Západočeská univerzita v Plzni
Fakulta aplikovaných věd
Katedra matematiky

Geometrie pro FST 1

Pomocný učební text

František Ježek, Marta Míková, Světlana Tomiczková

Plzeň – 29. srpna 2005 – verze 1.0

Předmluva

Tento pomocný text vznikl pro potřeby předmětu Geometrie pro Strojní fakultu 1, který vyučujeme od roku 2005 v upravené podobě.

Snažili jsme se napsat velice stručné a jednoduché pojednání. Věříme, že je to ta forma, kterou studenti potřebují. Rádi bychom tímto textem odstranili především časté studijní neúspěchy, které vedly k rozdělení předmětů do dvou semestrů.

Pokud jsme v textu nechali nedopatření, resp. pokud je text někde nesrozumitelný, prosíme o sdělení takových poznatků. Ideální cestou je použití e-mailu a adresy JEZEK@KMA.ZCU.CZ. Zvláště pilní hledači chyb a překlepů budou odměněni. Věříme, že tou odměnou ale bude především úspěšné složení zkoušky, neboť ten, kdo našel chybu, zpravidla přemýšlel. Právě geometrie je příležitostí k ověření Vašeho myšlenkového potenciálu, který pak uplatníte v kreativní inženýrské činnosti.

Autoři

Obsah

Kapitola 1

Opakování stereometrie

1.1 Úvod

Na úvod připomeneme základní pojmy a věty z prostorové geometrie, které budeme používat v dalších kapitolách.

1.2 Axiómy

Axiómy jsou jednoduchá tvrzení, která nemůžeme dokázat. Z nich se potom odvozují další věty. Tento systém axiómů použil před více než 2000 lety slavný řecký geometr Euklides k vybudování prostorové geometrie. Geometrii vybudované na tomto systému axiómů říkáme **Euklidovská geometrie**.

Uvedeme si pět základních axiómů prostorové geometrie:

1. axióm: Dva různé body A, B určují právě jednu přímku p. Symbolicky tuto větu zapíšeme: $\forall A,\, B; A \neq B\, \exists!\; p = AB$.

2. axióm: Přímka p a bod A, který neleží na přímce p, určují právě jednu rovinu α. Symbolicky: $\forall A,\, p; A \notin p\, \exists!\; \alpha = (A,\, p)$.

3. axióm: Leží-li bod A na přímce p a přímka p v rovině α, leží i bod A v rovině α. Symbolicky: $\forall A,\, p,\, \alpha;\; A \in p \wedge p \subset \alpha \Rightarrow A \in \alpha$.

4. axióm: Mají-li dvě různé roviny α, β společný bod P, pak mají i společnou přímku p a P leží na p. Symbolicky: $\forall \alpha,\, \beta,\, \alpha \neq \beta : P \in \alpha \cap \beta \Rightarrow \exists!\; p : P \in p \wedge \alpha \cap \beta = p$.

5. axióm: Ke každé přímce p lze bodem P, který na ní neleží, vést jedinou přímku p' rovnoběžnou s p. Symbolicky: $\forall A,\, p : A \notin p \Rightarrow \exists!\; p' : p' || p \wedge A \in p'$.

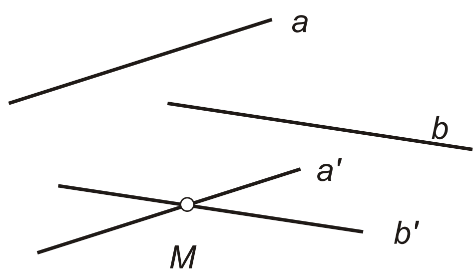
Uvedených pět axiómů tvoří základ, ale museli bychom je doplnit o další axiómy, aby systém dovoloval vybudování klasické geometrie. Není však cílem tohoto textu uvést úplný přehled axiómů a vět prostorové geometrie. Zaměříme se jen na takové vztahy, které budeme přímo využívat v dalším výkladu.

1.3 Určování odchylek

V rovině umíme určit odchyloku přímek, které jsou různoběžné. Protože se zabýváme prostorovými vztahy, nadefinujeme si i odchylku dvou mimoběžek a ukážeme si i, jak lze určit odchylku dvou rovin.

1.3.1 Odchylka mimoběžek

1. V prostoru jsou dány dvě mimoběžky a, b.
2. Libovolným bodem M vedeme přímku a' rovnoběžnou s přímkou a a přímku b' rovnoběžnou s přímkou b.
3. Odchylka mimoběžek a, b je rovna odchylce přímek a', b'.



Obrázek 1.1:

1.3.2 Odchylka dvou rovin

Uvedeme dva způsoby, jak určit odchylku dvou různoběžných rovin α a β.

1. způsob - obr. 1.2

1. Sestrojíme průsečnici p rovin α a β
2. Sestrojíme rovinu γ kolmou na p.
3. Sestrojíme průsečnici a rovin α a γ a průsečnici b rovin β a γ.
4. Odchylka φ přímek a, b je odchylkou rovin α a β.

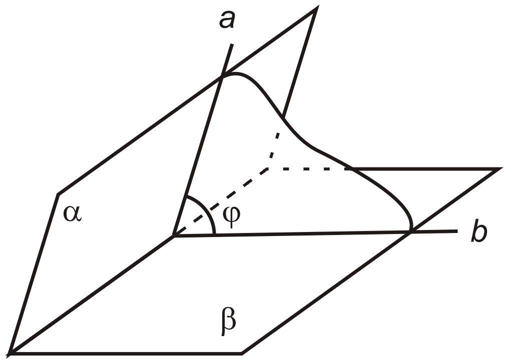
2. způsob - obr. 1.3

1. Libovolným bodem M vedeme kolmici n k rovině α.
2. Stejným bodem M vedeme kolmici n' k rovině β.
3. Odchylka přímek n, n' je odchylkou rovin α a β.

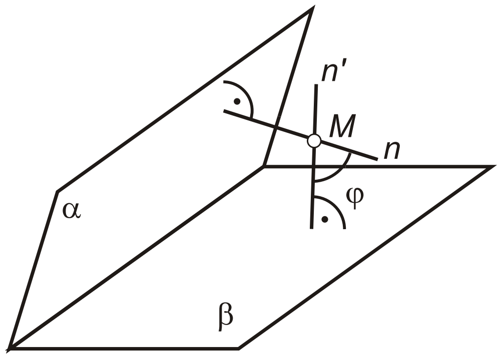
1.4 Kritéria rovnoběžnosti

Věta 1.1 ***Kritérium rovnoběžnosti přímky s rovinou.*** *Přímka p je rovnoběžná s rovinou α, právě když existuje přímka p' ležící v rovině α, rovnoběžná s přímkou p.*

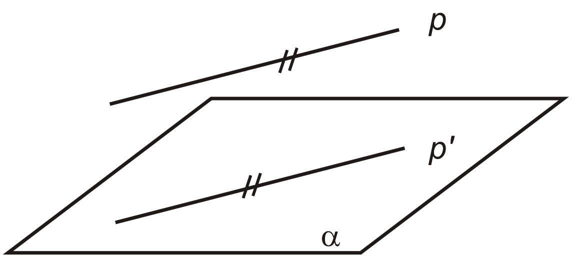
Věta 1.2 ***Kritérium rovnoběžnosti dvou rovin.*** *Rovina α je rovnoběžná s rovinou β, právě když existují různoběžky a, b ležící v rovině α a rovnoběžné s rovinou β.*



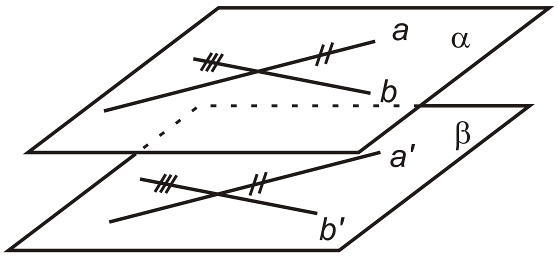
Obrázek 1.2:



