

# Věta o sedlovém bodu a Fredholmova alternativa

Petr Tomiczek

Fakulta Aplikovaných věd  
Západočeská univerzita Plzeň

2006

# obsah

## 1 Rozklad Hilbertova prostoru

- Uzavřený lineární a samoadjungovaný operátor
- Uzavřenost oboru hodnot
- Pozitivně definitní operátor
- Sedlový operátor

## 2 Potenciální operátor

- Věta o sedlovém bodu
- Nelineární Fredholmova alternativa

Řešíme úlohu

$$u''(x) + m^2 u(x) + g(x, u(x)) = f(x), \quad x \in (0, \pi),$$

$$u(0) = u(\pi) = 0.$$

Definujeme  $G(x, s) = \int_0^s g(x, t) dt$ ,

$$G_+(x) = \liminf_{s \rightarrow +\infty} \frac{G(x, s)}{s}, \quad G_-(x) = \limsup_{s \rightarrow -\infty} \frac{G(x, s)}{s}.$$

Předpokládáme

$$\int_0^\pi [G_-(x)(\sin mx)^+ - G_+(x)(\sin mx)^-] dx$$

$$< \int_0^\pi f(x) \sin mx dx < \int_0^\pi [G_+(x)(\sin mx)^+ - G_-(x)(\sin mx)^-] dx.$$

# obsah

## 1 Rozklad Hilbertova prostoru

- Uzavřený lineární a samoadjungovaný operátor
- Uzavřenost oboru hodnot
- Pozitivně definitní operátor
- Sedlový operátor

## 2 Potenciální operátor

- Věta o sedlovém bodu
- Nelineární Fredholmova alternativa

Označíme  $H$  reálný separabilní Hilbertův prostor se skalárním součinem  $(\cdot, \cdot)$  a normou  $\|\cdot\|$ .

## lineární rovnice

Máme uzavřený lineární operátor  $A:H \rightarrow H$  s definičním oborem  $D(A)$  ( $\overline{D(A)} = H$ ), oborem hodnot  $R(A)$  a jádrem  $N(A)$ .

( $A$  uzavřený:  $\{u_n\} \subset D(A)$ ,  $u_n \rightarrow u$ ,  $Au_n \rightarrow z \Rightarrow u \in D(A)$ ,  $Au = z$ , jestliže navíc  $D(A) = H$ , pak  $A$  je spojitý operátor.)

Budeme hledat podmínky, za kterých existuje řešení rovnice

$$Au = f, \quad f \in H. \quad (1)$$

Označíme  $M^\perp = \{v \in H : (u, v) = 0 \ \forall u \in M\}$ . Pokud je  $M$  uzavřený podprostor  $H$ , pak podle věty o ortogonálním rozkladu platí

$$H = M \oplus M^\perp.$$

Označíme  $H$  reálný separabilní Hilbertův prostor se skalárním součinem  $(\cdot, \cdot)$  a normou  $\|\cdot\|$ .

### rozklad prostoru $H$

Definujeme adjungovaný operátor  $A^* : D(A^*) \rightarrow H$ ,  $D(A^*) \subset H$  k operátoru  $A$  takto: Řekneme, že  $v \in D(A^*)$  a  $A^*v = z$ , pokud

$$(Au, v) = (u, z) \quad \forall u \in D(A).$$

Jestliže  $A = A^*$ , pak se operátor  $A$  nazývá samoadjungovaný. Pro uzavřený lineární operátor  $A : D(A) \rightarrow H$  platí

$$H = \overline{R(A)} \oplus N(A^*). \quad (2)$$

Označíme  $H$  reálný separabilní Hilbertův prostor se skalárním součinem  $(\cdot, \cdot)$  a normou  $\|\cdot\|$ .

**Důkaz**  $H = \overline{R(A)} \oplus N(A^*)$

$N(A^*)$  je uzavřený podprostor  $H$ , proto potřebujeme dokázat rovnost  $\overline{R(A)} = N(A^*)^\perp$ . Nejdříve dokážeme  $R(A)^\perp = N(A^*)$ .

