{63} + \frac{16}{16} \cdot \frac{8}{63} = \frac{1}{12}.$$

1.27 Lehkomyslný člen poroty

V soutěži rozhoduje tříčlenná porota. Dva porotci jsou seriózní a správné rozhodnutí přijmou s pravděpodobností p. Třetí porotce hází mincí. S jakou pravděpodobností porota přijme správné rozhodnutí? Rozhoduje většina hlasů.

Řešení Použijeme opět větu o úplné pravděpodobnosti, přičemž v tomto případě máme možnost dvojí volby alternativ, buď podle rozhodnutí obou seriózních porotců nebo podle rozhodnutí lehkomyslného porotce. Probereme si oba případy.

1. způsob: Označme

A - porota přijme správné rozhodnutí,

B_1 - oba seriózní se rozhodnou správně,

B_2 - mínění seriózních porotců se rozchází,

B_3 - oba seriózní se rozhodnou nesprávně.

Potom

(a) $P(B_1) = p^2$, na mínění třetího nezáleží, $P(A|B_1) = 1$,

(b) $P(B_2) = p(1-p) + (1-p)p = 2p(1-p)$,
celkové rozhodnutí poroty pak závisí na rozhodnutí lehkomyslného porotce, $P(A|B_2) = \frac{1}{2}$,

(c) $P(B_3) = (1-p)^2$, na mínění třetího nezáleží, $P(A|B_3) = 0$.
Celkově tedy

$$P(A) = 1 \cdot p^2 + \frac{1}{2} \cdot 2p(1-p) + 0 \cdot (1-p)^2 = p^2 + p(1-p) = p$$

2. způsob: Označme

A - porota přijme správné rozhodnutí,

B_1 - lehkomyslý porotce se rozhodne správně,

B_2 - lehkomyslý porotce se rozhodne nesprávně.

Potom

(a) $P(B_1) = \frac{1}{2}$, rozhodnutí poroty je správné, jestliže správně rozhodne alespoň jeden se seriózních porotců, přes doplňkový jev dostaneme

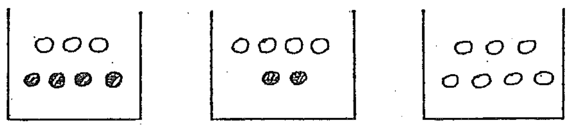
$$P(A|B_1) = 1 - (1-p)^2 = 2p - p^2,$$

(b) $P(B_2) = \frac{1}{2}$ rozhodnutí poroty je správné, jestliže se rozhodnou správně oba seriózní porotci, čili $P(A|B_2) = p^2$.
Celkově tedy máme

$$\frac{1}{2} \cdot (2p - p^2) + \frac{1}{2}p^2 = p.$$

Oba postupy nutně musely vést k témuž výsledku. Zajímavé je, že takováto porota je stejně spolehlivá jako jediný seriózní porotce.

1.28 Jsou dána tři stejná osudí.
V 1. osudí jsou 3. bílé a 5 černých koulí,
v 2. osudí jsou 4 bílé a 2 černé koule,
ve 3. osudí je 7 bílých koulí.



Z náhodně voleného osudí táhneme jednu kouli a ukáže se, že je bílá. Jaká je pravděpodobnost, že tažená koule pochází z prvního osudí?

Řešení Označme
B_i - koule byla tažena z i - tého osudí,
A- vytáhli jsme bílou kouli.
Použijeme Bayesovou větu (ve jmenovateli je použit výsledek příkladu 1.24). Dostaneme

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1)P(B_1)}{\sum\limits_{i=1}^{3} P(A/B_i)P(B_i)} = \frac{\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{49}{72}} = \frac{9}{49}.$$

1.29 Přístroj hledá vady materiálu. Vadu najde s pravděpodobností 0,95, naopak s pravděpodobností 0,01 označí bezvadný materiál jako vadný.

Je známo, že pravděpodobnost výskytu vady je 0,005. Přístroj ukazuje vadu. S jakou pravděpodobností je zkoušený materiál skutečně vadný?

Řešení Označme
B_1 - materiál má vadu,
B_2 - materiál nemá vadu,
A - přístroj ukazuje vadu.
Zajímá nás jev $B_1|A$. Podle Bayesovy věty dostaneme

$$P(B_1) = 0,005, \qquad P(A|B_1) = 0,95,$$

$$P(B_2) = 0,995, \qquad P(A|B_2) = 0,01,$$

$$P(B_1|A) = \frac{0,95 \cdot 0,005}{0,95 \cdot 0,005 + 0,01 \cdot 0,995} \doteq 0,32.$$

To není nikterak velká pravděpodobnost, neboť vyřadíme-li všechny výrobky, které zkouškou neprojdou, pak přibližně dvě třetiny vyřazených výrobků budou výrobky bezvadné! Předpokládáme-li však, že přístroj ukazuje chybně vadu u bezvadného materiálu zcela nahodile, pak můžeme výrobky označené jako vadné přezkoušet ještě jednou, přičemž pravděpodobnosti a posteriori se nyní stanou pravděpodobnostmi a priori. Dostaneme tedy

$$P(B_1) = 0,32, \qquad P(A|B_1) = 0,95,$$

$$P(B_2) = 0,68, \qquad P(A|B_2) = 0,01,$$

$$P(B_1|A) = \frac{0,95 \cdot 0,32)}{0,95 \cdot 0,32 + 0,01 \cdot 0,68} \doteq 0,978.$$

neboli výrobky dvakrát za sebou označené jako vadné už skutečně s vysokou pravděpodobností vadné jsou.

1.30 Přenos diskrétních zpráv kanálem,ve kterém působí rušivé vlivy. Vysíláme prvky $x_1, \ldots, x_s$ (tzv. abeceda), přijímáme prvky $y_1, \ldots, y_s$. Při bezchybném přenosu je při vyslání x_i přijat y_i. Na vysílání však většinou působí rušivé vlivy, které příjem zkreslují. Následující tři příklady jsou na toto téma.
Vysílejme prvky 0 a 1. Označme
B_1 - vysílání 0,
B_2 - vysílání 1,
A_1 - přijetí 0,

A_2 - přijetí 1.
Je-li vyslán 0, přijme se správně v 97% případů,
je-li vyslán 1, přijme se správně v 80% případů.
Zpráva obsahuje 45% jedniček.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že vyslaný prvek bude špatně přijat?

(b) Přijali jsme jedničku. S jakou pravděpodobností byla skutečně vyslána?

Řešení

(a) Označme C jev „prvek byl správně přijat“. Použijeme větu o úplné pravděpodobnosti a dostaneme

$$P(B_1) = 0,45 \qquad P(\bar{C}|B_1) = 0,03$$
$$P(B_2) = 0,55 \qquad P(\bar{C}|B_2) = 0,20$$
$$P(\bar{C}) = 0,03 \cdot 0,45 + 0,2 \cdot 0,55) = 0,1235$$

(b) Zajímá nás pravděpodobnost jevu $P(B_2|A_2)$. Použijeme Bayesovu větu.

$$P(B_2|A_2) = \frac{P(B_2) \cdot P(A_2|B_2)}{P(B_1) \cdot P(A_1|B_2) + P(B_2) \cdot P(A_2|B_2)} =$$
$$= \frac{0,55 \cdot 0,8}{0,45 \cdot 0,03 + 0,55 \cdot 0,8} \doteq 0,97.$$

1.31 Pro snížení rizika chyb v příjmu, zvláště při vyšší pravděpodobnosti chybného příjmu, lze místo jednotlivých znaků vysílat skupiny více znaků. Vysílejme kódové skupiny 11111 a 00000. Označme
B_1 - vyslání 00000
B_2 - vyslání 11111
Pravděpodobnost správného přijetí prvku 0 i 1 je 2/3, chyby v přijetí jednotlivých prvků jsou nezávislé, vysílaná zpráva obsahuje 25% skupin 00000 a 75% skupin 11111. Která skupina byla pravděpodobněji vyslána, jestliže byla přijata skupina 01001?

Řešení Označme A jev „přijata byla skupina 01001“. Určeme potřebné podmíněné pravděpodobnosti pro použití Bayesovy věty.

$P(A|B_1)$: (vyslána 0 a přijata 0) $\cap$(vyslána 0 a přijata 1) $\cap \dots$, čili

$$P(A|B_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \doteq 0,0329.$$

Obdobně

$$P(A|B_2) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \doteq 0,0165.$$

Chceme porovnat $P(B_1|A)$ a $P(B_2|A)$. Vzhledem k tomu, že jmenovatel je stejný, stačí porovnat čitatele.
čitatel$P(B_1|A) : P(A|B_1) \cdot P(B_1) = \frac{1}{4} \cdot 0,0329 = 0,0082$,
čitatel$P(B_2|A) : P(A|B_2) \cdot P(B_2) = \frac{3}{4} \cdot 0,0165 = 0,0123$.
Pravděpodobnější je tedy vyslání skupiny 11111. Tento zdánlivě překvapující výsledek vychází z toho, že pravděpodobnost špatného přijetí je mimořádně vysoká a že skupin 00000 je ve zprávě podstatně méně než skupin 11111. Na druhé straně je však třeba si uvědomit, že podle vypočtených pravděpodobností je pravděpodobnost přijetí skupiny 01001 pouze

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) \doteq 0,02$$

a podobně je to s pravděpodobností přijetí např. skupiny 11010. Nejčastěji přijímanými skupinami budou skupiny obsahující čtyři nebo pět stejných prvků a u těch je pravděpodobnost špatného dekódování (jak si může čtenář ověřit) velmi malá.

1.32 Nechť abeceda je tříprvková, ve vysílané zprávě nechť je
40% prvků x_1,
50% prvků x_2,
10% prvků x_3.
Přijímány jsou prvky y_1, y_2, y_3. V následující tabulce jsou uvedeny pravděpodobnosti, s jakými bude při vyslání prvku x_i přijat prvek y_j.

	y_1	y_2	y_3
x_1	0,5	0,2	0,3
x_2	0,1	0,6	0,3
x_3	0	0	1

Byl přijat prvek y_j. Který prvek byl nejpravděpodobněji vyslán?

Řešení Označme A_i - přijetí y_i, B_i - vyslání x_i.
Potom $P(B_1) = 0,4, P(B_2) = 0,5, P(B_3) = 0,1$. V tabulce jsou uvedeny pravděpodobnosti $P(A_i|B_j)$. Pro zjednodušení dalších výpočtů nejprve spočteme pravděpodobnosti jevů A_i.

$$P(A_1) = 0,4 \cdot 0,5 + 0,5 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0 = 0,25,$$

$$P(A_2) = 0,4 \cdot 0,2 + 0,5 \cdot 0,6 + 0,1 \cdot 0 = 0,38,$$

$$P(A_3) = 0,4 \cdot 0,3 + 0,5 \cdot 0,3 + 0,1 \cdot 1 = 0,37.$$

(a) Byl přijat prvek y_1, tj. nastal jev A_1. Potom

$$P(B_1/A_1) = \frac{P(A_1|B_1)P(B_1)}{P(A_1)} = \frac{0,5 \cdot 0,4}{0,25} = 0,8,$$

$$P(B_2|A_1) = \frac{P(A_1|B_2)P(B_2)}{P(A_1)} = \frac{0,1 \cdot 0,5}{0,25} = 0,2,$$

$$P(B_3|A_1) = \frac{P(A_1|B_3)P(P_3)}{P(A_1)} = 0,$$

tj. nejpravděpodobněji byl vyslán prvek x_1.

(b) V tomto případě nastal jev A_2. Nyní

$$P(B_1|A_2) = \frac{P(A_2|B_1) \cdot P(B_1)}{P(A_2)} = \frac{0,2 \cdot 0,4}{0,36} \doteq 0,21,$$

$$P(B_2|A_2) = \frac{P(A_2|B_2) \cdot P(B_2)}{P(A_2)} = \frac{0,6 \cdot 0,5}{0,38} \doteq 0,79,$$

$$P(B_3|A_2) = 0$$

a tedy nejpravděpodobnější bylo vyslání prvku x_2.

(c) Zde nastal jev A_3. Dostáváme

$$P(B_1|A_3) = \frac{P(A_3|B_1)P(B_1)}{P(A_3)} = \frac{0,3 \cdot 0,4}{0,37} \doteq 0,32,$$

$$P(B_2|A_3) = \frac{P(A_3|B_2) \cdot P(B_2)}{P(A_3)} = \frac{0,3 \cdot 0,5}{0,37} \doteq 0,41,$$

$$P(B_3|A_3) = \frac{P(A_3|B_3) \cdot P(B_3)}{P(A_3)} = \frac{0,1 \cdot 1}{0,37} \doteq 0,27$$

a tedy přijatý y_3 je nejlepší vyhodnotit jako vyslaný x_2, přestože se tím dostaneme do situace, kdy po vyhodnocení se ve zprávě prvek x_3 nebude vůbec vyskytovat. Přitom ještě navíc se vyslaný prvek x_3 přijme vždy jako y_3, a tudíž v tomto případě znamená *vyslání* x_3 automaticky chybu ve vyhodnocení! Přesto pokud použijeme výše doporučeného postupu, dopustíme se menšího počtu chyb. Tato na první pohled neuvěřitelná skutečnost je opět způsobena tím, že pravděpodobnosti poruch jsou u prvků x_1, x_2 velmi vysoké a že se ve zprávě vyskytuje prvek x_3 jen sporadicky. V praxi by v podobném případě bylo namístě zvážit vysílání prvku x_3 opakovaně jako kódové skupiny z předchozího příkladu.

Kontrolní otázky a cvičení

1.1 Jaký je rozdíl mezi relativní četností a pravděpodobností?

1.2 Jaké má nedostatky klasická a statistická definice pravděpodobnosti?

1.3 Zjednodušte výraz

$$(A \cap B \cap C) \cup (B \cap \bar{C}) \cup (\bar{A} \cap B \cap C).$$

1.4 Nechť A, B, C tvoří úplný systém neslučitelných jevů. Sestavte úplný systém neslučitelných jevů, který bude obsahovat mj. jevy $A \setminus B, B \setminus C$.

1.5 Nechť A je jev „dané číslo je dělitelné dvěma",
B je jev „dané číslo je dělitelné třemi",
C je jev „dané číslo je dělitelné čtyřmi".
Zformulujte přesně následující jevy:

$$A \cap B, \bar{A} \cap C, A \cap C, A \cap B \cap \bar{C}, \overline{A \cup B}.$$

1.6 Plyne z neslučitelnosti jevů jejich párová neslučitelnost? Demonstrujte na příkladě.

1.7 Jak vypadají elementární jevy, jestliže náhodným pokusem je

(a) hod dvěma mincemi,

(b) opakovaný hod kostkou, dokud nepadne poprvé šestka,

(c) doba čekání na tramvaj,

(d) tah Matesa,

(e) zkouška bezvadnosti výrobku?

1.8 Lze na výsledky Sazky použít klasickou definici pravděpodobnosti?

1.9 Nechť $\Omega = \langle 0, 1 \rangle$. Najděte příklad σ - algebry, která obsahuje mj. množiny $A = \langle 0, \frac{1}{2} \rangle, B = (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$.

1.10 Uveďte příklad jevu, který má pravděpodobnost 1, ale není jistý.

1.11 Uveďte příklad posloupnosti, pro kterou platí $x_i \to x_0$ pro nějaké x_0, ale neplatí $x_i \nearrow x_0$ ani $x_i \searrow x_0$.

1.12 Do tanečního kroužku chodí 15 dívek a 20 chlapců. Kolik různých párů lze v tomto kroužku vytvořit?

1.13 Fotbalová liga má 16 účastníků. Kolika způsoby lze vybrat

(a) vítěze ligy, vítěze poháru a účastníka poháru UEFA, jestliže to musí být různá mužstva,

(b) tři sestupující?

1.14 Desetičlenné předsednictvo má ze svého středu vybrat předsedu, místopředsedu a tři tajemníky. Kolika způsoby to může udělat?

1.15 Náhodný pokus představuje hod dvěma kostkami. Určete pravděpodobnost následujících jevů:

(a) na první kostce padne sudé číslo,

(b) na obou kostkách padne stejné číslo,

(c) součet cifer bude alespoň 10.

1.16 Hodíme třemi kostkami. Je pravděpodobnější součet 10 nebo 11?

1.17 Tyč dlouhou 1m zlomíme ve zcela náhodném místě. S jakou pravděpodobností bude kratší konec delší než 40cm?

1.18 Dva přátelé se dohodnou, že se sejdou na jistém místě mezi 12. a 13. hodinou s tím, že ten, kdo přijde první, počká na druhého 20 minut. S jakou pravděpodobností se doopravdy sejdou?

1.19 Je nutný předpoklad $P(A) \neq 0$ ve větě 1.10?

1.20 S jakou pravděpodobností vyhrajeme 2. pořadí ve Sportce?

1.21 Mohou být nezávislé jevy, pro které platí $A \subset B$? Kdy?

1.22 Dokažte, že jestliže jsou nezávislé jevy A, B, pak jsou nezávislé i jevy $A, \bar{B}$.

1.23 Nechť v urně jsou čísla 6, 10, 15, 30. Uvažujte následující jevy:
A - tažené číslo je dělitelné dvěma,
B - tažené číslo je dělitelné třemi,
C - tažené číslo je dělitelné pěti.
Ukažte, že tyto jevy jsou závislé, ačkoliv libovolná dvojice těchto jevů jsou jevy nezávislé.

1.24 Najděte příklad čtyř jevů, které dohromady jsou závislé a přitom libovolná trojice těchto jevů jsou jevy nezávislé.

1.25 Z balíčku 32 karet náhodně vytáhneme jednu kartu. Jev A nechť je definován tak, že karta bude žaludová, jev B znamená, že vytažená karta bude eso. Rozhodněte, zda jevy A, B jsou nezávislé. Změní se situace, jestliže do balíčku bude přimíchán jeden žolík?

1.26 Z balíčku 32 karet vytáhneme postupně dvě karty. Kartu vytaženou na první pokus do balíčku nevracíme. Nechť A je jev „na první pokus vytáhneme eso“, jev B „na druhý pokus vytáhneme eso“. Určete pravděpodobnost obou jevů a rozhodněte, zda jsou tyto jevy nezávislé.

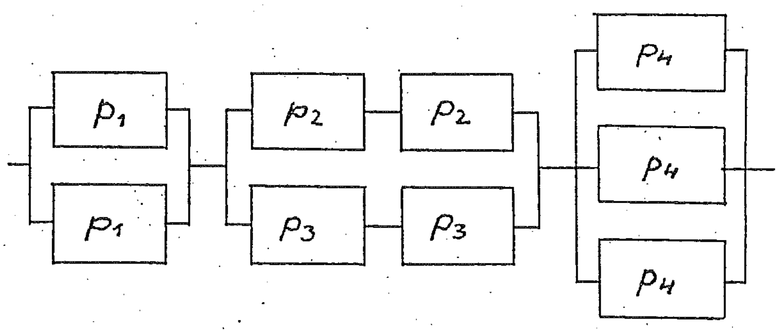
1.27 Nechť jevy $A_1, A_2, \dots A_n$ jsou nezávislé, nechť $P(A_i) = p_i$.
Určete pravděpodobnost toho, že

(a) nastane alespoň jedna z událostí $A_1, A_2, \dots A_n$,

(b) nastanou všechny události $A_1, A_2, \dots A_n$.

1.28 Linka se skládá ze 3 částí, pravděpodobnosti poruch těchto částí jsou p_1, p_2, p_3. Poruchy jsou na sobě navzájem nezávislé. Linka funguje jen tehdy, fungují-li všechny její části. Máme k dispozici dvě tyto linky. S jakou pravděpodobností bude alespoň jedna v pořádku?

1.29 Spočtěte pravděpodobnost toho, že z bodu A bude do bodu B protékat elektrický proud, je-li elektrický obvod včetně pravděpodobností průchodu proudu jednotlivými součástkami vyznačen na obrázku. Řešte jednak obecně a jednak numericky pro $p_1 = 0,7, p_2 = 0,8, p_3 = 0,9, p_4 = 0,6$.



Jak by vypadal výsledek v případě, že hodnoty by naopak značily pravděpodobnosti poruch jednotlivých součástek?

1.30 Házíme mincí tak dlouho, dokud nám dvakrát za sebou nepadne stejná strana. S jakou pravděpodobností ukončíme experiment během prvních čtyř pokusů?

1.31 Jak dlouho musíme sázet sportku, aby pravděpodobnost, že alespoň jednou vyhrajeme (v libovolném pořadí) byla nejméně 95%?

1.32 Jaká je pravděpodobnost, že jestliže z balíčku vytáhneme 4 karty, budou mít všechny různou barvu? Řešte jak pro případ, kdy vytaženou kartu vrátíme do balíčku, tak pro případ, že ji nevracíme.

1.33 Hodíme šesti kostkami. S jakou pravděpodobností budou alespoň na dvou kostkách stejná čísla?

1.34 Porovnejte spolehlivost poroty 3 seriózních porotců s porotou čtyř seriózních a jednoho lehkomyslného porotce.

1.35 Z domina obsahujícího 28 kostek vytáhneme dvě. S jakou pravděpodobností půjdou přiložit k sobě?

1.36 Na šachovnici náhodně postavíme

(a) bílou a černou dámu,

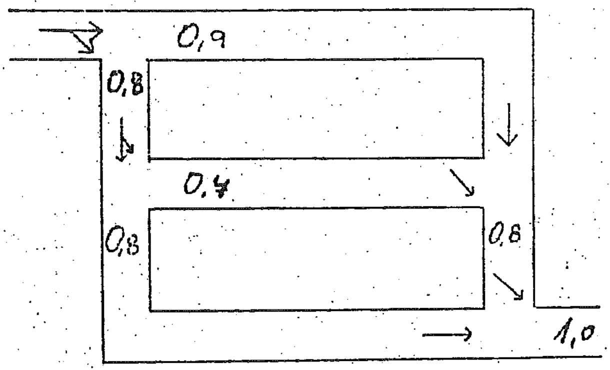
(b) bílou věž a černého střelce.
S jakou pravděpodobností bude alespoň jedna figurka ohrožovat druhou?

1.37 Hodíme šesti kostkami. Jestliže na některých z nich padne šestka, pak tyto kostky odložíme stranou. Se zbylými kostkami hodíme znovu. S jakou pravděpodobností hodíme tímto způsobem alespoň dvě šestky?

1.38 Hrajeme poker. Po obdržení prvních 5 karet můžeme podle vlastní úvahy nekteré z nich vyměnit. S jakou pravděpodobností budeme mít po výměně v ruce alespoň tři karty stejné hodnoty? Najděte nejlepší strategii výměny.

1.39 Podélný stůl má na každé straně n míst. Rozesadíme k němu $2n$ lidí. S jakou pravděpodobností nebudou dva agenti StB sedět ani vedle sebe, ani proti sobě?

1.40 V následujícím obrázku je zakreslena pravděpodobnost, že jednotlivá ulice bude průjezdná a přikázaný směr jízdy. S jakou pravděpodobností bude tato část města průjezdná z bodu A do bodu B?



1.41 Kódovaná zpráva obsahuje m nul a n jednotek. Pravděpodobnost správného přijetí nuly je p_o, správného přijetí jednotky p_1. S jakou pravděpodobností bude vyslaný prvek správně přijat?

1.42 Záhon je oset dvěma druhy semen. Semeno prvního druhu vzklíčí s pravděpodobností 90%, semeno druhého druhu s pravděpodobností 80%. Semen prvního druhu bylo vyseto 60%, druhého 40%. S jakou pravděpodobností bude vyklíčené semeno prvního druhu?

Kapitola 2

Náhodná proměnná

Přehled definic a vět

2.1 Základní pojmy a vlastnosti

Definice *Nechť* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *je pravděpodobnostní prostor. Reálná funkce* $X : \Omega \to \mathbf{R}$ *se nazývá* náhodná proměnná, *jestliže pro každé* $x \in \mathbf{R}$ *je*

$$X^{-1}\big((-\infty, x\rangle\big) = \big\{\, \omega \in \Omega \;\big|\; X(\omega) \leq x \,\big\} \in \mathcal{A}.$$

Poznámka Definičním oborem náhodné proměnné je vždy celé Ω.

Náhodné proměnné budeme značit většinou velkými písmeny latinské abecedy, méně malými písmeny řecké abecedy.

Definice *Řekneme, že je dán* zákon rozdělení *náhodné proměnné* X, *jestliže pro každý interval* $J \in \mathbf{R}$ *(konečný nebo nekonečný, otevřený nebo uzavřený) je známa pravděpodobnost jevu spočívající v tom, že při náhodném pokusu proměnná* X *nabude hodnoty* $x \in J$. *Např. pro* $J = \langle c, d\rangle$ *budeme příslušný jev*

$$A = \big\{\, \omega \in \Omega \;\big|\; c \leq X(\omega) \leq d \,\big\} \in \mathcal{A}$$

značit .

$$\{c \leq X \leq d\}$$

a jeho pravděpodobnost

$$P(c \leq X \leq d)$$

(obdobně např. $P(X < c), P(X = x)$ *atd.).*

Definice *Nechť X je náhodná proměnná. Reálná funkce F reálné proměnné definovaná vztahem*

$$F(x) = P(X \leq x)$$

se nazývá distribuční funkce *náhodné proměnné.*

Poznámka Definiční obor funkce F je celé $\mathbf{R}$ nezávisle na tom, jakých hodnot proměnná X nabývá.

Definice *Nechť F je reálná funkce, definovaná v okolí bodu x_0. Řekneme, že F je* zprava (zleva) polospojitá v bodě x_0, *jestliže platí*

$$\lim_{x \to x_0+} F(x) = F(x_0), \quad \textit{resp.} \quad \lim_{x \to x_0-} F(x) = F(x_0).$$

Řekneme, že F je zprava (zleva) polospojitá, *je-li zprava (zleva) polospojitá v každém bodě svého definičního oboru.*

Věta 2.1 *Nechť $F(x)$ je distribuční funkce náhodné proměnné X. Potom platí*

(a) $0 \leq F(x) \leq 1, \qquad \forall x \in \mathbf{R}$,

(b) $F(x)$ je neklesající funkce,

(c) $F(x)$ je zprava polospojitá,

(d) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$,

(e) $F(x)$ má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti.

Poznámka

1. Někdy se distribuční funkce definuje předpisem $F(x) = P(X < x)$. V tom případě je zleva polospojitá.

2. Dá se ukázat, že naopak každá reálná funkce s vlastnostmi (a) – (e) je distribuční funkcí nějaké náhodné proměnné.

Věta 2.2 *Nechť $a, b \in \mathbf{R}, a < b$. Potom*

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Věta 2.3 *Pro každé $x_0 \in \mathbf{R}$ platí*

$$P(X = x_0) = F(x_0) - \lim_{x \to x_0-} F(x).$$

Definice *Řekneme, že X je* spojitá náhodná proměnná, *jestliže její distribuční funkce je spojitá. Řekneme, že X je* diskrétní náhodná proměnná, *jestliže nabývá nejvýše spočetně mnoha hodnot.*

Věta 2.4 *Nechť $F(x)$ je distribuční funkce diskrétní náhodné proměnné X a $M = \{x_1, x_2, \ldots\}$ množina (konečná nebo nekonečná) všech jejích bodů nespojitosti. Pak*

$$P(X = x_i) > 0 \qquad \textit{pro} \qquad i = 1, 2, \ldots$$

a

$$P(X = x) = 0 \qquad \textit{pro} \qquad x \notin M.$$

Poznámka Disitribuční funkce diskrétní náhodné proměnné je ve všech praktických případech po částech konstantní.

Definice *Nechť diskrétní náhodná proměnná X nabývá hodnot $x_1, x_2, \ldots$ Funkce $P(x)$, definovaná předpisem*

$$\begin{aligned} P(x_i) &= P(X = x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, \\ P(x) &= 0 \qquad\qquad\quad \textit{jinak}, \end{aligned}$$

se nazývá pravděpodobnostní funkce *diskrétní náhodné proměnné X.*

Poznámka Graficky se pravděpodobnostní funkce většinou znázorňuje tzv. hůlkovým diagramem — viz Příklady.

Věta 2.5 *Buď X diskrétní náhodná proměnná, $F(x)$ její distribuční funkce a $P(x)$ její pravděpodobnostní funkce. Potom platí*

(a) $F(x) = \sum_{\{i; x_i \le x\}} P(x_i)$,

(b) $\sum_i P(x_i) = 1$,

(c) $P(a \leq X \leq b) = \sum_{\{i; a \leq x_i \leq b\}} P(x_i)$.

Věta 2.6 *Je-li X spojitá náhodná proměnná, pak pro každé $x_0 \in \mathbf{R}$ platí*

$$P(X = x_0) = 0.$$

V dalším předpokládáme, že distribuční funkce splňuje předpoklad, že $F'(x)$ existuje všude až na konečný počet bodů.

Poznámka Tento předpoklad není nezbytný, pro naše účely však je plně vyhovující. Jeho odstranění by si vyžádalo speciální prostředky (např. Lebesgueův integrál).

Věta 2.7 *Buď $F(x)$ distribuční funkce spojité náhodné proměnné X. Pak existuje funkce $f(x)$ taková, že pro každé $x \in \mathbf{R}$ platí*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Definice *Funkce $f(x)$, jejíž existenci zaručuje věta 2.7, se nazývá* hustota pravděpodobnosti *(nebo krátce* hustota*) spojité náhodné proměnné X.*

Věta 2.8 *Buď X spojitá náhodná proměnná, $f(x)$ její hustota. Potom platí*

(a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$,

(b) $P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = \displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\, dx$.

2.2 Charakteristiky

Úplné poznání náhodné proměnné předpokládá vymezení hodnot, jichž může náhodná proměnná nabývat a znalost pravděpodobností, s nimiž náhodná proměnná nabude určité hodnoty nebo hodnoty z určitého intervalu. Úplný popis dává distribuční funkce a ve speciálním případě diskrétní či spojité náhodné proměnné též pravděpodobnostní funkce nebo hustota. V praxi často postačí informaci shrnout do několika čísel — charakteristik.

2.2.1 Charakteristiky polohy

Popisují „střed“, kolem něhož kolísají hodnoty náhodné proměnné.

Definice *Nechť X je diskrétní náhodná proměnná s pravděpodobnostní funkcí $P(x)$ a $k \geq 0$ celé číslo. Číslo*

$$\mu'_k(X) = \sum_x x^k P(x)$$

se nazývá obecným momentem k-tého řádu *náhodné proměnné X (nebo též k-tým obecným momentem).*

Nechť X je spojitá náhodná proměnná. Obecným momentem k-tého řádu budeme rozumět číslo

$$\mu'_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\, dx.$$

Definice *První obecný moment náhodné proměnné X se nazývá* střední hodnota *náhodné proměnné X a značí se $E(X)$.*

Poznámka Z definice momentů tedy platí

$$E(X) = \sum_x x P(x)$$

pro diskrétní proměnnou,

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

pro spojitou náhodnou proměnnou.