Obrázek 1.3:



Obrázek 1.4:



Obrázek 1.5:

1.5 Kritéria kolmosti

Věta 1.3 ***Kritérium kolmosti přímky a roviny.*** *Přímka p je kolmá k rovině α, jestliže je kolmá ke dvěma různoběžkám a, b ležícím v rovině α.*

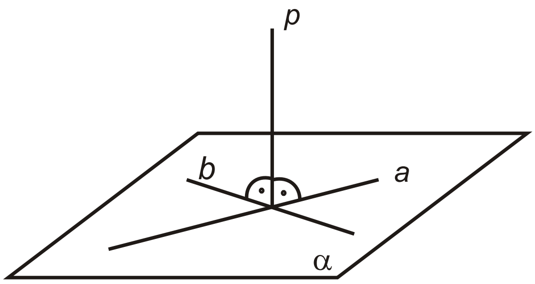
Věta 1.4 ***Kritérium kolmosti dvou rovin.*** *Rovina α je kolmá k rovině β, jestliže v rovině α existuje přímka p kolmá k rovině β (tj. kolmá ke dvěma různoběžkám a, b ležícím v rovině β).*

1.6 Otáčení v prostoru

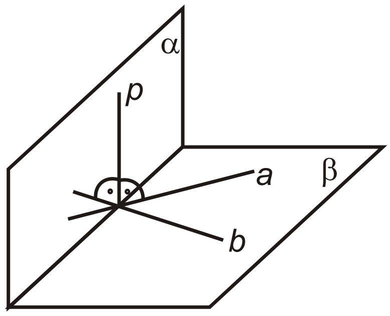
Transformacím bude věnována celá kapitola. Nyní si pouze připomeneme základní vlastnosti otáčení (rotace), protože otáčení budeme potřebovat při studiu zobrazovacích metod.

Popíšeme otáčení v prostoru okolo osy o o úhel φ. Body osy otáčení jsou samodružné (zobrazí se samy na sebe). Bod A se otáčí po **kružnici** k. Určíme **střed** S kružnice k, **poloměr** r a **rovinu** ρ, ve které kružnice k leží - obr. 1.8.

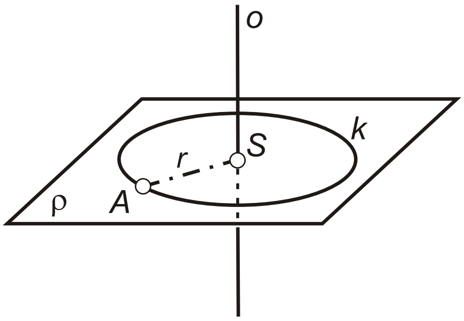
- Rovina otáčení ρ prochází bodem A a je kolmá k ose otáčení o.
- Střed otáčení S je průsečíkem osy o s rovinou ρ.



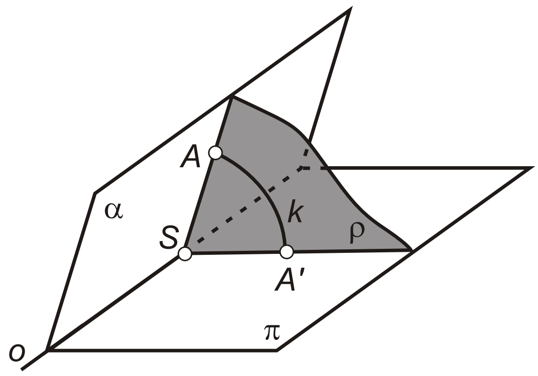
Obrázek 1.6:



Obrázek 1.7:



Obrázek 1.8:



Obrázek 1.9:

- Poloměr otáčení r je velikost úsečky AS, píšeme $r = |AB|$.

Příklad 1.1 Jsou dány různoběžné roviny α a π, v rovině α je dán bod A. Napíšeme postup pro otočení bodu A do roviny π - obr. 1.9.

Řešení:

1. Osou otáčení o je průsečnice rovin α a π ($o = \alpha \cap \pi$).
2. Rovina otáčení ρ je kolmá k ose o a prochází bodem A ($\rho \perp o \wedge A \in \rho$).
3. Střed otáčení S získáme jako průsečík osy o a roviny ρ ($S = o \cap \rho$).
4. Velikost úsečky SA je poloměr otáčení ($r = |SA|$).

□

1.7 Dělící poměr

Na orientované přímce p jsou dány dva různé body A, B. Bod $C \neq B$ je libovolný bod přímky p. Dělící poměr bodu C vzhledem k bodům A, B je číslo

$$\lambda = (A,\, B,\, C) = d(\overrightarrow{AC}) : d(\overrightarrow{BC}),$$

kde $d(\overrightarrow{AC})$, $d(\overrightarrow{BC})$ jsou orientované délky příslušných úseček.

Například je-li bod C středem úsečky AB, jeho dělící poměr vzhledem k bodům A, B je $\lambda = -1$, což plyne ze vztahu $d(\overrightarrow{AC}) = -d(\overrightarrow{BC})$.

Obráceně ke každému číslu $\lambda \neq 1$ můžeme sestrojit na dané orientované přímce AB bod, jehož dělící poměr vůči bodům A, B je dané číslo λ.

1.8 Kontrolní otázky

1.1 Popište, jak lze určit odchylku dvou rovin.

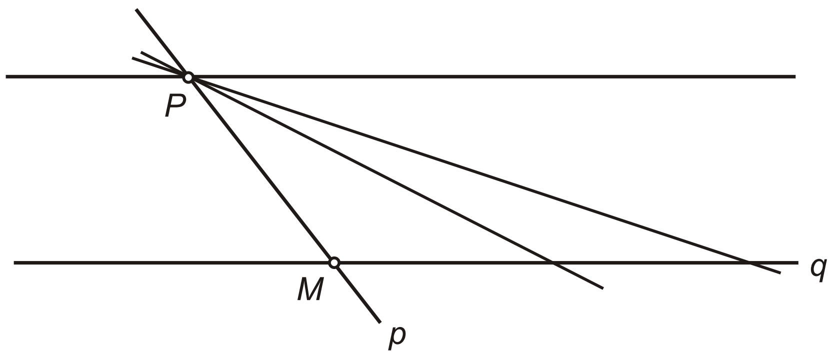
1.2 Uveďte kritérium kolmosti přímky a roviny a kritérium kolmosti dvou rovin.

Kapitola 2

Nevlastní elementy

2.1 Úvodní úvaha

Je dána přímka q a bod P, který na této přímce neleží. Bodem P prochází přímka p (obr.1). Otáčíme přímkou p kolem bodu P a sestrojujeme průsečíky přímky p s přímkou q.



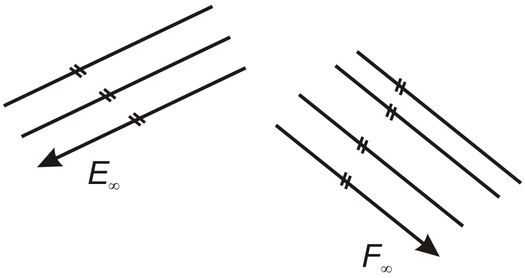
Obrázek 2.1:

V určitém okamžiku se přímka p dostane do speciální polohy ($p \parallel q$), kdy průsečík neexistuje. Nyní nastávají dvě možnosti: buď ve svých úvahách budeme uvádět tento případ zvlášť, nebo si pomůžeme tím, že i pro tuto situaci zavedeme "průsečík" a budeme rovnoběžky považovat za přímky, které mají společný bod. Tento průsečík, který ovšem nemůžeme zobrazit, nazveme nevlastním bodem.