Necht'  $v \in R(A)^\perp \Rightarrow 0 = (Au, v) = (u, A^*v) \quad \forall u \in D(A) \quad (\overline{D(A)} = H)$   
 $\Rightarrow v \in D(A^*) \wedge A^*v = 0 \Rightarrow v \in N(A^*)$  a  $R(A)^\perp \subset N(A^*)$ .

Necht'  $v \in N(A^*) \Rightarrow 0 = (u, A^*v) \quad \forall u \in H \Rightarrow \forall u \in D(A): 0 = (Au, v)$   
 $\Rightarrow v \in R(A)^\perp$ . Odtud  $N(A^*) \subset R(A)^\perp$ , tudíž  $R(A)^\perp = N(A^*)$ .

Zároveň  $(R(A)^\perp)^\perp = \overline{R(A)} = N(A^*)^\perp$ .

## Lemma

*Necht'  $A : D(A) \rightarrow H$  je uzavřený lineární operátor a  $\exists c_1 > 0$  takové, že*

$$\|Au\| \geq c_1 \|u\| \quad \forall u \in N(A)^\perp \cap D(A), \quad (3)$$

*potom obor hodnot  $R(A)$  je uzavřený.*

**Důkaz :** Necht' posloupnost  $\{f_n\} \subset R(A)$  a  $f_n \rightarrow f \in H$ , potom existuje posloupnost  $\{v_n\} \subset D(A)$  taková, že  $Av_n = f_n$ . Body  $v_n$  lze psát ve tvaru  $v_n = w_n + u_n$ ,  $w_n \in N(A)$ ,  $u_n \in N(A)^\perp$ . Pak

$$\|f_n - f_m\| = \|Av_n - Av_m\| = \|Au_n - Au_m\| \stackrel{(3)}{\geq} c_1 \|u_n - u_m\|,$$

tedy  $\{u_n\}$  je Cauchyovská posloupnost s limitou  $u \in N(A)^\perp$ . Z uzavřenosti operátoru  $A$  plyne  $u \in D(A) \wedge Au = f$ , tedy  $f \in R(A)$  a obor hodnot  $R(A)$  je uzavřený.



## Lemma

Necht'  $A : D(A) \rightarrow H$  je uzavřený lineární operátor a  $\exists c_1 > 0$  takové, že

$$\|Au\| \geq c_1 \|u\| \quad \forall u \in N(A)^\perp \cap D(A), \quad (3)$$

potom obor hodnot  $R(A)$  je uzavřený.

**Důkaz :** Necht' posloupnost  $\{f_n\} \subset R(A)$  a  $f_n \rightarrow f \in H$ , potom existuje posloupnost  $\{v_n\} \subset D(A)$  taková, že  $Av_n = f_n$ . Body  $v_n$  lze psát ve tvaru  $v_n = w_n + u_n$ ,  $w_n \in N(A)$ ,  $u_n \in N(A)^\perp$ . Pak

$$\|f_n - f_m\| = \|Av_n - Av_m\| = \|Au_n - Au_m\| \stackrel{(3)}{\geq} c_1 \|u_n - u_m\|,$$

tedy  $\{u_n\}$  je Cauchyovská posloupnost s limitou  $u \in N(A)^\perp$ . Z uzavřenosti operátoru  $A$  plyne  $u \in D(A) \wedge Au = f$ , tedy  $f \in R(A)$  a obor hodnot  $R(A)$  je uzavřený.

## Fredholmova alternativa pro pozitivně definitní operátor

Necht'  $A : D(A) \rightarrow H$  je lineární samoadjungovaný operátor a  $\exists c_2 > 0$  takové, že

$$(Au, u) \geq c_2 \|u\|^2 \quad \forall u \in N(A)^\perp \cap D(A), \quad (4)$$

potom rovnice  $Au = f$  má řešení tehdy a jen tehdy, když

$$(f, v) = 0 \quad \forall v \in N(A). \quad (5)$$

**Důkaz :** Lineární samoadjungovaný operátor  $A = A^*$  je zřejmě uzavřený. Z předpokladu (4) a Schwarzovy nerovnosti vyplývá  $\|Au\| \|u\| \geq (Au, u) \geq c_2 \|u\|^2$ , tedy  $\|Au\| \geq c_2 \|u\|$  a podle předchozího lematu je obor hodnot  $R(A)$  uzavřený.