Věta 2.9 *Nechť X je náhodná proměnná a nechť a, b jsou reálná čísla . Potom*

$$E(aX + b) = aE(X) + b.$$

Důsledek Je-li k konstanta, pak

(a) $E(k) = k$,

(b) $E(kX) = k\ E(X)$.

Střední hodnota nemusí pro každou náhodnou proměnnou existovat. Charakteristikou polohy, která pro každou proměnnou existuje, je

Definice 100p% kvantil *náhodné proměnné X je číslo x_p, pro něž platí*

$$F(x_p) \geq p \qquad a \qquad \lim_{x \to x_p-} F(x) \leq p.$$

Definice *Pro následující kvantily se používají speciální termíny*

$x_{0,5}$	medián,
$x_{0,25}$	dolní kvartil,
$x_{0,75}$	horní kvartil,
$x_{k/10}$	k-tý decil,
$x_{k/100}$	k-tý percentil.

2.2.2 Charakteristiky variability

vyjadřují „míru kolísání“ hodnot náhodné proměnné kolem středu.

Definice *Buď X náhodná proměnná, pro niž existuje střední hodnota $E(X)$ a nechť $k \geq 1$ je přirozené číslo.* Centrálním momentem k-tého řádu, *resp. k-tým centrálním momentem, rozumíme číslo*

$$\mu_k(X) = \sum_x (x - E(X))^k P(x)$$

pro diskrétní náhodnou proměnnou a

$$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^k f(x)\, dx$$

pro spojitou náhodnou proměnnou.

Věta 2.10 *Pro každou náhodnou proměnnou platí*

$$\mu_1(X) = 0.$$

Prvním zajímavým centrálním momentem je tedy druhý centrální moment.

Definice *Druhý centrální moment náhodné proměnné X se nazývá* rozptyl *náhodné proměnné X a značí se $D(X)$ resp. $\sigma^2(X)$, někdy též* $\mathrm{Var}(X)$. *Odmocnina z rozptylu se pak nazývá* směrodatná odchylka *náhodné proměnné X a značí se $\sigma(X)$.*

Věta 2.11 *Nechť X je náhodná proměnná s konečným rozptylem a nechť a, b jsou reálná čísla. Potom platí*

$$D(aX + b) = a^2 D(X).$$

Důsledek Je-li k konstanta, pak

(a) $D(k) = 0$,

(b) $D(kX) = k^2 D(X)$.

Centrální momenty se dají ze znalosti obecných momentů určit podle následující věty.

Věta 2.12

$$\mu_k(X) = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \mu'_{k-j}(X) E^j(X).$$

Důsledek $D(X) = E(X^2) - E^2(X)$ (tzv. výpočtový tvar rozptylu).

Další možnou charakteristikou variability je

Definice *Podíl $\vartheta(X) = \frac{\sigma(X)}{E(X)}$ se nazývá* variační koeficient *náhodné proměnné X.*

Poznámka Výhodou variačního koeficientu je jeho bezrozměrnost, t.j. jeho hodnota nezávisí na zvolených jednotkách.

Pokud rozptyl náhodné proměnné neexistuje, lze variabilitu charakterizovat opět pomocí kvantilů.

Definice Kvantilovým rozpětím *rozumíme číslo $x_{p_1} - x_{p_2}$, kde $p_1 > p_2$ jsou vhodné kvantily. Speciálně se používá*

(a) kvartilové rozpětí $x_{0,75} - x_{0,25}$,

(b) decilové rozpětí $x_{0,9} - x_{0,1}$,

(c) percentilové rozpětí $x_{0,99} - x_{0,01}$.

2.2.3 Další charakteristiky

Definice *Nechť X je náhodná proměnná. Náhodná proměnná $\hat{X}$, definovaná vztahem*

$$\hat{X} = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)},$$

se nazývá normovaná *(resp.* standardizovaná*)* náhodná proměnná.

Věta 2.13 *Pro momenty normované náhodné proměnné platí*

(a) $\mu'_k(\hat{X}) = \mu_k(\hat{X})$,

(b) $E(\hat{X}) = 0$,

(c) $D(\hat{X}) = 1$.

Definice *Momenty náhodné proměnné $\hat{X}$ se nazývají* normované momenty *náhodné proměnné X.*

Definice *Třetí normovaný moment náhodné proměnné X, t.j. číslo*

$$a(X) = \mu_3(\hat{X}) = \frac{\mu_3(X)}{\big(\sigma(X)\big)^3}$$

se nazývá koeficient šikmosti *náhodné proměnné X.*

Poznámka

(a) $a(X) = 0$ pro symetrická rozdělení,

(b) $a(X) > 0$ pro rozdělení sešikmená doleva,

(c) $a(X) < 0$ pro rozdělení sešikmená doprava.

Definice *Číslo $b(X) = \mu_4(\hat{X}) - 3$ se nazývá* koeficient špičatosti (exces) *náhodné proměnné X.*

Poznámka

(a) Pro normální rozdělení je $b(X) = 0$.

(b) Je-li $b(X) > 0$, pak je rozdělení ve srovnání s normálním špičatější.

(c) Je-li $b(X) < 0$, pak je rozdělení ve srovnání s normálním plošší.

2.2.4 Momentová vytvořující funkce, charakteristická funkce

Definice *Funkce reálné proměnné t, definovaná vztahem*

$$\varphi_X(t) = E(e^{itX}),$$

se nazývá charakteristická funkce *náhodné proměnné X.*

Funkce reálné proměnné t, definovaná vztahem

$$M_X(t) = E(e^{tX}),$$

se nazývá momentová vytvořující funkce *náhodné proměnné X.*

Poznámka Pro diskrétní, resp. spojitou náhodnou proměnnou tedy platí

$$\varphi_X(t) = \begin{cases} \sum\limits_x e^{itx} P(x), \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f(x)\, dx, \end{cases}$$

$$M_X(t) = \begin{cases} \sum\limits_x e^{tx} P(x), \\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\, dx. \end{cases}$$

Věta 2.14 *Nechť náhodná proměnná X má k-tý obecný moment $\mu'_k(X)$. Pak existuje derivace $\left.\frac{d^k M_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}$ a platí*

$$\mu'_k(X) = \left.\frac{d^k M_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}.$$

Věta 2.15 *Pro charakteristickou funkci platí*

$$\left.\frac{d^k}{dt^k}\varphi_X(t)\right|_{t=0} = i^k \mu'_k(X).$$

Věta 2.16 *Je-li $\varphi_X(t)$ charakteristická funkce náhodné proměnné X, pak její hustota je dána vzorcem*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi_X(t)\, dt.$$

Věta 2.17 *Dvě náhodné proměnné mají stejný zákon rozdělení právě když mají stejnou charakteristickou i momentovou vytvořující funkci.*

2.3 Některá důležitá rozdělení

2.3.1 Rozdělení diskrétní náhodné proměnné

V celém odstavci budeme předpokládat, že náhodná proměnná je diskrétní.

1. *Výběr bez opakování — hypergeometrické rozdělení* HG (N, M, n).

   Řekneme, že náhodná proměnná X má *hypergeometrické rozdělení* s parametry N, M, n, kde $1 \leq n \leq N$ a $1 \leq M \leq N$, jestliže

   $$P(X) = \begin{cases} \dfrac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}} & \text{pro } x \text{ celé, pro které } \ 0 \leq x \leq n,\ x \leq M, \\ & n - x \leq N - M, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   Charakteristiky:

   $$E(X) = n\frac{M}{N},$$
   $$D(X) = n\frac{M}{N}\left(1 - \frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}.$$

   Typické použití: Celkový rozsah souboru je N prvků, z nichž M má námi sledovanou vlastnost. Provedeme výběr n prvků, přičemž vybraný prvek zpět do souboru nevracíme. Ptáme se, kolik vybraných prvků bude mít sledovanou vlastnost.

2. *Výběr s opakováním — binomické rozdělení* Bi (n, p).

   Řekneme, že náhodná proměnná má *binomické rozdělení* s parametry n a p, kde $n > 0$ je celé číslo a $0 < p < 1$, jestliže

   $$P(X) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} & \text{pro } x = 0, 1, \ldots, n, \\ 0 & \text{jinak .} \end{cases}$$

   Charakteristiky:

   $$E(X) = np,$$
   $$D(X) = np(1-p),$$
   $$a(X) = \frac{1-2p}{\sqrt{np(1-p)}},$$

$$b(X) = \frac{1 - 6p(1-p)}{np(1-p)},$$
$$\varphi_X(t) = (1 - p + pe^{it})^n.$$

Typické použití: Pravděpodobnost, že pokus bude úspěšný, je p. Ptáme se, kolik bude úspěšných pokusů při n nezávislých opakováních.

3. *Alternativní rozdělení* $\mathrm{A}(p)$

   je speciálním případem binomického rozdělení pro $n = 1 (tj. x = 0, 1)$. Řekneme, že proměnná má *alternativní rozdělení* s parametrem p, jestliže

$$P(0) = 1 - p,$$
$$P(1) = p.$$

4. *Poissonovo rozdělení* $\mathrm{Po}(\lambda)$.

   Řekneme, že náhodná proměnná má *Poissonovo rozdělení* s parametrem λ, kde $\lambda > 0$ je reálné číslo, jestliže

$$P(X) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^x}{x!} e^{-\lambda} & \text{pro } x = 0, 1, 2, \dots, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   Charakteristiky:

$$E(X) = \lambda,$$
$$D(X) = \lambda,$$
$$a(X) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$
$$b(X) = \frac{1}{\lambda},$$
$$\varphi_X(t) = e^{\lambda(e^{it} - 1)}.$$

Typické použití: Uvažujme zcela náhodně se vyskytující události, přičemž průměrný počet výskytů je λ za časovou jednotku. Ptáme se, kolikrát se událost v časové jednotce skutečně vyskytne.

Poznámka: Pro velké hodnoty parametrů bývá výpočet konkrétních hodnot při použití hypergeometrického či binomického rozdělení velmi komplikovaný, nezřídka prakticky nemožný. Proto se v praxi provádí aproximace.

(a) Hypergeometrické rozdělení s parametry N, M, n lze dobře aproximovat binomickým s parametry $p = \frac{M}{N}, n$, pokud $\frac{n}{N} < 0{,}1$.

(b) Binomické rozdělení s parametry n, p lze dobře aproximovat Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda = np$, pokud $n > 30$ a $p < 0{,}1$.

(c) Hypergeometrické rozdělení lze dobře aproximovat Poissonovým, pokud $n > 30$, $\frac{M}{N} < 0{,}1$, $\frac{n}{N} < 0{,}1$, přičemž volíme $\lambda = n\frac{M}{N}$.

5. *Geometrické rozdělení* G(p).

Řekneme, že náhodná proměnná má *geometrické rozdělení* s parametrem p, $0 < p < 1$, jestliže

$$P(X) = \begin{cases} p(1-p)^x & \text{pro } x = 0, 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Charakteristiky:

$$E(X) = \frac{1-p}{p},$$
$$D(X) = \frac{1-p}{p^2},$$
$$\varphi x^{(t)} = \frac{p}{1-(1-p)e^{it}}.$$

Typické použití: Pravděpodobnost úspěšnosti pokusu je p. Ptáme se kolik neúspěšných pokusů bude předcházet prvnímu úspěšnému pokusu.

6. *Negativní binomické rozdělení* NB (n, p).

Řekneme, že náhodná proměnná má *negativní binomické rozdělení* rozdělení s parametry n, p, kde $n > 0$ je celé číslo a $0 < p < 1$, jestliže

$$P(X) = \begin{cases} \binom{x+n-1}{n-1} p^n (1-p)^x & \text{pro } x = 0, 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Charakteristiky:

$$E(X) = \frac{n(1-p)}{p},$$
$$D(X) = \frac{n(1-p)}{p^2},$$
$$\varphi x^{(t)} = (\frac{p}{1-(1-p)e^{it}})^n.$$

Typické použití: Nechť pravděpodobnost úspěšnosti pokusu je p. Ptáme se, kolik neúspěšných pokusů bude předcházet n-tému úspěšnému pokusu. Geometrické rozdělení je tedy pouze speciálním příkladem negativního binomického rozdělení.

2.3.2 Rozdělení spojité náhodné proměnné

V tomto odstavci budeme uvažovat spojitou náhodnou proměnnou, nebude-li výslovně řečeno jinak.

1. *Rovnoměrné rozdělení* R (α, β).

   Řekneme, že náhodná proměnná má *rovnoměrné rozdělení* s parametry $\alpha, \beta, -\infty < \alpha < \beta < \infty$, jestliže její hustota má tvar

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & \text{pro } \alpha < x < \beta, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

   Distribuční funkce rovnoměrného rozdělení má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq \alpha, \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta - \alpha} & \text{pro } \alpha < x < \beta, \\ 1 & \text{pro } x \geq \beta. \end{cases}$$

   Charakteristiky:

$$E(X) = \frac{\alpha + \beta}{2},$$
$$D(X) = \frac{(\beta - \alpha)^2}{12}.$$

2. *Exponenciální rozdělení* E (A, λ).

Řekneme, že náhodná proměnná má *exponenciální rozdělení* s parametry A a $\lambda, -\infty < A < \infty, \lambda > 0$, jestliže její hustota je tvaru

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda(x-A)} & \text{pro } x > A, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(x-A)} & \text{pro } x > A, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Charakteristiky:

$$\begin{aligned} E(X) &= A + \frac{1}{\lambda}, \\ D(X) &= \frac{1}{\lambda^2}, \\ \varphi_X(t) &= \frac{\lambda}{\lambda - it} e^{Ait}. \end{aligned}$$

Typické použití: Životnost zařízení, která nepodléhají opotřebení.

3. *Weibullovo rozdělení* W (c, δ).

Řekneme, že náhodná proměnná má *Weibullovo rozdělení* s parametry δ a c, $\delta > 0, c > 0$, jestliže její hustota je tvaru

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{cx^{c-1}}{\delta^c} e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^c} & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Distribuční funkce má tvar

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\left(\frac{x}{\delta}\right)^c} & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Charakteristiky:

$$\begin{aligned} E(X) &= \delta\Gamma(1/m + 1), \\ D(X) &= \left(\Gamma\left(1 + \frac{2}{m}\right) - \left(\Gamma\left(1 + \frac{1}{m}\right)\right)^2\right) \delta^2. \end{aligned}$$

Typické použití: Pro $c > 1$ životnost zařízení, u kterého se s časem pravděpodobnost poruchy zvětšuje, pro $c < 1$ životnost zařízení, u kterého se pravděpodobnost poruchy s časem snižuje.

4. *Rozdělení gama* $\Gamma(m, \delta)$.

   Řekneme, že náhodná proměnná má rozdělení gama s parametry $m > 0$ a $\delta > 0$, jestliže její hustota je tvaru

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(m)\delta^m} e^{-\frac{x}{\delta}} x^{m-1} & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$

   Charakteristiky:

$$E(X) = m\delta,$$
$$D(X) = m\delta^2,$$
$$\varphi_X(t) = \frac{1}{(1 - i\delta t)^m}.$$

   Typické použití: životnost zařízení s m–násobným zálohováním, mají-li životnosti jednotlivých složek exponenciální rozdělení (viz též příklad 3.26 – exponenciální rozdělení s parametrem $A = 0$ je speciální případ rozdělení Γ pro $n = 1$). Pro přirozené m se rozdělení $\Gamma(m, \delta)$ někdy nazývá *Erlangovo rozdělení*.

5. *Normální (Gaussovo) rozdělení* $\mathrm{N}\ (\mu, \sigma^2)$.

   má zásadní význam. Řekneme, že náhodná proměnná má *normální rozdělení* s parametry $\mu, \sigma^2, -\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$, jestliže její hustota je tvaru

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

   Distribuční funkci nelze vyjádřit pomocí konečného počtu elementárních funkcí.

   Charakteristiky:

$$E(X) = \mu,$$
$$D(X) = \sigma^2,$$
$$a(X) = b(X) = 0,$$
$$\varphi_X(t) = e^{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

Definice *Normální rozdělení s parametry* $0, 1$ *se nazývá* normované normální rozdělení. *Jeho distribuční funkci budeme značit* Φ. *Hodnoty této distribuční funkce jsou tabelovány.*

Poznámka Má-li náhodná proměnná X rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$, pak příslušná normovaná náhodná proměnná má normované normální rozdělení.

Věta 2.18 *Nechť* $F(x)$ *je distribuční funkce normálního rozdělení o parametrech* μ, σ^2, *nechť* Φ *je distribuční funkce normovaného normálního rozdělení. Potom*

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

Typické použití: Normálním rozdělením se v praxi přibližně řídí náhodné proměnné, jejichž hodnota je součtem velkého množství nezávislých vlivů (viz též poznámka 5 za větou 4.2), z nichž žádný nemá dominující význam.

6. *Logaritmicko – normální rozdělení* LN (μ, σ^2).

Řekneme, že náhodná proměnná má *logaritmicko – normální rozdělení* s parametry μ, σ^2, $-\infty < \mu < \infty, \sigma^2 > 0$, jestliže její hustota je tvaru

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2\right) & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$

Charakteristiky:

$$E(X) = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}},$$
$$D(X) = e^{2\mu + 2\sigma^2} - e^{2\mu + \sigma^2}.$$

Věta 2.19 *Má-li náhodná proměnná* X *logaritmicko – normální rozdělení s parametry* μ, σ^2, *pak náhodná proměnná* $Y = \ln X$ *má normální rozdělení s týmiž parametry.*

7. *Speciální rozdělení.*

Následující rozdělení mají význam především v matematické statistice. Uvedeme vždy hustotu, střední hodnotu a rozptyl.

(a) *Rozdělení* χ^2 *o* n *stupních volnosti,* $\chi^2(n)$.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$

$$E(X) = p,$$
$$D(X) = 2p.$$

(b) *Rozdělení* t *(Studentovo) o* n *stupních volnosti,* $t(n)$.

$$f(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\sqrt{np}} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}$$

$$E(X) = 0, \quad n > 1,$$
$$D(X) = \frac{n}{n-2}, \quad n > 2.$$

(c) *Rozdělení* F *(Fisher — Snedecorovo) o* n_1 *a* n_2 *stupních volnosti,* F (n_1, n_2)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{n_1+n_2}{2})}{\Gamma(\frac{n_1}{2})\Gamma(\frac{n_2}{2})} \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} x^{\frac{n_1}{2}-1} \left(1 + \frac{n_1}{n_2}x\right)^{-\frac{n_1+n_2}{2}} & \text{pro } x > 0, \\ 0 & \text{pro } x \leq 0. \end{cases}$$

$$E(X) = \frac{n_2}{n_2 - 2}, \quad n_2 > 2,$$
$$D(X) = \frac{2n_2^2(n_1 + n_2 - 2)}{n_1(n_2-2)^2(n_2-4)}, \quad n_2 > 4.$$

Příklady

2.1 Náhodná proměnná nám udává

(a) kolik jsme hodili šestek při hodu 6 kostkami,

(b) dobu čekání na tramvaj s intervalem 5 minut,

(c) věk náhodně vybraného člověka,

(d) počet hovorů na telefonní ústředně za jednotku času,

(e) počet hodů kostkou, které předcházely hodu, při kterém se nám poprvé podařilo hodit šestku,

(f) celkovou výhru v ruletě při jednoduché jedné sázce ve výši 1.

Jakého druhu jsou jednotlivé náhodné proměnné a jakých hodnot mohou nabývat?

Řešení

(a) diskrétní proměnná, nabývá hodnot 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,

(b) spojitá proměnná, v Japonsku nabývající hodnot z intervalu $\langle 0; 5)$, v ČSFR hodnot z intervalu $\langle 0, +\infty)$,

(c) diskrétní proměnná nabývající hodnot od 0 do cca 120,

(d) diskrétní proměnná nabývající všech celých nezáporných hodnot,

(e) jako příklad (d),

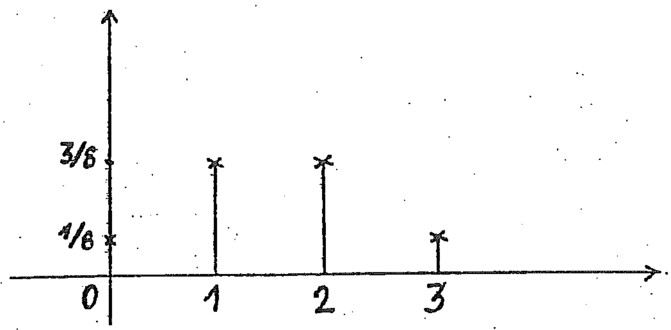
(f) diskrétní proměnná nabývající hodnot 1 nebo -1 (podle toho, zda vyhrajeme nebo prohrajeme).

2.2 Házíme třemi mincemi. Náhodná proměnná nám udává, na kolika mincích padl líc. Najděte její pravděpodobnostní a distribuční funkci.

Řešení Elementární jevy, které mohou nastat, jsou jevy LLL, LLR, LRL, LRR, RLL, RLR, RRL, RRR. Každý z nich může nastat s pravděpodobností 1/8. Hodnoty 0 náhodná proměnná nabývá v případě, že nastane jev RRR. Proto $P(X = 0) = \frac{1}{8}$. Hodnoty 1 v případě, že nastane jeden z jevů RRL, RLR, LRR. Proto $P(X = 1) = \frac{3}{8}$. Podobně dostaneme $P(X = 2) = \frac{3}{8}, P(X = 3) = \frac{1}{8}$. Pro pravděpodobnostní funkci tedy máme

$$p(0) = \frac{1}{8},\ p(1) = \frac{3}{8},\ p(2) = \frac{3}{8},\ p(3) = \frac{1}{8}.$$

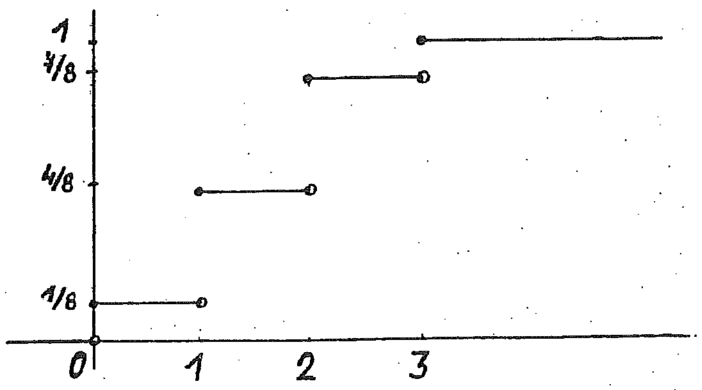
Hůlkový graf pravděpodobnostní funkce má tvar



Z definice pak dostaneme pro distribuční funkci

$$
\begin{aligned}
F(x) &= 0 \quad \text{pro} \quad x \in (-\infty, 0),\\
F(x) &= \frac{1}{8} \quad \text{pro} \quad x \in \langle 0, 1),\\
F(x) &= \frac{4}{8} \quad \text{pro} \quad x \in \langle 1, 2),\\
F(x) &= \frac{7}{8} \quad \text{pro} \quad x \in \langle 2, 3),\\
F(x) &= 1 \quad \text{pro} \quad x \in \langle 3, \infty)
\end{aligned}
$$

a graf distribuční funkce



2.3 Náhodná proměnná nám udává, jaké číslo padlo při hodu kostkou. Najděte její střední hodnotu, rozptyl a šikmost.

Řešení Stačí znát pravděpodobnostní funkci. V našem případě platí

$$p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = \frac{1}{6}.$$

Proto

$$E(X) = \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 2 + \frac{1}{6} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 5 + \frac{1}{6} \cdot 6 = \frac{21}{6}.$$

Rozptyl můžeme spočítat dvěma způsoby. Buďto z definice 2. centrálního momentu

$$\begin{aligned}\mu_2(X) &= \sum_{i=1}^{6} \big(x_i - E(X)\big)^2 p(x_i) = \\ &= \frac{1}{6}(1-3,5)^2 + \frac{1}{6}(2-3,5)^2 + \frac{1}{6}(3-3,5)^2 + \\ &\quad + \frac{1}{6}(4-3,5)^2 + \frac{1}{6}(5-3,5)^2 + \frac{1}{6}(6-3,5)^2 = \frac{35}{12},\end{aligned}$$

nebo z výpočtového tvaru

$$\begin{aligned}E(X^2) &= \frac{1}{6} \cdot 1 + \frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{6} \cdot 9 + \frac{1}{6} \cdot 16 + \frac{1}{6} \cdot 25 + \frac{1}{6} \cdot 36 = \frac{95}{6}, \\ E^2(X) &= \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}, \\ E(X^2) - E^2(X) &= \frac{95}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}.\end{aligned}$$

Pro výpočet šikmosti použijeme třetího centrálního momentu

$$\mu_3(X) = \frac{1}{6}\cdot(-2{,}5)^3 + \frac{1}{6}\cdot(-1{,}5)^3 + \frac{1}{6}\cdot(-0{,}5)^3 + \frac{1}{6}\cdot 0{,}5^3 + \frac{1}{6}\cdot 1{,}5^3 + \frac{1}{6}\cdot 2{,}5^3 = 0$$

a tudíž

$$a(X) = 0,$$

což je očekávaný výsledek, neboť tato náhodná proměnná je evidentně symetrická.

2.4 Hrajme následující hru: Hráč vsadí sázku na jedno z čísel $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Bankéř potom hodí třemi kostkami. Neobjeví-li se vsazené číslo, vklad propadá. Objeví-li se, pak hráč za každé objevení dostane hodnotu své sázky a přitom dostane vsazené peníze zpět. Jaký je střední zisk bankéře při jednotkové sázce?

Řešení Náhodná proměnná X nechť představuje zisk herny, ptáme se na její střední hodnotu. Tuto hodnotu proměnnou můžeme určovat dvěma způsoby.

1. způsob Rozlišme tři případy:

(a) na kostkách padnou vesměs různá čísla,

(b) na dvou kostkách padne stejné číslo, na třetí jiné,

(c) na všech kostkách padne stejné číslo.

Všech možností je $6^3 = 216$. V případě (a) je příznivých $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ možností, v případě (c) 6 možností, na případ (b) zbývá 90 možností. Zisk herny je:

(a) Tři čísla vyhrávají, tři prohrávají, výhry a prohry jsou tudíž v rovnováze, zisk je 0.

(b) Na jedno číslo herna vyplatí dvojnásobek sázky, na jedno jednoduchou sázku, celkem tedy vyplatí sázky na tři čísla. Prohrávají čtyři čísla, tudíž jedno číslo ze šesti tvoří zisk herny, který je roven $\frac{1}{6}$.

(c) Jedno číslo bere trojnásobek vkladu, zbylých pět prohrává. Výhry na tři čísla jsou výhry, prohry zbylých dvou čísel jsou na zisk herny. Zisk je v tomto případě roven $\frac{2}{6}$.

Dostáváme tedy

- s pravděpodobností $\frac{120}{216}$ zisk 0,
- s pravděpodobností $\frac{90}{216}$ zisk $\frac{1}{6}$,
- s pravděpodobností $\frac{6}{216}$ zisk $\frac{2}{6}$.

Střední zisk je tedy roven

$$\frac{120 \cdot 0 + 90 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{2}{6}}{216} = \frac{17}{216} \doteq 8\%.$$

2. způsob Vsaďme na libovolné číslo, třeba 1. Mohou nastat čtyři případy:

(a) Jednička nepadne ani jednou. To nastane v $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ případech, zisk herny je v tomto případě 1.

(b) Jednička padne právě jednou na libovolné ze tří kostek. Možností je $3 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 5 = 75$. V tomto případě herna zaznamená ztrátu 1, neboli zisk -1.
(c) Jednička padne právě dvakrát, na jedné libovolné kostce padne tedy jiné číslo. Možností je $3 \cdot 5 = 15$ a zisk je roven -2.
(d) Jednička padne třikrát. Zde je jen jedna možnost a zisk herny je -3.

Takto konstruovaná proměnná tedy nabývá hodnot

- 1 s pravděpodobností $\frac{125}{216}$,
- -1 s pravděpodobností $\frac{75}{216}$,
- -2 s pravděpodobností $\frac{15}{216}$,
- -3 s pravděpodobností $\frac{1}{216}$.

Střední hodnota takové proměnné je rovna

$$E(X) = -3 \cdot \frac{1}{216} - 2 \cdot \frac{15}{216} - 1 \cdot \frac{75}{216} + 1 \cdot \frac{125}{216} = \frac{17}{216}.$$

2.5 Náhodná proměnná má pravděpodobnostní funkci definovanou předpisem

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x(x+1)} & \text{pro } x = 1, 2, 3, \ldots, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte její střední hodnotu a rozptyl.

Řešení Střední hodnota by měla být rovna

$$E(X) = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{x}{x(x+1)} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x+1}.$$

Tato řada je však divergentní. Proto tato náhodná proměnná nemá střední hodnotu a tudíž nemá smysl hovořit ani o rozptylu.

2.6 Sankt–Petěrburský paradox

Hráč hraje s bankou následující hru: Nejprve hráč vsadí předem dohodnutý obnos, jakýsi poplatek za hru, který automaticky propadá bance. Bankéř potom hází mincí tak dlouho, dokud poprvé nepadne líc. Pokud se tak stane hned napoprvé, dostane hráč zpět 1\$, pokud napodruhé, pak 2\$, pokud se líc poprvé objeví až při třetím pokusu, pak dostane hráč zpátky 4\$, při čtvrtém 8\$ atd., t.j. pokud líc padne poprvé při n-tém pokusu, pak hráč dostane 2^{n-1}\$. Při jakém vkladu je hra výhodná pro banku?

Řešení Nikdy!!! Hráč může za každou hru platit třeba tisíc dolarů a přesto je tato hra pro něj výhodná. K ověření této neuvěřitelné skutečnosti je nutné spočítat střední výhru. Líc padne napoprvé s pravděpodobností $\frac{1}{2}$. S touto pravděpodobností tedy hráč vyhraje 1\$. Na druhý pokus padne líc s pravděpodobností $\frac{1}{4}$, v těchto případech hráč vyhrává 2\$. Obecně hráč s pravděpodobností $\frac{1}{2^n}$ vyhraje 2^{n-1} dolarů. Střední hodnota je rovna

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \cdots + \frac{1}{2^n} \cdot 2^{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \cdots = \infty.$$

Skutečně je tedy hra vždy pro banku nevýhodná. Problém je však v tom, že v reálných situacích je zřejmé, že banka prodělat nemůže. Tento rozpor se dá vysvětlit tím, že i při malém nárůstu poplatku je nutné sehrát mnohonásobně vyšší počet her, abychom dosáhli zisku. Další problém je ten, že teoretický výpočet počítá i s nesmyslně vysokými výhrami, bez nichž ovšem tento výsledek nelze dosáhnout. Omezíme-li jakkoli výši výhry, pak střední hodnota samozřejmě existuje a je poměrně nízká. Omezíme-li výhru např. milionem dolarů, pak je střední výhra rovna necelých 20 dolarů.