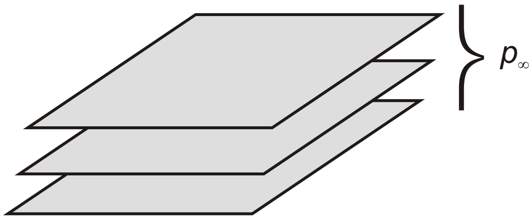
2.2 Nevlastní bod, přímka a rovina

Definice 2.1 *Všechny navzájem rovnoběžné přímky v prostoru mají společný právě jeden bod, který nazýváme* ***nevlastním bodem****. (Někdy říkáme, že rovnoběžné přímky mají stejný* ***směr*** *- nahradili jsme tedy pojem směr pojmem nevlastní bod.) - obr. 2.2*

Podobnou úvahu jako v obr.1 můžeme provést pro dvě roviny a vyslovíme další definice:



Obrázek 2.2:



Obrázek 2.3:

Definice 2.2 *Všechny navzájem rovnoběžné roviny v prostoru mají společnou právě jednu přímku, kterou nazýváme* ***nevlastní přímkou*** *- obr. 2.3.*

Definice 2.3 ***Nevlastní rovina*** *je množina všech nevlastních bodů a nevlastních přímek.*

Nevlastní útvary označujeme stejně jako vlastní, pouze připojujeme index ∞. Tedy např. A_∞ je nevlastní bod, p_∞ je nevlastní přímka apod.

Euklidovský prostor obsahuje pouze vlastní útvary. Jestliže k němu přidáme právě zavedené nevlastní body, přímky a roviny, dostaneme nový prostor, který nazýváme **projektivně rozšířený euklidovský prostor** (nebo zkráceně **rozšířený euklidovský prostor**).

V rozšířeném euklidovském prostoru platí pro vlastní útvary všechny axiomy a věty, které platily v euklidovském prostoru. Pro nevlastní útvary musíme předpokládat platnost dalších tvrzení o incidenci vlastních a nevlastních útvarů:

- Na každé vlastní přímce leží právě jeden nevlastní bod.
- V každé vlastní rovině leží právě jedna nevlastní přímka.
- Nevlastní body všech vlastních přímek jedné roviny leží na nevlastní přímce této roviny.

Poznámka 2.1 Nevlastní bod na vlastní přímce značíme A_∞ a někdy připojujeme k příslušné přímce šipku, což ale nesmí vést k domněnce, že na vlastní přímce existují dva různé nevlastní body. Vlastní přímka má jediný nevlastní bod, neboť patří jednomu systému navzájem rovnoběžných přímek. Dvě rovnoběžné přímky mají jeden společný nevlastní bod.

2.3 Kontrolní otázky

2.1 Definujte nevlastní bod přímky.

2.2 Kolik nevlastních bodů leží na jedné přímce (rozlište přímku vlastní a nevlastní)?

2.3 Je pravdivé tvrzení, že v rozšířené euklidovské rovině mají dvě různé přímky právě jeden společný bod? Je toto trvzení pravdivé i pro rozšížený euklidovský prostor?

Kapitola 3

Základy promítání

3.1 Úvod

Deskriptivní geometrie se zabývá studiem takových zobrazení, kterými můžeme zobrazit prostorové útvary do roviny a naopak. Zpravidla požadujeme, aby tato zobrazení byla vzájemně jednoznačná. Vzájemně jednoznačným zobrazením v deskriptivní geometrii říkáme **zobrazovací metody**.

Protože deskriptivní geometrie vznikla z potřeb praxe, je důležité, aby bylo možné snadno vyčíst velikost objektů, jejich tvar a vzájemnou polohu jednotlivých částí. Další požadavky se týkají názornosti a snadného řešení stereometrických úloh.

Procesu našeho vidění se nejvíce blíží **středové promítání** a jeho speciální případ lineární perspektiva. Tyto zobrazovací metody jsou velmi názorné a často se s nimi setkáváme v situacích, kdy je třeba reálné zobrazení světa, například v umění nebo architektuře. Nevýhodou středového promítání je složitost konstrukcí a obtíže s měřením délek. Proto se v technické praxi více používají zobrazovací metody, které můžeme označit společným názvem **rovnoběžná promítání**. V následujícím textu se tedy velmi krátce zmíníme o principech středového promítání, ale podrobněji se budeme zabývat promítáním rovnoběžným a jeho speciálním případem - pravoúhlým promítáním.

3.2 Středové promítání

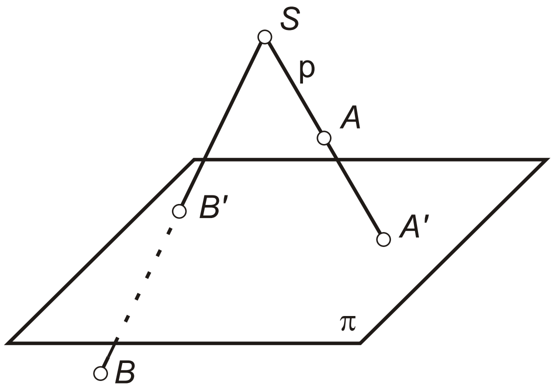
Zvolme v prostoru rovinu π, na kterou budeme zobrazovat - budeme jí říkat **průmětna** a bod S (vlastní), který neleží v rovině π. Bod S se nazývá **střed promítání**. Libovolný bod A v prostoru (různý od bodu S) zobrazíme do roviny π následujícím způsobem: Body S a A proložíme přímku p. Přímka p se nazývá **promítací přímka**. Průsečík A' přímky p s rovinou π je středovým průmětem bodu A do roviny π. Podobně sestrojíme bod B' jako středový průmět bodu B - obr. 3.1.

Vlastnosti středového promítání

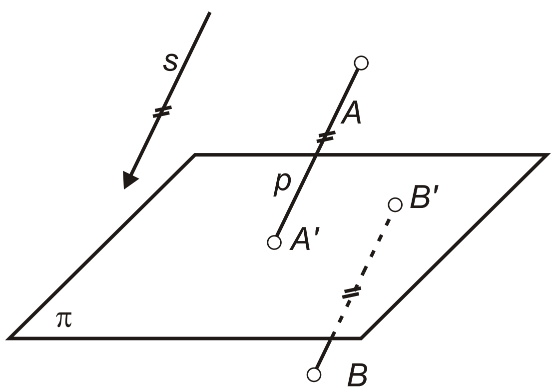
1. Středovým průmětem bodu různého od středu promítání je bod. (Bod S ve středovém promítání nemůžeme zobrazit.)

2. Středovým průmětem přímky, která neprochází středem promítání S, je přímka. Středovým průmětem přímky procházející středem promítání S je bod.
3. Středovým průmětem roviny procházející středem promítání S je přímka. Středovým průmětem roviny, která neprochází středem promítání S, je celá průmětna.
4. Středovým průmětem bodu A ležícího na přímce k je bod A' ležící na středovém průmětu k' přímky k. Obecně leží-li bod na nějaké čáře, pak jeho průmět leží na průmětu té čáry. Říkáme, že se zachovává incidence.

Poznámka 3.1 Pokud budeme pracovat s body z projektivního rozšíření prostoru, zjistíme, že ve středovém promítání může být obrazem vlastního bodu bod nevlastní a naopak obrazem nevlastního bodu bod vlastní. Načrtněte si takovou situaci a uveďte vhodný reálný příklad (např. zobrazení železničních kolejí).



Obrázek 3.1:



Obrázek 3.2:

3.3 Rovnoběžné promítání

Podobně jako ve středovém promítání zvolíme v rovnoběžném promítání rovinu π, na kterou budeme zobrazovat, a které říkáme **průmětna**. Dále zvolíme přímku s, která není rovnoběžná s rovinou π. Říkáme, že přímka s nám určuje **směr promítání**. Rovnoběžný průmět A' bodu A získáme tak, že bodem A vedeme přímku p (nazýváme ji opět **promítací přímka**), která je rovnoběžná s přímkou s a najdeme její průsečík s rovinou π. Podobně najdeme průmět bodu B - obr. 3.2.