Z rozkladu (2) a samoadjungovanosti operátoru  $A$  dostaneme  $H = \overline{R(A)} \oplus N(A^*) = R(A) \oplus N(A)$ , odtud plyne  $R(A) = N(A)^\perp$ . Neboli  $f \in R(A) \Leftrightarrow f \in N(A)^\perp \Leftrightarrow (f, v) = 0 \quad \forall v \in N(A)$ .

## Fredholmova alternativa pro pozitivně definitní operátor

Necht'  $A : D(A) \rightarrow H$  je lineární samoadjungovaný operátor a  $\exists c_2 > 0$  takové, že

$$(Au, u) \geq c_2 \|u\|^2 \quad \forall u \in N(A)^\perp \cap D(A), \quad (4)$$

potom rovnice  $Au = f$  má řešení tehdy a jen tehdy, když

$$(f, v) = 0 \quad \forall v \in N(A). \quad (5)$$

**Důkaz :** Lineární samoadjungovaný operátor  $A = A^*$  je zřejmě uzavřený. Z předpokladu (4) a Schwarzovy nerovnosti vyplývá  $\|Au\| \|u\| \geq (Au, u) \geq c_2 \|u\|^2$ , tedy  $\|Au\| \geq c_2 \|u\|$  a podle předchozího lematu je obor hodnot  $R(A)$  uzavřený.

Z rozkladu (2) a samoadjungovanosti operátoru  $A$  dostaneme  $H = \overline{R(A)} \oplus N(A^*) = R(A) \oplus N(A)$ , odtud plyne  $R(A) = N(A)^\perp$ . Neboli  $f \in R(A) \Leftrightarrow f \in N(A)^\perp \Leftrightarrow (f, v) = 0 \quad \forall v \in N(A)$ .

## Fredholmova alternativa pro sedlový operátor

Necht' operátor  $A : H \rightarrow H$  je lineární a samoadjungovaný,  $\hat{H}, \tilde{H} \subset H$  jsou podprostory  $H$  a  $H = \hat{H} \oplus N(A) \oplus \tilde{H}$ . Jestliže existují  $c_3 > 0$ ,  $c_4 > 0$  takové, že

$$(Au, u) \leq -c_3 \|u\|^2 \quad \forall u \in \hat{H}, \quad (6)$$

$$(Au, u) \geq c_4 \|u\|^2 \quad \forall u \in \tilde{H}, \quad (7)$$

potom rovnice  $Au = f$  má řešení tehdy a jen tehdy, když

$$(f, v) = 0 \quad \forall v \in N(A).$$

**Důkaz :** Podobně jako v předchozím důkazu stačí ověřit, že operátor  $A$  splňuje nerovnost  $\|Au\| \geq c \|u\|$  na  $N(A)^\perp = \hat{H} \oplus \tilde{H}$ .

## Fredholmova alternativa pro sedlový operátor

Necht' operátor  $A : H \rightarrow H$  je lineární a samoadjungovaný,  $\hat{H}, \tilde{H} \subset H$  jsou podprostory  $H$  a  $H = \hat{H} \oplus N(A) \oplus \tilde{H}$ . Jestliže existují  $c_3 > 0$ ,  $c_4 > 0$  takové, že

$$(Au, u) \leq -c_3 \|u\|^2 \quad \forall u \in \hat{H}, \quad (6)$$

$$(Au, u) \geq c_4 \|u\|^2 \quad \forall u \in \tilde{H}, \quad (7)$$

potom rovnice  $Au = f$  má řešení tehdy a jen tehdy, když

$$(f, v) = 0 \quad \forall v \in N(A).$$

**Důkaz :** Podobně jako v předchozím důkazu stačí ověřit, že operátor  $A$  splňuje nerovnost  $\|Au\| \geq c \|u\|$  na  $N(A)^\perp = \hat{H} \oplus \tilde{H}$ .