2.7 Spojitá náhodná proměnná má hustotu

$$f(x) = \begin{cases} ax & \text{pro } a \in (0,1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete

(a) velikost konstanty a,

(b) distribuční funkci $F(x)$,

(c) střední hodnotu $E(X)$,

(d) rozptyl $D(X)$,

(e) koeficient šikmosti $a(X)$,

(f) koeficient špičatosti $b(X)$,

(g) momentovou vytvořující funkci $M_x(t)$,

(h) charakteristickou funkci $\varphi_x(t)$.

Řešení

(a) Pro hustotu musí platit

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Proto

$$a = \frac{1}{\int_0^1 x\,dx} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

(b) Rozlišme tři případy

- Pro $x \in (-\infty, 0)$ je zřejmě $F(x) = 0$.
- Pro $x \in \langle 0, 1)$ dostáváme

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^x f(t)\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

- Pro $x \in \langle 1, \infty)$ je pak

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_0^1 f(t)\,dt = \int_0^1 x^2\,dx = 1.$$

(c)

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx = \int_0^1 x 2x\,dx = \frac{2}{3}.$$

(d) *1.způsob*

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E(X)\right)^2 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^2 2x\,dx =$$

$$= \frac{2}{9} \int_0^1 (9x^3 - 12x^2 + 4x)\,dx = \frac{1}{18}.$$

2.způsob

$$\mu_2'(X) = E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^1 x^2 2x\,dx = \frac{1}{2}$$

a odtud

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

(e) *1.způsob* — třetí centrální moment je roven

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(x - E(X)\right)^3 f(x)\,dx = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^3 2x\,dx =$$

$$= \frac{2}{27}\int_0^1 (3x-2)^3 x\,dx =$$

$$= \frac{2}{27}\int_0^1 (27x^4 - 54x^3 + 36x^2 - 8x)\,dx = -\frac{1}{135},$$

z toho normovaný moment

$$\mu_3(\hat{X}) = \frac{\mu_3(X)}{\sigma^3(X)} = \frac{-\frac{1}{135}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{6}\right)^3} = -\frac{2}{5}\sqrt{2}.$$

2.způsob — třetí obecný moment

$$\mu_3'(X) = E(X^3) = \int_0^1 x^3 2x\,dx = \frac{2}{5}.$$

Ze znalosti obecných momentů tedy třetí centrální moment

$$\mu_3(X) = \mu_3'(X) - 3\mu_2'(X)E(X) + 2E^3(X) =$$
$$= \frac{2}{5} - 3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} + 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{1}{135}$$

a normovaný moment

$$\mu_3(\hat{X}) = -\frac{2}{5}\sqrt{2}.$$

(f)

$$\mu_4(X) = \int_0^1 \left(x - \frac{2}{3}\right)^4 2x\,dx =$$

$$= \frac{2}{81}\int_0^1 (81x^5 - 8\cdot 27x^4 + 6^3x^3 - 3\cdot 2^5x^2 + 2x^4)\,dx = \frac{1}{135},$$

z toho dostáváme normovaný moment

$$\mu_4'(\hat{X}) = \frac{\mu_4(X)}{\sigma^4(X)} = \frac{\frac{1}{135}}{\left(\frac{1}{18}\right)^2} = 2{,}4$$

a koeficient špičatosti

$$b(X) = \mu_4(\hat{X}) - 3 = -0{,}6.$$

(g)

$$M_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f(x)\,dx = \int_0^1 e^{tx}2x\,dx =$$

$$= \left[\frac{2xe^{tx}}{t}\right]_{x=0}^1 - \frac{2}{t}\int_0^1 e^{tx}\,dx = 2\frac{te^t - e^t + 1}{t^2}.$$

Ověřme si např. na prvním obecném momentě platnost věty 2.12.

$$M_x'(t) = 2\frac{t^2e^t - 2te^t + 2e^t - 2}{t^3}, \qquad M_x'(0) \text{ není definováno.}$$

Určeme limitu v 0
$\lim_{t\to 0} 2\frac{t^2e^t-2te^t+2e^t-2}{t^3} = 2\lim_{t\to 0}\frac{2te^t+t^2e^t-2e^t-2te^t+2e^t}{3t^2} =$
$= 2\lim_{t\to 0}\frac{t^2e^t}{3t^2} = \frac{2}{3}.$

Po dodefinování touto limitou dostáváme

$$E(X) = M_x'(0) = \frac{2}{3}.$$

(h) $\varphi_x(t) = E(e^{itx})$, do $M(t)$ dosadíme $t := it$

$$\varphi_x(t) = 2\frac{ite^{it} - e^{it} + 1}{(it)^2} = 2\frac{e^{it} - 1 - ite^{it}}{t^2}.$$

2.8 Dostanu rozdáno 10 karet z dobře promíchaného balíčku 32 karet. S jakou pravděpodobností dostanu všechna 4 esa? Jak se změní pravděpodobnost, jestliže karty budu vytahovat po jedné a vytaženou kartu vždy vrátím zpět do balíčku?

Řešení Nejprve odpovíme na první otázku. Jestliže dostaneme karty do ruky najednou, pak se jedná o výběr bez vracení, neboli o hypergeometrické rozdělení. Parametry jsou

$$N = 32, \quad M = 4, \quad n = 10,$$

a hledaná pravděpodobnost
$P(X = 4) = \frac{\binom{4}{4}\binom{28}{6}}{\binom{32}{10}} = \frac{\frac{28\cdot27\cdot26\cdot25\cdot24\cdot23}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}}{\frac{32\cdot31\cdot30\cdot29\cdot28\cdot27\cdot26\cdot25\cdot24\cdot23}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}} =$
$\frac{7\cdot8\cdot9\cdot10}{29\cdot30\cdot31\cdot32} \doteq 0{,}00584 \doteq \frac{1}{171}.$

Poznámka (pouze pro karbaníky) Příklad je vlastně příkladem rozdání v licitovaném mariáši. V této hře se však karty nemíchají a proto se nelze řídit klasickou pravděpodobností a uvedené výsledky pro licitovaný mariáš neplatí. Ostatně ze zkušenosti je jasné, že všechna esa chodí častěji. Ještě výraznější rozdíl by nastal, kdybychom se ptali, s jakou pravděpodobností dostanu všech osm červených. Při praktické hře totiž přijdou několikrát za večer, kdežto pravděpodobnost vypočtená podle našeho vzorce by byla velmi malá.

2.9 Telefonní ústředna má v průměru 90 hovorů za hodinu. S jakou pravděpodobností bude mít během 2 minut

(a) právě 4 hovory,
(b) nejvýše 4 hovory,
(c) alespoň 4 hovory.

Řešení

(a) Z praxe je známo, že náhodná proměnná, která nám bude udávat počet hovorů, se bude řídit Poissonovým rozdělením. Parametr je rovněž střední hodnotou tohoto rozdělení. Jestliže za hodinu má ústředna v průměru 90 hovorů, pak za 2 minuty jich bude $\frac{90}{60} \cdot 2 = 3$, t.j. $\lambda = 3$. Proto

$$P(X = 4) = \frac{3^4}{e^3 4!} = 0{,}168.$$

(b) Náhodná proměnná s Poissonovým rozdělením může nabývat pouze celých nezáporných hodnot. Proto

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= \sum_{i=0}^{4} P(X = i) = \\ &= \frac{3^0}{e^3 3!} + \frac{3^1}{e^3 1!} + \frac{3^2}{e^3 2!} + \frac{3^3}{e^3 3!} + \frac{3^4}{e^3 4!} = \\ &= 0{,}05 + 0{,}15 + 0{,}224 + 0{,}224 + 0{,}168 = 0{,}816. \end{aligned}$$

(c) Přechodem k doplňku dostaneme

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) = \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2) - P(X = 3) = \\ &= 1 - 0{,}05 - 0{,}15 - 0{,}224 - 0{,}224 = 0{,}352. \end{aligned}$$

2.10 V zásilce 15 000 výrobků je 300 zmetků. Při namátkové kontrole bylo vybráno 100 výrobků. Jaká je pravděpodobnost, že vadné budou nejvýše dva?

Řešení Striktně vzato se jedná o hypergeometrické rozdělení s parametry $N = 15000$, $M = 300$, $n = 100$, z čehož

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \\ &= \frac{\binom{100}{0}\binom{14900}{300}}{\binom{15000}{300}} + \frac{\binom{100}{1}\binom{14900}{299}}{\binom{15000}{300}} + \frac{\binom{100}{2}\binom{14900}{298}}{\binom{15000}{300}}. \end{aligned}$$

Výpočet by byl velmi obtížný, pokusíme se tedy aproximovat hypergeometrické rozdělení rozdělením binomickým. Podmínka $\frac{n}{N} < 0{,}1$ je splněna s velkou rezervou, položíme $p = \frac{M}{N} = 0{,}02$. Dostáváme

$P(X \leq 2) =$
$= \binom{100}{0}0{,}02^0 \cdot 0{,}98^{100} + \binom{100}{1}0{,}02 \cdot 0{,}98^{99} + \binom{100}{2}0{,}02^2 \cdot 0{,}98^{98} \doteq 0{,}677.$

Výpočet je tedy již možný (zde se projevuje velká výhoda toho, že binomické rozdělení již nepracuje s velkým rozsahem souboru), stále však není nikterak příjemný. Pro kontrolu provedeme ještě výpočet pomocí Poissonova rozdělení. Podmínky aproximace jsou opět bohatě splněny a výpočet je velmi snadný. Položíme

$$\lambda = n\frac{M}{N}(= np) = 100\frac{300}{15000}(= 100 \cdot 0{,}02) = 2.$$

Dostaneme

$$P(X \leq 2) = \frac{2^0}{e^2 0!} + \frac{2^1}{e^2 1!} + \frac{2^2}{e^2 2!} \doteq 0{,}677,$$

neboli vlastně totéž co při výpočtu pomocí binomického rozdělení.

Poznámka Při tak velkých souborech a tak velkých rezervách pro podmínky aproximace není nutno dlouho přemýšlet a rovnou můžeme použít rozdělení, které je pro výpočet nejjednodušší, tj. rozdělení Poissonovo. Při malých souborech je však nutno dbát zvýšené opatrnosti, zvláště když chceme aproximovat hypergeometrické rozdělení přímo Poissonovým. Pokud parametr N nedosahuje řádově tisíců, pak je rozumné uvažovat maximálně o aproximaci rozdělením binomickým.

2.11 Dva hráči hází střídavě kostkou. Vyhrává ten, kterému se poprvé podaří hodit šestku. S jakou pravděpodobností to bude hráč, který hází první?

Řešení Házejme opakovaně kostkou. Náhodná proměnná nám bude udávat, kolik neúspěšných pokusů předcházelo prvnímu pokusu, při kterém padla šestka. První hráč pak vyhrává v případě, že počet předcházejících neúspěšných pokusů bude sudý. Uvedená proměnná má geometrické rozdělení

$$P(X = i) = p(1-p)^i = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^i.$$

Označme A jev „vyhraje první hráč", neboli jev „náhodná proměnná nabývá sudé hodnoty". Jeho pravděpodobnost je rovna

$$P(A)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{2k}=\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{25}{36}\right)^{k}=\frac{\frac{1}{6}}{1-\frac{25}{36}}=\frac{6}{11}.$$

2.12 Házíme kostkou tak dlouho, dokud nám nepadnou alespoň 3 šestky. S jakou pravděpodobností budeme muset hodit desetkrát?

Řešení Náhodná proměnná, která nám udává, kolik bude třetímu úspěšnému pokusu předcházet neúspěšných pokusů, má negativní binomické rozdělení o parametrech $n=3, p=\frac{1}{6}$. V našem případě má být neúspěšných pokusů 7, proto

$$P(X=7)=\binom{7+3-1}{3-1}\left(\frac{1}{6}\right)^{3}\left(\frac{5}{6}\right)^{7}=0{,}0465.$$

2.13 Spočtěte střední hodnotu a rozptyl Poissonova rozdělení.

Řešení

1. způsob Střední hodnota je rovna

$$E(X)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{x\lambda^x}{e^\lambda x!}.$$

Protože první člen sumy je roven nule, můžeme jej vynechat a po úpravách dostaneme

$\sum_{x=0}^{\infty}\frac{x\lambda^x}{e^\lambda x!}=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{x\lambda^x}{e^\lambda x!}=\frac{1}{e^\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^x}{(x-1)!}=$
$\frac{\lambda}{e^\lambda}\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}=\frac{\lambda}{e^\lambda}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\lambda^t}{t!}=\frac{\lambda}{e^\lambda}e^\lambda=\lambda.$

Pro výpočet rozptylu použijeme výpočtového tvaru

$$E(X^2)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{x^2\lambda^x}{e^\lambda x!}=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{x\lambda^x}{e^\lambda(x-1)!}=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{(x-1)\lambda^x+\lambda^x}{e^\lambda(x-1)!}=$$
$$=\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^x(x-1)}{e^\lambda(x-1)!}+\sum_{x=1}^{\infty}\frac{\lambda^x}{e^\lambda(x-1)!}=$$

$$= \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^x}{e^{\lambda}(x-2)!} + \lambda =$$
$$= \frac{\lambda^2}{e^{\lambda}} \sum_{x=2}^{\infty} \frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!} + \lambda = \lambda^2 + \lambda,$$

z čehož

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

2. způsob Přímý výpočet střední hodnoty a rozptylu byl, jak se ukázalo, dosti obtížný. Proto se pokusíme tyto hodnoty spočítat pomocí momentové vytvořující funkce, která je pro Poissonovo rozdělení rovna

$$M_x(t) = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{e^{tx}\lambda^x}{e^{\lambda}x!} = \frac{1}{e^{\lambda}} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t\lambda)^x}{x!} = \frac{1}{e^{\lambda}} e^{e^t\lambda} = e^{e^t\lambda}e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^t-1)}$$

a její derivace

$$M_x'(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)},$$
$$M_x''(t) = \lambda e^t e^{\lambda(e^t-1)} + \lambda e^t (e^{\lambda(e^t-1)}\lambda e^t) = e^{\lambda(e^t-1)}(\lambda e^t + \lambda^2 e^{2t}),$$

ze kterých pro obecné momenty dostáváme

$$\mu_1'(X) = M_x'(0) = \lambda, \quad \mu_2'(X) = \lambda^2 + \lambda,$$

a tudíž

$$E(X) = \mu_1'(X) = \lambda,$$
$$D(X) = \mu_2'(X) - E^2(X) = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda.$$

2.14 Dokažte, že binomické rozdělení o parametrech n, p konverguje pro $n \to \infty, p \to 0$ k Poissonovu rozdělení s parametrem $\lambda = np$.

Řešení Pro hodnoty binomického rozdělení platí

$$\mathrm{Bi}(n,p)(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} =$$
$$= \frac{n!}{(n-x)!\,x!} p^x \sum_{i=0}^{n-x} \binom{n-x}{i} (-p)^i =$$

$$= \frac{p^x}{x!}\sum_{i=0}^{n-x} \frac{n!}{(n-x)!}\frac{(n-x)!}{(n-x-i)!\,i!}(-p)^i =$$

$$= \frac{p^x}{x!}\sum_{i=0}^{n-x} \frac{n!}{(n-x-i)!}\frac{(-p)^i}{i!}.$$

Nyní pro $n \to \infty$ platí také $n - x \to \infty$ a navíc

$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n!}{(n-x-i)!}}{n^{x+i}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n-x-i)!\,n^{x+i}} =$
$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(n-1)\dots(n-x-i+1)}{n^{x+i}} = 1,$

a proto pro $n \to \infty$ můžeme výraz $\frac{n!}{(n-x-i)!}$ nahradit výrazem n^{x+i}, takže dostaneme

$$\frac{p^x}{x!}\sum_{i=0}^{n-x} \frac{n!}{(n-x-i)!}\frac{(-p)^i}{i!} \doteq \frac{p^x}{x!}\sum_{i=0}^{\infty} n^{x+i}\frac{(-p)^i}{i!} = \frac{(np)^x}{x!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-np)^i}{i!}.$$

Označíme-li $np = \lambda$, dostáváme

$$\mathrm{Bi}(n,p)(x) \doteq \frac{\lambda^x}{x!}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-\lambda)^i}{i!} = \frac{\lambda^x}{x!}e^{-\lambda} = \mathrm{Po}(\lambda)(x).$$

2.15 Nechť životnost výrobku se řídí exponenciálním rozdělením s parametry
$A = 0, \lambda = \frac{1}{5}$. Jakou záruční dobu stanoví výrobce, jestliže počet reklamovaných výrobků nemá překročit 10%?

Řešení Distribuční funkce exponenciálního rozdělení s danými parametry má tvar

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{5}}.$$

Máme najít takovou hodnotu x, pro kterou platí (jedná se o 10% kvantil)

$$P(X \leq x) = 0{,}1,$$

neboli

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{x}{5}} = 0{,}1,$$
$$e^{-\frac{x}{5}} = 0{,}9,$$
$$x = -5\ln 0{,}9 = 0{,}527,$$

neboli asi 6 měsíců, jestliže průměrná životnost výrobku je $\frac{1}{\lambda}$, t.j. 5 let.

2.16 Jaký je poměr mezi střední hodnotou a mediánem pro exponenciální rozdělení s $A = 0$?

Řešení Z distribuční funkce $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ spočteme medián

$$\begin{aligned} 1 - e^{-\lambda x_{0,5}} &= \frac{1}{2}, \\ e^{-\lambda x_{0,5}} &= \frac{1}{2}, \\ x_{0,5} &= \frac{\ln \frac{1}{2}}{-\lambda} = \frac{\ln 2}{\lambda}, \end{aligned}$$

pro výsledný poměr tedy dostaneme

$$\frac{E(X)}{x_{0,5}} = \frac{\frac{1}{\lambda}}{\frac{\ln 2}{\lambda}} = \frac{1}{\ln 2} \doteq 1{,}44,$$

neboli medián je pro exponenciální rozdělení roven pouze asi 70% střední hodnoty. Je nutné si uvědomit rozdíl mezi mediánem a střední hodnotou. Uvažujeme-li životnost výrobků, pak střední hodnota udává průměrnou životnost všech výrobků, kdežto medián dobu životnosti poloviny výrobků. Tyto hodnoty se, jak je vidět, mohou velmi lišit. Je to způsobeno tím, že na střední hodnotu působí extrémní hodnoty (extrémně dlouhá životnost několika výrobků zvýší průměrnou životnost všech, kdežto na medián nemá vliv).

2.17 Telefonní ústředna má v průměru 90 hovorů za hodinu. S jakou pravděpodobností bude interval mezi dvěma po sobě jdoucími hovory alespoň 2 minuty?

Řešení Tento příklad připomíná příklad 2.9, kdy jsme se ptali na počet hovorů za časovou jednotku, nyní se ptáme na časovou jednotku mezi dvěma hovory. Platí přitom následující vztah mezi Poissonovým a exponenciálním rozdělením: Jestliže se počet událostí za časovou jednotku řídí Poissonovým rozdělením s parametrem λ, pak interval mezi dvěma po sobě jdoucími událostmi se řídí exponenciálním rozdělením s týmž parametrem.

Za časovou jednotku zvolíme minutu. Potom $\lambda = 1{,}5$ (střední počet hovorů za minutu). Dostáváme

$$P(x \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - F(2) = 1 - (1 - e^{-1{,}5\cdot 2}) = e^{-3} \doteq 0{,}05.$$

Uvedený příklad bychom mohli řešit rovněž pomocí Poissonova rozdělení, kdybychom otázku položili: S jakou pravděpodobností nebude mít ústředna během dvou minut ani jeden hovor? Položili bychom přitom $\lambda = 3$.

2.18 Náhodná proměnná X má normální rozdělení s parametry $\mu = 5, \sigma^2 = 16$. Najděte následující pravděpodobnosti:

(a) $P(X = 5)$,
(b) $P(X \leq 0)$,
(c) $P(X \geq 3)$,
(d) $P(4 \leq X \leq 7)$.

Řešení

(a) $P(X = 5) = 0$ podle věty 2.6.

Ve všech dalších případech budeme postupovat podle vět 2.3 a 2.18, přičemž hodnoty distribuční funkce Φ normovaného normálního rozdělení jsou uvedeny v tabulce 3.

(b) $P(X \leq 0) = F_{5,16}(0) = \Phi\left(\frac{0-5}{4}\right) = \Phi(-1{,}25) = 1 - \Phi(1{,}25) = 1 - 0{,}89435 = 0{,}10565$.
(c) $P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - F(3) = 1 - \Phi\left(\frac{3-5}{4}\right) = 1 - \Phi(-0{,}5) = \Phi(0{,}5) = 0{,}69146$.
(d) $P(4 \leq X \leq 7) = F(7) - F(4) = \Phi(0{,}5) - \Phi(0{,}25) = \Phi(-0{,}5) + \Phi(0{,}25) - 1 = 0{,}69146 + 0{,}59871 - 1 = 0{,}29017$.

2.19 Nechť náhodná proměnná X má normální rozdělení s parametry μ, σ^2. Najděte následující pravděpodobnosti:

(a) $P\big(X \in (\mu - \sigma, \mu + \sigma)\big)$,

(b) $P\big(X \in (\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma)\big)$,

(c) $P\big(X \in (\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)\big)$.

Řešení Budeme postupovat obdobně jako v předchozím případě.

(a) $P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma) = F(\mu+\sigma)-F(\mu-\sigma) = \Phi\left(\frac{\mu+\sigma-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\sigma-\mu}{\sigma}\right) = \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 2 \cdot 0{,}84134 - 1 = 0{,}68268$.

(b) $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = \Phi(2) - \Phi(-2) = 0{,}9545$.

(c) $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = \Phi(3) - \Phi(-3) = 0{,}9973$.

Vidíme tedy, že jestliže má náhodná proměnná normální rozdělení, pak většina hodnot se nachází ve středním intervalu délky 6σ. Z tohoto pozorování vychází tzv. pravidlo 6σ, které nám říká, že jestliže máme k dispozici dostatečné množství hodnot, naměřených z náhodné proměnné s normálním rozdělením, pak rozdíl mezi nejvyšší a nejnižší hodnotou je roven přibližně 6σ. Toto pravidlo slouží k hrubému odhadu hodnoty σ.

2.20 Pro náhodnou proměnnou s normálním rozdělením platí

$$P(X \leq 5) = 0{,}7, \quad P(X \geq 0) = 0{,}8.$$

Určete hodnoty parametrů μ, σ^2.

Řešení V tabulce kvantilů najdeme $\Phi(0{,}524) = 0{,}7, \Phi(-0{,}842) = 0{,}2$. Ze zadání víme, že $F_{\mu,\sigma^2}(5) = 0{,}7, F_{\mu,\sigma^2}(0) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$ a nyní podle věty 2.18 dostaneme soustavu rovnic

$$\frac{5-\mu}{\sigma} = 0{,}524, \qquad -\frac{\mu}{\sigma} = -0{,}842,$$

s řešením

$$\begin{aligned} 5 - \mu &= 0{,}524\sigma \\ \mu &= 0{,}842\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 &= 1{,}366\sigma \\ \sigma &\doteq 3{,}66 \\ \mu &= 0{,}842 \cdot 3{,}66 \doteq 3{,}082. \end{aligned}$$

Kontrolní otázky a cvičení

2.1 Odůvodněte první čtyři tvrzení věty 2.1.

2.2 Nakreslete distribuční funkci náhodné proměnné, která není ani diskrétní ani spojitá.

2.3 Najděte příklady diskrétní i spojité náhodné proměnné, která má střední hodnotu, ale nemá rozptyl.

2.4 Ověřte bezrozměrnost variačního koeficientu na následujících náhodných proměnných (zadány jsou pravděpodobnostní funkce)

$$\begin{array}{ll} P(X_1 = 1) = \frac{4}{10} & P(X_2 = 10) = \frac{4}{10} \\ P(X_1 = 2) = \frac{3}{10} & P(X_2 = 20) = \frac{3}{10} \\ P(X_1 = 3) = \frac{2}{10} & P(X_2 = 30) = \frac{2}{10} \\ P(X_1 = 4) = \frac{1}{10} & P(X_2 = 40) = \frac{1}{10} \end{array}$$

2.5 Najděte pravděpodobnostní a distribuční funkci, střední hodnotu, rozptyl a šikmost, jestliže náhodným pokusem je hod např.

(a) čtyřmi korunami

(b) dvěma korunami a dvěma dvoukorunami

(c) čtyřmi korunami a pětikorunou

(d) korunou, dvoukorunou a pětikorunou

a náhodná proměnná udává hodnotu mincí, na kterých padl líc.

2.6 Náhodná proměnná je dána distribuční funkcí

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty; 0), \\ \sin x & \text{pro } x \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle, \\ 1 & \text{pro } x \in (\frac{\pi}{2}; \infty). \end{cases}$$

Najděte její střední hodnotu, rozptyl, šikmost, momentovou vytvořující funkci, charakteristickou funkci a medián.

2.7 Hodím najednou šesti kostkami. S jakou pravděpodobností hodím

(a) dvě šestky,

(b) aspoň dvě šestky,

(c) nejvýše dvě šestky?

2.8 Vypočtěte střední hodnotu geometrického rozdělení pro $p = \frac{1}{2}$.

2.9 Spočtěte průměr a rozptyl rovnoměrného a exponenciálního rozdělení.

2.10 Pro veličinu s normálním rozdělením platí

$$P(X \geq 3) = 0,7, \qquad P(X \leq 2) = 0,3.$$

Určete parametry μ a σ^2.

2.11 Náhodná proměnná s normálním rozdělením má kvartily rovny 3 a 7. Určete parametry μ a σ^2.

2.12 Náhodná proměnná s exponenciálním rozdělením a parametrem $A = 0$ má medián roven $X_{0,5} = 2$. Určete parametr λ.

Kapitola 3

Náhodný vektor

Přehled definic a vět

3.1 Sdružené rozdělení

Definice *Nechť* $n \geq 2$. *Uspořádaná n-tice náhodných proměnných* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_\mathrm{n})^T$ *se nazývá* n-rozměrný náhodný vektor.

Poznámka Ve smyslu definic z odstavce 2.1 tedy předpokládáme, že je dán pravděpodobnostní prostor $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ a $X_1, ..., X_\mathrm{n}$ jsou zobrazení Ω do $\mathbf{R}$, splňující podmínku

$$X_i^{-1}((-\infty, x\rangle) \in \mathcal{A}$$

pro každé $x \in \mathbf{R}$ a každé $i \in 1, \ldots, n$.

Definice *Buď* $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_\mathrm{n})^T$ *náhodný vektor. Reálná funkce n reálných proměnných* $F(x_1, ..., x_n)$, *definovaná předpisem*

$$F(x_1, ..., x_n) = P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n)$$

se nazývá (sdružená) distribuční funkce *náhodného vektoru* $\mathbf{X}$.

Poznámka Symbol $P(X_1 \leq x_1, ..., X_n \leq x_n)$ zde značí pravděpodobnost současného výskytu jednotlivých jevů, tj. obšírněji pravděpodobnost jevu

$$\{X_1 \leq x_1\} \cap \{X_2 \leq x_2\} \cap ... \cap \{X_n \leq x_n\} \ .$$

Věta 3.1 *Nechť* $F(x_1, \ldots, x_n)$ *je distribuční funkce náhodného vektoru* $\mathbf{X}$. *Pak platí :*

(a) $0 \leq F(x_1, \ldots, x_n) \leq 1 \;\; \forall \, (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$,

(b) $F(x_1, \ldots, x_n)$ *je neklesající funkce každé své proměnné* x_j $(j = 1, \ldots, n)$,

(c) pro každé $j = 1, \ldots, n$ *je*

$$\lim_{x_j \to -\infty} F(x_1, ..., x_n) = 0,$$

(d)

$$\lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ x_2 \to \infty \\ \cdots \\ x_n \to \infty}} F(x_1, ..., x_n) = 1,$$

(e) $F(x_1, ..., x_n)$ *je zprava polospojitá v každé své proměnné.*

V následující větě se pro jednoduchost omezíme na dvourozměrný náhodný vektor.

Věta 3.2 *Buď* $F(x_1, ..., x_n)$ *distribuční funkce dvourozměrného náhodného vektoru* $\mathbf{X}$ *, nechť* $I = (a_1, b_1\rangle \times (a_2, b_2\rangle \subset \mathbf{R}^2$ *je interval. Pak*

$$P(\mathbf{X} \in I) = F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2).$$

Definice *Buď* $\mathbf{X}$ *náhodný vektor. Řekneme, že* $\mathbf{X}$ *je* diskrétní náhodný vektor , *jestliže existuje nejvýše spočetná množina* [1] $M = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ...\} \subset \mathbf{R}^n$ *taková, že*

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_i) > 0 \text{ pro } i = 1, 2, \ldots$$

a

$$P(\mathbf{X} = \mathbf{x}) = 0 \text{ pro } x \notin M.$$

Funkce $P(\mathbf{x}) = P(x_1, \cdots, x_n)$, *definovaná předpisem*

$$P(\mathbf{x}_i) = P(\mathbf{X} = \mathbf{x}_i) \text{ pro } i = 1, 2, \ldots,$$
$$P(\mathbf{x}) = 0 \text{ pro } \mathbf{x} \notin M,$$

se nazývá (sdružená) pravděpodobnostní funkce *náhodného vektoru* $\mathbf{X}$*; množina* M *se nazývá* obor hodnot *vektoru* $\mathbf{X}$.

Řekneme, že $\mathbf{X}$ *je* spojitý náhodný vektor, *jestliže existuje reálná funkce* $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n)$, *definovaná na* $\mathbf{R}^n$, *taková, že pro každý bod* $\mathbf{x} =$

[1] Tj.body $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots$ tvoří konečnou nebo nekonečnou posloupnost.

$(x_1, ..., x_n) \in \mathbf{R}^n$ *platí*

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \cdots, x_n) = \int\limits_{-\infty}^{x_1} \cdots \int\limits_{-\infty}^{x_n} f(\xi_1, \cdots, \xi_n)\, d\xi_n \cdots d\xi_1.$$

Funkce $f(\mathbf{x}) = f(x_1, ..., x_n)$ *se nazývá* (sdružená) hustota pravděpodobnosti *náhodného vektoru* $\mathbf{X}$.