Pokud použijeme pojmy z kapitoly o nevlastních elementech, můžeme říct, že rovnoběžné promítání je speciální případ středového promítání, kde středem promítání je nevlastní bod.

Vlastnosti rovnoběžného promítání

1. Rovnoběžným průmětem (vlastního) bodu je (vlastní) bod.

2. Rovnoběžným průmětem přímky, která není směru promítání, je přímka. Rovnoběžným průmětem přímky, která je směru promítání, je bod.
3. Rovnoběžným průmětem roviny, která je směru promítání, je přímka. Rovnoběžným průmětem roviny, která není směru promítání, je celá průmětna.
4. Rovnoběžným průmětem bodu A ležícího na přímce k je bod A' ležící na rovnoběžném průmětu k' přímky k. Obecně leží-li bod na nějaké čáře, pak jeho průmět leží na průmětu té čáry.
5. Rovnoběžným průmětem různoběžek a, b jsou různoběžné přímky nebo přímky splývající, pokud a, b nejsou směru promítání. Jestliže je jedna z přímek a, b směru promítání, pak rovnoběžným průmětem různoběžek a, b je přímka a na ní bod.
6. Rovnoběžnost se zachovává, tj. rovnoběžné přímky se zobrazí na rovnoběžné nebo splývající přímky (nebo na dva body), rovnoběžné úsečky na rovnoběžné úsečky apod.
7. Rovnoběžným průmětem rovnoběžných a shodných úseček jsou rovnoběžné a shodné úsečky (popř. dva body).
8. Rovnoběžným průmětem útvaru ležícího v rovině rovnoběžné s průmětnou je útvar s ním shodný.
9. Dělící poměr se v rovnoběžném promítání zachovává, tj. například střed úsečky se zobrazí na střed úsečky.

Druhy rovnoběžného promítání

Podle vztahu směru promítání vzhledem k průmětně rozlišujeme dva druhy rovnoběžného promítání. Jestliže směr promítání je kolmý k průmětně, pak hovoříme o **pravoúhlém** (nebo také o kolmém či ortogonálním) promítání. Pokud směr promítání není kolmý k průmětně, mluvíme o **kosoúhlém** promítání. Připomeňme, že jsme vyloučili případ, kdy směr promítání je rovnoběžný s průmětnou.

3.4 Pravoúhlé promítání

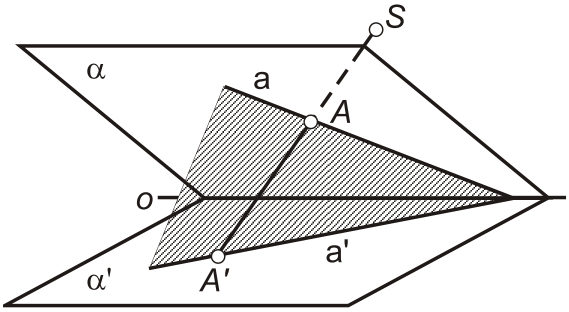
Vlastnosti, které jsme uvedli pro rovnoběžné promítání, doplníme dvěma větami, které platí jen pro pravoúhlé promítání.

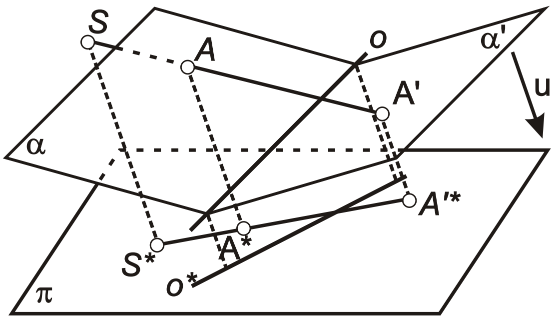
Věta 3.1 (Věta o pravoúhlém průmětu pravého úhlu) *Pravoúhlým průmětem pravého úhlu je pravý úhel, jestliže alespoň jedno jeho rameno je rovnoběžné s průmětnou a druhé není na průmětnu kolmé.*

Věta 3.2 *Velikost pravoúhlého průmětu $A'B'$ úsečky AB je menší nebo rovna velikosti úsečky AB, tj. $|A'B'| \leq |AB|$.*

3.5 Středová kolineace

Jsou dány dvě různé roviny α a α' a bod S, který neleží v žádné z rovin α a α'. **Středová kolineace** je geometrická příbuznost, kdy bodu jedné roviny odpovídá jeho středový průmět z bodu S do druhé roviny. Průsečnice o rovin α a α' se nazývá **osa kolineace** (obr. 3.3).





Obrázek 3.3:

Obrázek 3.4:

Vlastnosti středové kolineace

Uvedeme vlastnosti středové kolineace, které vyplývají z vlastností středového promítání.

1. Bodu odpovídá bod a přímce přímka.
2. Přímky, které si odpovídají ve středové kolineaci, se protínají na ose kolineace nebo jsou s ní rovnoběžné, což ale znamená, že mají společné nevlastní body.
3. Body osy kolineace jsou samodružné, tj. vzor a obraz splývají.
4. Středová kolineace zachovává incidenci. To znamená, že jestliže bod A leží na přímce b, pak pro jejich obrazy A', b' opět platí $A' \in b'$.
5. Body, které si odpovídají ve středové kolineaci, leží na přímce procházející středem kolineace.

Poznámka 3.2 Je nutné si uvědomit, že středová kolineace obecně nezachovává rovnoběžnost a že vlastnímu bodu může odpovídat bod nevlastní a naopak. Také dělící poměr tří kolineárních bodů se obecně ve středové kolineaci nezachovává.

Středová kolineace v rovině

Protože se zabýváme zobrazováním trojrozměrného prostoru na rovinu, zajímá nás, co se stane, promítneme-li středovou kolineaci do roviny.

Promítneme rovnoběžně obě roviny α, α' a střed promítání S do průmětny π tak, aby směr promítání nebyl rovnoběžný s žádnou z rovin α a α' (tj. žádná z rovin se nezobrazí jako přímka). Odpovídající si body A a A' promítnuté do π leží opět na přímce procházející průmětem středu kolineace. Takto získanou příbuznost v rovině nazveme **středovou kolineací v rovině** - obr. 3.4.

Vlastnosti, které jsme uvedli pro středovou kolineaci mezi rovinami, platí také pro středovou kolineaci v rovině.

Znalost středové kolineace využijeme např. při sestrojování řezů na jehlanu a kuželi.

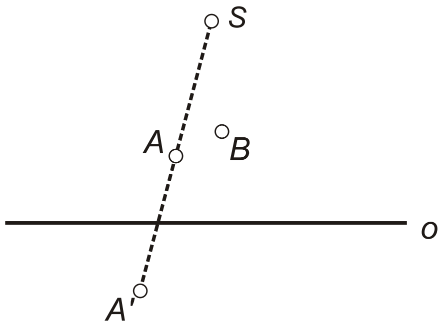
Středová kolineace v rovině je určena středem S, osou o a párem odpovídajících si bodů A, A' (body A, A', S leží na jedné přímce). Pro sestrojování obrazů bodů ve středové kolineaci jsou nejdůležitější tyto tři vlastnosti:

1. Středová kolineace zachovává incidenci.
2. Přímky, které si odpovídají ve středové kolineaci, se protínají na ose kolineace nebo jsou s ní rovnoběžné.
3. Body, které si odpovídají, leží na přímce procházející středem kolineace.