Položíme  $u = \hat{u} + u_0 + \tilde{u}$ , kde  $\hat{u} \in \hat{H}$ ,  $u_0 \in N(A)$ ,  $\tilde{u} \in \tilde{H}$ . Potom  
 $(Au, \tilde{u} - \hat{u}) = (A\tilde{u} + A\hat{u}, \tilde{u} - \hat{u}) = (A\tilde{u}, \tilde{u}) + (A\hat{u}, \tilde{u}) - (A\tilde{u}, \hat{u}) - (A\hat{u}, \hat{u})$ .

Operátor  $A$  je samoadjungovaný, proto platí  
 $(A\hat{u}, \tilde{u}) - (A\tilde{u}, \hat{u}) = (A\hat{u}, \tilde{u}) - (\tilde{u}, A^*\hat{u}) = (A\hat{u}, \tilde{u}) - (A\hat{u}, \tilde{u}) = 0$ .  
 Odtud, ze Schwarzovy nerovnosti a nerovností (6), (7) vyplývá  
 $\|Au\| \|\tilde{u} - \hat{u}\| \geq (Au, \tilde{u} - \hat{u}) = (A\tilde{u}, \tilde{u}) - (A\hat{u}, \hat{u}) \geq c_4 \|\tilde{u}\|^2 + c_3 \|\hat{u}\|^2$ .

Pro funkce  $\tilde{u} \in \hat{H}$ ,  $\hat{u} \in \tilde{H}$  platí  $\|\tilde{u} - \hat{u}\|^2 = \|\tilde{u}\|^2 + \|\hat{u}\|^2$   
 a podobně pro  $u \in N(A)^\perp$  je  $\|u\|^2 = \|\tilde{u} + \hat{u}\|^2 = \|\tilde{u}\|^2 + \|\hat{u}\|^2$ .  
 Položíme  $c = \min\{c_3, c_4\}$  a dostaneme

$$\|Au\| \|u\| = \|Au\| \|\tilde{u} - \hat{u}\| \geq c \|u\|^2 \quad \forall u \in N(A)^\perp.$$

Poznámka: Pro nesamoadjungovaný operátor  $A$  potřebujeme  
 $N(A) = N(A^*)$  a  $(A\hat{u}, \tilde{u}) - (A\tilde{u}, \hat{u}) = 0$ .

## Sedlový operátor

Položíme  $u = \hat{u} + u_0 + \tilde{u}$ , kde  $\hat{u} \in \hat{H}$ ,  $u_0 \in N(A)$ ,  $\tilde{u} \in \tilde{H}$ . Potom  
 $(Au, \tilde{u} - \hat{u}) = (A\tilde{u} + A\hat{u}, \tilde{u} - \hat{u}) = (A\tilde{u}, \tilde{u}) + (A\hat{u}, \tilde{u}) - (A\tilde{u}, \hat{u}) - (A\hat{u}, \hat{u})$ .

Operátor  $A$  je samoadjungovaný, proto platí  
 $(A\hat{u}, \tilde{u}) - (A\tilde{u}, \hat{u}) = (A\hat{u}, \tilde{u}) - (\tilde{u}, A^*\hat{u}) = (A\hat{u}, \tilde{u}) - (A\hat{u}, \tilde{u}) = 0$ .  
 Odtud, ze Schwarzovy nerovnosti a nerovností (6), (7) vyplývá  
 $\|Au\| \|\tilde{u} - \hat{u}\| \geq (Au, \tilde{u} - \hat{u}) = (A\tilde{u}, \tilde{u}) - (A\hat{u}, \hat{u}) \geq c_4 \|\tilde{u}\|^2 + c_3 \|\hat{u}\|^2$ .

Pro funkce  $\tilde{u} \in \hat{H}$ ,  $\hat{u} \in \tilde{H}$  platí  $\|\tilde{u} - \hat{u}\|^2 = \|\tilde{u}\|^2 + \|\hat{u}\|^2$   
 a podobně pro  $u \in N(A)^\perp$  je  $\|u\|^2 = \|\tilde{u} + \hat{u}\|^2 = \|\tilde{u}\|^2 + \|\hat{u}\|^2$ .  
 Položíme  $c = \min\{c_3, c_4\}$  a dostaneme

$$\|Au\| \|u\| = \|Au\| \|\tilde{u} - \hat{u}\| \geq c \|u\|^2 \quad \forall u \in N(A)^\perp.$$

Poznámka: Pro nesamoadjungovaný operátor  $A$  potřebujeme  
 $N(A) = N(A^*)$  a  $(A\hat{u}, \tilde{u}) - (A\tilde{u}, \hat{u}) = 0$ .