Věta 3.3 *Buď M obor hodnot diskrétního náhodného vektoru $\mathbf{X}$ a $P(\mathbf{x})$ (resp. $F(\mathbf{x})$) jeho pravděpodobnostní (resp. distribuční) funkce. Pak platí :*

(a)

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, ..., x_n) = \sum_{\substack{(t_1, ..., t_n) \in M \\ t_1 \leq x_1, \cdots, t_n \leq x_n}} P(t_1, ..., t_n),$$

(b)

$$\sum_{\mathbf{x} \in M} P(\mathbf{x}) = 1.$$

Věta 3.4 *Buď $F(\mathbf{x})$ (resp. $f(\mathbf{x})$) distribuční funkce (resp. hustota) spojitého náhodného vektoru $\mathbf{X}$. Pak platí :*

(a) $f(x_1, ..., x_n) = \frac{\partial^n F(x_1, ..., x_n)}{\partial x_1 ... \partial x_n}$ *ve všech bodech, v nichž derivace vpravo existuje,*

(b) $\int_{\mathbf{R}^n} \cdots \int f(\mathbf{x})\, dx_1 ... dx_n = 1.$

Definice *Množina $A \subset \mathbf{R}^n$ se nazývá (Riemannovsky)* měřitelná, *jestliže existuje (Riemannův) integrál*

$$\mu(A) = \int_A \cdots \int 1\, dx_1 ... dx_n.$$

Číslo $\mu(A)$ se nazývá míra *množiny A.*

Věta 3.5 *Nechť $\mathbf{X}$ je spojitý náhodný vektor s hustotou $f(\mathbf{x})$ a $A \subset \mathbf{R}^n$ je měřitelná množina. Pak platí:*

$$P(\mathbf{X} \in A) = \int_A \cdots \int f(\mathbf{x})\, dx_1 ... dx_n.$$

Poznámka Teoretičtěji založeného čtenáře je nutno na tomto místě upozornit na jistou nesrovnalost. Pracujeme-li totiž se spojitým náhodným vektorem $\mathbf{X}$, pak jsme podle věty 3.5 schopni počítat pravděpodobnosti $P(\mathbf{X} \in A)$ pouze pro měřitelné množiny $A \in \mathbf{R}^n$. Jinými slovy, v našem pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ musí všechny prvky σ-algebry $\mathcal{A}$ být měřitelné množiny. To však obecně není možno zaručit, neboť množina, která je nekonečným spočetným sjednocením měřitelných množin nemusí být (Riemannovsky) měřitelná.
(Příklad: množina všech bodů z $\langle 0,1 \rangle \times \langle 0,1 \rangle$ s racionálními souřadnicemi je spočetným sjednocením měřitelných jednoprvkových množin). Tato nesrovnalost je v rámci Riemannovy teorie integrálu neřešitelná a lze ji odstranit zavedením obecnější (Lebesgueovy) definice integrálu.

Věta 3.6 *Nechť* $\mathbf{X}$ *je diskrétní náhodný vektor a* $P(\mathbf{x})$ *je jeho pravděpodobnostní funkce. Pak pro každou množinu* $A \subset \mathbf{R}^n$ *platí:*

$$P(\mathbf{X} \in A) = \sum_{\mathbf{x} \in A} P(\mathbf{x}).$$

3.2 Marginální a podmíněné rozdělení

V celém tomto odstavci se pro jednoduchost omezíme na dvourozměrný náhodný vektor.

Definice *Nechť* $\mathbf{X} = (X, Y)$ *je náhodný vektor. Funkce*

$$F_1(x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y)$$

se nazývá marginální (okrajová) distribuční funkce *náhodné proměnné* X. *Obdobně funkce*

$$F_2(y) = \lim_{x \to \infty} F(x, y)$$

se nazývá marginální (okrajová) distribuční funkce *náhodné proměnné* Y.

Definice *(a) Buď* $P(x,y)$ *pravděpodobnostní funkce diskrétního náhodného vektoru* $\mathbf{X}$.*Funkce*

$$P_1(x) = \sum_y P(x, y),$$

$$P_2(y) = \sum_x P(x, y)$$

se nazývají marginální pravděpodobnostní funkce *náhodné proměnné X, resp. Y.*
(b) Buď $f(x,y)$ hustota pravděpodobnosti spojitého náhodného vektoru $\mathbf{X}$.
Funkce

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy,$$
$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx$$

se nazývají marginální hustoty pravděpodobnosti *náhodné proměnné X, resp. Y.*

Poznámka 1. Mezi marginálními distribučními funkcemi $F_1(x), F_2(y)$ a marginálními pravděpodobnostními funkcemi $P_1(x), P_2(y)$, resp. marginálními hustotami $f_1(x), f_2(y)$ platí obvyklé vztahy

$$F_1(x) = \sum_{t \le x} P_1(t), \quad F_2(y) = \sum_{s \le y} P_2(s),$$

resp.

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)\,dt, \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^{y} f_2(s)\,ds$$

a tedy též

$$F_1(x) = P(X \le x), \quad F_2(y) = P(Y \le y).$$

2. U diskrétního náhodného vektoru se sdružená a obě marginální pravděpodobnostní funkce obvykle zapisují ve tvaru následující tabulky:

$x \diagdown y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_s	$\sum$
x_1	$P(x_1, y_1)$	$P(x_1, y_2)$	$\cdots$	$P(x_1, y_s)$	$P_1(x_1)$
x_2	$P(x_2, y_1)$	$P(x_2, y_2)$	$\cdots$	$P(x_2, y_s)$	$P_1(x_2)$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\vdots$
x_r	$P(x_r, y_1)$	$P(x_r, y_2)$	$\cdots$	$P(x_r, y_s)$	$P_1(x_r)$
$\sum$	$P_2(y_1)$	$P_2(y_2)$	$\cdots$	$P_2(y_s)$	1

Definice *(a) Buď $P(x,y)$ pravděpodobnostní funkce diskrétního náhodného vektoru* $\mathbf{X}$*; nechť $P_1(x_0) > 0$. Funkce (proměnné y)*

$$P(y|x_0) = \frac{P(x_0, y)}{P_1(x_0)}$$

se nazývá podmíněná pravděpodobnostní funkce náhodné proměnné Y při podmínce, že náhodná proměnná X nabyla hodnoty x_0.
(b) Buď $f(x,y)$ hustota pravděpodobnosti spojitého náhodného vektoru $\mathbf{X}$*; nechť $f_1(x_0) > 0$. Funkce (proměnné y)*

$$f(y|x_0) = \frac{f(x_0,y)}{f_1(x_0)}$$

se nazývá podmíněná hustota pravděpodobnosti náhodné proměnné Y při podmínce,že náhodná proměnná X nabyla hodnoty x_0.

Poznámka 1. Pro každé x_0, pro něž $P_1(x_0) > 0$ (resp. $f_1(x_0) > 0$), platí $\sum\limits_y P(y|x_0) = 1$ (resp. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(y|x_0)\,dy = 1$).

2. Zcela analogicky se definuje i podmíněná pravděpodobnostní funkce (resp. podmíněná hustota) náhodné proměnné X za podmínky $Y = y_0$.

Věta 3.7 *(a) Nechť P(x,y) je pravděpodobnostní funkce diskrétního náhodného vektoru* $\mathbf{X}$.

1. Jestliže $P_1(x) > 0$, pak

$$P(x,y) = P(y|x)P_1(x).$$

2. Jestliže $P_2(y) > 0$, pak

$$P(x,y) = P(x|y)P_2(y).$$

3. (Bayesův vzorec).Jestliže $P_1(x) > 0$ i $P_2(y) > 0$, pak

$$P(y|x) = \frac{P(x|y)P_2(y)}{P_1(x)}.$$

(b) Nechť $f(x,y)$ je hustota pravděpodobnosti spojitého náhodného vektoru $\mathbf{X}$.

1. Jestliže $f_1(x) > 0$, pak

$$f(x,y) = f(y|x)f_1(x).$$

2. Jestliže $f_2(y) > 0$, pak

$$f(x,y) = f(x|y)f_2(y).$$

3. (Bayesův vzorec). Jestliže $f_1(x) > 0$ *i* $f_2(y) > 0$, *pak*

$$f(y|x) = \frac{f(x|y)f_2(y)}{f_1(x)}.$$

Definice *Buď* $\mathbf{X}$ *diskrétní (resp. spojitý) náhodný vektor. Řekneme, že náhodné proměnné* X, Y *jsou* nezávislé, *jestliže pro každé* y, *pro něž* $P_2(y) > 0$ *(resp.* $f_2(y) > 0$*), platí*

$$P(x|y) = P_1(x)$$
$$(\text{ resp. } f(x|y) = f_1(x)) .$$

Poznámka Zde je nutno učinit obdobnou poznámku, jako u definice nezávislosti jevů v odstavci 1.6. Z Bayesova vzorce (věta 3.7) se snadno dokáže, že jestliže $P(x|y) = P_1(x)$ (resp. $f(x|y) = f_1(x)$) a $P_1(x) > 0$ (resp. $f_1(x) > 0$), pak též $P(y|x) = P_2(y)$ (resp. $f(y|x) = f_2(y)$), takže definice je v pořádku.

Věta 3.8 *Buď* $\mathbf{X} = (X, Y)$ *diskrétní (resp. spojitý) náhodný vektor. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:*

1. *Pro každé* $x, y \in \mathbf{R}$ *platí*

$$P(x,y) = P_1(x) \cdot P_2(y)$$
$$(\text{resp. } f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y) \text{ }).$$

2. *Pro každé* $x, y \in \mathbf{R}$ *platí*

$$F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

3. X, Y *jsou nezávislé.*

3.3 Charakteristiky

Pro každý (diskrétní nebo spojitý) náhodný vektor $\mathbf{X}$ jsou definována příslušná jednorozměrná marginální a podmíněná rozdělení a přímou aplikací pojmů z odstavce 2.2 obdržíme *marginální a podmíněné charakteristiky* vektoru $\mathbf{X}$. Například *podmíněné střední hodnoty* jsou definovány jako střední hodnoty podmíněných rozdělení, tj.

- pro diskrétní náhodný vektor

$$E(Y|x) = \sum_y yP(y|x)$$

a

$$E(X|y) = \sum_x xP(x|y);$$

- pro spojitý náhodný vektor

$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)\, dy$$

a

$$E(X|y) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x|y)\, dx.$$

Podmíněná střední hodnota $E(Y|x)$ tedy při pevně dané "podmínce" x (tj. jevu $\{X = x\}$) udává průměrnou hodnotu, kolem níž za této podmínky kolísá proměnná Y; je zřejmé, že tato hodnota závisí na volbě podmínky x.

Definice *Funkce* $M(x) = E(Y|x)$ *se nazývá* regresní funkce *náhodné proměnné* Y *vzhledem k* X.

Poznámka Obdobně definujeme $M(y) = E(X|y)$.

Věta 3.9 *Nechť* $\mathbf{X}=(X,Y)$ *je náhodný vektor. Pak platí:*

1. $$E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y).$$

2. *Jsou-li* X, Y *nezávislé, pak*

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y).$$

Věta 3.10 *Nechť* X, Y *jsou nezávislé náhodné proměnné. Pak platí:*

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y).$$

Definice *Číslo*

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

se nazývá kovariance *náhodných proměnných* X, Y. *Jestliže* $\text{cov}(X, Y) = 0$, *říkáme, že* X, Y *jsou* nekorelované.

Věta 3.11 *(a) Platí:*

$$\text{cov}(X, Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y)$$

(tzv. výpočtový tvar kovariance*).*
(b) Jsou-li X, Y *nezávislé, pak* $\text{cov}(X, Y) = 0$.

Poznámka 1. Jestliže $\text{cov}(X, Y) \neq 0$ (a tedy X, Y nejsou nezávislé), pak tvrzení věty 3.10 a druhé tvrzení věty 3.9 neplatí; obecně platí

$$E(X \cdot Y) = E(X) \cdot E(Y) + \text{cov}(X, Y)$$

a

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2\text{cov}(X, Y).$$

2. Tvrzení b) věty 3.10 nelze obrátit, tj. z nekorelovanosti obecně nevyplývá nezávislost (viz. příklady 3.9 a 3.10).

3. Je-li $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)$ n-rozměrný náhodný vektor, pak můžeme definovat
$d_{ij} = \text{cov}(X_i, X_j) (i, j = 1, ..., n)$ a sestavit *kovarianční matici*

$$\begin{bmatrix} d_{11}, & d_{12}, & , ..., & d_{1n} \\ d_{21}, & d_{22}, & , ..., & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1}, & d_{n2}, & , ..., & d_{nn} \end{bmatrix},$$

která je symetrická a diagonální prvky

$$d_{ii} = \text{cov}(X_i, X_i) = E[(X_i - E(X_i))^2] = D(X_i)$$

jsou rozptyly náhodných proměnných $X_1, \cdots, X_n$.

Definice *Nechť X a Y jsou náhodné proměnné s kladnými rozptyly $D(X), D(Y)$. Číslo*

$$\varrho(X,Y) = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\cdot\sigma(Y)}$$

se nazývá korelační koeficient *proměnných X a Y.*

Věta 3.12 *Buďte X, Y náhodné proměnné. Platí:*

1.
$$-1 \le \varrho(X,Y) \le 1.$$

2. Je-li $Y = aX + b$, pak
$$\varrho(X,Y) = \begin{cases} 1 & pro \quad a > 0, \\ -1 & pro \quad a < 0. \end{cases}$$

Definice *Nechť $\mathbf{X} = (X, Y)$ je náhodný vektor. Funkce dvou reálných proměnných s,t definovaná vztahem*

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t,s) = E[e^{i(tX+sY)}]$$

se nazývá charakteristická funkce *náhodného vektoru* $\mathbf{X}$.

Věta 3.13 *Nechť r_1, r_2 jsou celá nezáporná čísla. Existuje-li $E(X^{r_1}\cdot Y^{r_2})$, pak*

$$E(X^{r_1}\cdot Y^{r_2}) = \frac{1}{i^{r_1+r_2}}\cdot\frac{\partial^{r_1+r_2}}{\partial t^{r_1}\partial s^{r_2}}\varphi_{\mathbf{X}}(t,s)\,\Big|_{\substack{t=0\\ s=0}}.$$

3.4 Některá důležitá vícerozměrná rozdělení

1. *Multinomické rozdělení*

   Definice *Diskrétní náhodný vektor $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_k)$ má* multinomické rozdělení *s parametry $n, p_1, \ldots, p_k$, jestliže*

$$P(x_1,\cdots,x_k) = \begin{cases} \frac{n!}{x_1!x_2!\cdots x_k!}\cdot p_1^{x_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{x_k} \\ \qquad pro\ x_j = 0,1,\ldots,n,\ (j=1,\ldots,k),\ \sum_{j=1}^{k} x_j = n \\ 0 \quad jinak, \end{cases}$$

   kde n je přirozené číslo a

$$0 < p_j < 1\ (j = 1,\ldots,k), \sum_{j=1}^{k} p_j = 1.$$

Poznámka 1. Jestliže při náhodném pokusu nastane právě jeden z k vzájemně disjunktních jevů $A_1, \ldots, A_k$, přičemž

$$P(A_i) = p_i, \quad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1 \ ,$$

pak multinomické rozdělení udává pravděpodobnost, že při n nezávislých opakováních pokusu nastane jev A_i právě x_i-krát $(\sum_{i=1}^{k} x_i = n)$. Speciálně pro $k = 2$ *a* $A_2 = \bar{A}_1$ dostáváme binomické rozdělení.
2. Nechť $1 \leq s < k$ a uvažujme vektor $\mathbf{X}_s = (X_1, \ldots, X_s)$. Položíme-li $A = \bigcup_{j=s+1}^{k} A_j$, pak A nastane v $\sum_{j=s+1}^{n} x_j = n - \sum_{j=1}^{s} x_j$ případech, bude $P(A) = 1 - \sum_{j=1}^{s} p_j$ a tedy vektor $\mathbf{X}_s$ bude mít pravděpodobnostní funkci :

$$P(x_1, \ldots, x_s) =$$

$$= \frac{n!}{x_1! \cdots x_s!(n - \sum_{j=1}^{s} x_j)!} \cdot p_1^{x_1} p_2^{x_2} \cdots p_s^{x_s} (1 - \sum_{j=1}^{s} p_j)^{n - \sum_{j=1}^{s} x_j} .$$

Speciálně pro $s = 1$ dostáváme marginální rozdělení X_1 ve tvaru

$$P(x_1) = \frac{n!}{x_1!(n - x_1)!} \cdot p_1^{x_1} (1 - p_1)^{n - x_1}.$$

Obdobně i pro $X_j, \quad j = 2, \ldots, k$. Tedy marginálním rozdělením proměnné X_j je rozdělení $\mathrm{Bi}(n, p_j)$.

3. Charakteristiky:

$$\begin{aligned} E(X_j) &= np_j, \quad j = 1, \ldots, k, \\ D(X_j) &= np_j(1 - p_j), \quad j = 1, \ldots, k, \\ \varphi_{\mathbf{X}}(t_1, \ldots, t_k) &= (p_1 e^{it_1} + \ldots + p_k e^{it_k})^n, \\ \mathrm{cov}(X_i, X_j) &= -np_i p_j, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

2. *Vícerozměrné normální rozdělení*

Definice *Spojitý náhodný vektor* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ *má* n-rozměrné normální rozdělení *s parametry* μ *a* $\mathbf{D}$ *(značíme* $\mathrm{N}_n(\mu, \mathbf{D})$*), jestliže jeho hustota pravděpodobnosti je tvaru*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \mid \mathbf{D} \mid}} e^{-\frac{(x-\mu)^T D^{-1}(x-\mu)}{2}} \quad pro\ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n,$$

kde $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T$ *je vektor reálných čísel,* $\mathbf{D} = [d_{ij}]$ *je symetrická pozitivně definitní matice řádu n,* $\mid \mathbf{D} \mid$ *je determinant* $\mathbf{D}$ *a* $\mathbf{D}^{-1}$ *je inverzní matice k* $\mathbf{D}$.

Charakteristická funkce:

$$\varphi_{\mathbf{X}}(t_1, \cdots, t_n) = e^{(it^T\mu - \frac{t^T D t}{2})} \quad pro\ \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{R}^n.$$

Momenty (odvodíme derivací char. funkce):

$$E(X_j) = \mu_j, \quad j, \ldots, n$$

$$E(X_i \cdot X_j) = \mu_i \mu_j + d_{ij} \quad i, j = 1, \ldots, n,$$

a odtud

$$\mathrm{cov}(X_i, X_j) = E(X_i \cdot X_j) - E(X_i)E(X_j) = d_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots n.$$

Tedy: vektor μ je vektor středních hodnot a matice $\mathbf{D}$ je kovarianční matice. Marginálním rozdělením proměnné X_j je

$$\mathrm{N}(\mu_j, d_{jj}), \; j = 1, \ldots, n.$$

Věta 3.14 *Buď* $\mathbf{X} = (X, Y)$ *náhodný vektor s (dvourozměrným) normálním rozdělením. Pak náhodné proměnné* X, Y *jsou nezávislé právě když jsou nekorelované.*

Poznámka V příkladech 3.9 a 3.10 je ukázáno, že bez předpokladu normality rozdělení věta 3.14 neplatí.

3.5 Funkce náhodných proměnných

V tomto odstavci se omezíme na spojité náhodné proměnné.

Věta 3.15 *Nechť X je spojitá náhodná proměnná s hustotou pravděpodobnosti $f(x)$ a nechť $y = h(x)$ je funkce, která je ryze monotónní na množině všech možných hodnot proměnné X. Pak má náhodná proměnná*

$$Y = h(X)$$

hustotu pravděpodobnosti

$$g(y) = f[h^{-1}(y)] \cdot \left|\frac{dh^{-1}(y)}{dy}\right|,$$

kde $x = h^{-1}(y)$ je inverzní funkce k funkci $y = h(x)$.

Poznámka Není-li funkce $h(x)$ ryze monotonní, pak nám při nalezení rozdělení náhodné proměnné $Y = h(X)$ pomůže následující jednoduché, ale v praxi velmi užitečné tvrzení.

Věta 3.16 *Nechť X je spojitá náhodná proměnná a $y = h(x)$ je funkce, definovaná na množině všech možných hodnot proměnné X. Pro každé $y \in \mathbf{R}$ označme $I_1(y), I_2(y), \ldots$ všechny intervaly na ose x, pro které platí $h(x) \leq y$. Pro distribuční funkci $G(y)$ proměnné $Y = h(X)$ pak platí*

$$G(y) = \sum_j P[X \in I_j(y)] = \sum_j \int_{I_j(y)} f(x)\, dx.$$

Následující tvrzení umožňuje nalézt distribuční funkci náhodné proměnné, která je funkcí více náhodných proměnných.

Věta 3.17 *Buď $f(x_1, \cdots, x_n)$ sdružená hustota pravděpodobnosti n-rozměrného spojitého náhodného vektoru*

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$$

a

$$y = h(x_1, \ldots, x_n)$$

funkce, definovaná na množině všech jeho možných hodnot. Pro každé $y \in \mathbf{R}$ označme

$$M_y = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n | h(x_1, \ldots, x_n) \leq y\}.$$

Pak pro distribuční funkci $G(y)$ náhodné proměnné

$$Y = h(X_1, \dots, X_n)$$

platí

$$G(y) = P(Y \leq y) = \int_{M_y} \cdots \int f(x_1, \dots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n.$$

Věta 3.18 *Nechť X, Y jsou nezávislé spojité náhodné proměnné s hustotami $f_1(x), f_2(y)$. Pak pro distribuční funkci $G(z)$ a hustotu pravděpodobnosti $g(z)$ náhodné proměnné*

$$Z = X + Y$$

platí

$$G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(z-y) f_2(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) F_2(z-x)\, dx$$

a

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) f_2(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x)\, dx.$$

Poznámka Integrál na poslední řádce věty 3.18 bývá nazýván *konvolutorní součin* nebo krátce *konvoluce* funkcí $f_1(x), f_2(x)$ a značí se $f_1 * f_2$. Tvrzení věty 3.18 pak lze zapsat vztahy

$$G = F_1 * f_2 = f_1 * F_2$$

a

$$g = f_1 * f_2.$$

Věta 3.19 *Buďte $X_1, \dots, X_n$ nezávislé náhodné proměnné s rozdělením* $\mathrm{N}(\mu, \sigma^2)$. *Pak náhodná proměnná*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

má rozdělení $\mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

Důsledek Náhodná proměnná

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

tedy má rozdělení $\mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Příklady

3.1 Dokažte větu 3.2.
Řešení:

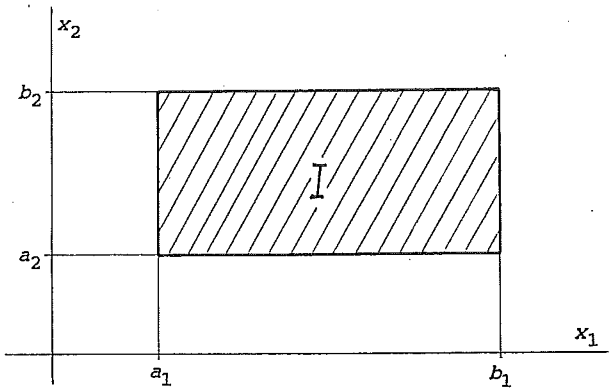
$$P(\mathbf{X} \in I) = P(a_1 < X \le b_1, a_2 < Y \le b_2).$$

Podle tvrzení (e) věty 3.4 máme

$$\begin{aligned} P(\mathbf{X} \in I) &= P(X_1 \le b_1, X_2 \le b_2) \\ &\quad - P(\{X_1 \le a_1, X_2 \le b_2\} \cup \{X_1 \le b_1, X_2 \le a_2\}) \end{aligned}$$

a podle tvrzení (f) téže věty dále

$$\begin{aligned} P(\mathbf{X} \in I) &= P(X_1 \le b_1, X_2 \le b_2) - (P(X_1 \le a_1, X_2 \le b_2) + \\ &\quad + P(X_1 \le b_1, X_2 \le a_2) - (P(X_1 \le a_1, X_2 \le a_2)) = \\ &= F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2) + F(a_1, a_2). \end{aligned}$$



3.2 Dokažte tvrzení poznámky 1 za definicí marginálního rozdělení.
Řešení:

(a) Je-li vektor $\mathbf{X}$ diskrétní, pak

$$F_1(x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y) = \lim_{y \to \infty} \sum_{t \le x} \sum_{s \le y} P(t, s) =$$

$$= \sum_{t \le x} \sum_{s} P(t, s) = \sum_{t \le x} P_1(t).$$

(b) Je-li vektor $\mathbf{X}$ spojitý, pak

$$F_1(x) = \lim_{y \to \infty} F(x, y) = \lim_{y \to \infty} \int_{-\infty}^{y} \left(\int_{-\infty}^{x} f(t, s)\, dt \right) ds =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x} f(t, s)\, dt \right) ds = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t, s)\, ds \right) dt = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)\, dt.$$

Pro $F_2(y)$ je důkaz obdobný.

3.3 Na osmi kartičkách jsou vypsána čísla 2,4,6,8,9,12,18,20; náhodně vytáhneme jednu kartičku.
X...nejvyšší mocnina čísla 2, kterou je tažené číslo dělitelné,
Y...nejvyšší mocnina čísla 3, kterou je tažené číslo dělitelné.
Určete sdruženou a obě marginální pravděpodobnostní funkce náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X, Y)$.

Řešení: Mohou nastat následující možnosti (se stejnou pravděpodobností 1/8):

tažené číslo	(x, y)
$2 = 2^1 \cdot 3^0$	$(1, 0)$
$4 = 2^2 \cdot 3^0$	$(2, 0)$
$6 = 2^1 \cdot 3^1$	$(1, 1)$
$8 = 2^3 \cdot 3^0$	$(3, 0)$
$9 = 2^0 \cdot 3^2$	$(0, 2)$
$12 = 2^2 \cdot 3^1$	$(2, 1)$
$18 = 2^1 \cdot 3^2$	$(1, 2)$
$20 = 2^2 \cdot 3^0 \cdot 5$	$(2, 0)$

Vidíme, že náhodná proměnná X nabývá hodnot od 0 do 3 a Y nabývá hodnot od 0 do 2. Odtud již snadno sestavíme následující tabulku.

$x \cdot\cdot y$	0	1	2	$\sum$
0	0	0	0,125	0,125
1	0,125	0,125	0,125	0,375
2	0,250	0,125	0	0,375
3	0,125	0	0	0,125
$\sum$	0,5	0,25	0,25	1

3.4 Provedeme dva hody jednou kostkou a označíme
X...počet bodů, které padly při prvním hodu,
Y...součet padlých bodů při obou hodech.
U takto definovaného diskrétního náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X, Y)$ určete:

1. sdružené a obě marginální rozdělení,
2. podmíněné pravděpodobnostní funkce,
3. regresní funkce $M(x)$ a $M(y)$,
4. korelační koeficient $\varrho(X, Y)$,
5. zda jsou X, Y závislé nebo nezávislé.

Řešení:

1. Náhodná proměnná X nabývá hodnot od 1 do 6 a náhodná proměnná Y od 2 do 12; snadnou úvahou nalezneme následující tabulku, určující rozdělení vektoru $\mathbf{X}$.

$x \ddots y$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
1	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0	0	1/6
2	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	0	1/6
3	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	0	1/6
4	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	0	1/6
5	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	0	1/6
6	0	0	0	0	0	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/36	1/6
$\sum$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1

2. Při dané podmínce x jsou hodnoty podmíněné pravděpodobnostní funkce $P(y|x)$ pro $y = 2, \ldots, 12$ dány vzorcem

$$P(y|x) = \frac{P(x, y)}{P_1(x)}.$$

Odtud obdržíme šest jednorozměrných podmíněných pravděpodobnostních funkcí pro jednotlivé podmínky; můžeme je přehledně napsat ve tvaru následující tabulky:

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	$\sum$
$P(y\|1)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	0	1
$P(y\|2)$	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	0	1
$P(y\|3)$	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	0	1
$P(y\|4)$	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	0	1
$P(y\|5)$	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	0	1
$P(y\|6)$	0	0	0	0	0	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1

Obdobně nalezneme podmíněné pravděpodobnostní funkce $P(x|y)$ pro jednotlivé hodnoty podmínky y.

x	$P(x\|2)$	$P(x\|3)$	$P(x\|4)$	$P(x\|5)$	$P(x\|6)$	$P(x\|7)$
1	1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
2	0	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6
3	0	0	1/3	1/4	1/5	1/6
4	0	0	0	1/4	1/5	1/6
5	0	0	0	0	1/5	1/6
6	0	0	0	0	0	1/6
$\sum$	1	1	1	1	1	1

$P(x\|8)$	$P(x\|9)$	$P(x\|10)$	$P(x\|11)$	$P(x\|12)$
0	0	0	0	0
1/5	0	0	0	0
1/5	1/4	0	0	0
1/5	1/4	1/3	0	0
1/5	1/4	1/3	1/2	0
1/5	1/4	1/3	1/2	1
1	1	1	1	1

3. Pro podmíněnou střední hodnotu $E(Y|1)$ máme

$$E(Y|1) = \sum_y yP(y|1) = 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 5\frac{1}{6} + 6\frac{1}{6} + 7\frac{1}{6} = 4,5.$$

Určíme-li obdobně hodnoty $E(Y|x)$ pro $x = 2, 3, 4, 5, 6$, dostaneme regresní funkci $M(x)$:

x	1	2	3	4	5	6
$M(x)$	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5

takže například bylo-li výsledkem prvního hodu číslo 3, bude součet kolísat kolem hodnoty 6,5. Obdobným způsobem pro regresní funkci $M(y)$ dostaneme

y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$M(y)$	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	6

takže např. dozvíme-li se, že padl součet 6, očekáváme, že v prvním hodu padlo číslo 3.

4. Ihned z marginálních rozdělení vidíme, že $E(X) = 3.5$ a $E(Y) = 7$.

   (a) Určíme marginální rozptyly a směrodatné odchylky.

$$E(X^2) = 1\frac{1}{6} + 4\frac{1}{6} + 9\frac{1}{6} + 16\frac{1}{6} + 25\frac{1}{6} + 36\frac{1}{6} = \frac{91}{6}$$

   a odtud

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{91}{6} - (3.5)^2 = \frac{35}{12} \doteq 2,916$$

   a

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \doteq 1,7078.$$

   Obdobně

$$E(Y^2) = \frac{1974}{36}$$

   a tedy

$$D(Y) = E(Y^2) - E^2(Y) = \frac{1974}{36} - 49 = \frac{35}{6} \doteq 5,83,$$

   odkud

$$\sigma(Y) = \sqrt{\frac{35}{6}} = 2,4152.$$

   (b) Určíme kovarianci $\operatorname{cov}(X,Y)$ a korelační koeficient $\varrho(X,Y)$.

$$
\begin{aligned}
E(X,Y) = {} & 1\cdot 2\cdot \frac{1}{36} + 1\cdot 3\cdot \frac{1}{36} + \cdots + 1\cdot 7\cdot \frac{1}{36} + \\
& + 2\cdot 3\cdot \frac{1}{36} + 2\cdot 4\cdot \frac{1}{36} + \cdots + 2\cdot 8\cdot \frac{1}{36} + \\
& \dots \\
& + 6\cdot 7\cdot \frac{1}{36} + 6\cdot 8\cdot \frac{1}{36} + \cdots + 6\cdot 12\cdot \frac{1}{36} = \\
& = \frac{987}{36} = \frac{329}{12},
\end{aligned}
$$

odkud

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(X,Y) - E(X)E(Y) = \frac{329}{12} - 7\cdot 3,5 = \frac{35}{12} \doteq 2,916$$

a tedy

$$\varrho(X,Y) = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{\frac{35}{12}}{\sqrt{\frac{35}{12}}\sqrt{\frac{35}{6}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 0,707.$$

5. X, Y jsou závislé, k důkazu čehož stačí kterékoliv z následujících pozorování:
   (a) $P(x,y) \neq P_1(x)P_2(y)$
   (např. $P(2,2) = 0$, zatímco $P_1(2)P_2(2) = \frac{1}{6}\frac{1}{36} \neq 0$);
   (b) podmíněná rozdělení nejsou stejná a nejsou rovna marginálnímu;
   (c) regresní funkce nejsou konstantní;
   (d) $\operatorname{cov}(X,Y) \neq 0$ a $\varrho(X,Y) \neq 0$.