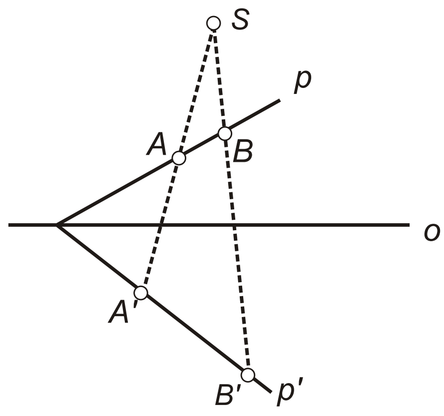
Příklad 3.1 Středová kolineace v rovině je určena středem S, osou o a párem odpovídajících si bodů A, A' - obr. 3.5. Sestrojíme obraz bodu B v kolineaci.

Řešení: (obr. 3.6)

1. Spojíme bod B se vzorem bodu, pro který známe jeho obraz, tj. v našem případě s bodem A - dostaneme přímku p.
2. Najdeme obraz p' přímky p (p a p' se protínají na ose a přímka p' prochází bodem A' - vlastnost 2. a 1.)
3. Protože body, které si odpovídají, leží na přímce procházející středem kolineace- vlastnost 3., sestrojíme přímku SB.
4. Bod B' leží v průsečíku přímek SB a p'.



Obrázek 3.5:



Obrázek 3.6:

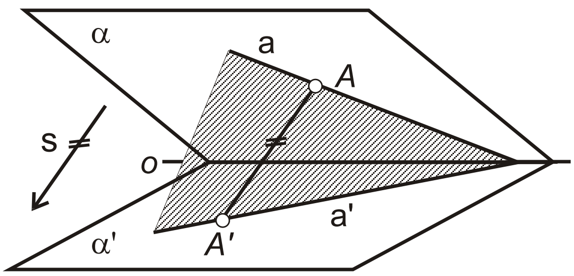
□

Poznámka 3.3 Jak jsme již uvedli, obrazem vlastního bodu ve středové kolineaci nemusí vždy být vlastní bod. Stejně tak se některé nevlastní body zobrazí na vlastní body. Vzory a obrazy nevlastních bodů nazýváme **úběžníky**. Vzor nevlastní přímky se nazývá **úběžnice vzorů** a obraz nevlastní přímky se nazývá **úběžnice obrazů**.

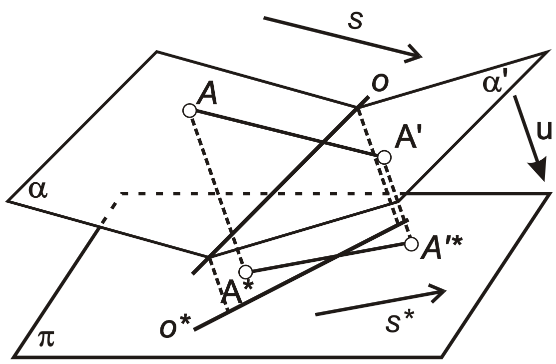
3.6 Osová afinita

Jsou dány dvě různé roviny α a α' a směr s, který není rovnoběžný s žádnou z rovin α a α''. **Osová afinita** je geometrická příbuznost, kdy bodu jedné roviny odpovídá jeho rovnoběžný průmět ve směru s do druhé roviny.

Průsečnice rovin α a α' se nazývá **osa afinity**. (obr. 3.7)



Obrázek 3.7:



Obrázek 3.8:

Vlastnosti osové afinity

(vyplývají z rovnoběžného promítání)

Vlastnosti 1.- 5. jsou podobné vlastnostem pro kolineaci, ale všimněte si pozorně vlastností 6. a 7.

1. Bodu odpovídá bod a přímce přímka.
2. Přímky, které si odpovídají v osové afinitě, se protínají na ose afinity nebo jsou s ní rovnoběžné.
3. Body osy afinity jsou samodružné.
4. Osová afinita zachovává incidenci.(To znamená, že jestliže bod A leží na přímce b, pak pro jejich průměty A', b' opět platí $A' \in b'$.)
5. Body, které si odpovídají v osové afinitě leží na rovnoběžce se středem promítání.
6. Osová afinita zachovává rovnoběžnost.
7. Osová afinita zachovává dělící poměr.

Osová afinita v rovině

Podobně jako kolineaci promítneme rovnoběžně i afinitu.

Promítneme rovnoběžně obě roviny α, α' a směr promítání s do průmětny π tak, aby směr promítání u do roviny π nebyl rovnoběžný s žádnou z rovin α a α' (tj. žádná z rovin se nezobrazí jako přímka) a aby nebyl rovnoběžný se směrem s (dostali bychom identitu). Odpovídající si body A a A' promítnuté do π leží na přímce rovnoběžné s promítnutým směrem s.

Takto získanou příbuznost nazveme **osovou afinitou v rovině** - obr. 3.8.

Uvedené vlastnosti osové afinity mezi rovinami budou platit i pro osovou afinitu v rovině.

Osovou afinitu využijeme při sestrojování řezů na hranolu a kuželi a při otáčení v Mongeově projekci a axonometrii.

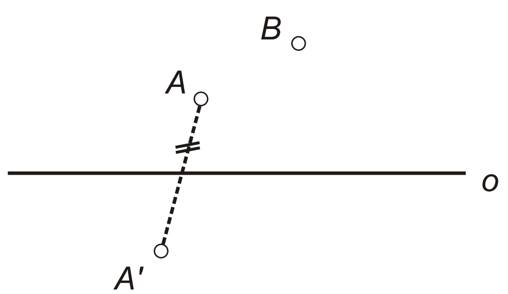
Nejčastější určení osové afinity je osou o a párem odpovídajících si bodů A a A' (tím je určen směr afinity). Opět zopakujeme tři vlastnosti, které využijeme při sestrojování obrazu nebo vzoru daného bodu:

1. Osová afinita zachovává incidenci
2. Přímky, které si odpovídají v osové afinitě, se protínají na ose afinity nebo jsou s ní rovnoběžné.
3. Body, které si odpovídají, leží na rovnoběžce se směrem afinity.

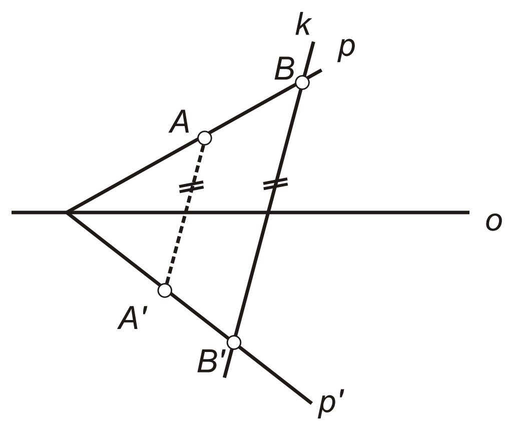
Příklad 3.2 Osová afinita v rovině je určena osou o a párem odpovídajících si bodů A, A' - obr. 3.9. Sestrojíme obraz bodu B v afinitě.

Řešení: (obr. 3.10)

1. Spojíme bod B s bodem A - dostaneme přímku p. (Obecně se vzorem bodu, pro který známe jeho obraz.)
2. Najdeme obraz p' přímky p (p a p' se protínají na ose a přímka p' prochází bodem A' - vlastnost 2 a 1)
3. Protože body, které si odpovídají, leží na přímce směru afinity a tento směr určuje přímka AA' (vlastnost 3), sestrojíme přímku k rovnoběžnou s přímkou AA' a procházející bodem B.
4. Bod B' leží v průsečíku přímek k a p'.



Obrázek 3.9:



Obrázek 3.10:

□

Poznámka 3.4 Osová afinita může být určena i jiným způsobem než osou a párem odpovídajících bodů, např. osou, směrem a párem odpovídajících si přímek (které se protínají na ose) nebo dvěma páry odpovídajících si přímek. Stejně i kolineace může být určena jinak než středem, osou a párem odpovídajících si bodů.