## Courant-Fisherův princip

Necht'  $T : H \rightarrow H$  je lineární kompaktní samoadjungovaný pozitivní operátor, pak má operátor  $T$  vlastní čísla

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n \geq \cdots > 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0,$$

kterým odpovídají vlastní funkce

$$\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots$$

tvořící ortonormální bázi prostoru  $H$ . Zároveň platí

$$\lambda_1 = \max_{u \in H} \frac{(Tu, u)}{\|u\|^2}, \quad \text{a pro } n \in \mathbb{N}$$

$$\lambda_{n+1} = \min_{\varphi_1, \dots, \varphi_n} \max_{u \in H} \left\{ \frac{(Tu, u)}{\|u\|^2} \mid \|u\| = 1, (u, \varphi_1) = \cdots = (u, \varphi_n) = 0 \right\}.$$



## Fredholmova alternativa pro kompaktní operátor

Necht'  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 > \lambda > 0$  a  $T : H \rightarrow H$  je lineární kompaktní samoadjungovaný pozitivní operátor, potom rovnice  $(\lambda I - T)u = f$  má řešení tehdy a jen tehdy, když  $(f, v) = 0 \quad \forall v \in N(\lambda I - T)$ .

**Důkaz:** Označíme  $\tilde{H} \subset H$  podprostor generovaný funkcemi  $\varphi_n$  odpovídající vlastním číslům  $\lambda_n < \lambda$  a  $\hat{H} \subset H$  podprostor generovaný funkcemi  $\varphi_n$  odpovídající vlastním číslům  $\lambda_n > \lambda$ . Položíme  $A = \lambda I - T$ ,  $\lambda_m = \min\{\lambda_n \mid \lambda_n > \lambda\}$  a  $\lambda_M = \max\{\lambda_n \mid \lambda_n < \lambda\}$ , pak  $H = \hat{H} \oplus N(A) \oplus \tilde{H}$  a z Courant-Fischerova principu plyne  $(Au, u) \leq (\lambda - \lambda_m)\|u\|^2 \quad u \in \hat{H}$ ,  $(Au, u) \geq (\lambda - \lambda_M)\|u\|^2 \quad u \in \tilde{H}$ . Položíme  $c_3 = \lambda_m - \lambda$  a  $c_4 = \lambda - \lambda_M$ , pak operátor  $A$  splňuje předpoklady Fredholmovy alternativy pro sedlový operátor.

## Fredholmova alternativa pro kompaktní operátor

Necht'  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_1 > \lambda > 0$  a  $T : H \rightarrow H$  je lineární kompaktní samoadjungovaný pozitivní operátor, potom rovnice  $(\lambda I - T)u = f$  má řešení tehdy a jen tehdy, když  $(f, v) = 0 \quad \forall v \in N(\lambda I - T)$ .

**Důkaz :** Označíme  $\tilde{H} \subset H$  podprostor generovaný funkcemi  $\varphi_n$  odpovídající vlastním číslům  $\lambda_n < \lambda$  a  $\hat{H} \subset H$  podprostor generovaný funkcemi  $\varphi_n$  odpovídající vlastním číslům  $\lambda_n > \lambda$ . Položíme  $A = \lambda I - T$ ,  $\lambda_m = \min\{\lambda_n \mid \lambda_n > \lambda\}$  a  $\lambda_M = \max\{\lambda_n \mid \lambda_n < \lambda\}$ , pak  $H = \hat{H} \oplus N(A) \oplus \tilde{H}$  a z Courant-Fischerova principu plyne  $(Au, u) \leq (\lambda - \lambda_m)\|u\|^2 \quad u \in \hat{H}$ ,  $(Au, u) \geq (\lambda - \lambda_M)\|u\|^2 \quad u \in \tilde{H}$ . Položíme  $c_3 = \lambda_m - \lambda$  a  $c_4 = \lambda - \lambda_M$ , pak operátor  $A$  splňuje předpoklady Fredholmovy alternativy pro sedlový operátor.