3.5 V produkci podniku jsou 2% zmetků, 10% výrobků má 2.jakost a zbylé výrobky jsou 1.jakosti. Čtyřikrát po sobě nezávisle vybereme po jednom výrobku a označíme
X... počet zmetků ve výběru,
Y.. počet výrobků 2.jakosti ve výběru.

1. Určete sdružené a obě marginální rozdělení.
2. Jsou X, Y nezávislé?

Řešení:

1. Náhodný vektor $\mathbf{X} = (X, Y, Z)$, kde Z je počet výrobků 1.jakosti ve výběru, má multinomické rozdělení s parametry 4 ; 0,02 ; 0,1 ; 0,88.

   Nás však podle zadání úlohy zajímá pouze rozdělení vektoru $\mathbf{X}_2 =$
   $= (X, Y)$, které určíme podle vzorce (viz poznámka 2 v části (1) odstavce 3.4)

   $$P(x, y) = \frac{4!}{x!y!(4-x-y)!} \cdot 0,02^x \cdot 0,1^y \cdot 0,88^{(4-x-y)}.$$

   Dosazením do vzorce dostaneme následující tabulku:

$x \cdot\cdot y$	0	1	2	3	4	
0	0,5997	0,2726	0,0465	0,0035	0,0001	0,9224
1	0,0545	0,0186	0,0021	0,0001	0	0,0753
2	0,0019	0,0004	$2{,}4{\cdot}10^{-5}$	0	0	0,0023
3	$2{,}8{\cdot}10^{-5}$	$3{,}2{\cdot}10^{-6}$	0	0	0	$3{,}1{\cdot}10^{-5}$
4	$1{,}6{\cdot}10^{-7}$	0	0	0	0	$1{,}6{\cdot}10^{-7}$
	0,6561	0,2916	0,0486	0,0036	0,0001	1

   Čtenář se může přesvědčit, že marginální rozdělení (získaná řádkovými a sloupcovými součty sdruženého) jsou skutečně rozdělení Bi(4;0,02) a Bi(4;0,1).

2. Abychom odpověděli na druhou otázku, nemusíme nic počítat, protože jsou-li X_i, X_j složky náhodného vektoru s multinomickým rozdělením, pak podle části (1) odstavce 3.4 nutně $\text{cov}(X_i, X_j) = -np_ip_j < 0$, a tedy X_i, X_j nemohou být nezávislé.

3.6 Hustota pravděpodobnosti dvourozměrného spojitého náhodného vektoru $\mathbf{X}$ je konstantní na intervalu $I = \langle 1, 2\rangle \times \langle 2, 4\rangle$ a nulová jinde (tzv. dvourozměrné rovnoměrné rozdělení). Určete

1. hustotu $f(x, y)$ a marginální hustoty $f_1(x), f_2(y)$,
2. distribuční funkci $F(x, y)$ a marginální distribuční funkce $F_1(x), F_2(y)$,
3. zda jsou X, Y nezávislé.

Řešení:

1. Označíme-li k hodnotu hustoty $f(x,y)$ na I, pak z podmínky

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

plyne

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{1}^{2}\Big(\int_{2}^{4} k\,dy\Big)\,dx = 2k = 1$$

a tedy $k = \frac{1}{2}$. Máme tedy

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x \in \langle 1,2\rangle, y \in \langle 2,4\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Odtud již snadno určíme marginální hustoty:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_{2}^{4} \frac{1}{2}\,dy = 1 & \text{pro } x \in \langle 1,2\rangle, \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

a obdobně

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_{1}^{2} \frac{1}{2}\,dx = \frac{1}{2} & \text{pro } y \in \langle 2,4\rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

2. Pro distribuční funkci $F(x,y)$ platí

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t,s)\,ds\,dt.$$

(a) Je-li $x < 1$ nebo $y < 2$, pak v celém integračním oboru je $f(x,y) = 0$, a tedy $F(x,y) = 0$.

(b) Je-li $x > 2$ a současně $y > 4$, pak

$$F(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(t,s)\,ds\,dt = \int_{1}^{2}\int_{2}^{4} \frac{1}{2}\,dy\,dx = 1.$$

(c) Je-li $1 \leq x \leq 2$ a současně $y > 4$, pak

$$F(x,y) = \int_1^x \left(\int_2^4 \frac{1}{2}\, ds\right) dt = \int_1^x 1\, dt = x - 1.$$

(d) Je-li $x > 2$ a současně $2 \leq y \leq 4$, pak

$$F(x,y) = \int_1^2 \left(\int_2^y \frac{1}{2}\, ds\right) dt = \frac{1}{2}(y-2).$$

(e) Je-li $1 \leq x \leq 2$ a současně $2 \leq y \leq 4$, pak

$$F(x,y) = \int_1^x \left(\int_2^y \frac{1}{2}\, ds\right) dt = \frac{1}{2}(y-2)(x-1).$$

Celkem tedy

$$F(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x > 2 \text{ a } y > 4, \\ x - 1 & \text{pro } 1 \leq x \leq 2 \text{ a } y > 4, \\ \frac{1}{2}(y-2) & \text{pro } x > 2 \text{ a } 2 \leq y \leq 4, \\ \frac{1}{2}(x-1)(y-2) & \text{pro } 1 \leq x \leq 2 \text{ a } 2 \leq y \leq 4, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Marginální distribuční funkce nalezneme jako limity sdružené distribuční funkce nebo podle vztahu

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x f_1(t)\, dt,$$

resp.

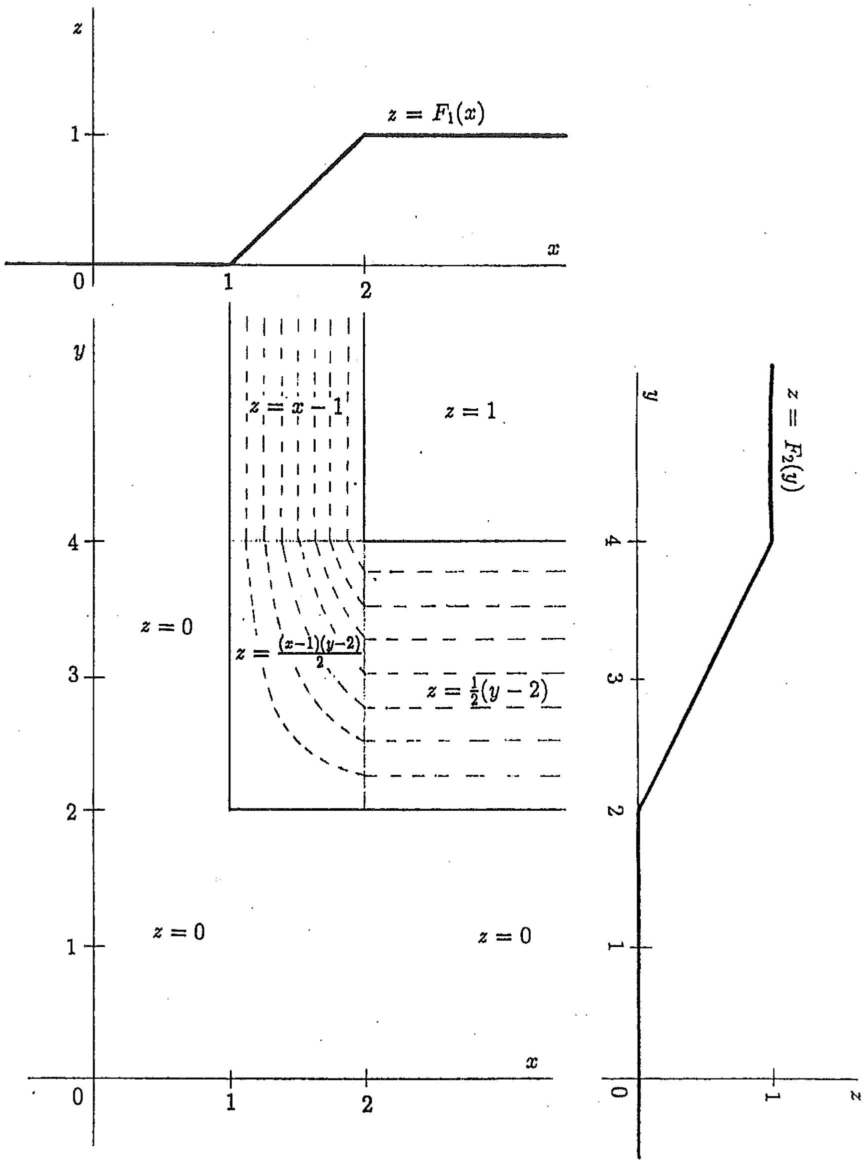
$$F_2(y) = \int_{-\infty}^y f_2(s)\, ds.$$

Oběma způsoby shodně vyjde

$$F_1(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 1 \\ x - 1 & \text{pro } 1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{pro } x > 2, \end{cases}$$

$$F_2(y) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 2 \\ \frac{1}{2}(y-2) & \text{pro } 2 \leq y \leq 4 \\ 1 & \text{pro } y > 4. \end{cases}$$

Obdržené výsledky jsou přehledně shrnuty v následujícím obrázku, v němž pro názornost přerušovanými čarami značíme "vrstevnice" plochy $z = F(x, y)$.



3. X, Y jsou nezávislé, neboť $f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$
a $F(x,y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$

3.7 Náhodný vektor $\mathbf{X} = (X, Y)$ má hustotu pravděpodobnosti

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{2}{3}(2x+y) & \text{pro } x, y \in \langle 0,1 \rangle\,, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Najděte regresní funkci Y vzhledem k X.

Řešení: Především ověříme, že

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 \frac{2}{3}(2x+y)\,dx\,dy = \frac{2}{3}\int_0^1 (1+y)\,dy = 1.$$

Určíme marginální hustotu $f_1(x)$:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^1 \frac{2}{3}(2x+y)\,dy = \frac{1}{3}(4x+1) & \text{pro } x \in \langle 0,1 \rangle, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Podmíněná hustota:

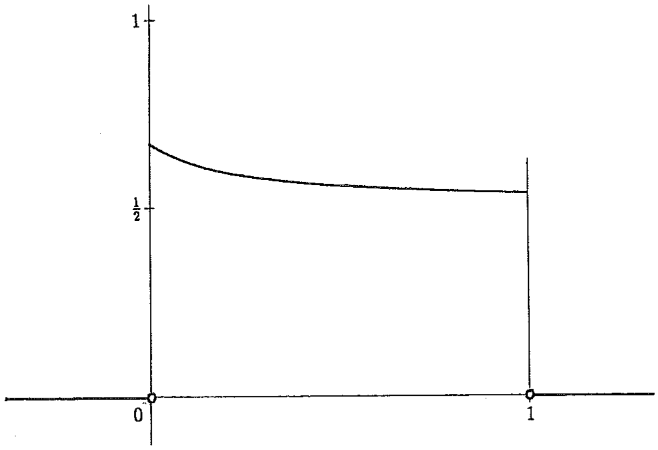
$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)} = \begin{cases} \frac{4x+2y}{4x+1} & \text{pro } x, y \in \langle 0,1 \rangle\,, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Podmíněná střední hodnota:

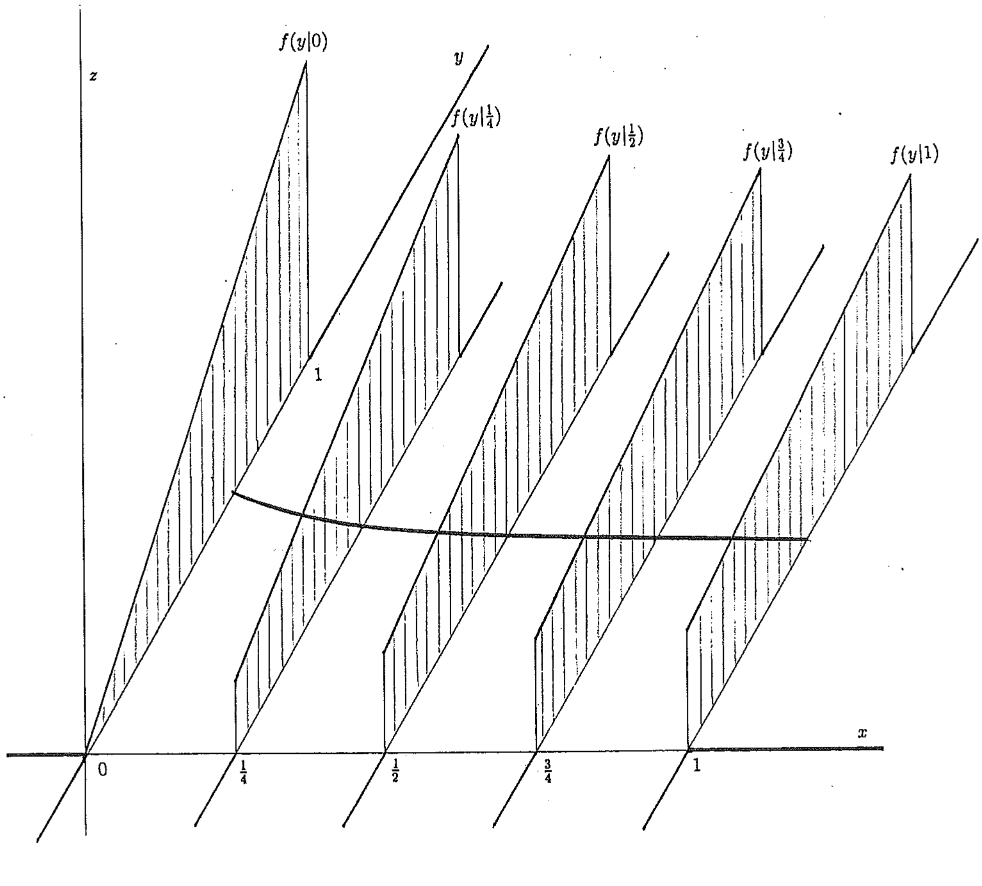
$$E(Y|x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y|x)\,dy = \begin{cases} \int_0^1 y \cdot \frac{4x+2y}{4x+1}\,dy & \text{pro } x \in \langle 0,1 \rangle\,, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Po integraci dostaneme:

$$M(x) = E(Y|x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{6(4x+1)} & \text{pro } x \in \langle 0,1 \rangle, \\ 0 & \text{pro } x \notin \langle 0,1 \rangle \end{cases}$$



Následující obrázek ukazuje, jakým způsobem vyjadřuje funkce $M(x)$ závislost střední hodnoty podmíněných rozdělení na podmínce (pro větší názornost je na ose z zvoleno čtyřikrát menší měřítko).



3.8 Hustota pravděpodobnosti spojitého náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X, Y)$ je

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y & \text{pro } x, y \in (0,1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Určete koeficient korelace $\varrho(X, Y)$.

Řešení:

(a) Ověříme, že

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 (x+y)\,dx\,dy = \int_0^1 (y+\frac{1}{2})\,dy = 1.$$

(b) Určíme marginální hustoty:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy = \begin{cases} \int_0^1 (x+y)\,dy = x + \frac{1}{2} & \text{pro } x \in (0,1), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} \int_0^1 (x+y)\,dx = y + \frac{1}{2} & \text{pro } y \in (0,1), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Marginální střední hodnoty:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_1(x)\,dx = \int_0^1 x(x+\frac{1}{2})\,dx = \frac{7}{12},$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y f_2(y)\,dy = \int_0^1 y(y+\frac{1}{2})\,dy = \frac{7}{12}.$$

(c) Určíme kovarianci $\operatorname{cov}(X, Y)$:
buďto přímým výpočtem :

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] =$$

$$= \int_0^1\int_0^1 (x - \frac{7}{12})(y - \frac{7}{12})(x+y)\,dx\,dy = -\frac{1}{144},$$

nebo, což je jednodušší, přes výpočtový tvar:

$$E(X \cdot Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} xyf(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^1 xy(x+y)\,dx\,dy = \frac{1}{3}$$

a odtud

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = \frac{1}{3} - \frac{7}{12} \cdot \frac{7}{12} = -\frac{1}{144}.$$

(d) Určíme rozptyly $D(X)$ a $D(Y)$:
buďto přímým výpočtem:

$$D(X) = E[(X - E(X))^2] = \int_0^1 (x - \frac{7}{12})^2 (x + \frac{1}{2})\,dx = \frac{11}{144},$$

nebo, což je jednodušší, přes výpočtový tvar:

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_1(x)\,dx = \int_0^1 x^2 (x + \frac{1}{2})\,dx = \frac{5}{12},$$

a odtud

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{5}{12} - (\frac{7}{12})^2 = \frac{11}{144}.$$

Obdobně i

$$D(Y) = \frac{11}{144}.$$

(e) Tedy

$$\varrho = \frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{\frac{-1}{144}}{\sqrt{\frac{11}{144}}\sqrt{\frac{11}{144}}} = -\frac{1}{11}.$$

3.9 Spojitý náhodný vektor $\mathbf{X} = (X, Y)$ je definován následujícím způsobem:
náhodná proměnná X se řídí rovnoměrným rozdělením na intervalu (-1,1); hodnotu náhodné proměnné Y obdržíme jako druhou mocninu hodnoty, jíž nabude X.
Určete kovarianci $\operatorname{cov}(X, Y)$.

Řešení: Podle zadání je

$$f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{pro } x \in (-1,1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a

$$Y = X^2.$$

Zřejmě je

$$E(X) = \int_{-1}^{1} \frac{x}{2}\, dx = 0$$

a protože též

$$E(X \cdot Y) = \int_{-1}^{1} x x^2 \frac{1}{2}\, dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0,$$

dostáváme

$$\operatorname{cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0.$$

Náhodné proměnné X, Y však *nejsou nezávislé*— je mezi nimi dokonce přímá funkční závislost, neboť známe-li hodnotu, jíž nabyla X, pak je tím hodnota Y jednoznačně určena!
Tento varovný příklad ukazuje, že tvrzení b) věty 3.10 nelze obrátit, tj. z nulovosti kovariance $\operatorname{cov}(X,Y)$ obecně nevyplývá nezávislost proměnných X, Y.

3.10 Diskrétní náhodný vektor $\mathbf{X} = (X, Y)$ nabývá hodnot (1,0), (-1,0), (0,1), (0,-1) se stejnými pravděpodobnostmi $\frac{1}{4}$. Určete $\operatorname{cov}(X,Y)$.
Řešení: Rozdělení vektoru $\mathbf{X}$ je dáno tabulkou

$x \cdot\cdot y$	-1	0	1	$\sum$
-1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$
$\sum$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1

a ihned vidíme, že $E(X) = E(Y) = 0$. Protože však nikdy není současně

$X \neq 0$ i $Y \neq 0$, je $E(X \cdot Y) = 0$, a tedy $\text{cov}(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 0$. Je však zřejmé, že X, Y jsou závislé, neboť např. $P(0,0) = 0 \neq P_1(0) \cdot P_2(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. Tento příklad je tedy diskrétní obdobou předchozího příkladu a ukazuje, že i pro diskrétní náhodné vektory z nekorelovanosti nevyplývá nezávislost.

3.11 Dokažte větu 3.14.
Řešení:

1. Jsou-li X, Y nezávislé, pak jsou nekorelované podle tvrzení b) věty 3.11.
2. Předpokládejme, že X, Y jsou nekorelované, tj. $\text{cov}(X,Y) = 0$. Kovarianční matice $\mathbf{D}$ je tedy diagonální, tj.

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11}, & 0 \\ 0, & d_{22} \end{bmatrix},$$

tedy $|\mathbf{D}| = d_{11}d_{22}$ a inverzní matice

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}}, & 0 \\ 0, & \frac{1}{d_{22}} \end{bmatrix}$$

je také diagonální, takže

$$(\mathbf{x}-\mu)^T\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}-\mu) = [x-\mu_1, y-\mu_2] \begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}}, & 0 \\ 0, & \frac{1}{d_{22}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-\mu_1 \\ y-\mu_2 \end{bmatrix} = $$
$$= \frac{(x-\mu_1)^2}{d_{11}} + \frac{(y-\mu_2)^2}{d_{22}}.$$

Sdružená hustota je tedy tvaru

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2|\mathbf{D}|}} e^{-\frac{(x-\mu)^T D^{-1}(x-\mu)}{2}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^2 d_{11}d_{22}}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{(x-\mu_1)^2}{d_{11}} + \frac{(y-\mu_2)^2}{d_{22}}\right)} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{11}}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2d_{11}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi d_{22}}} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2d_{22}}} =$$
$$= f_1(x) \cdot f_2(y)$$

a podle věty 3.8 jsou X, Y nezávislé.

Poznámka Jestliže jsou X, Y nekorelované a mají stejné rozptyly $d_{11} = d_{22} = \sigma^2$, pak se snadno přesvědčíme, že množiny všech bodů $\mathbf{x} = (x, y)$, v nichž má hustota $f(x, y)$ stejnou hodnotu, jsou soustředné kružnice se středem v bodě μ. Proto bývá takovéto rozdělení nazýváno *kruhové normální rozdělení* se střední hodnotou $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ a s rozptylem σ^2.

3.12 Náhodný vektor $\mathbf{X} = (X, Y)$ má kruhové normální rozdělení se střední hodnotou $\mu = (\mu_1, \mu_2)$ a s rozptylem σ^2. Určete pravděpodobnost toho, že bod $\mathbf{x}$ bude od μ vzdálen nejvýše

(a) σ

(b) 2σ

(c) 3σ.

Řešení: Označme K_r kruh se středem μ a poloměrem r. Pak platí

$$P(\mathbf{X} \in K_r) = \int\int_{K_r} f(x, y)\, dx\, dy = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int\int_{K_r} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma^2} - \frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma^2}}\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma^2} \int_0^{2\pi} \Big(\int_0^r \varrho e^{-\frac{\varrho^2}{2\sigma^2}}\, d\varrho \Big)\, d\varphi = \frac{1}{\sigma^2} \int_0^r \varrho e^{-\frac{\varrho^2}{2\sigma^2}}\, d\varrho$$

a substitucí $\frac{-\varrho^2}{2\sigma^2} = t$ dostaneme

$$P(\mathbf{X} \in K_r) = \int_{\frac{-r^2}{2\sigma^2}}^{0} e^t\, dt = 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}.$$

Odtud dostáváme

(a) pro $r = \sigma$ hodnotu $P(\mathbf{X} \in K_\sigma) = 1 - e^{-0{,}5} \doteq 0{,}393$

(b) pro $r = 2\sigma$ hodnotu $P(\mathbf{X} \in K_{2\sigma}) = 1 - e^{-2} \doteq 0{,}865$

(c) pro $r = 3\sigma$ hodnotu $P(\mathbf{X} \in K_{3\sigma}) = 1 - e^{\frac{-9}{2}} \doteq 0{,}989$.

Poznámka Povšimněme si toho, že nalezené pravděpodobnosti nezávisí na parametrech rozdělení.

3.13 Na bodový cíl střílíme náboji, které mají ničivý účinek do vzdálenosti 10m. Rozptyl střelby má kruhové normální rozdělení se středem shodným s cílem a se směrodatnou odchylkou $\sigma = 20$m.

(a) Jaká je pravděpodobnost zničení cíle?

(b) Kolikrát je třeba vystřelit, aby cíl byl zničen s pravděpodobností alespoň 0,95 ?

(c) Do jaké vzdálenosti by musely mít náboje ničivý účinek, aby se dosáhlo (při stejné přesnosti střelby) zničení cíle s pravděpodobností 0,95 již při jednom výstřelu?

Řešení:

(a) Aby byl cíl zničen, musí náboj dopadnout do kruhu K se středem v cíli a poloměrem 10m. Podle předchozího příkladu platí

$$P(\mathbf{X} \in K_r) = 1 - e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}$$

a odtud pro r=10m a σ=20m dostaneme

$$P(\mathbf{X} \in K) = 1 - e^{-\frac{1}{8}} \doteq 0,1175.$$

(b) Při n výstřelech bude cíl zničen, jestliže alespoň jeden náboj dopadne do kruhu K. Pro příslušnou pravděpodobnost p platí

$$1 - p = (1 - P(\mathbf{X} \in K))^n = e^{-\frac{n}{8}}$$

a pro p=0,95 odtud dostaneme

$$e^{-\frac{n}{8}} = 0,05,$$

odkud

$$n = -8 \ln 0,05 \doteq 23,97.$$

Je tedy třeba alespoň 24 výstřelů.

(c) Pro hledané r musí platit

$$1 - e^{-\frac{r^2}{2\cdot 40^2}} = 0,95$$

neboli

$$e^{-\frac{r^2}{800}} = 0,05$$

odkud

$$r = \sqrt{-800 \ln 0,05} \doteq 48,955\text{m}.$$

3.14 Dvě osoby provádějí náhodnou volbu čísel z intervalu (0,1) tímto způsobem: první osoba vybere číslo x z intervalu (0,1) tak, aby každé číslo mělo "stejnou možnost vybrání" (tj. přesněji, náhodná proměnná X má rovnoměrné rozdělení R(0,1)); po provedení tohoto pokusu druhá osoba stejným způsobem vybere číslo y z intervalu (x,1) (náhodná proměnná Y). Určete hustotu pravděpodobnosti náhodné proměnné Y.

Řešení: Označme $\mathbf{X} = (X, Y)$. Podle zadání úlohy známe marginální hustotu proměnné X, tj.

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (0,1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a dále víme, že podmíněná rozdělení proměnné Y jsou rovnoměrná na (x,1), tj.

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{pro } x < y < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Protože

$$f(y|x) = \frac{f(x,y)}{f_1(x)},$$

platí

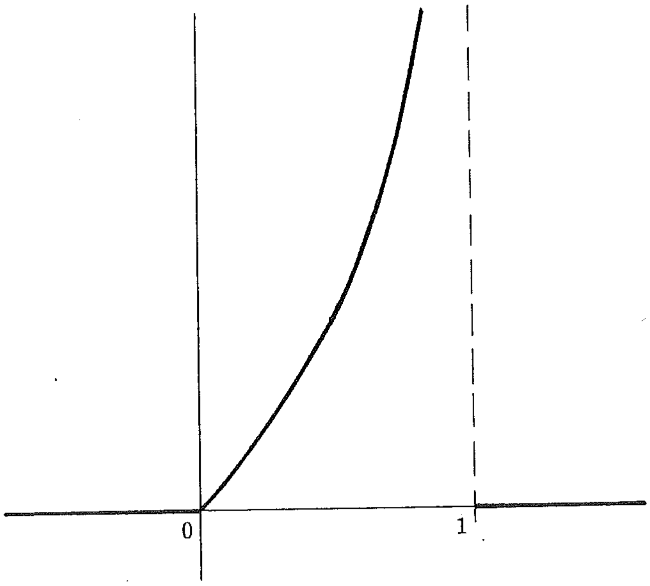
$$f(x,y) = f(y|x) \cdot f_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{pro } 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Nás však zajímá marginální hustota proměnné Y, pro kterou platí

$$f_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx = \begin{cases} \int\limits_0^y \frac{1}{1-x}\,dx & \text{pro } y \in (0,1), \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

odkud

$$f_2(y) = \begin{cases} -\ln(1-y) & \text{pro } y \in (0,1), \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$



Tento příklad je zajímavý tím, že ukazuje spojitou náhodnou proměnnou "ze života", jejíž hustota není omezená. (Podobná náhodná proměnná je též v příkladu 3.19 a ve cvičení 3.7.)

3.15 Dokažte větu 3.15.

Řešení:

(a) Je-li $h(x)$ rostoucí, pak

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = P(X \leq h^{-1}(y)) = F(h^{-1}(y))$$

a tedy

$$g(y) = G'(y) = f(h^{-1}(y))\frac{dh^{-1}(y)}{dy}.$$

(b) Je-li $h(x)$ klesající, pak obdobně

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(h(X) \leq y) = P(X \geq h^{-1}(y)) =$$
$$= 1 - P(X \leq h^{-1}(y)) = 1 - F(h^{-1}(y))$$

a odtud

$$g(y) = G'(y) = -f(h^{-1}(y))\frac{dh^{-1}(y)}{dy}.$$

Pro dokončení důkazu stačí uvážit, že je-li $h(x)$ klesající, pak má funkce $h^{-1}(y)$ zápornou derivaci.

3.16 Náhodná proměnná X má hustotu $f(x)$. Najděte hustotu náhodné proměnné $Y = aX + b$ $(a \neq 0)$.
Řešení: Podle věty 3.15 je

$$g(y) = \frac{1}{|a|} \cdot f\Big(\frac{y-b}{a}\Big).$$

Úlohu lze též řešit přímo - bez použití věty 3.15:

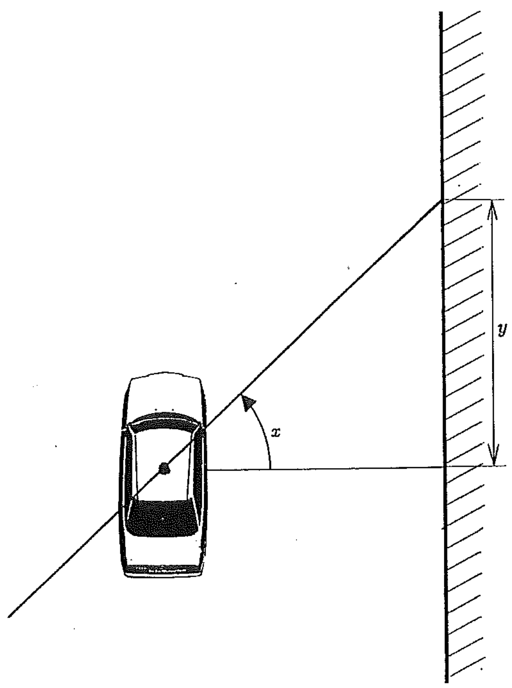
$$G(y) = P(Y \leq y) = P(aX + b \leq y) = P(X \leq \frac{y-b}{a}) = F(\frac{y-b}{a})$$

a odtud

$$g(y) = G'(y) = \frac{1}{a} \cdot f\Big(\frac{y-b}{a}\Big)$$

pro $a > 0$; pro $a < 0$ je postup analogický.