3.7 Kontrolní otázky

3.1 Vyslovte větu o pravoúhlém průmětu pravého úhlu.

3.2 Jakou délku může mít (v porovnání s délkou zobrazované úsečky) průmět úsečky v pravoúhlém promítání a jakou v kosoúhlém?

3.3 Rovnoběžné promítání zachovává dělící poměr. Je pravda, že obrazem středu úsečky je v rovnoběžném promítání střed úsečky, která je průmětem dané úsečky?

3.4 Jakou vlastnost mají body, které leží na ose afinity nebo kolineace?

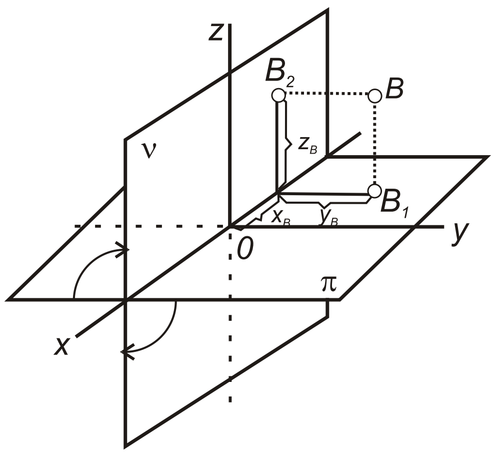
3.5 Jakou vlastnost mají body úběžnic kolineace?

Kapitola 4

Mongeovo promítání

4.1 Úvod

Mongeovo promítání je pravoúhlé promítání na dvě navzájem kolmé průmětny. Jeho výhodou je snadné řešení stereometrických úloh, nevýhodou může být menší názornost a složitější orientace ve dvou pohledech na jeden objekt.



Obrázek 4.1:

Zvolíme v prostoru dvě navzájem kolmé roviny. Rovinu π volíme ve vodorovné poloze - říkáme jí **půdorysna** - a rovinu ν v poloze svislé - **nárysna**. Průsečnici rovin π a ν ztotožníme s osou x souřadnicového systému a říkáme jí **základnice**. Osu y volíme v rovině π, tak aby byla kolmá k x. Průsečíkem O os x a y prochází osa z, leží v rovině ν a je kolmá k osám x, y. V Mongeově promítání budeme používat pravotočivý souřadnicový systém.

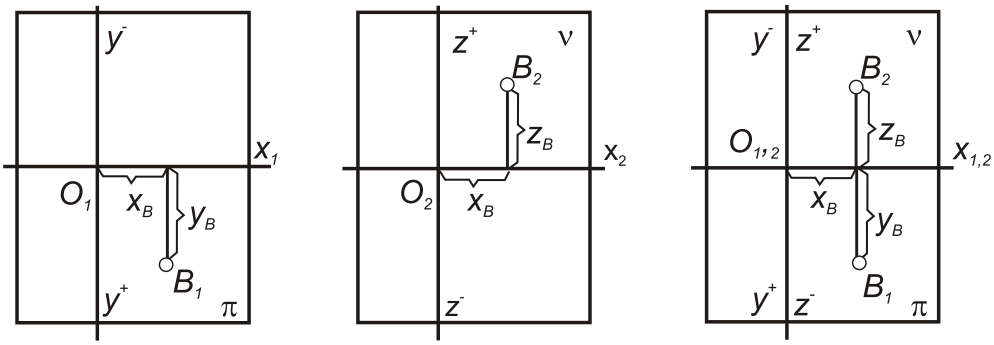
Poznámka 4.1 Pokud bychom chtěli promítat pouze na jednu průmětnu, pak útvar, který promítneme, nebude v prostoru jednoznačně určen. Další možností je použít kótované promítání, to znamená, že ke každému bodu budeme připisovat jeho vzdálenost od průmětny. Toto promítání se používá při řešení střech a při tvorbě map (vstevnice), to znamená většinou v případech, kdy není nutné řešit složitější prostorové vztahy.

4.2 Obraz bodu

Nejprve kolmo promítneme bod B do půdorysny a průmět označíme indexem 1 - dostaneme bod B_1 - obr. 4.2a), potom bod B promítneme do nárysny, průmět označíme indexem 2 a získáme bod B_2 - obr. 4.2b). Nyní máme dvě možnosti, jak si představit sdružení průmětů. Buď otočíme rovinu π kolem osy x tak, aby kladná část osy y splynula se zápornou částí osy z - obr. 4.1 nebo si představíme nárysnu a půdorysnu jako dvě průhledné folie, které položíme na sebe, tak aby se překrývaly průměty osy x_1 a x_2 a bod O_1 a O_2 - obr. 4.2.

Bod B_1 nazýváme **půdorysem** a bod B_2 **nárysem** bodu B. Spojnice nárysu a půdorysu téhož bodu je kolmá k základnici a nazývá se **ordinála**. (Půdorys je vlastně pohled shora a nárys je pohled zpředu).

Z obrázku 4.2 c) je vidět jak sestrojíme nárys a půdorys bodu, známe-li jeho souřadnice. V našem případě jsou všechny tři souřadnice kladné. Nárysu a půdorysu bodu B říkáme **sdružené průměty** bodu B. (Neplést si se sdruženými průměry, ty najdeme u elipsy.)



a) b) c)

Obrázek 4.2:

Příklad 4.1 Určeme, kde bude ležet nárys a půdorys bodů B, C, D, E, jestliže umístíme každý do jiného kvadrantu vymezeného nárysnou a půdorysnou - obr. 4.3.

Řešení: (obr. 4.4) Bod B, který se nachází nad půdorysnou a před nárysnou, má půdorys pod osou a nárys nad osou $x_{1,2}$.

Bod C leží za nárysnou a nad půdorysnou a oba jeho průměty leží nad osou $x_{1,2}$.

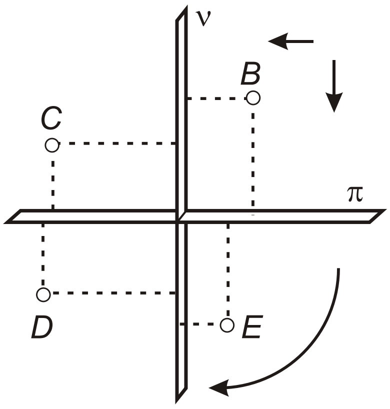
Nárys i půdorys bodu E ležícího pod půdorysnou a před nárysnou najdeme pod osou $x_{1,2}$.

Pro bod D, který je za nárysnou a pod půdorysnou platí, že nárys je pod a půdorys nad osou $x_{1,2}$.

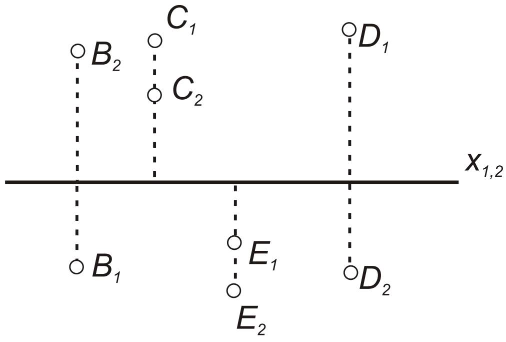
□

4.3 Obraz přímky

Z vlastností rovnoběžného promítání víme, že obrazem přímky je buď přímka, nebo bod. Pokud přímka p není kolmá k ose x, pak jejím půdorysem a nárysem jsou přímky p_1 a p_2, které nejsou kolmé k ose $x_{1,2}$ - obr. 4.5 a 4.6. Jestliže je přímka kolmá k půdorysně je jejím půdorysem bod a nárysem přímka kolmá k ose $x_{1,2}$, pro přímku kolmou k nárysně bude nárysem bod a půdorysem přímka kolmá k ose $x_{1,2}$. Ve všech těchto případech je přímka svými průměty jednoznačně určena.



