Lineární programování 3

Optimální rozvoz

2 betonárny X, Y s kapacitami 14 a 6 aut/den zásobují tři staveniště $1, 2, 3$ s potřebou 8, 5 a 7 aut/den. Tabulka udává vzdálenosti mezi jednotlivými staveništi a betonárnami v km, údaje v závorce jsou kapacity betonáren, resp. potřeby stavenišť (počet aut/den).

		Stavba (potřeba aut/den)		
		1 (8)	2 (5)	3 (7)
Betonárna (kapacita)	X (14)	15	7	16
	Y (6)	8	4	8

Cílem je najít optimální rozvozní plán betonu.

Řešení. Zadání přeformulujeme jako úlohu lineárního programování.

$$
\begin{aligned}
&\min \quad 15x_1 + 7x_2 + 16x_3 + 8y_1 + 4y_2 + 8y_3\\
&x_1 + x_2 + x_3 = 14\\
&y_1 + y_2 + y_3 = 6\\
&x_1 + y_1 = 8\\
&x_2 + y_2 = 5\\
&x_3 + y_3 = 7\\
&x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0.
\end{aligned}
$$

Maticový zápis:

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 14\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 7
\end{array}\right)
$$

Přerovnáme řádky, vynecháme poslední závislý:

$$
\left(\begin{array}{cccccc|c}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 14\\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 7\\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 6\\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8
\end{array}\right)
$$

1	1	1	0	0	0	14
0	1	0	0	1	0	5
0	0	1	0	0	1	7
0	0	0	1	1	1	6

Hledáme výchozí PBR; zkusíme bázi $\{x_1, x_2, x_3, y_1\}$:

-15	-7	-16	-8	-4	-8	0
1	0	0	0	-1	-1	2
0	1	0	0	1	0	5
0	0	1	0	0	1	7
0	0	0	1	1	1	6

Vynulujeme relativní ceny bazických proměnných:

0	0	0	0	-4	1	225
1	0	0	0	-1	-1	2
0	1	0	0	1	0	5
0	0	1	0	0	1	7
0	0	0	1	1	**1**	6

Do báze jde y_3, z báze ven jde y_1:

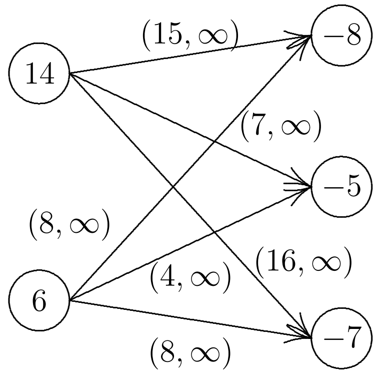
0	0	0	-1	-5	0	219
1	0	0	1	0	0	8
0	1	0	0	1	0	5
0	0	1	-1	-1	0	1
0	0	0	1	1	1	6

Máme optimum:

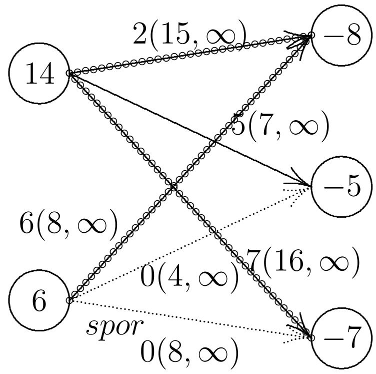
$x_1 = 8,\ x_2 = 5,\ x_3 = 1,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 6.$

(Zajímavost - všimněte si, že při optimálním rozvozním plánu se na nejkratší vzdálenost nic nevozí).

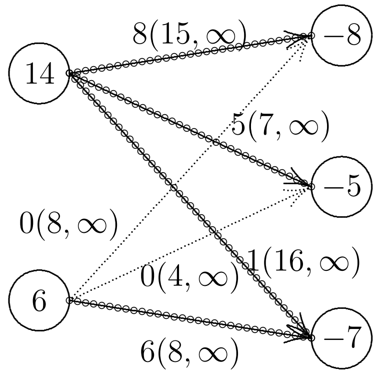
Úlohu lze také řešit jako úlohu nalezení optimálního toku v následující síti:



1. iterace:



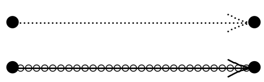
2. iterace:



Dostáváme stejné optimum:

$x_1 = 8,\ x_2 = 5,\ x_3 = 1,\ y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 6.$

Značení:



hrana s nulovým tokem

hrana opory