3.17 Policejní auto zastavilo 1m od nekonečně dlouhé zdi a náhodně vypnulo otáčení světelného majáku s oboustranným paprskem. Jaká je průměrná vzdálenost světelného bodu na zdi od kolmice?
Řešení: Označme X úhel, který po vypnutí otáčení svírá paprsek a kolmice na zeď a Y vzdálenost světelného bodu na zdi od kolmice (viz obrázek).



Maják se otáčel rovnoměrně, proto bude mít proměnná X rozdělení $\mathrm{R}(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, neboli

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} & \text{pro } x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), \\ 0 & \text{jinak;} \end{cases}$$

distribuční funkce bude dána předpisem

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \in (-\infty, -\frac{\pi}{2}), \\ \frac{1}{2} + \frac{x}{\pi} & \text{pro } x \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}), \\ 1 & \text{pro } x \in \langle \frac{\pi}{2}; \infty). \end{cases}$$

Najděme distribuční funkci proměnné Y.

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(\mathrm{tg}X \leq y) = P(X \leq \mathrm{arctg}y) = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{arctg}y}{\pi}.$$

Hustota proměnné Y tedy bude rovna

$$g(y) = \frac{d(\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{arctg}y}{\pi})}{dy} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+y^2}$$

(totéž jsme ovšem mohli zjistit rychleji užitím věty 3.15). Z nalezené hustoty je vidět, že ptát se na průměrnou vzdálenost od kolmice nemá smysl, neboť integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{y}{1+y^2}\, dy$$

diverguje.

Poznámka Nalezené rozdělení proměnné Y, tzv. *Cauchyho rozdělení*, je příkladem spojitého rozdělení, které nemá střední hodnotu.

3.18 Náhodná proměnná X má rozdělení R(-1,1), $Y = |X|$. Najděte rozdělení proměnné Y.

Řešení: Postupujeme podle věty 3.16, v našem případě

$$I(y) = \begin{cases} \langle -y, y \rangle & \text{pro } y > 0, \\ \emptyset & \text{jinak.} \end{cases}$$

Máme tedy

$$G(y) = \begin{cases} P(|X| \leq y) & = P(-y \leq X \leq y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y \geq 1 \\ y & \text{pro } y \in (0,1) \end{cases} \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a odtud

$$g(y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y \in (0,1) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Proměnná $Y = |X|$ má tedy rozdělení R(0,1) (což bylo možno očekávat bez počítání).

3.19 Náhodná proměnná X má normované normální rozdělení. Určete rozdělení náhodné proměnné $Y = X^2$.
Řešení: Podle zadání máme

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

a

$$F(x) = \Phi(x).$$

Pro distribuční funkci proměnné Y platí

$$G(y) = P(Y \leq y) = \begin{cases} P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) = \Phi(\sqrt{y}) - \Phi(-\sqrt{y}) & \text{pro } y > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a tedy hledaná hustota je

$$g(y) = G'(y) = \begin{cases} \frac{f(\sqrt{y})+f(-\sqrt{y})}{2\sqrt{y}} & \text{pro } y > 0 \\ 0 & \text{jinak,} \end{cases}$$

odkud po dosazení a úpravě

$$g(y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi y}} \cdot e^{-\frac{y}{2}} & \textit{pro } y > 0 \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Poznámka 1. Povšimněme si, že obdobně jako v příkladu 3.14, hustota $g(y)$ není omezená, neboť $\lim\limits_{y \to 0_+} g(y) = \infty$.

2. Poznamenejme dále, že nalezená hustota je hustotou rozdělení χ^2 o 1 stupni volnosti.

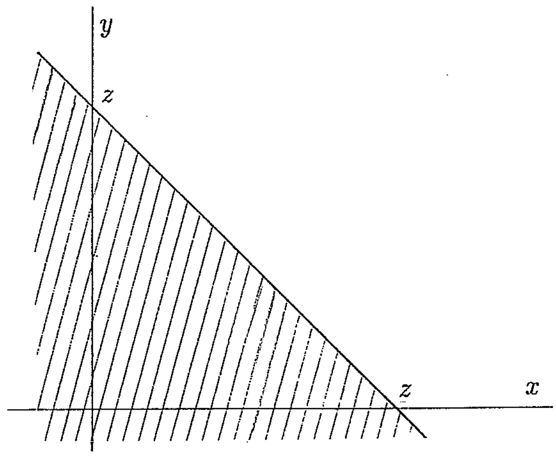
3.20 Nechť $\mathbf{X} = (X, Y)$ je náhodný vektor s hustotou $f(x, y)$. Najděte distribuční funkci náhodné proměnné $Z = X + Y$.
Řešení:

$$G(z) = P(Z \leq z) = P(X + Y \leq z) = \int\int_{M_z} f(x, y)\, dx\, dy,$$

kde

$$M_z = \{(x, y) | x + y \leq z\}$$

je polorovina pod přímkou $x + y = z$ (viz obrázek). Platí tedy



$$G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\, dy \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)\, dx \right) dy.$$

3.21 Dokažte větu 3.18.
Řešení: Podle předchozího příkladu máme

$$G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-y} f(x, y)\, dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{z-x} f(x, y)\, dy \right) dx.$$

Z předpokladu nezávislosti vyplývá, že

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

a tedy dále

$$G(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_1(z-y) f_2(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) F_2(z-x)\, dx.$$

Derivací podle z najdeme hustotu

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) f_2(y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) f_2(z-x)\, dx.$$

3.22 Náhodné proměnné X, Y jsou nezávislé a obě mají rovnoměrné rozdělení R(0,1). Najděte hustotu jejich součtu.
Řešení: Zřejmě

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (0,1), \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

a

$$f_2(y) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y \in (0,1) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Podle věty 3.18 pro hledanou hustotu platí

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(z-y) f_2(y)\, dy.$$

(a) Pro $z < 0$ je vždy $z - y < 0$ nebo $y < 0$, takže $g(z) = 0$.

(b) Pro $z \in \langle 0, 1)$ je integrand nenulový pro $y < z$;
máme tedy $g(z) = \int_0^z 1\, dy = z$.

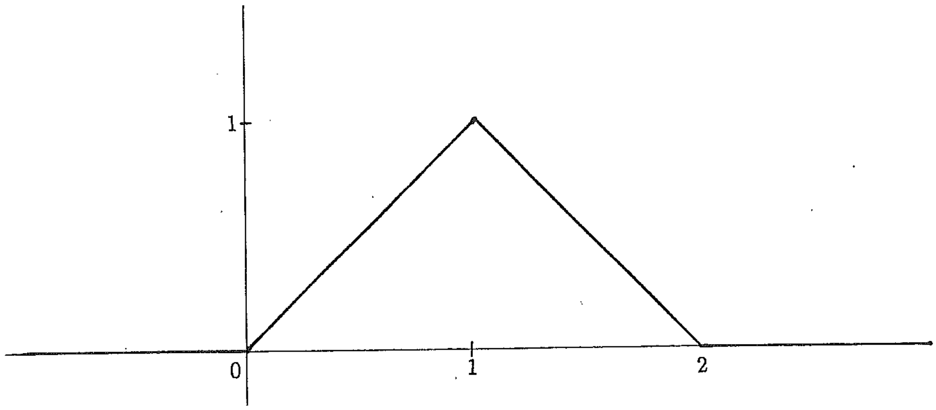
(c) Pro $z \in \langle 1, 2)$ je integrand nenulový pro $y > z - 1$,
takže $g(z) = \int_{z-1}^{1} 1\, dy = 2 - z$.

(d) Pro $z \geq 2$ je vždy $y \geq 1$ nebo $z - y \geq 1$, takže $g(z) = 0$.

Celkem tedy máme

$$g(z) = \begin{cases} z & \text{pro } z \in \langle 0, 1) \\ 2 - z & \text{pro } z \in \langle 1, 2) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

(viz obrázek).



3.23 Najděte hustotu náhodné proměnné, která je součtem tří nezávislých náhodných proměnných s rovnoměrným rozdělením R(0,1).
Řešení: Podle věty 3.18 pro hledanou hustotu $h(z)$ platí

$$h(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z-y)f(y)\,dy,$$

kde

$$g(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \langle 0,1) \\ 2-x & \text{pro } x \in \langle 1,2) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

je hustota z předchozího příkladu a

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } x \in (0,1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

je hustota rozdělení R(0,1).

(a) Pro $z < 0$ je vždy $z - y < 0$ nebo $y < 0$, takže $h(z) = 0$.

(b) Pro $z \in \langle 0,1)$ je integrand nenulový pro $y < z$, takže $h(z) = \int_0^z (z-y)\,dy = \frac{z^2}{2}$.

(c) Pro $z \in \langle 1,2)$ je integrand nenulový pro $y \in (0,1)$; přitom pro $y \in (0, z-1)$ je $g(z-y) = 2-(z-y)$ a pro $y \in \langle z-1, 1)$ je $g(z-y) = z - y$.

Máme tedy

$$h(z) = \int_0^{z-1} (2-(z-y))\,dy + \int_{z-1}^{1} (z-y)\,dy = -z^2 + 3z - \frac{3}{2}.$$

(d) Pro $z \in \langle 2,3)$ je integrand nenulový pro $y > z-2$, takže

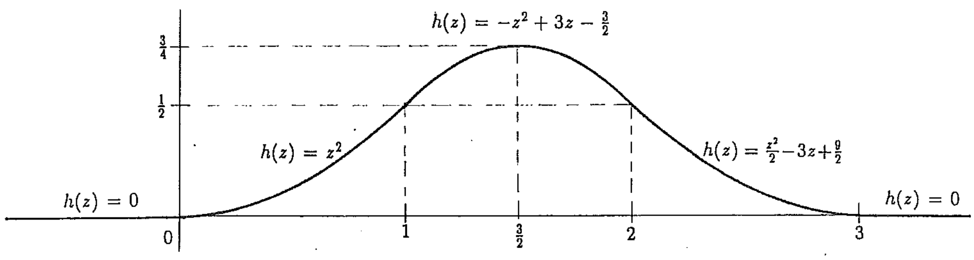
$$h(z) = \int_{z-2}^{1} (2-(z-y))\,dy = \frac{z^2}{2} - 3z + \frac{9}{2}.$$

(e) Pro $z > 3$ je zřejmě $h(z) = 0$.

Celkem tedy máme

$$h(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{2} & \text{pro } z \in \langle 0,1) \\ -z^2 + 3z - \frac{3}{2} & \text{pro } z \in \langle 1,2) \\ \frac{z^2}{2} - 3z + \frac{9}{2} & \text{pro } z \in \langle 2,3) \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Názornější představu o tvaru funkce $h(z)$ dává následující obrázek.



3.24 Chyba měření má rozdělení N(0,16). Kolikrát je nutno měření opakovat, aby se aritmetický průměr naměřených hodnot neodchyloval s pravděpodobností 0,95 od správné hodnoty o více než ± 1?

Řešení: Podle důsledku věty 3.19 má aritmetický průměr naměřených hodnot, tj. náhodná proměnná

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i,$$

rozdělení $N(0, \frac{16}{n})$.

My chceme,aby

$$P(-1 < \bar{X} < 1) = 0,95$$

a odtud po znormování

$$P(-1 < \bar{X} < 1) = P(-\frac{\sqrt{n}}{4} < \hat{\bar{X}} < \frac{\sqrt{n}}{4}) = 2\Phi(\frac{\sqrt{n}}{4}) - 1 = 0,95,$$

odkud

$$\Phi(\frac{\sqrt{n}}{4}) = 0,975.$$

Z tabulek zjistíme

$$\frac{\sqrt{n}}{4} = 1,96$$

a tedy

$$n = 61,5.$$

Je tedy třeba alespoň 62 měření.

3.25 Dokažte větu 3.19.
Řešení: Při důkazu použijeme větu, která říká, že charakteristická funkce součtu nezávislých náhodných proměnných je rovna součinu jejich charakteristických funkcí. Podle této věty máme

$$\begin{aligned}\varphi_Y(t) &= \varphi_{X_1+\ldots+X_n}(t) = \varphi_{X_1}(t)\cdot\ldots\cdot\varphi_{X_n}(t) = \\ &= (e^{i\mu t-\frac{1}{2}\sigma^2t^2})^n = e^{in\mu t-\frac{1}{2}n\sigma^2t^2},\end{aligned}$$

což je charakteristická funkce rozdělení $\mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

3.26 Nechť $X_1, \ldots, X_n$ jsou nezávislé náhodné proměnné s exponenciálním rozdělením $\mathrm{E}(0, \lambda)$. Najděte rozdělení náhodné proměnné

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Řešení: Postupujeme obdobně jako v předchozím příkladu.

$$\varphi_Y(t) = \varphi_{\Sigma X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n}\varphi_{X_i}(t) = \left(\frac{\lambda}{\lambda - it}\right)^n = \frac{1}{\left(1-\frac{it}{\lambda}\right)^n},$$

což je charakteristická funkce rozdělení $\Gamma(m, \delta)$ pro $m = n$ a $\delta = \frac{1}{\lambda}$.

Kontrolní otázky a cvičení

3.1 Známe-li sdružené rozdělení náhodného vektoru $\mathbf{X} = (X, Y)$, můžeme vždy najít obě marginální rozdělení. Za jakých podmínek je možné též obráceně z marginálních rozdělení určit rozdělení sdružené?

3.2 Je možné ze znalosti regresní funkce $y = M(x)$ rozhodnout, zda jsou náhodné proměnné X, Y nezávislé?

3.3 Najděte podmíněné rozdělení a obě regresní funkce pro náhodný vektor z příkladu 3.3.

3.4 Určete $\varrho(X, Y)$ pro náhodný vektor $\mathbf{X}_2 = (X, Y)$ z příkladu 3.5.[-0,0476]

3.5 Náhodný vektor $\mathbf{X}$ má kruhové normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2. Najděte takové $r > 0$, že hodnota vektoru $\mathbf{X}$ padne do kruhu se středem μ a poloměrem r s pravděpodobností 0,95. $[r = \sigma\sqrt{-2\ln 0,05} \doteq 2,448\sigma]$.

3.6 Najděte distribuční funkci náhodné proměnné Y z příkladu 3.14 a ověřte její spojitost.

$$\left[F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x \leq 0 \\ x + (1-x)\ln(1-x) & \text{pro } x \in (0,1) \\ 1 & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}\right]$$

3.7 Najděte hustotu náhodné proměnné Y z příkladu 3.9.

$$\left[f(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{y}} & \text{pro } y \in (0,1) \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}\right]$$

Kapitola 4

Limitní věty

Přehled definic a vět

4.1 Zákon velkých čísel

Věta 4.1 (Čebyševova) . *Nechť* $\{X_n\}$, $n = 1, 2, \ldots$, *je posloupnost náhodných proměnných takových, že*

$$D(X_i) \leq K$$

a

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0$$

pro každé $i, j = 1, 2, \ldots$, $i \neq j$, *kde* $K < \infty$. *Pak pro každé* $\varepsilon > 0$ *platí*

$$\lim_{n\to\infty} P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i)\right| \geq \varepsilon\right] = 0.$$

Poznámka 1. Čebyševova věta je jednou z formulací *zákona velkých čísel.*

2. Jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ platí

$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n - c| \geq \varepsilon) = 0,$$

pak říkáme, že posloupnost náhodných proměnných $\{X_n\}$ *konverguje podle pravděpodobnosti* k c.

3. Jestliže speciálně všechny X_i mají stejné rozdělení se střední hodnotou μ, pak ovšem $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu$; věta 4.1 pak říká, že aritmetické průměry $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ konvergují podle pravděpodobnosti k μ. Praktická aplikace: při nezávislých opakováních téhož měření konverguje aritmetický průměr naměřených hodnot podle pravděpodobnosti ke střední hodnotě (tj. ke skutečné hodnotě měřené veličiny, pokud není v měření systematická chyba).

4. Uvažujme situaci, kdy provádíme nezávislá opakování téhož pokusu a sledujeme výskyt daného jevu A (viz 1.kapitola, statistická definice pravěpodobnosti). Nechť pravděpodobnost jevu A je $P(A) = p$. Označme X_i náhodnou proměnnou definovanou takto:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jestliže jev } A \text{ nastal v i-tém opakování pokusu,} \\ 0, & \text{jestliže jev } A \text{ nenastal v i-tém opakování pokusu,} \end{cases}$$

i=1,2,.... Pak všechny X_i mají alternativní rozdělení A(p) a tedy, jak víme, $E(X_i) = p$. Uvědomíme-li si však, že výraz $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ znamená poměr počtu opakování, při nichž nastal jev A, ku počtu všech opakování našeho pokusu, tj. relativní četnost výskytu jevu A, pak vidíme , že věta 4.1 říká, že relativní četnosti výskytu jevu A konvergují podle pravděpodobnosti k hodnotě $p = P(A)$ (viz též poznámka na konci odstavce 1.1).

4.2 Centrální limitní věta

Definice *Buďte X_n, X náhodné proměnné, F_n, F jejich distribuční funkce, $n = 1, 2, \ldots$. Řekneme, že posloupnost $\{X_n\}$* konverguje v distribuci *k X, jestliže*

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

ve všech bodech spojitosti funkce $F(x)$.

Věta 4.2 (Ljapunovova) *Nechť posloupnost* $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ *vzájemně nezávislých náhodných proměnných splňuje podmínku*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_3(X_i)}}{\sqrt[2]{\sum\limits_{i=1}^{n} D(X_i)}} = 0.$$

Pak posloupnost $\{Y_n\}$, *kde*

$$Y_n = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} X_i - \sum\limits_{i=1}^{n} E(X_i)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} D(X_i)}},$$

konverguje v distribuci k normovanému normálnímu rozdělení N(0,1).

Poznámka 1. Věta 4.2 je jednou z formulací tzv. *centrální limitní věty.*

2. Pro náhodnou proměnnou $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ platí

$$E(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$

a díky předpokladu nezávislosti také

$$D(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i),$$

takže náhodná proměnná Y_n z věty 4.2 vznikla normováním součtu $\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ a tedy triviálně $E(Y_n) = 0$ a $D(Y_n) = 1$, $n = 1, 2, \ldots$. Podstata věty tedy není v tvrzení o parametrech 0,1, ale v tvrzení o typu rozdělení (normální).

3. Mají-li speciálně všechny X_i stejné rozdělení s parametry $\mu, D = \sigma^2$ *a* μ_3, pak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{\sum\limits_{i=1}^{n} \mu_3(X_i)}}{\sqrt[2]{\sum\limits_{i=1}^{n} D(X_i)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n \cdot \mu_3}}{\sqrt[2]{nD}} = \frac{\sqrt[3]{\mu_3}}{\sigma} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[6]{n}} = 0$$

a předpoklad věty 4.2 (tzv. *Ljapunovova podmínka*) je splněn automaticky. Věta 4.2 pak tvrdí, že v distribuci konvergují k N(0,1) náhodné proměnné

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{nD}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu\Big).$$

Tento důležitý speciální případ Ljapunovovy věty je znám jako *věta Lindebergova-Lévyho.*

4. Odtud vyplývá, že pro velké n lze rozdělení proměnné $\sum_{i=1}^{n} X_i$ aproximovat $\mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$ a rozdělení proměnné $\sum_{i=1}^{n} \frac{X_i}{n}$ lze aproximovat rozdělením $\mathrm{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

5. Zhruba řečeno: Je-li hodnota náhodné proměnné součtem velkého množství nezávislých vlivů, pak má tato proměnná přibližně normální rozdělení.

6. Uvažujme situaci, kdy provádíme n nezávislých opakování téhož pokusu a sledujeme výskyt daného jevu A s pravděpodobností $P(A) = p$. Označme X_i náhodnou proměnnou definovanou takto:

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jestliže jev } A \text{ nastal v } i\text{-tém opakování pokusu,} \\ 0, & \text{jestliže jev } A \text{ nenastal v } i\text{-tém opakování pokusu,} \end{cases}$$

$i = 1, 2, \ldots, n$. Zkoumejme náhodnou proměnnou $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Proměnná X má význam počtu výskytů jevu A při n opakováních našeho pokusu, a tedy má rozdělení $\mathrm{Bi}(n,p)$; protože však X je součtem nezávislých náhodných proměnných X_i, které mají všechny stejné rozdělení (a sice alternativní $\mathrm{A}(p)$ se střední hodnotou $\mu = E(X_i) = p$ a rozptylem $\sigma^2 = D(X_i) = p(1-p)$), má podle Lindebergovy-Lévyho věty proměnná X přibližně rozdělení $\mathrm{N}(np, np(1-p))$. Jinými slovy: pro velké n lze binomické rozdělení aproximovat normálním rozdělením se stejnou střední hodnotou a rozptylem. Aproximace je dobrá při velkém rozptylu; v praxi se aproximace doporučuje, jestliže pro rozptyl aproximovaného binomického rozdělení platí

$$D(X) = np(1-p) > 9.$$

V praxi se doporučuje pro zlepšení aproximace pravděpodobnost $P(a \leq X \leq b)$ (kde a, b jsou celá čísla a X má binomické rozdělení) přibližně nahradit pravděpodobností $P(a - \frac{1}{2} \leq Y \leq b + \frac{1}{2})$ (kde Y má aproximující normální rozdělení) – tzv. *oprava na celočíselnost.*

Příklady

4.1 Náhodné proměnné X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ mají rovnoměrné rozdělení R(0,1) a jsou nezávislé. Pro $n = 1, 2, 3$ najděte a nakreslete hustotu pravděpodobnosti normovaných součtů

$$Y_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{i=1}^{n} E(X_i)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n} D(X_i)}}.$$

Řešení:

(a) $n = 1$. V tomto triviálním případě je $\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1$. Protože zřejmě $E(X_1) = \frac{1}{2}$ a $D(X_1) = \frac{1}{12}$, tj. $\sigma(X_1) = \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, je

$$Y_1 = \frac{X_1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{3}}} = 2\sqrt{3}X_1 - \sqrt{3}.$$

Pro hustotu $\hat{f}_1(y)$ proměnné Y_1 podle výsledku příkladu 3.16 platí

$$\hat{f}_1(y) = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot f\Big(\frac{x + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\Big),$$

kde $f(x)$ je hustota R(0,1); tj.

$$\hat{f}_1(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{3}} & \text{pro } y \in (-\sqrt{3}, \sqrt{3}), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(b) $n = 2$. Označme $X = \sum_{i=1}^{2} X_i$. Podle výsledku příkladu 3.22 má proměnná X hustotu

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{pro } x \in \langle 0, 1), \\ 2 - x & \text{pro } x \in \langle 1, 2), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Zřejmě je $E(X) = 1$ a dále platí

$$E(X^2) = \int_0^{\infty} x^2 f(x)\, dx = \frac{7}{6},$$

odkud

$$D(X) = E(X^2) - E^2(X) = \frac{1}{6}$$

a tedy

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{6}}.$$

Máme tedy (normování):

$$Y_2 = \frac{X-1}{\sqrt{\frac{1}{6}}} = \sqrt{6}X - \sqrt{6}.$$

Pro hustotu $\hat{f}_2(y)$ proměnné Y_2 tedy podle výsledku příkladu 3.16 platí

$$\hat{f}_2(y) = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot f\Big(\frac{x+\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\Big),$$

odkud dostaneme

$$\hat{f}_2(y) = \begin{cases} \frac{1}{6}(y+\sqrt{6}) & \text{pro } y \in (-\sqrt{6}, 0), \\ \frac{1}{6}(-y+\sqrt{6}) & \text{pro } y \in (0, \sqrt{6}), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

(c) $n = 3$. Označíme $X = \sum_{i=1}^{3} X_i$ a postupujeme obdobně s použitím výsledků příkladu 3.23. Máme tedy

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} & \text{pro } x \in \langle 0, 1), \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2} & \text{pro } x \in \langle 1, 2), \\ \frac{x^2}{2} - 3x + \frac{9}{2} & \text{pro } x \in \langle 2, 3), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Dále platí (doporučujeme čtenáři detailně propočítat!)

$$E(X) = \tfrac{3}{2}, \quad E(X^2) = \tfrac{5}{2}, \quad D(X) = \tfrac{1}{4}, \quad \sigma(X) = \tfrac{1}{2}$$

a tedy (normujeme)

$$Y_3 = \frac{X - \frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 2X - 3.$$

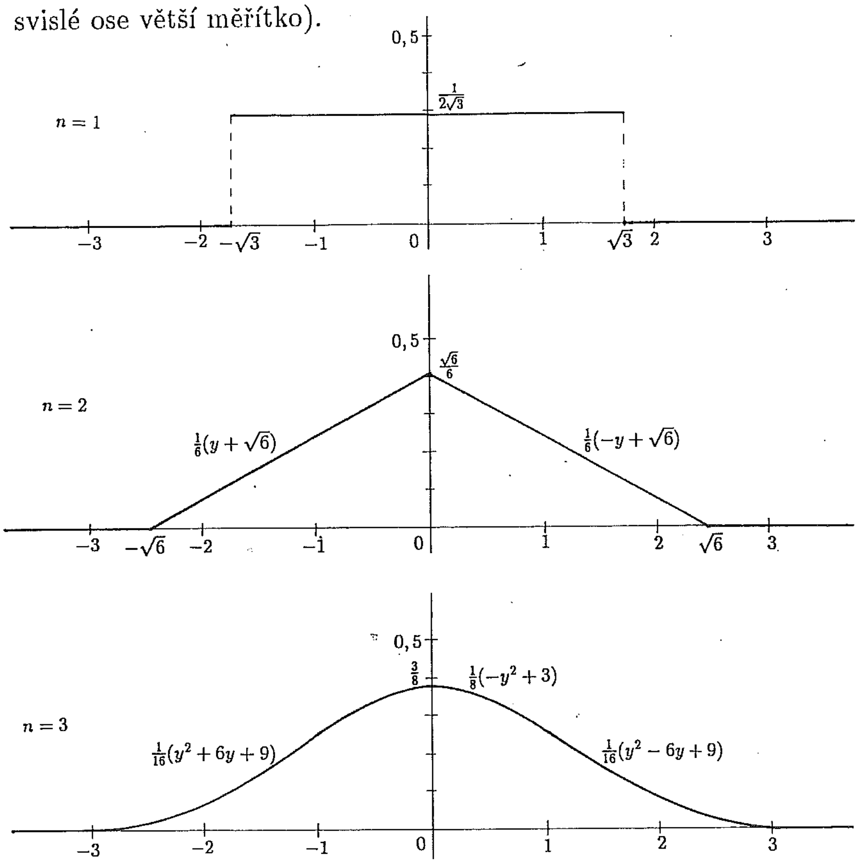
Pro hustotu $\hat{f}_3(y)$ tedy platí

$$\hat{f}_3(y) = \frac{1}{2} \cdot f\Big(\frac{x+3}{2}\Big),$$

odkud po dosazení (doporučujeme propočítat)

$$\hat{f}_3(y) = \begin{cases} \frac{1}{16}(y^2 + 6y + 9) & \text{pro } y \in \langle -3, -1), \\ \frac{1}{8}(-y^2 + 3) & \text{pro } y \in \langle -1, 1), \\ \frac{1}{16}(y^2 - 6y + 9) & \text{pro } y \in \langle 1, 3), \\ 0 & \text{jinak.} \end{cases}$$

Závěrem tohoto příkladu zdůrazněme, že náhodné proměnné Y_n, jejichž rozdělení jsme pro $n = 1, 2, 3$ našli, podle centrální limitní věty konvergují v distribuci k normovanému normálnímu rozdělení. Tato skutečnost názorně vynikne na následujícím obrázku, na němž jsou nakresleny hustoty $\hat{f}_n(y)$ pro $n = 1, 2, 3$ (pro větší názornost je na svislé ose větší měřítko).



4.2 S jakou pravděpodobností padne při

(a) 10 hodech kostkou šestka nejvýše dvakrát,

(b) 100 hodech kostkou šestka nejvýše dvacetkrát?

Řešení:

(a) Náhodná proměnná
X...počet šestek při 10 hodech kostkou má rozdělení $\mathrm{Bi}(10, \frac{1}{6})$ a tedy

$$P(X \leq 2) = P(0) + P(1) + P(2) = \\ = \left(\frac{5}{6}\right)^{10} + 10 \cdot \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{9} + 45\left(\frac{1}{6}\right)^{2} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{8} \doteq 0,7752.$$

(b) Náhodná proměnná
X...počet šestek při 100 hodech kostkou má rozdělení $\mathrm{Bi}(100, \frac{1}{6})$.
Tentokrát sice obdobně

$$P(X \leq 20) = \sum_{i=1}^{20} \binom{100}{x} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{x} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{100-x},$$

ale početně jednodušší bude použití aproximace binomického rozdělení normálním. Máme

$$E(X) = np = \frac{50}{3}$$

a

$$D(X) = np(1-p) = \frac{125}{9} \doteq 13,9.$$

Je $D(X) > 9$, takže podmínky pro aproximaci jsou dobré. Proto pokračujeme

$$P\ (x \leq 20) \approx P(-0,5 \leq Y \leq 20,5) = \\ = P\left(\frac{-0,5 - \frac{50}{3}}{\sqrt{\frac{125}{9}}} \leq \hat{Y} \leq \frac{20,5 - \frac{50}{3}}{\sqrt{\frac{125}{9}}}\right) \doteq P(-4,6063 \leq \hat{Y} \leq 1,0286) = \\ = \Phi(1,0286) + \Phi(4,6063) - 1 \doteq \Phi(1,0286)$$

a z tabulek zjistíme (s interpolací)

$$P(X \leq 20) \approx 0,84817.$$

Poznamenejme, že pomocí binomického rozdělení bychom podstatně pracněji dospěli k výsledku 0,84811 - shoda výsledků je tedy velice dobrá.

4.3 V osudí je 16 bílých a 14 černých koulí. Určete pravděpodobnost toho, že při 150 tazích jedné koule z osudí (s vracením) byla tažena bílá koule

(a) nejvýše 85-krát,

(b) právě 77-krát.