Obrázek 4.3:

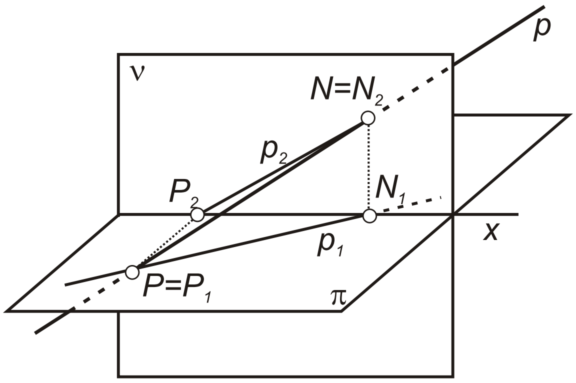


Obrázek 4.4:

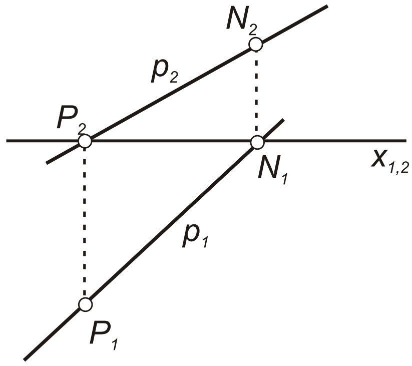
Je-li přímka kolmá k ose x a přitom není kolmá k žádné průmětně, pak její sdružené průměty splývají a jsou kolmé k $x_{1,2}$. Jen v tomto případě není přímka určena svými sdruženými průměty. K určení je v tomto případě nutná znalost např. průmětů dvou různých bodů přímky.

Přímkou, která není kolmá k průmětně, můžeme proložit rovinu kolmou k průmětně. Této rovině říkáme **promítací rovina přímky**. Přímkou můžeme proložit **půdorysně promítací rovinu** kolmou k půdorysně nebo **nárysně promítací rovinu** kolmou k nárysně.

Na zvláštní polohy přímky vzhledem k průmětně se podívejme v příkladu 4.2.



Obrázek 4.5:

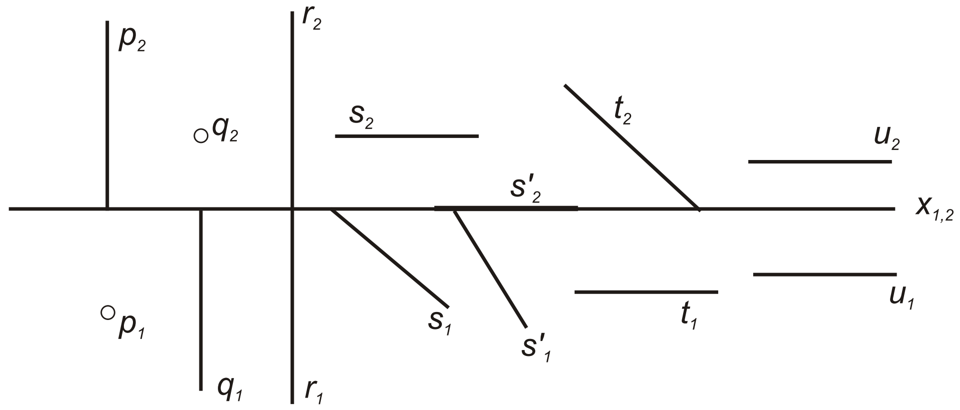


Obrázek 4.6:

Příklad 4.2 V obrázku 4.7 určíme polohu jednotlivých přímek vzhledem k průmětnám.

Řešení: Přímky p, q, r jsou kolmé k základnici. Přímka p je navíc kolmá k půdorysně a q je kolmá k nárysně. Přímka r není svými průměty jednoznačně určena a musíme ji dourčit sdruženými průměty dvou bodů, které na ní leží. Přímka s je rovnoběžná s půdorysnou a přímka t s nárysnou, s' v půdorysně leží a u je rovnoběžná se základnicí.

□



Obrázek 4.7:

Vzájemný vztah přímky a bodu, který na ní leží, je v Mongeově promítání dán větou:

Věta 4.1 *Leží-li bod M na přímce p, pak $M_1 \in p_1$ a $M_2 \in p_2$.*

Jestliže přímka p je určena svými průměty (tím vylučujeme přímky kolmé k ose x a nejsou promítací), pak pro sdružené průměty bodu M a přímky p platí: pokud $M_1 \in p_1$ a $M_2 \in p_2$, pak bod M leží na přímce p.

Přímka je jednoznačně určena dvěma body. Pro sdružené průměty přímky můžeme vyslovit následující větu:

Věta 4.2 *Sdružené průměty přímky $p = AB$ jsou v Mongeově promítání jednoznačně určeny průměty dvou jejích bodů A, B.*

Vlastní bod, ve kterém přímka protne průmětnu, nazýváme **stopník**. Půdorysný stopník P je bod, ve kterém přímka protne půdorysnu, nárysný stopník N je bod, ve kterém přímka protíná nárysnu - obr. 4.5.

Pro půdorysný stopník P přímky p platí: $P_1 \in p_1$, $P_2 \in p_2$ a $P_2 \in x_{1,2}$.

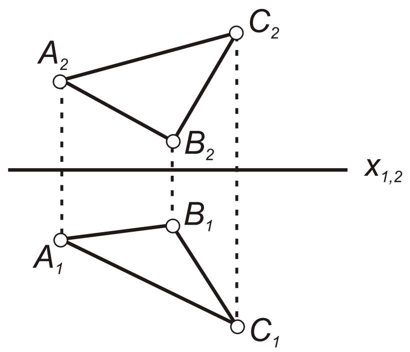
Pro nárysný stopník N přímky p platí: $N_1 \in p_1$, $N_2 \in p_2$ a $N_1 \in x_{1,2}$ - obr. 4.6.

Poznámka 4.2 Přímka, která je rovnoběžná s průmětnou, má jen jeden stopník.

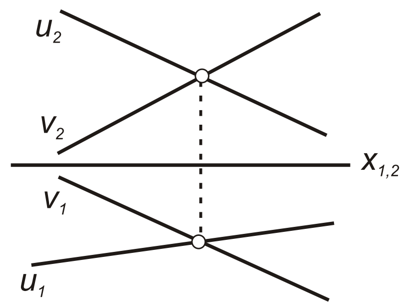
4.4 Obraz roviny

Pravoúhlým průmětem roviny, která není kolmá k průmětně, je celá průmětna. Rovinu v Mongeově projekci zadáme pomocí sdružených průmětů určujících prvků. Ukažme si nejobvyklejší způsoby určení roviny.

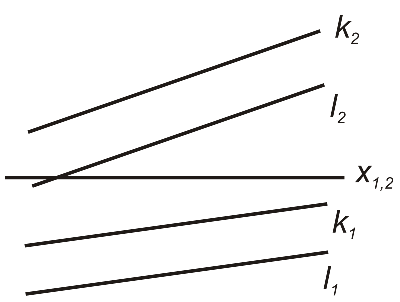
1. **Třemi body**, které neleží v přímce (nekolineární body) - obr. 4.8.
2. **Dvěma různoběžkami** - obr. 4.9. Sdružené průměty průsečíku různoběžek musí ležet na ordinále.



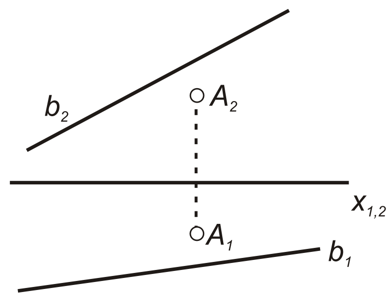
Obrázek 4.8:



Obrázek 4.9:



Obrázek 4.10:



Obrázek 4.11:

3. **Dvěma rovnoběžkami** - obr. 4.10. Nárysem i půdorysem rovnoběžek jsou opět rovnoběžky (mohou ovšem i splývat).
4. **Bodem a přímkou** - obr. 4.11. Aby byla rovina určena bodem a přímkou, nesmí bod ležet na přímce.

