Lineární programování 5

Dualita 2

Příklad 1.

Primární úloha:

$$\begin{aligned} &\min \quad x + y + 2z \\ &x + y + z \geq 1 \\ &x \phantom{{}+y} + 4z \geq 2 \\ &x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0. \end{aligned}$$

Převedeme na standardní tvar a řešíme simplexovým algoritmem; nejprve se snažíme „uhádnout" výchozí PBR:

-1	-1	-2	0	0	0
1	1	1	-1	0	1
1	0	4	0	-1	2

-1	-1	-2	0	0	0
$\frac{3}{4}$	1	0	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	0	1	0	-$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Našli jsme tedy výchozí PBR $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0)$, ještě je třeba vynulovat relativní ceny bazických proměnných:

$\frac{1}{4}$	0	0	-1	-$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
$\frac{3}{4}$	1	0	-1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	0	1	0	-$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Naše PBR má cenu $\frac{3}{2}$ a není optimální; do báze jde x, z báze jde y:

$\frac{1}{4}$	0	0	-1	-$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{2}$
1	$\frac{4}{3}$	0	-$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{4}$	0	1	0	-$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

0	-$\frac{1}{3}$	0	-$\frac{2}{3}$	-$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$
1	$\frac{4}{3}$	0	-$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
0	-$\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	-$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Máme optimální PBR $x = \frac{2}{3},\ y = 0,\ z = \frac{1}{3}$ s cenou $\frac{4}{3}$.

Duální úloha:

$$\begin{aligned} &\max \quad u + 2v \\ &u + v \leq 1 \\ &u \phantom{{}+4v} \leq 1 \\ &u + 4v \leq 2 \\ &u, v \geq 0. \end{aligned}$$

Převedeme na standardní tvar, díky bázi tvořené pomocnými proměnnými ihned vidíme výchozí PBR $(0, 0, 1, 1, 2)$ s cenou 0, takže můžeme optimalizovat.

1	2	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	**4**	0	0	1	2

$\frac{1}{2}$	0	0	0	-$\frac{1}{2}$	-1
$\frac{3}{4}$	0	1	0	-$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
1	0	0	1	0	1
$\frac{1}{4}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Máme PBR $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0)$ s cenou 1; do báze jde u, z báze jde první pomocná proměnná.

0	0	-$\frac{2}{3}$	0	-$\frac{1}{3}$	-$\frac{4}{3}$
1	0	$\frac{4}{3}$	0	-$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
0	0	-$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
0	1	-$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

Optimální PBR je $(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0)$, tedy optimum původní úlohy je $u = \frac{2}{3}$, $v = \frac{1}{3}$, jeho cena je $\frac{4}{3}$.

Vidíme, že optimální řešení primární a duální úlohy mají stejnou cenu.

Příklad 2.

Primární úloha (stejná množina přípustných řešení, jiná cena):

$$\begin{aligned}
&\min \ \ x - y \\
&x + y + \ \ z \geq 1 \\
&x \qquad + 4z \geq 2 \\
&x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0.
\end{aligned}$$

Ihned vidíme, že úloha nemá optimum, protože množina přípustných řešení není omezená v kladném směru osy y a tedy cenová funkce $x - y$ není zdola omezená na množině přípustných řešení.

Duální úloha:

$$\begin{aligned}
&\max \ \ u + 2v \\
&u + \ v \ \leq \ \ 1 \\
&u \qquad \leq -1 \\
&u + 4v \leq \ \ 0 \\
&u, v \geq 0.
\end{aligned}$$

Okamžitě vidíme, že ekvivalentně $0 \leq u \leq -1$, což je spor.

Úloha tedy nemá řešení, protože množina přípustných řešení je prázdná.