Řešení: Náhodná proměnná
X...počet tahů bílé koule
má zřejmě rozdělení Bi$(150, \frac{16}{30})$, takže odpověď na otázku a) je zdánlivě snadná:

$$P(X \leq 85) = \sum_{i=0}^{85} \binom{150}{i} \left(\frac{16}{30}\right)^i \left(\frac{14}{30}\right)^{150-i};$$

vyčíslení součtu vpravo je však numericky dosti obtížné. Protože

$$D(X) = np(1-p) = \frac{112}{3} > 9,$$

můžeme použít aproximaci normálním rozdělením, které bude mít parametry $\mu = np = 80$ a $\sigma^2 = \frac{112}{3}$.
Máme tedy

$$P(X \leq 85) = P(0 \leq X \leq 85) \approx P(-0,5 \leq Y \leq 85,5),$$

kde proměnná Y má rozdělení N$(80, \frac{112}{3})$, a tedy dále

$$\begin{aligned} P(X \leq 85) &\approx P\left(\frac{-0,5-80}{\sqrt{\frac{112}{3}}} \leq \hat{Y} \leq \frac{85,5-80}{\sqrt{\frac{112}{3}}}\right) \doteq \\ &\doteq P(-13,175 \leq \hat{Y} \leq 0,900) = \\ &= \Phi(13,175) + \Phi(0,900) - 1 \doteq \\ &\doteq \Phi(0,900) \end{aligned}$$

a z tabulek dostaneme

$$P(X \leq 85) \doteq 0,8159.$$

(b)

$$P(X=77)\approx P(76,5\le Y\le 77,5)=$$
$$=P(-0,573\le \hat{Y}\le -0,409)=\Phi(0,573)-\Phi(0,409)$$

a z tabulek

$$P(X=77)\doteq 0,05795.$$

Poznámka Pomocí binomického rozdělení bychom podstatně pracněji získali výsledky $P(X\le 85)=0,815861$ a $P(X=77)=0,05768$.

4.4 Pracovník cestuje do práce a z práce tramvají, která má interval 5 minut, přičemž jeho příchod na zastávku je vzhledem k odjezdu tramvaje "zcela náhodný". S jakou pravděpodobností bude celková doba čekání za 20 pracovních dnů nejvýše 120 minut?

Řešení: Náhodná proměnná
X_i...doba čekání na tramvaj při i-té cestě
má rovnoměrné rozdělení R(0,5), $i=1,\dots,40$.
Je tedy

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5} & \text{pro } x\in(0,5),\\ 0 & \text{jinak,}\end{cases}$$

$$\mu=E(X_i)=\frac{5}{2},$$
$$\sigma^2=D(X_i)=\frac{25}{12}.$$

Náhodné proměnné X_i jsou nezávislé a tedy podle věty Lindebergovy-Lévyho má náhodná proměnná $X=\sum_{i=1}^{40}X_i$ přibližně normální rozdělení se střední hodnotou

$$n\mu=40\cdot\frac{5}{2}=100$$

a rozptylem

$$n\sigma^2=40\cdot\frac{25}{12}=\frac{250}{3}.$$

Tedy

$$P(X\le 120)=P\Big(\hat{X}\le\frac{120-100}{\sqrt{\frac{250}{3}}}\Big)\doteq\Phi(2,19)=0,9857.$$

4.5 Životnost součástky má rozdělení se střední hodnotou $\mu = 30$ hodin a směrodatnou odchylkou $\sigma = 5$ hodin. Pro zvýšení spolehlivosti zařízení je v něm instalován blok n identických součástek zapojených takovým způsobem, že při poruše jedné součástky je okamžitě uvedena v činnost další součástka (tzv. *n-násobné zálohování*).

(a) S jakou pravděpodobností bude při šestnáctinásobném zálohování blok fungovat bez poruchy alespoň 450 hodin?

(b) Kolikanásobné zálohování je třeba užít, aby blok fungoval bez poruchy alespoň 1000 hodin s pravděpodobností alespoň 0,99?

Řešení: Označíme-li X_i životnosti jednotlivých součástek a Y životnost celého bloku, pak zřejmě $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$ a podle věty Lindebergovy-Lévyho bude Y mít přibližně rozdělení $\mathrm{N}(n\mu, n\sigma^2)$.

(a) Y má přibližně rozdělení N(480,400) a tedy

$$P(Y \geq 450) = P(\hat{Y} \geq -\frac{3}{2}) = P(\hat{Y} \leq 1,5) = \Phi(1,5) \doteq 0,933.$$

(b) Při n-násobném zálohování má Y přibližně rozdělení $\mathrm{N}(30n, 25n)$ a z podmínky

$$P(Y \geq 1000) = 0,99$$

dostáváme

$$P\left(\hat{Y} \geq \frac{1000 - 30n}{5\sqrt{n}}\right) = 0,99,$$

odkud

$$\Phi\left(\frac{1000 - 30n}{5\sqrt{n}}\right) = 0,01$$

a s užitím tabulek

$$\frac{1000 - 30n}{5\sqrt{n}} = -2,326$$

neboli

$$30n - 5 \cdot 2,326\sqrt{n} - 1000 = 0.$$

Řešením rovnice dostaneme

$$\sqrt{n} \doteq 5,9706,$$

odkud

$$n \doteq 35,65$$

a tedy musí být $n = 36$.

Kontrolní otázky a cvičení

4.1 Odůvodněte, proč v praktických situacích v klasických pravděpodobnostních prostorech dává statistická definice pravděpodobnosti tentýž výsledek jako klasická definice.

4.2 Které náhodné proměnné se přibližně řídí normálním rozdělením a proč?

4.3 Je možno aproximovat normálním rozdělením též rozdělení Poissonovo a hypergeometrické?

4.4 Co lze říci o limitním chování rozdělení $\Gamma(m, \delta)$ pro $m \to \infty$? (Využijte výsledek příkladu 3.26).

4.5 Pravděpodobnost výhry v ruletě při sázce na barvu je $\frac{18}{37}$. Určete pravděpodobnost toho, že po 400 sázkách na černé

(a) budeme aktivní

(b) vyhrajeme nejvýše 180-krát

(c) "budeme na svých", tj. vyhrajeme právě 200-krát.

Tabulky

Tabulka 1 *Pravděpodobnostní funkce binomického rozdělení*

n	x	p: 0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
2	0	0,980 1	0,902 5	0,810 0	0,722 5	0,640 0	0,562 5	0,490 0	0,444 4	0,422 5	0,360 0	0,302 5	0,260 1	0,250 0
	1	0,019 8	0,095 0	0,180 0	0,255 0	0,320 0	0,375 0	0,420 0	0,444 4	0,455 0	0,480 0	0,495 0	0,499 8	0,500 0
	2	0,000 1	0,002 5	0,010 0	0,022 5	0,040 0	0,062 5	0,090 0	0,111 1	0,122 5	0,160 0	0,202 5	0,240 1	0,250 0
3	0	0,970 3	0,857 4	0,729 0	0,614 1	0,512 0	0,421 9	0,343 0	0,296 3	0,274 6	0,216 0	0,166 4	0,132 7	0,125 0
	1	0,029 4	0,135 4	0,243 0	0,325 1	0,384 0	0,421 9	0,441 0	0,444 4	0,443 6	0,432 0	0,408 4	0,382 3	0,375 0
	2	0,000 3	0,007 1	0,027 0	0,057 4	0,096 0	0,140 6	0,185 0	0,222 2	0,238 9	0,288 0	0,334 1	0,367 4	0,375 0
	3	0,000 0	0,000 1	0,001 0	0,003 4	0,008 0	0,015 6	0,027 0	0,037 0	0,042 9	0,064 0	0,091 1	0,117 6	0,125 0
4	0	0,960 6	0,814 5	0,656 1	0,522 0	0,409 6	0,316 4	0,240 1	0,197 5	0,178 5	0,129 6	0,091 5	0,067 7	0,062 5
	1	0,038 8	0,171 5	0,291 6	0,368 5	0,409 6	0,421 9	0,411 6	0,395 1	0,384 5	0,345 6	0,299 5	0,260 0	0,250 0
	2	0,000 6	0,013 5	0,048 6	0,097 5	0,153 6	0,210 9	0,264 6	0,296 3	0,310 5	0,345 6	0,367 5	0,374 7	0,375 0
	3	0,000 0	0,000 5	0,003 6	0,011 5	0,025 6	0,046 9	0,075 6	0,098 8	0,112 5	0,153 6	0,200 5	0,240 0	0,250 0
	4	0,000 0	0,000 0	0,000 1	0,000 5	0,001 6	0,003 9	0,008 1	0,012 3	0,015 0	0,025 6	0,041 0	0,057 6	0,062 5
5	0	0,951 0	0,773 8	0,590 5	0,443 7	0,327 7	0,237 3	0,168 1	0,131 7	0,116 0	0,077 8	0,050 3	0,034 5	0,031 2
	1	0,048 0	0,203 6	0,328 0	0,391 5	0,409 6	0,395 5	0,360 2	0,329 2	0,312 4	0,259 2	0,205 9	0,165 7	0,156 2
	2	0,001 0	0,021 4	0,072 9	0,138 2	0,204 8	0,263 7	0,308 7	0,329 2	0,336 4	0,345 6	0,336 9	0,318 5	0,312 5
	3	0,000 0	0,001 1	0,008 1	0,024 4	0,051 2	0,087 9	0,132 3	0,164 6	0,181 1	0,230 4	0,275 7	0,306 0	0,312 5
	4	0,000 0	0,000 0	0,000 4	0,002 2	0,006 4	0,014 6	0,028 4	0,041 2	0,048 8	0,076 8	0,112 8	0,147 0	0,156 2
	5	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 1	0,000 3	0,001 0	0,002 4	0,004 1	0,005 3	0,010 2	0,018 5	0,028 3	0,031 2
6	0	0,941 5	0,735 1	0,531 4	0,377 1	0,262 1	0,178 0	0,117 6	0,087 8	0,075 4	0,046 7	0,027 7	0,017 6	0,015 6
	1	0,057 1	0,232 1	0,354 3	0,399 3	0,393 2	0,356 0	0,302 5	0,263 4	0,243 7	0,186 6	0,135 9	0,101 4	0,093 8
	2	0,001 4	0,030 5	0,098 4	0,176 2	0,245 8	0,296 6	0,324 1	0,329 2	0,328 0	0,311 0	0,278 0	0,243 7	0,234 4
	3	0,000 0	0,002 1	0,014 6	0,042 5	0,081 9	0,131 8	0,185 2	0,219 5	0,235 5	0,276 5	0 303 2	0,312 1	0,312 5
	4	0,000 0	0,000 1	0,001 2	0,005 5	0,015 4	0,033 0	0,059 5	0,082 3	0,095 1	0,138 2	0,186 1	0,224 9	0,234 4
	5	0,000 0	0,000 0	0,000 1	0,000 4	0,001 5	0,004 4	0,010 2	0,016 5	0,020 5	0,036 9	0,060 9	0,086 4	0,093 8
	6	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 1	0,000 2	0,000 7	0,001 4	0,001 8	0,004 1	0,008 3	0,013 9	0,015 6

n	x	p = 0,01	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,49	0,50
7	0	0,932 1	0,698 3	0,478 3	0,320 6	0,209 7	0,133 5	0,082 4	0,058 5	0,049 0	0,028 0	0,015 2	0,009 0	0,007 8
	1	0,065 9	0,257 3	0,372 0	0,396 0	0,367 0	0,311 5	0,247 1	0,204 8	0,184 8	0,130 6	0,087 2	0,060 3	0,054 7
	2	0,002 0	0,040 6	0,124 0	0,209 7	0,275 3	0,311 5	0,317 1	0,307 3	0,298 5	0,261 3	0,214 0	0,174 0	0,164 1
	3	0,000 0	0,003 6	0,023 0	0,061 7	0,114 7	0,173 0	0,226 9	0,256 1	0,267 9	0,290 3	0,291 8	0,278 6	0,273 4
	4	0,000 0	0,000 2	0,002 6	0,010 9	0,028 7	0,057 7	0,097 2	0,128 0	0,144 2	0,193 5	0,238 8	0,267 6	0,273 4
	5	0,000 0	0,000 0	0,000 2	0,001 2	0,004 3	0,011 5	0,025 0	0,038 4	0,046 6	0,077 4	0,117 2	0,154 3	0,164 1
	6	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 1	0,000 4	0,001 3	0,003 6	0,006 4	0,008 4	0,017 2	0,032 0	0,049 4	0,054 7
	7	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 1	0,000 2	0,000 5	0,000 6	0,001 6	0,003 7	0,006 8	0,007 8
8	0	0,922 7	0,663 4	0,430 5	0,272 5	0,167 8	0,100 1	0,057 6	0,039 0	0,031 9	0,016 8	0,008 4	0,004 6	0,003 9
	1	0,074 6	0,279 3	0,382 6	0,384 7	0,335 5	0,267 0	0,197 7	0,156 1	0,137 3	0,089 6	0,054 8	0,035 2	0,031 2
	2	0,002 6	0,051 5	0,148 8	0,237 6	0,293 6	0,311 5	0,296 5	0,273 1	0,258 7	0,209 0	0,156 9	0,118 3	0,109 4
	3	0,000 1	0,005 4	0,033 1	0,083 9	0,146 8	0,207 6	0,254 1	0,273 1	0,278 6	0,278 7	0,256 8	0,227 3	0,218 8
	4	0,000 0	0,000 4	0,004 6	0,018 5	0,045 9	0,086 5	0,136 1	0,170 7	0,187 5	0,232 2	0,262 7	0,273 0	0,273 4
	5	0,000 0	0,000 0	0,000 4	0,002 6	0,009 2	0,023 1	0,046 7	0,068 3	0,080 8	0,123 9	0,171 9	0,209 8	0,218 8
	6	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 2	0,001 1	0,003 8	0,010 0	0,017 1	0,021 7	0,041 3	0,070 3	0,100 8	0,109 4
	7	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 1	0,000 4	0,001 2	0,002 4	0,003 3	0,007 9	0,016 4	0,027 7	0,031 2
	8	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 1	0,000 2	0,000 2	0,000 7	0,001 7	0,003 3	0,003 9
9	0	0,913 5	0,630 2	0,387 4	0,231 6	0,134 2	0,075 1	0,040 4	0,026 0	0,020 7	0,010 1	0,004 6	0,002 3	0,002 0
	1	0,083 0	0,298 5	0,387 4	0,367 9	0,302 0	0,225 3	0,155 6	0,117 1	0,100 4	0,060 5	0,033 9	0,020 2	0,017 6
	2	0,003 4	0,062 9	0,172 2	0,259 7	0,302 0	0,300 3	0,266 8	0,234 1	0,216 2	0,161 2	0,111 0	0,077 6	0,070 3
	3	0,000 1	0,007 7	0,044 6	0,106 9	0,176 2	0,233 6	0,266 8	0,273 1	0,271 6	0,250 8	0,211 9	0,173 9	0,164 1
	4	0,000 0	0,000 6	0,007 4	0,028 3	0,066 1	0,116 8	0,171 5	0,204 8	0,219 4	0,250 8	0,260 0	0,250 6	0,246 1
	5	0,000 0	0,000 0	0,000 8	0,005 0	0,016 5	0,038 9	0,073 5	0,102 4	0,118 1	0,167 2	0,212 8	0,240 8	0,246 1
	6	0,000 0	0,000 0	0,000 1	0,000 6	0,002 8	0,008 7	0,021 0	0,034 1	0,042 4	0,074 3	0,116 0	0,154 2	0,164 1
	7	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 3	0,001 2	0,003 9	0,007 3	0,009 8	0,021 2	0,040 7	0,063 5	0,070 3
	8	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 1	0,000 4	0,000 9	0,001 3	0,003 5	0,008 3	0,015 3	0,017 6
	9	0,000 0	0,000 0	0,0000	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 1	0,000 1	0,000 3	0,000 8	0,001 6	0,002 0
10	0	0,904 4	0,598 7	0,348 7	0,196 9	0,107 4	0,056 3	0,028 2	0,017 3	0,013 5	0,006 0	0,002 5	0,001 2	0,001 0
	1	0,091 4	0,315 1	0,387 4	0,347 4	0,268 4	0,187 7	0,121 1	0,086 7	0,072 5	0,040 3	0,020 7	0,011 4	0,009 8
	2	0,004 2	0,074 6	0,193 7	0,275 9	0,302 0	0,281 6	0,233 5	0,195 1	0,175 7	0,120 9	0,076 3	0,049 5	0,043 9
	3	0,000 1	0,010 5	0,057 4	0,129 8	0,201 3	0,250 3	0,266 8	0,260 1	0,252 2	0,215 0	0,166 5	0,126 7	0,117 2
	4	0,000 0	0,001 0	0,011 2	0,040 1	0,088 1	0,146 0	0,200 1	0,227 6	0,237 7	0,250 8	0,238 4	0,213 0	0,205 1
	5	0,000 0	0,000 1	0,001 5	0,008 5	0,026 4	0,058 4	0,102 9	0,136 6	0,153 6	0,200 7	0,234 0	0,245 6	0,246 1
	6	0,000 0	0,000 0	0,000 1	0,001 2	0,005 5	0,016 2	0,036 8	0,056 9	0,068 9	0,111 5	0,159 6	0,196 6	0,205 1
	7	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 1	0,000 8	0,003 1	0,009 0	0,016 3	0,021 2	0,042 5	0,074 6	0,108 0	0,117 2
	8	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 1	0,000 4	0,001 4	0,003 0	0,004 3	0,010 6	0,022 9	0,038 9	0,043 9
	9	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 1	0,000 3	0,000 5	0,001 6	0,004 2	0,008 3	0,009 8
	10	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 0	0,000 1	0,000 3	0,000 8	0,001 0

Tabulka 2 *Pravděpodobnostní funkce Poissonova rozdělení*

x	λ								
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,904 837	0,818 731	0,740 818	0,670 320	0,606 531	0,548 812	0,496 585	0,449 329	0,406 570
1	0,090 484	0,163 746	0,222 245	0,268 128	0,303 265	0,329 287	0,347 610	0,359 463	0,365 913
2	0,004 524	0,016 375	0,033 337	0,053 626	0,075 816	0,098 786	0,121 663	0,143 785	0,164 661
3	0,000 151	0,001 092	0,003 334	0,007 150	0,012 636	0,019 757	0,028 388	0,038 343	0,049 398
4	0,000 004	0,000 055	0,000 250	0,000 715	0,001 580	0,002 964	0,004 968	0,007 669	0,011 115
5		0,000 002	0,000 015	0,000 057	0,000 158	0,000 356	0,000 696	0 001 227	0,002 001
6			0,000 001	0,000 004	0,000 013	0,000 036	0,000 081	0,000 164	0,000 300
7					0,000 001	0,000 003	0,000 008	0,000 019	0,000 039
8							0,000 001	0,000 002	0,000 004

x	λ = 1,0	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0,367 879	0,135 335	0,049 787	0,018 316	0,006 738	0,002 479	0,000 912	0,000 335	0,000 123
1	0,367 879	0,270 671	0,149 361	0,073 263	0,033 690	0,014 873	0,006 383	0,002 684	0,001 111
2	0,183 940	0,270 671	0,224 042	0,146 525	0,084 224	0,044 618	0,022 341	0,010 735	0,004 998
3	0,061 313	0,180 447	0,224 042	0,195 367	0,140 374	0,089 235	0,052 129	0,028 626	0,014 994
4	0,015 328	0,090 224	0,168 031	0,195 367	0,175 467	0,133 853	0,091 226	0,057 252	0,033 737
5	0,003 066	0,036 089	0,100 819	0,156 293	0,175 467	0,160 623	0,127 717	0,091 604	0,060 727
6	0,000 511	0,012 030	0,050 409	0,104 196	0,146 223	0,160 623	0,149 003	0,122 138	0,091 090
7	0,000 073	0,003 437	0,021 604	0,059 540	0,104 445	0,137 677	0,149 003	0,139 587	0,117 116
8	0,000 009	0,000 859	0,008 102	0,029 770	0,065 278	0,103 258	0,130 377	0,139 587	0,131 756
9	0,000 001	0,000 191	0,002 701	0,013 231	0,036 266	0,068 838	0,101 405	0,124 077	0,131 756
10		0,000 038	0,000 810	0,005 292	0,018 133	0,041 303	0,070 983	0,099 262	0,118 580
11		0,000 007	0,000 221	0,001 925	0,008 242	0,022 529	0,045 171	0,072 190	0,097 020
12		0,000 001	0,000 055	0,000 642	0,003 434	0,011 264	0,026 350	0,048 127	0,072 765
13			0,000 013	0,000 197	0,001 321	0,005 199	0,014 188	0,029 616	0,050 376
14			0,000 003	0,000 056	0,000 472	0,002 228	0,007 094	0,016 924	0,032 384
15			0,000 001	0,000 015	0,000 157	0,000 891	0,003 311	0,009 026	0,019 431
16				0,000 004	0,000 049	0,000 334	0,001 448	0,004 513	0,010 930
17				0,000 001	0,000 014	0,000 118	0,000 596	0,002 124	0,005 786
18					0,000 004	0,000 039	0,000 232	0,000 944	0,002 893
19					0,000 001	0,000 012	0,000 085	0,000 397	0,001 370
20						0,000 004	0,000 030	0,000 159	0,000 617
21						0,000 001	0,000 010	0,000 061	0,000 264
22							0,000 003	0,000 022	0,000 108
23							0,000 001	0,000 008	0,000 042
24								0,000 003	0,000 016
25								0,000 001	0,000 006
26									0,000 002
27									0,000 001

Tabulka 3

Distribuční funkce normovaného normálního rozdělení

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
0,00	0,500 00	0,40	0,655 42	0,80	0,788 14	1,20	0,884 93
0,01	0,503 99	0,41	0,659 10	0,81	0,791 03	1,21	0,886 86
0,02	0,507 98	0,42	0,662 76	0,82	0,793 89	1,22	0,888 77
0,03	0,511 97	0,43	0,666 40	0,83	0,796 73	1,23	0,890 65
0,04	0,515 95	0,44	0,670 03	0,84	0,799 55	1,24	0,892 51
0,05	0,519 94	0,45	0,673 64	0,85	0,802 34	1,25	0,894 35
0,06	0,523 92	0,46	0,677 24	0,86	0,805 11	1,26	0,896 17
0,07	0,527 90	0,47	0,680 82	0,87	0,807 85	1,27	0,897 96
0,08	0,531 88	0,48	0,684 39	0,88	0,810 57	1,28	0,899 73
0,09	0,535 86	0,49	0,687 93	0,89	0,813 27	1,29	0,901 47
0,10	0,539 83	0,50	0,691 46	0,90	0,815 94	1,30	0,903 20
0,11	0,543 80	0,51	0,694 97	0,91	0,818 59	1,31	0,904 90
0,12	0,547 76	0,52	0,698 47	0,92	0,821 21	1,32	0,906 58
0,13	0,551 72	0,53	0,701 94	0,93	0,823 81	1,33	0,908 24
0,14	0,555 67	0,54	0,705 40	0,94	0,826 39	1,34	0,909 88
0,15	0,559 62	0,55	0,708 84	0,95	0,828 94	1,35	0,911 49
0,16	0,563 56	0,56	0,712 26	0,96	0,831 47	1,36	0,913 09
0,17	0,567 49	0,57	0,715 66	0,97	0,833 98	1,37	0,914 66
0,18	0,571 42	0,58	0,719 04	0,98	0,836 46	1,38	0,916 21
0,19	0,575 35	0,59	0,722 40	0,99	0,838 91	1,39	0,917 74
0,20	0,579 26	0,60	0,725 75	1,00	0,841 34	1,40	0,919 24
0,21	0,583 17	0,61	0,729 07	1,01	0,843 75	1,41	0,920 73
0,22	0,587 06	0,62	0,732 37	1,02	0,846 14	1,42	0,922 20
0,23	0,590 95	0,63	0,735 65	1,03	0,848 50	1,43	0,923 64
0,24	0,594 83	0,64	0,738 91	1,04	0,850 83	1,44	0,925 07
0,25	0,598 71	0,65	0,742 15	1,05	0,853 14	1,45	0,926 47
0,26	0,602 57	0,66	0,745 37	1,06	0,855 43	1,46	0,927 86
0,27	0,606 42	0,67	0,748 57	1,07	0,857 69	1,47	0,929 22
0,28	0,610 26	0,68	0,751 75	1,08	0,859 93	1,48	0,930 56
0,29	0,614 09	0,69	0,754 90	1,09	0,862 14	1,49	0,931 89
0,30	0,617 91	0,70	0,758 04	1,10	0,864 33	1,50	0,933 19
0,31	0,621 72	0,71	0,761 15	1,11	0,866 50	1,51	0,934 48
0,32	0,625 52	0,72	0,764 24	1,12	0,868 64	1,52	0,935 74
0,33	0,629 30	0,73	0,767 30	1,13	0,870 76	1,53	0,936 99
0,34	0,633 07	0,74	0,770 35	1,14	0,872 86	1,54	0,938 22
0,35	0,636 83	0,75	0,773 37	1,15	0,874 93	1,55	0,939 43
0,36	0,640 58	0,76	0,776 37	1,16	0,876 98	1,56	0,940 62
0,37	0,644 31	0,77	0,779 35	1,17	0,879 00	1,57	0,941 79
0,38	0,648 03	0,78	0,782 30	1,18	0,881 00	1,58	0,942 95
0,39	0,651 73	0,79	0,785 24	1,19	0,882 98	1,59	0,944 08

u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
1,60	0,945 20	2,00	0,977 25	2,40	0,991 80	3,10	0,999 03
1,61	0,946 30	2,01	0,977 78	2,41	0,992 02	3,12	0,999 10
1,62	0,947 38	2,02	0,978 31	2,42	0,992 24	3,14	0,999 16
1,63	0,948 45	2,03	0,978 82	2,43	0,992 45	3,16	0,999 21
1,64	0,949 50	2,04	0,979 32	2,44	0,992 66	3,18	0,999 26
1,65	0,950 53	2,05	0,979 82	2,45	0,992 86	3,20	0,999 31
1,66	0,951 54	2,06	0,980 30	2,46	0,993 05	3,22	0,999 36
1,67	0,952 54	2,07	0,980 77	2,47	0,993 24	3,24	0,999 40
1,68	0,953 52	2,08	0,981 24	2,48	0,993 43	3,26	0,999 44
1,69	0,954 49	2,09	0,981 69	2,49	0,993 61	3,28	0,999 48
1,70	0,955 43	2,10	0,982 14	2,50	0,993 79	3,30	0,999 52
1,71	0,956 37	2,11	0,982 57	2,52	0,994 13	3,32	0,999 55
1,72	0,957 28	2,12	0,983 00	2,54	0,994 46	3,34	0,999 58
1,73	0,958 18	2,13	0,983 41	2,56	0,994 77	3,36	0,999 61
1,74	0,959 07	2,14	0,983 82	2,58	0,995 06	3,38	0,999 64
1,75	0,959 94	2,15	0,984 22	2,60	0,995 34	3,40	0,999 66
1,76	0,960 80	2,16	0,984 61	2,62	0,995 60	3,42	0,999 69
1,77	0,961 64	2,17	0,985 00	2,64	0,995 85	3,44	0,999 71
1,78	0,962 47	2,18	0,985 37	2,66	0,996 09	3,46	0,999 73
1,79	0,963 27	2,19	0,985 74	2,68	0,996 32	3,48	0,999 75
1,80	0,964 07	2,20	0,986 10	2,70	0,996 53	3,50	0,999 77
1,81	0,964 85	2,21	0,986 45	2,72	0,996 74	3,55	0,999 81
1,82	0,965 62	2,22	0,986 79	2,74	0,996 93	3,60	0,999 84
1,83	0,966 38	2,23	0,987 13	2,76	0,997 11	3,65	0,999 87
1,84	0,967 12	2,24	0,987 45	2,78	0,997 28	3,70	0,999 89
1,85	0,967 84	2,25	0,987 78	2,80	0,997 44	3,75	0,999 91
1,86	0,968 56	2,26	0,988 09	2,82	0,997 60	3,80	0,999 93
1,87	0,969 26	2,27	0,988 40	2,84	0,997 74	3,85	0,999 94
1,88	0,969 95	2,28	0,988 70	2,86	0,997 88	3,90	0,999 95
1,89	0,970 62	2,29	0,988 99	2,88	0,998 01	3,95	0,999 96
1,90	0,971 28	2,30	0,989 28	2,90	0,998 13	4,00	0,999 97
1,91	0,971 93	2,31	0,989 56	2,92	0,998 25	4,05	0,999 97
1,92	0,972 57	2,32	0,989 83	2,94	0,998 36	4,10	0,999 98
1,93	0,973 20	2,33	0,990 10	2,96	0,998 46	4,15	0,999 98
1,94	0,973 81	2,34	0,990 36	2,98	0,998 56	4,20	0,999 99
1,95	0,974 41	2,35	0,990 61	3,00	0,998 65	4,25	0,999 99
1,96	0,975 00	2,36	0,990 86	3,02	0,998 74	4,30	0,999 99
1,97	0,975 58	2,37	0,991 11	3,04	0,998 82	4,35	0,999 99
1,98	0,976 15	2,38	0,991 34	3,06	0,998 89	4,40	0,999 99
1,99	0,976 70	2,39	0,991 58	3,08	0,998 97	4,45	1,000 00

Poznámka: Pro záporné hodnoty $u < 0$ jsou hodnoty distribuční funkce dány vztahem

$$\Phi(-u) = 1 - \Phi(u).$$

Tabulka 4

Kvantily normovaného normálního rozdělení

p	u_p	p	u_p	p	u_p	p	u_p
0,50	0,000						
0,51	0,025	0,76	0,706	0,951	1,655	0,976	1,977
0,52	0,050	0,77	0,739	0,952	1,665	0,977	1,995
0,53	0,075	0,78	0,772	0,953	1,675	0,978	2,014
0,54	0,100	0,79	0,806	0,954	1,685	0,979	2,034
0,55	0,126	0,80	0,842	0,955	1,695	0,980	2,054
0,56	0,151	0,81	0,878	0,956	1,706	0,981	2,075
0,57	0,176	0,82	0,915	0,957	1,717	0,982	2,097
0,58	0,202	0,83	0,954	0,958	1,728	0,983	2,120
0,59	0,228	0,84	0,994	0,959	1,739	0,984	2,144
0,60	0,253	0,85	1,036	0,960	1,751	0,985	2,170
0,61	0,279	0,86	1,080	0,961	1,762	0,986	2,197
0,62	0,305	0,87	1,126	0,962	1,774	0,987	2,226
0,63	0,332	0,88	1,175	0,963	1,787	0,988	2,257
0,64	0,358	0,89	1,227	0,964	1,799	0,989	2,290
0,65	0,385	0,90	1,282	0,965	1,812	0,990	2,326
0,66	0,412	0,905	1,311	0,966	1,825	0,991	2,366
0,67	0,440	0,910	1,341	0,967	1,838	0,992	2,409
0,68	0,468	0,915	1,372	0,968	1,852	0,993	2,457
0,69	0,496	0,920	1,405	0,969	1,866	0,994	2,512
0,70	0,524	0,925	1,440	0,970	1,881	0,995	2,576
0,71	0,553	0,930	1,476	0,971	1,896	0,996	2,652
0,72	0,583	0,935	1,514	0,972	1,911	0,997	2,748
0,73	0,613	0,940	1,555	0,973	1,927	0,998	2,878
0,74	0,643	0,945	1,598	0,974	1,943	0,999	3,090
0,75	0,674	0,950	1,645	0,975	1,960		

Pro $p < 0,5$ jsou hodnoty kvantilů dány vztahem $u_p = -u_{1-p}$.