# obsah

- 1 Rozklad Hilbertova prostoru
  - Uzavřený lineární a samoadjungovaný operátor
  - Uzavřenost oboru hodnot
  - Pozitivně definitní operátor
  - Sedlový operátor
- 2 **Potenciální operátor**
  - Věta o sedlovém bodu
  - Nelineární Fredholmova alternativa

## Věta o sedlovém bodu

O funkcionálu  $F \in C^1(H, \mathbb{R})$  řekneme, že splňuje **Palais-Smaleovu (PS) podmínku**, jestliže každá posloupnost  $\{u_n\} \subset H$ , pro kterou je  $\{F(u_n)\}$  omezená posloupnost a  $\lim_{n \rightarrow \infty} F'(u_n) = 0$ , obsahuje konvergentní podposloupnost. Dále řekneme, že  $u_0 \in H$  je **kritickým bodem** funkcionálu  $F$ , pokud  $F'(u_0) = 0$ .

## Věta o sedlovém bodu

O funkcionálu  $F \in C^1(H, \mathbb{R})$  řekneme, že splňuje **Palais-Smaleovu (PS) podmínku**, jestliže každá posloupnost  $\{u_n\} \subset H$ , pro kterou je  $\{F(u_n)\}$  omezená posloupnost a  $\lim_{n \rightarrow \infty} F'(u_n) = 0$ , obsahuje konvergentní podposloupnost. Dále řekneme, že  $u_0 \in H$  je **kritickým bodem** funkcionálu  $F$ , pokud  $F'(u_0) = 0$ .

## Věta o sedlovém bodu

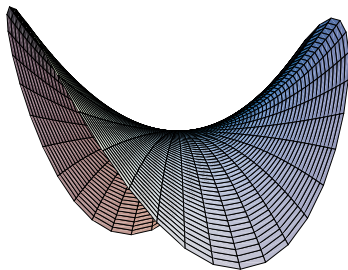
Necht'  $H = \hat{H} \oplus \tilde{H}$ ,  $\dim \hat{H} < \infty$  a pro  $F \in C^1(H, \mathbb{R})$  platí

- a) existuje omezené okolí  $U$  počátku v  $\hat{H}$  a konstanta  $\alpha$  taková, že  $F|_{\partial U} \leq \alpha$ ,
- b) existuje konstanta  $\beta > \alpha$  taková, že  $F|_{\tilde{H}} \geq \beta$ ,
- c)  $F$  splňuje (PS) podmínku,

potom má funkcionál  $F$  kritický bod.

## Věta o sedlovém bodu

O funkcionálu  $F \in C^1(H, \mathbb{R})$  řekneme, že splňuje **Palais-Smaleovu (PS) podmínku**, jestliže každá posloupnost  $\{u_n\} \subset H$ , pro kterou je  $\{F(u_n)\}$  omezená posloupnost a  $\lim_{n \rightarrow \infty} F'(u_n) = 0$ , obsahuje konvergentní podposloupnost. Dále řekneme, že  $u_0 \in H$  je **kritickým bodem** funkcionálu  $F$ , pokud  $F'(u_0) = 0$ .



## Nelineární Fredholmova alternativa

Necht'  $A$  je spojitý lineární samoadjungovaný operátor splňující nerovnosti (6), (7),  $N(A) = \{0\}$ ,  $f \in H$  a  $S$  je spojitý kompaktní nelineární operátor. Dále existují konstanty  $0 < c_5 < \min\{c_3, c_4\}$  a  $\gamma \in (0, 1)$  takové, že

$$\|S(u)\| \leq c_5 \|u\|^\gamma \quad \forall u \in H. \quad (8)$$

Necht' pro  $F_s : H \rightarrow \mathbb{R}$  platí  $F'_s(u) = S(u)$ , potom funkcionál  $F : H \rightarrow \mathbb{R}$  daný vztahem

$$F(u) = \frac{1}{2}(Au, u) + F_s(u) - (f, u)$$

má Frechetovu derivaci

$$F'(u) = Au + S(u) - f \quad \forall u \in H.$$

Pomocí věty o sedlovém bodu dokážeme, že funkcionál  $F$  má kritický bod  $u_0$ , který je zároveň řešením rovnice  $Au + S(u) = f$ .

