Lineární programování 4

Dualita 1

Příklad 1.

Primární úloha:

$$\begin{aligned} &\min \quad x + y \\ &2x + y - z = 2 \\ &x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0. \end{aligned}$$

Řešíme simplexovým algoritmem:

-1	-1	0	0
2	1	-1	2

-1	-1	0	0
1	$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	1

0	-$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	1
1	$\frac{1}{2}$	-$\frac{1}{2}$	1

Máme optimum $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$, cena je 1.

Duální úloha:

$$\begin{aligned} &\max \quad 2y \\ &2y \leq 1 \\ &y \leq 1 \\ &-y \leq 0 \\ &y \in R. \end{aligned}$$

Okamžitě vidíme, že ekvivalentně $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$, a optimum funkce $\max 2y$ nastane pro $y = \frac{1}{2}$, cena je 1.

Optimální řešení primární i duální úlohy tedy mají stejnou cenu.

Příklad 2.

Primární úloha (stejná množina přípustných řešení, jiná cena):

$$\begin{aligned} &\min \quad x - y \\ &2x + y - z = 2 \\ &x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0. \end{aligned}$$

Řešíme simplexovým algoritmem:

-1	1	0	0
2	**1**	-1	2

-3	0	1	-2
2	1	-1	2

Do báze má jít proměnná z (kladná relativní cena), ale $\frac{2}{-1} < 0$.

Úloha tedy nemá řešení, protože cenová funkce není na množině přípustných řešení zdola omezená.

Duální úloha:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2y \\ 2y \leq & \quad 1 \\ y \leq & -1 \\ -y \leq & \quad 0 \\ y \in & \, R. \end{aligned}$$

Okamžitě vidíme, že ekvivalentně $0 \leq y \leq -1$, což je spor.

Duální úloha tedy také nemá řešení, ale z jiného důvodu: množina přípustných řešení je prázdná.