Tabulka 5

Kvantily Studentova rozdělení

n \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995
1	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
21	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831
22	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819
23	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807
24	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797
25	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787
26	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779
27	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771
28	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763
29	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756
30	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750

Pro $p < 0,5$ jsou hodnoty kvantilů dány vztahem $t_p = -t_{1-p}$.

Tabulka 6

Kvantily rozdělení χ^2

n \ p	0,0005	0,001	0,005	0,01	0,025	0,05	0,10
1	$0{,}0^6\,393$	$0{,}0^5\,157$	$0{,}0^4\,393$	$0{,}0^3\,157$	$0{,}0^3\,982$	$0{,}0^2\,393$	0,015 8
2	$0{,}0^2\,100$	$0{,}0^2\,200$	0,010 10	0,020 1	0,050 6	0,103	0,211
3	0,015 3	0,024 3	0,0717	0,115	0,216	0,352	0,584
4	0,063 9	0,090 8	0,207	0,297	0,484	0,711	1,06
5	0,158	0,210	0,412	0,554	0,831	1,15	1,61
6	0,299	0,381	0,676	0,872	1,24	1,64	2,20
7	0,485	0,598	0,989	1,24	1,69	2,17	2,83
8	0,710	0,857	1,34	1,65	2,18	2,73	3,49
9	0,972	1,15	1,73	2,09	2,70	3,33	4,17
10	1,26	1,48	2,16	2,56	3,25	3,94	4,87
11	1,59	1,83	2,60	3,05	3,82	4,57	5,58
12	1,93	2,21	3,07	3,57	4,40	5,23	6,30
13	2,31	2,62	3,57	4,11	5,01	5,89	7,04
14	2,70	3,04	4,07	4,66	5,63	6,57	7,79
15	3,11	3,48	4,60	5,23	6,26	7,26	8,55
16	3,54	3,94	5,14	5,81	6,91	7,96	9,31
17	3,98	4,42	5,70	6,41	7,56	8,67	10,1
18	4,44	4,90	6,26	7,01	8,23	9,39	10,9
19	4,91	5,41	6,84	7,63	8,91	10,1	11,7
20	5,40	5,92	7,43	8,26	9,59	10,9	12,4
21	5,90	6,45	8,03	8,90	10,3	11,6	13,2
22	6,40	6,98	8,64	9,54	11,0	12,3	14,0
23	6,92	7,53	9,26	10,2	11,7	13,1	14,8
24	7,45	8,08	9,89	10,9	12,4	13,8	15,7
25	7,99	8,65	10,5	11,5	13,1	14,6	16,5
26	8,54	9,22	11,2	12,2	13,8	15,4	17,3
27	9,09	9,80	11,8	12,9	14,6	16,2	18,1
28	9,66	10,4	12,5	13,6	15,3	16,9	18,9
29	10,2	11,0	13,1	14,3	16,0	17,7	19,8
30	10,8	11,6	13,8	15,0	16,8	18,5	20,6

n \ p	0,90	0,95	0,975	0,99	0,995	0,999	0,9995
1	2,71	3,84	5,02	6,63	7,88	10,8	12,1
2	4,61	5,99	7,38	9,21	10,6	13,8	15,2
3	6,25	7,81	9,35	11,3	12,8	16,3	17,7
4	7,78	9,49	11,1	13,3	14,9	18,5	20,0
5	9,24	11,1	12,8	15,1	16,7	20,5	22,1
6	10,6	12,6	14,4	16,8	18,5	22,5	24,1
7	12,0	14,1	16,0	18,5	20,3	24,3	26,0
8	13,4	15,5	17,5	20,1	22,0	26,1	27,9
9	14,7	16,9	19,0	21,7	23,6	27,9	29,7
10	16,0	18,3	20,5	23,2	25,2	29,6	31,4
11	17,3	19,7	21,9	24,7	26,8	31,3	33,1
12	18,5	21,0	23,3	26,2	28,3	32,9	34,8
13	19,8	22,4	24,7	27,7	29,8	34,5	36,5
14	21,1	23,7	26,1	29,1	31,3	36,1	38,1
15	22,3	25,0	27,5	30,6	32,8	37,7	39,7
16	23,5	26,3	28,8	32,0	34,3	39,3	41,3
17	24,8	27,6	30,2	33,4	35,7	40,8	42,9
18	26,0	28,9	31,5	34,8	37,2	42,3	44,4
19	27,2	30,1	32,9	36,2	38,6	43,8	46,0
20	28,4	31,4	34,2	37,6	40,0	45,3	47,5
21	29,6	32,7	35,5	38,9	41,4	46,8	49,0
22	30,8	33,9	36,8	40,3	42,8	48,3	50,5
23	32,0	35,2	38,1	41,6	44,2	49,7	52,0
24	33,2	36,4	39,4	43,0	45,6	51,2	53,5
25	34,4	37,7	40,6	44,3	46,9	52,6	54,9
26	35,6	38,9	41,9	45,6	48,3	54,1	56,4
27	36,7	40,1	43,2	47,0	49,6	55,5	57,9
28	37,9	41,3	44,5	48,3	51,0	56,9	59,3
29	39,1	42,6	45,7	49,6	52,3	58,3	60,7
30	40,3	43,8	47,0	50,9	53,7	59,7	62,2

Tabulka 7a

Kvantily Fisherova - Snedecorova rozdělení, p = 0,95

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,330	19,353	19,371	19,385
3	10,128	9,552	9,277	9,117	9,014	8,941	8,887	8,845	8,812
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,999
5	6,608	5,786	5,410	5,192	5,050	4,950	4,876	4,818	4,773
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,207	4,147	4,099
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,787	3,726	3,677
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,688	3,581	3,501	3,438	3,388
9	5,117	4,257	3,863	3,633	3,482	3,374	3,293	3,230	3,179
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,136	3,072	3,020
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	3,012	2,948	2,896
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,913	2,849	2,796
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,832	2,767	2,714
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,764	2,699	2,646
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,791	2,707	2,641	2,588
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,657	2,591	2,538
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,614	2,548	2,494
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,577	2,510	2,456
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,544	2,477	2,423
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,514	2,447	2,393
21	4,325	3,467	3,073	2,840	2,685	2,573	2,488	2,421	2,366
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,464	2,397	2,342
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,442	2,375	2,320
24	4,260	3,403	3,009	2,776	2,621	2,508	2,423	2,355	2,300
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,405	2,337	2,282
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,388	2,321	2,266
27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,373	2,305	2,250
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,359	2,291	2,236
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,346	2,278	2,223
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,334	2,266	2,211
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,450	2,336	2,249	2,180	2,124
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,167	2,097	2,040
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,087	2,016	1,959
∞	3,842	2,996	2,605	2,372	2,214	2,099	2,010	1,938	1,880

n_2	n_1									
	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	241,88	243,91	245,95	248,01	249,05	250,09	251,14	252,20	253,25	254,32
2	19,396	19,413	19,429	19,446	19,454	19,462	19,471	19,479	19,487	19,496
3	8,786	8,745	8,703	8,660	8,639	8,617	8,594	8,572	8,549	8,527
4	5,964	5,912	5,858	5,803	5,774	5,746	5,717	5,688	5,658	5,628
5	4,735	4,678	4,619	4,558	4,527	4,496	4,464	4,431	4,398	4,365
6	4,060	4,000	3,938	3,874	3,842	3,808	3,774	3,740	3,705	3,669
7	3,637	3,575	3,511	3,445	3,411	3,376	3,340	3,304	3,267	3,230
8	3,347	3,284	3,218	3,150	3,115	3,079	3,043	3,005	2,967	2,928
9	3,137	3,073	3,006	2,937	2,901	2,864	2,826	2,787	2,748	2,707
10	2,978	2,913	2,845	2,774	2,737	2,700	2,661	2,621	2,580	2,538
11	2,854	2,788	2,719	2,646	2,609	2,571	2,531	2,490	2,448	2,405
12	2,753	2,687	2,617	2,544	2,506	2,466	2,426	2,384	2,341	2,296
13	2,671	2,604	2,533	2,459	2,420	2,380	2,339	2,297	2,252	2,206
14	2,602	2,534	2,463	2,388	2,349	2,308	2,266	2,223	2,178	2,131
15	2,544	2,475	2,404	2,328	2,288	2,247	2,204	2,160	2,114	2,066
16	2,494	2,425	2,352	2,276	2,235	2,194	2,151	2,106	2,059	2,010
17	2,450	2,381	2,308	2,230	2,190	2,148	2,104	2,058	2,011	1,960
18	2,412	2,342	2,269	2,191	2,150	2,107	2,063	2,017	1,968	1,917
19	2,378	2,308	2,234	2,156	2,114	2,071	2,026	1,980	1,930	1,878
20	2,348	2,278	2,203	2,124	2,083	2,039	1,994	1,946	1,896	1,843
21	2,321	2,250	2,176	2,096	2,054	2,010	1,965	1,917	1,866	1,812
22	2,297	2,226	2,151	2,071	2,028	1,984	1,938	1,890	1,838	1,783
23	2,275	2,204	2,128	2,048	2,005	1,961	1,914	1,865	1,813	1,757
24	2,255	2,183	2,108	2,027	1,984	1,939	1,982	1,842	1,790	1,733
25	2,237	2,165	2,089	2,008	1,964	1,919	1,872	1,822	1,768	1,711
26	2,220	2,148	2,072	1,990	1,946	1,901	1,853	1,803	1,749	1,691
27	2,204	2,132	2,056	1,974	1,930	1,884	1,836	1,785	1,731	1,672
28	2,190	2,118	2,041	1,959	1,915	1,869	1,820	1,769	1,714	1,654
29	2,177	2,105	2,028	1,945	1,901	1,854	1,806	1,754	1,698	1,638
30	2,165	2,092	2,015	1,932	1,887	1,841	1,792	1,740	1,684	1,622
40	2,077	2,004	1,925	1,839	1,793	1,744	1,693	1,637	1,577	1,509
60	1,993	1,917	1,836	1,748	1,700	1,649	1,594	1,534	1,467	1,389
120	1,911	1,834	1,751	1,659	1,608	1,554	1,495	1,429	1,352	1,254
∞	1,831	1,752	1,666	1,571	1,517	1,459	1,394	1,318	1,221	1,000

Tabulka 7b

Kvantily Fisherova - Snedecorova rozdělení, p = 0,975

n_2	n_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	647,79	799,50	864,16	899,58	921,85	937,11	948,22	956,66	963,28
2	38,506	39,000	39,165	39,248	39,298	39,331	39,355	39,373	39,387
3	17,443	16,044	15,439	15,101	14,885	14,735	14,624	14,540	14,473
4	12,218	10,649	9,979	9,605	9,365	9,197	9,074	8,980	8,905
5	10,007	8,434	7,764	7,388	7,146	6,978	6,853	6,757	6,681
6	8,813	7,260	6,599	6,227	5,988	5,820	5,696	5,600	5,523
7	8,073	6,542	5,890	5,523	5,285	5,119	4,995	4,899	4,823
8	7,571	6,060	5,416	5,053	4,817	4,652	4,529	4,433	4,357
9	7,209	5,715	5,078	4,718	4,484	4,320	4,197	4,102	4,026
10	6,937	5,456	4,826	4,468	4,236	4,072	3,950	3,855	3,779
11	6,724	5,256	4,630	4,275	4,044	3,881	3,759	3,664	3,588
12	6,554	5,096	4,474	4,121	3,891	3,728	3,607	3,512	3,436
13	6,414	4,965	4,347	3,996	3,767	3,604	3,483	3,388	3,312
14	6,298	4,857	4,242	3,892	3,663	3,501	3,380	3,285	3,209
15	6,200	4,765	4,153	3,804	3,576	3,415	3,293	3,199	3,123
16	6,115	4,687	4,077	3,729	3,502	3,341	3,219	3,125	3,049
17	6,042	4,619	4,011	3,665	3,438	3,277	3,156	3,061	2,985
18	5,978	4,560	3,954	3,608	3,382	3,221	3,100	3,005	2,929
19	5,922	4,508	3,903	3,559	3,333	3,172	3,051	2,956	2,880
20	5,872	4,461	3,859	3,515	3,289	3,128	3,007	2,913	2,837
21	5,827	4,420	3,819	3,475	3,250	3,090	2,969	2,874	2,798
22	5,786	4,383	3,783	3,440	3,215	3,055	2,934	2,839	2,763
23	5,750	4,349	3,751	3,408	3,184	3,023	2,902	2,808	2,731
24	5,717	4,319	3,721	3,379	3,155	2,995	2,874	2,779	2,703
25	5,686	4,291	3,694	3,353	3,129	2,969	2,848	2,753	2,677
26	5,659	4,266	3,670	3,329	3,105	2,945	2,824	2,729	2,653
27	5,633	4,242	3,647	3,307	3,083	2,923	2,802	2,707	2,631
28	5,610	4,221	3,626	3,286	3,063	2,903	2,782	2,687	2,611
29	5,588	4,201	3,607	3,267	3,044	2,884	2,763	2,669	2,592
30	5,568	4,182	3,589	3,250	3,027	2,867	2,746	2,651	2,757
40	5,424	4,051	3,463	3,126	2,904	2,744	2,624	2,529	2,452
60	5,286	3,925	3,343	3,008	2,786	2,627	2,507	2,412	2,334
120	5,152	3,805	3,227	2,894	2,674	2,515	2,395	2,299	2,222
∞	5,024	3,689	3,116	2,786	2,567	2,408	2,288	2,192	2,114

n_1 \ n_2	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	968,63	976,71	984,87	993,10	997,25	1 001,4	1 005,6	1 009,8	1014,0	1018,3
2	39,398	39,415	39,431	39,448	39,456	39,465	39,473	39,481	39,490	39,498
3	14,419	14,337	14,253	14,167	14,124	14,081	14,037	13,992	13,947	13,902
4	8,844	8,751	8,657	8,560	8,511	8,461	8,411	8,360	8,309	8,257
5	6,619	6,525	6,428	6,329	6,278	6,227	6,175	6,125	6,069	6,015
6	5,461	5,366	5,269	5,168	5,117	5,065	5,013	4,959	4,905	4,849
7	4,761	4,666	4,568	4,467	4,415	4,362	4,309	4,254	4,199	4,142
8	4,295	4,200	4,101	4,000	3,947	3,894	3,840	3,784	3,728	3,670
9	3,964	3,868	3,769	3,667	3,614	3,560	3,506	3,449	3,392	3,333
10	3,717	3,621	3,522	3,419	3,365	3,311	3,255	3,198	3,140	3,080
11	3,526	3,430	3,330	3,226	3,173	3,118	3,061	3,004	2,944	2,883
12	3,374	3,277	3,177	3,073	3,019	2,963	2,906	2,848	2,787	2,725
13	3,250	3,153	3,053	2,948	2,893	2,837	2,780	2,720	2,659	2,596
14	3,147	3,050	2,949	2,844	2,789	2,732	2,674	2,614	2,552	2,487
15	3,060	2,963	2,862	2,756	2,701	2,644	2,585	2,524	2,461	2,395
16	2,986	2,889	2,788	2,681	2,625	2,568	2,509	2,447	2,383	2.316
17	2,922	2,825	2,723	2,616	2,560	2,502	2,442	2,380	2,315	2,247
18	2,866	2,769	2,667	2,559	2,503	2,445	2,384	2,321	2,256	2,187
19	2,817	2,720	2,617	2,509	2,452	2,394	2,333	2,270	2,203	2,133
20	2,774	2,676	2,573	2,465	2,408	2,349	2,287	2,223	2,156	2,085
21	2,735	2,637	2,534	2,425	2,368	2,308	2,247	2,182	2,114	2,042
22	2,700	5,602	2,498	2,389	2,332	2,272	2,210	2,145	2,076	2,003
23	2,668	2,570	2,467	2,357	2,299	2,239	2,176	2,111	2,042	1,968
24	2,640	2,541	2,437	2,327	2,269	2,209	2,146	2,080	2,010	1,935
25	2,614	2,515	2,411	2,301	2,242	2,182	2,118	2,052	1,981	1,906
26	2,590	2,491	2,387	2,276	2,217	2,157	2,093	2,026	1,955	1,878
27	2,568	2,469	2,364	2,253	2,195	2,133	2,069	2,002	1,930	1,853
28	2,547	2,448	2,344	2,232	2,174	2,112	2,048	1,980	1,907	1,829
29	2,529	2,430	2,325	2,213	2,154	2,092	2,028	1,959	1,886	1,807
30	2,511	2,412	2,307	2,195	2,136	2,074	2,009	1,940	1,866	1,787
40	2,388	2,288	2,182	2,068	2,007	1,943	1,875	1,803	1,724	1,637
60	2,270	2,169	2,061	1,945	1,882	1,815	1,744	1,667	1,581	1,482
120	2,157	2,055	1,945	1,825	1,760	1,690	1,614	1,530	1,433	1,310
∞	2,048	1,945	1,833	1,709	1,640	1,566	1,484	1,388	1,268	1,000

Tabulka 7c

Kvantily Fisherova - Snedecorova rozdělení, p = 0,99

n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4 052,2	4 999,5	5403,5	5624,6	5763,7	5859,0	5928,3	5981,6	6 022,5
2	98,503	99,000	99,166	99,249	99,299	99,332	99,356	99,374	99,388
3	34,116	30,817	29,457	28,710	28,237	27,911	27,672	27,489	27,345
4	21,198	18,000	16,694	15,977	15,522	15,207	14,976	14,799	14,639
5	16,258	13,274	12,060	11,392	10,967	10,672	10,456	10,289	10,158
6	13,745	10,925	9,780	9,148	8,746	8,466	8,260	8,102	7,976
7	12,246	9,547	8,451	7,847	7,460	7,191	6,993	6,840	6,719
8	11,259	8,649	7,591	7,006	6,632	6,371	6,178	6,029	5,911
9	10,561	8,022	6,992	6,422	6,057	5,802	5,613	5,467	5,351
10	10,044	6,559	6,552	5,994	5,636	5,386	5,200	5,057	4.942
11	9,646	7,206	6,217	5,668	5,316	5,069	4,886	4,745	4,632
12	9,330	6,927	5,953	5,412	5,064	4,821	4,640	4,499	4,388
13	9,074	6,701	5,739	5,205	4,862	4,620	4,441	4,302	4,191
14	8,862	6,515	5,564	5,035	4,695	4,456	4,278	4,140	4,030
15	8,683	6,359	5,417	4,893	4,556	4,318	4,142	4,005	3,895
16	8,531	6,226	5,292	4,773	4,437	4,202	4,026	3,890	3,780
17	8,400	6,112	5,185	4,669	4,336	4,102	3,927	3,791	3,682
18	8,285	6,013	5,092	4,579	4,428	4,015	3,841	3,705	3,597
19	8,185	5,926	5,010	4,500	4,171	3,939	3,765	3,631	3,523
20	8,096	5,849	4,938	4,431	4,103	3,871	3,699	3,564	3,457
21	8,017	5,780	4,874	4,369	4,042	3,812	3,640	3,506	3,398
22	7,945	5,719	4,817	4,313	3,988	3,758	3,587	3,453	3,346
23	7,881	5,664	4,765	4,264	3,939	3,710	3,539	3,406	3,299
24	7,823	5,614	4,718	4,218	3,895	3,667	3,496	3,363	3,256
25	7,770	5,568	4,676	4,177	3,855	3,627	3,457	3,324	3,217
26	7,721	5,526	4,637	4,140	3,818	3,591	3,421	3,288	3,182
27	7,677	5,488	4,601	4,106	3,785	3,558	3,388	3,256	3,149
28	7,636	5,453	4,568	4,074	3,754	3,528	3,358	3,226	3,120
29	7,598	5,421	4,538	4,045	3,725	3,500	3,330	3,198	3,092
30	7,563	5,390	4,510	4,018	3,699	3,474	3,305	3,173	3,067
40	7,314	5,179	4,313	3,828	3,514	3,291	3,124	2,993	2,888
60	7,077	4,977	4,126	3,649	3,339	3,119	2,953	2,823	2,719
120	6,851	4,787	3,949	3,480	3,174	2,956	2,792	2,663	2,559
∞	6,635	4,605	3,782	3,319	3,017	2,802	2,639	2,511	2,407

n_2	n_1 10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	6 055,8	6 106,3	6 157,3	6 208,7	6 234,6	6 260,7	6 286,6	6 313,0	6339,4	6366,0
2	99,399	99,416	99,432	99,449	99,458	99,466	99,474	99,483	99,491	99,501
3	27,229	27,052	26,872	26,690	26,598	26,505	26,411	26,316	26,221	26,125
4	14,546	14,374	14,198	14,020	13,929	13,838	13,754	13,652	13,558	13,463
5	10,051	9,888	9,722	9,553	9,467	9,379	9,291	9,202	9,112	9,020
6	7,874	7,718	7,559	7,396	7,313	7,229	7,143	7,057	6,969	6,880
7	6,620	6,469	6,314	6,155	6,074	5,992	5,908	5,824	5,737	5,650
8	5,814	5,667	5,515	5,359	5,279	5,198	5,116	5,032	4,946	4,859
9	5,257	5,111	4,962	4,808	4,729	4,649	4,567	4,483	4,398	4,311
10	4,849	4,706	4,558	4,405	4,327	4,247	4,165	4,082	3,997	3,909
11	4,539	4,397	4,251	4,099	4,021	3,941	3,860	3,776	3,690	3,603
12	4,296	4,155	4,010	3,858	3,781	3,701	3,619	3,536	3,449	3,361
13	4,100	3,960	3,815	3,665	3,587	3,507	3,425	3,341	3,255	3,165
14	3,939	3,800	3,656	3,505	3,427	3,348	3,266	3,181	3,094	3,004
15	3,805	3,666	3,522	3,372	3,294	3,214	3,132	3,047	2,960	2,868
16	3,691	3,553	3,409	3,259	3,181	3,101	3,018	2,933	2,845	2,753
17	3,593	3,455	3,312	3,162	3,084	3,003	2,921	2,835	2,746	2,653
18	3,508	3,371	3,227	3,077	2,999	2,919	2,835	2,749	2,660	2,566
19	3,434	3,297	3,153	3,003	2,925	2,844	2,761	2,674	2,584	2,489
20	3,368	3,231	3,088	2,938	2,859	2,779	2,695	2,608	2,517	2,421
21	3,310	3,173	3,030	2,880	2,801	2,720	2,636	2,548	2,457	2,360
22	3,258	3,121	2,978	2,827	2,749	2,668	2,583	2,495	2,403	2,306
23	3,211	3,074	2,931	2,781	2,702	2,620	2,536	2,447	2,354	2,256
24	3,168	3,032	2,889	2,738	2,659	2,577	2,492	2,404	2,310	2,211
25	3,129	2,993	2,850	2,699	2,620	2,538	2,453	2,364	2,270	2,169
26	3,094	2,958	2,815	2,664	2,585	2,503	2,417	2,327	2,233	2,132
27	3,062	2,926	2,783	2,632	2,552	2,470	2,384	2,294	2,198	2,097
28	3,032	2,896	2,753	2,602	2,522	2,440	2,354	2,263	2,167	2,064
29	3,005	2,869	2,726	2,574	2,495	2,412	2,325	2,234	2,138	2,034
30	2,979	2,843	2,700	2,549	2,469	2,386	2,299	2,208	2,111	2,006
40	2,801	2,665	2,522	2,369	2,288	2,203	2,114	2,019	1,917	1,805
60	2,632	2,496	2,352	2,198	2,115	2,029	1,936	1,836	1,726	1,601
120	2,472	2,336	2,192	2,035	1,950	1,860	1,763	1,656	1,533	1,381
∞	2,321	2,185	2,039	1,878	1,791	1,696	1,592	1,473	1,325	1,000

Tabulka 7d

Kvantily Fisherova - Snedecorova rozdělení, p = 0,995

n_2	n_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	16 211	20 000	21 615	22 500	23 056	23 437	23 715	23 925	24 091
2	198,50	199,00	199,17	199,25	199,30	199,33	199,36	199,37	199,39
3	55,552	49,799	47,467	46,195	45,392	44,838	44,434	44,126	43,882
4	31,333	26,284	24,259	23,155	22,456	21,975	21,622	21,352	21,139
5	22,785	18,314	16,530	15,556	14,940	14,513	14,200	13,961	13,772
6	18,635	14,544	12,917	12,028	11,464	11,073	10,786	10,566	10,391
7	16,236	12,404	10,882	10,050	9,522	9,155	8,885	8,678	8,514
8	14,688	11,042	9,597	8,805	8,302	7,952	7,694	7,496	7,339
9	13,614	10,107	8.717	7 956	7,471	7,134	6,885	6,693	6,541
10	12,826	9,427	8,081	7,343	6,872	6,545	6,303	6,116	5,968
11	12,226	8,912	7,600	6,881	6,422	6,102	5,865	5,682	5,537
12	11,754	8,510	7,226	6,521	6,071	5,757	5,525	5,345	5,202
13	11,374	8,187	6,926	6,234	5,791	5,482	5,253	5,076	5,935
14	11,060	7,922	6,680	5,998	5,562	5,257	5,031	4,857	4,717
15	10,798	7,701	6,476	5,803	5,372	5,071	4,847	4,674	4,536
16	10,575	7,514	6,303	5,638	5,212	4,913	4,692	4,521	4,384
17	10,384	7,354	6,156	5,497	5,075	4,779	4,559	4,389	4,254
18	10,218	7,215	6,028	5,375	4,956	4,663	4,445	4,276	4,141
19	10,073	7,094	5,916	5,268	4,853	4,561	4,345	4,177	4,043
20	9,944	6,987	5,818	5,174	4,762	4,472	4,257	4,090	4,956
21	9,830	6,891	5,730	5,091	4,681	4,393	4,179	4,013	3,880
22	9,727	6,806	5,652	5,017	4,609	4,323	4,109	3,944	3,812
23	9,635	6,730	5,582	4,950	4,544	4,259	4,047	3,882	3,750
24	9,551	6,661	5,519	4,890	4,486	4,202	3,991	3,826	3,695
25	9,475	6,598	5,462	4,835	4,433	4,150	3,939	3,776	3,645
26	9,406	6,541	5,409	4,785	4,384	4,103	3,893	3,730	3,599
27	9,342	6,489	5,361	4,740	4,340	4,059	3,850	3,688	3,557
28	9,281	6,440	5,317	4,698	4,300	4,020	3,811	3,649	3,519
29	9,230	6,396	5,276	4,659	4,262	3,983	3,775	3,613	3,483
30	9,180	6,355	5,239	4,623	4,228	3,949	3,742	3,580	3,451
40	8,828	6,066	4,976	4,374	3,986	3,713	3,509	3,350	3,222
60	8,495	5,795	4,729	4,140	3,760	3,492	3,291	3,134	3,008
120	8,179	5,539	4,497	3,921	3,548	3,285	3,087	2,933	2,808
∞	7,879	5,298	4,279	3,715	3,350	3,091	2,897	2,744	2,621

n_2	n_1									
	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
1	24 224	24 426	24 630	24 836	24 940	25 044	25 148	25 253	25 359	25 465
2	199,40	199,42	199,43	199,45	199,46	199,47	199,47	199,48	199,49	199,51
3	43,686	43,387	43,085	42,778	42,622	42,466	42,308	42,149	41,989	41,829
4	20,967	20,705	20,438	20,167	20,030	19,892	19,752	19,611	19,468	19,325
5	13,618	13,384	13,146	12,903	12,780	12,656	12,530	12,402	12,274	12,144
6	10,250	10,034	9,814	9,589	9,474	9,358	9,241	9,122	9,002	8,879
7	8,380	8,176	7,968	7,754	7,645	7,535	7,423	7,309	7,193	7,076
8	7,211	7,015	6,814	6,608	6,503	6,396	6,288	6,177	6,065	5,951
9	6,417	6,227	6,033	5,832	5,729	5,625	5,519	5,410	5,300	5,188
10	5,847	5,661	5,471	5,274	5,173	5,071	4,966	4,859	4,750	4,639
11	5,418	5,236	5,049	4,855	4,756	4,654	4,551	4,445	4,337	4,226
12	5,086	4,906	4,721	4,530	4,432	4,331	4,228	4,123	4,015	3,904
13	4,820	4,643	4,460	4,270	4,173	4,073	3,970	3,866	3,758	3,647
14	4,603	4,428	4,247	4,059	3,961	3,862	3,760	3,655	3,547	3,436
15	4,424	4,250	4,070	3,883	3,786	3,687	3,585	3,480	3,372	3,260
16	4,272	4,099	3,921	3,734	3,638	3,539	3,347	3,332	3,224	3,112
17	4,142	3,971	3,793	3,607	3,511	3,412	3,311	3,206	3,097	2,984
18	4,031	3,860	3,683	3,498	3,402	3,303	3,201	3,096	2,987	2,873
19	3,933	3,763	3,587	3,402	3,306	3,208	3,106	3,000	2,891	2,776
20	3,847	3,678	3,502	3,318	3,222	3,123	3,022	2,916	2,806	2,690
21	3,771	3,602	3,427	3,243	3,147	3,049	2,947	2,841	2,730	2,614
22	3,703	3,535	3,360	3,176	3,081	2,982	2,880	2,774	2,663	2,546
23	3,642	3,475	3,300	3,117	3,021	2,922	2,820	2,713	2,602	2,484
24	3,587	3,420	3,246	3,062	2,967	2,868	2,765	2,659	2,546	2,428
25	3,537	3,370	3,196	3,013	2,918	2,819	2,716	2,609	2,496	2,377
26	3,492	3,325	3,152	2,969	2,873	2,774	2,671	2,563	2,450	2,330
27	3,450	3,284	3,110	2,928	2,832	2,733	2,630	2,522	2,408	2,287
28	3,412	3,246	3,073	2,890	2,794	2,695	2,592	2,483	2,369	2,247
29	3,377	3,211	3,038	2,855	2,759	2,660	2,557	2,448	2,333	2,210
30	3,344	3,179	3,006	2,823	2,727	2,628	2,524	2,415	2,300	2,176
40	3,117	2,955	2,781	2,598	2,502	2,402	2,296	2,184	2,064	1,932
60	2,904	2,742	2,571	2,387	2,290	2,187	2,079	1,962	1,834	1,688
120	2,705	2,544	2,373	2,188	2,089	1,984	1,871	1,747	1,606	1,431
∞	2,519	2,358	2,187	2,000	1,898	1,789	1,669	1,533	1,364	1,000