

Optimální párování 1

Najděte optimální párování v bigrafu matice:

$$W = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 7 & 5 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 5 & 5 \end{bmatrix}$$

Řešení. Kuhn- Munkresův algoritmus. Výchozí přípustné ohodnocení:

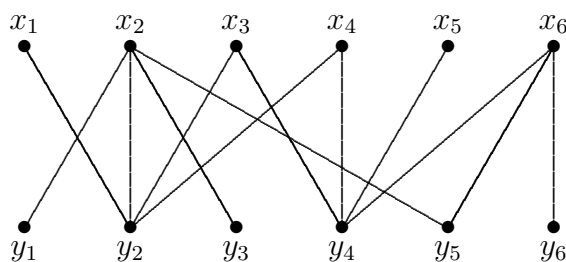
$$\ell(x_i) = \max\{w_{ij} \mid (x_i, y_j) \in H(G)\} \text{ pro } x_i \in X,$$

$$\ell(y_j) = 0 \text{ pro } y_j \in Y.$$

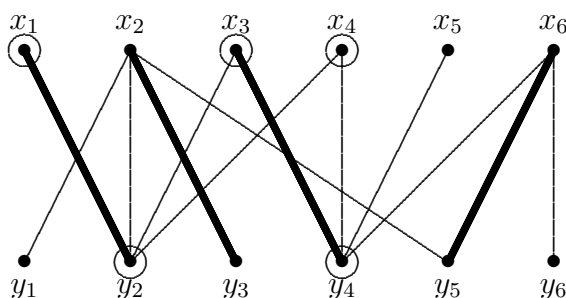
Tabulka ohodnocení (tučně označené prvky odpovídají hranám grafu rovnosti G_ℓ):

$\ell(x_i) \setminus \ell(y_j)$	0	0	0	0	0	0
5	3	5	2	0	1	3
7	7	7	7	5	7	4
4	3	4	2	4	2	1
5	1	5	3	5	4	2
6	3	4	2	6	5	3
5	2	4	3	5	5	5

Graf rovnosti G_ℓ :



Maďarský algoritmus: zvolím výchozí párování M (silně označené hrany), algoritmus postupně dává $x_4 \in S \Rightarrow y_2 \in T \Rightarrow x_1 \in S \Rightarrow y_4 \in T \Rightarrow x_3 \in S$ (zakroužkované uzly).



Nyní je $N(S) = T$ a $|T| = |N(S)| < |S|$.

Oprava přípustného ohodnocení:

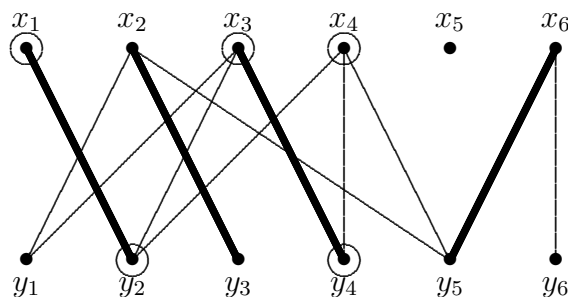
$$\alpha_\ell = \min\{\ell(x_i) + \ell(y_j) - w_{ij} \mid (x_i, y_j) \in H(G_\ell), x_i \in S, y_j \notin T\} = 1.$$

Ohodnocení tedy zmenšíme o 1 na S a zvětšíme o 1 na T .

Opravené ohodnocení:

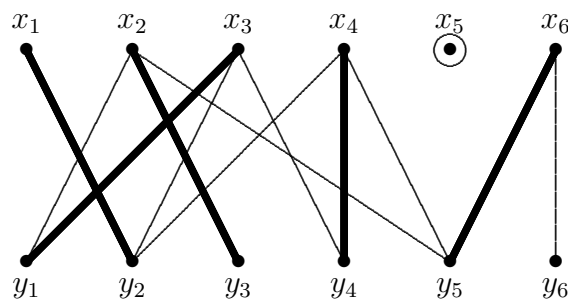
$\ell(x_i) \setminus \ell(y_j)$	0	1	0	1	0	0
4	3	5	2	0	1	3
7	7	7	7	5	7	4
3	3	4	2	4	2	1
4	1	5	3	5	4	2
6	3	4	2	6	5	3
5	2	4	3	5	5	5

Graf rovnosti:



V novém grafu rovnosti se vracíme k aktuálnímu párování M a množinám $S \subset X$ a $T \subset Y$, a pokračujeme v maďarském algoritmu (tam, kde jsme skončili).

V $N(S) - T$ nalézáme nepokrytý $y_1 \Rightarrow$ máme rozšiřující cestu $x_4y_4x_3y_1$. Podél této cesty zvětšíme M .



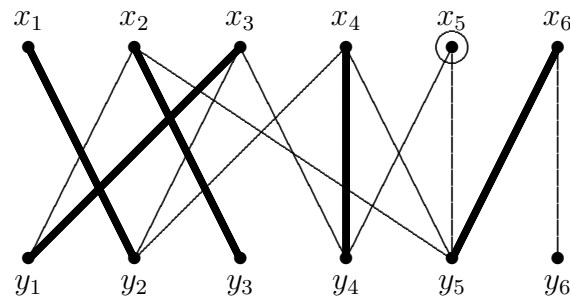
Pro nové párování M znovu rozjedeme maďarský algoritmus: zvolíme nepokrytý uzel $x_5 \in S$ (tj. $S = \{x_5\}$), máme $N(S) = T = \emptyset$. Tedy $|T| = |N(S)| < |S|$.

Oprava ohodnocení: $\alpha_\ell = \min\{\ell(x_i) + \ell(y_j) - w_{ij} \mid (x_i, y_j) \in H(G_\ell), x_i \in S, y_j \notin T\} = 1$.

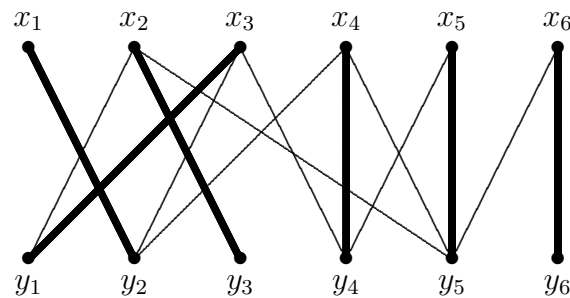
Ohodnocení tedy zmenšíme o 1 na S (tj. v uzlu x_5) a zvětšíme o 1 na T (tj. nikde, neboť $T = \emptyset$):

$\ell(x_i) \setminus \ell(y_j)$	0	1	0	1	0	0
4	3	5	2	0	1	3
7	7	7	7	5	7	4
3	3	4	2	4	2	1
4	1	5	3	5	4	2
5	3	4	2	6	5	3
5	2	4	3	5	5	5

Graf rovnosti:



Pokračujeme tam, kde jsme skončili. Nalézáme rozšiřující cestu $x_5y_5x_6y_6$, podél které zvětšujeme M :



A jsme hotovi – perfektní párování v grafu rovnosti je optimálním párováním v původním bigrafu matice W . Cena M je 30.