Zřejmě  $F \in C^1(H, \mathbb{R})$ . Z předpokladu (8) dostaneme

$$F_s(u) - F_s(0) = \int_0^1 (S(tu), u) dt \leq \int_0^1 c_5 \|tu\|^\gamma \|u\| dt = \frac{c_5}{\gamma+1} \|u\|^{\gamma+1}.$$

**a)** Pro  $u \in \hat{H}$  platí (6), tedy  $F(u) = \frac{1}{2}(Au, u) + F_s(u) - (f, u) \leq -\frac{c_3}{2} \|u\|^2 + \frac{c_5}{\gamma+1} \|u\|^{\gamma+1} + \|f\| \|u\| + F_s(0)$ . Odtud vyplývá

$$\lim_{\|u\| \rightarrow \infty} F(u) = -\infty, \text{ tudíž } \forall \alpha \exists U(0) \subset \hat{H} : F|_{\partial U} \leq \alpha.$$

**b)** Pro  $u \in \tilde{H}$  je  $F(u) \geq \frac{c_4}{2} \|u\|^2 - \frac{c_5}{\gamma+1} \|u\|^{\gamma+1} - \|f\| \|u\| + F_s(0)$ .

$$\text{Odtud } \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} F(u) = \infty \text{ a existuje } \beta \text{ takové, že } F|_{\tilde{H}} \geq \beta.$$

Tedy funkcionál  $F$  splňuje předpoklady a), b) věty o sedlovém bodě.



c) Necht'  $\{u_n\} \subset H$ ,  $\exists c_6 : |F(u_n)| \leq c_6$  a  $\lim_{n \rightarrow \infty} F'(u_n) = 0$ . Pak

$$0 \leftarrow \|F'(u_n)\| = \|Au_n + S(u_n) - f\| \geq \|Au_n\| - \|S(u_n)\| - \|f\| \\ \geq \min\{c_3, c_4\}\|u_n\| - c_5\|u_n\|^\gamma - \|f\|, \text{ což plyne z (6),(7),(8).}$$

Odtud plyne, že posloupnost  $\{u_n\}$  je omezená a  $\exists u_0 \in H$  takové, že  $u_n \rightharpoonup u_0$ ,  $Au_n \rightharpoonup Au_0$ ,  $S(u_n) \rightarrow S(u_0)$  v  $H$  a platí

$$0 \leftarrow Au_n + S(u_n) - f \rightharpoonup Au_0 + S(u_0) - f.$$

Odtud dostaneme

$$Au_n - Au_0 \rightarrow 0 \Rightarrow A(u_n - u_0) \rightarrow 0 \stackrel{(6),(7)}{\Rightarrow} u_n \rightarrow u_0 \in H.$$

Neboli funkcionál  $F$  splňuje (PS) podmínku, tím i všechny předpoklady věty o sedlovém bodu.

## Lineární úloha s netriviálním jádrem

Necht'  $S=0$ ,  $N(A) \neq \{0\}$ , pak funkcionál  $F(u) = \frac{1}{2}(Au, u) - (f, u)$  splňuje předpoklady věty o sedlovém bodu na  $N(A)^\perp = \hat{H} \oplus \tilde{H}$  a existuje  $u_0 \in N(A)^\perp$  takové, že  $(Au_0 - f, z) = 0 \quad \forall z \in N(A)^\perp$ .

Pro  $w \in H$  položíme  $w = v + z$ , kde  $v \in N(A)$ ,  $z \in N(A)^\perp$ , potom

$$(Au_0 - f, w) = (Au_0 - f, v + z) = (Au_0 - f, z) + (Au_0, v) - (f, v) \\ = (u_0, Av) - (f, v) = -(f, v).$$

Odtud vyplývá, že  $u_0 \in N(A)^\perp$  zároveň řeší  $Au = f$  právě tehdy, když  $(f, v) = 0 \quad \forall v \in N(A)$ . (Fredholmova alternativa)

Fredholmova alternativa jako důsledek věty o sedlovém bodu