Speciálním případem je zadání roviny stopami. **Stopa** roviny ρ je přímka, ve které rovina ρ protne průmětnu. Průsečnice roviny ρ s nárysnou se nazývá **nárysná stopa** a značíme ji n^ρ. Průsečnice roviny ρ s půdorysnou se nazývá **půdorysná stopa** a značíme ji p^ρ.

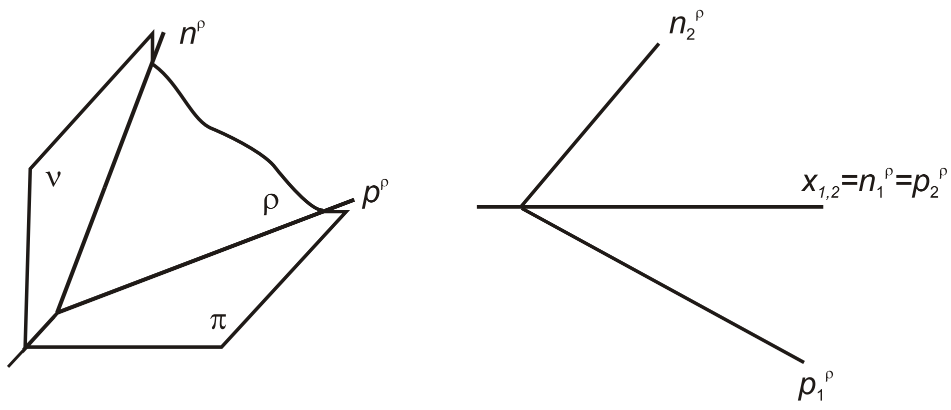
Stopy roviny jsou dvě přímky (rovnoběžné nebo různoběžné). Rovina určená stopami je tedy opět určena rovnoběžkami nebo různoběžkami.

Pro půdorys nárysné stopy n_1^ρ a nárys půdorysné stopy p_2^ρ platí $n_1^\rho = p_2^\rho = x_{1,2}$. Přímky n_2^ρ a p_1^ρ se protínají na ose $x_{1,2}$ - obr. 4.12 nebo jsou obě rovnoběžné s osou $x_{1,2}$.

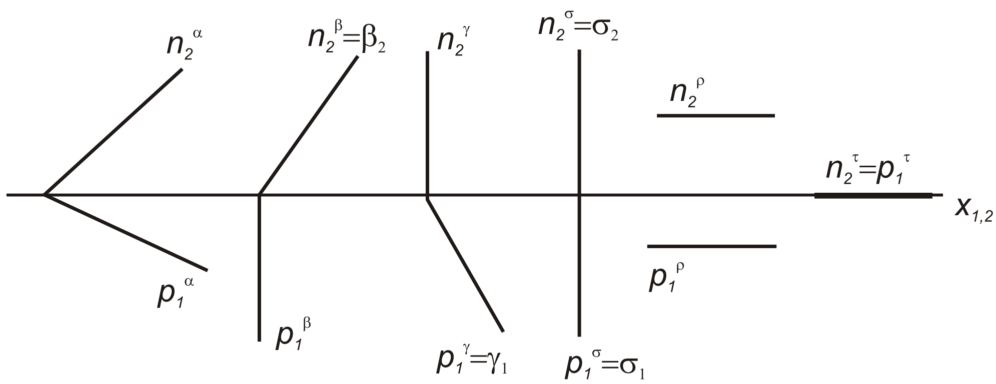
Příklad 4.3 V obrázku 4.13 rozhodneme, jakou polohu mají roviny, určené svým stopami, vzhledem k průmětnám.

Řešení: Rovina ρ je v obecné poloze vzhledem k průmětnám, není kolmá ani rovnoběžná s žádnou s průměten. Rovina β je kolmá k nárysně, rovina γ je kolmá k půdorysně. Rovina σ je kolmá k ose x a ρ je s x rovnoběžná. Posledním případem je rovina τ, která obsahuje osu x, v tomto případě není rovina stopami určena.

□



Obrázek 4.12:



Obrázek 4.13:

Poznámka 4.3 Rovina, která je rovnoběžná s průmětnou, má jen jednu stopu.

V následujících kapitolách ukážeme 12 základních úloh, pomocí kterých budeme schopni řešit složitější konstrukce jako např. sestrojení těles v obecné poloze, jejich průniky či řezy na plochách. Každou složitější úlohu pak rozložíme na tyto základní úlohy, které už budeme umět řešit (provedeme dekompozici, což je velice důležitý postup plynoucí z analytického geometrické myšlení).

Rozdělíme úlohy na dva typy - polohové a metrické. Polohové úlohy řeší vztahy mezi jednotlivými útvary, jako je vzájemná poloha, průnik, rovnoběžnost. Vzdálenosti, velikost objektů, kolmost nám pomohou určit úlohy metrické.

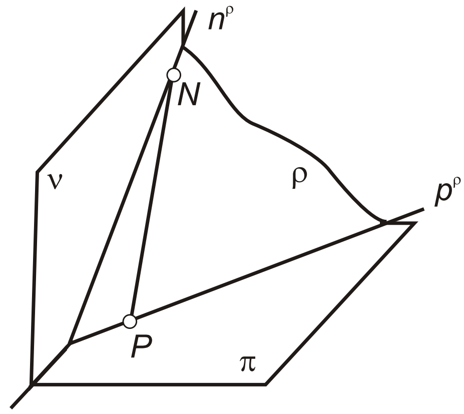
Uvedeme vždy důležité skutečnosti, které budeme využívat, a ukážeme přímo na příkladech řešení základních úloh.

4.5 Polohové úlohy

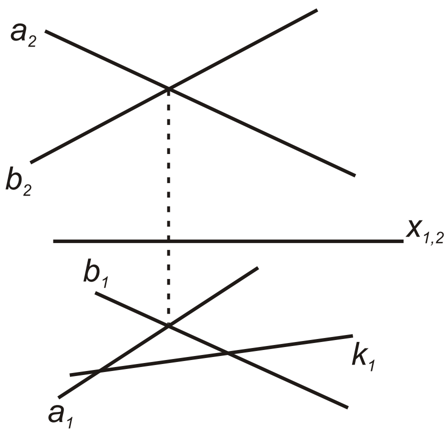
4.5.1 Přímka v rovině (základní úloha Z1)

Při řešení této úlohy je vhodné uvědomit si následující fakta:

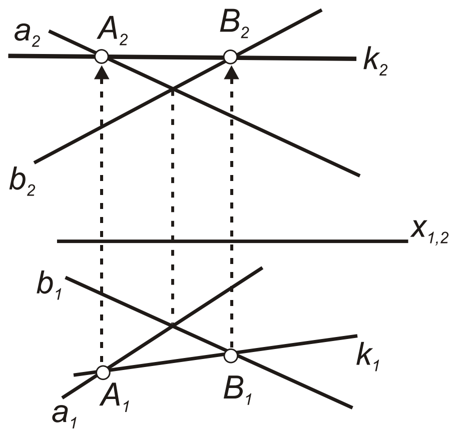
- Leží-li přímka v rovině, je se všemi přímkami roviny různoběžná nebo rovnoběžná.
- Stopník přímky ležící v rovině leží na její stopě (Půdorysný stopník na půdorysné stopě, nárysný stopník na nárysné stopě).
- Chceme-li sestrojit stopu roviny, určíme stopníky dvou přímek ležících v rovině. Půdorysná stopa je spojnicí půdorysných stopníků, nárysná stopa je spojnicí nárysných stopníků.



Obrázek 4.14:



Obrázek 4.15:

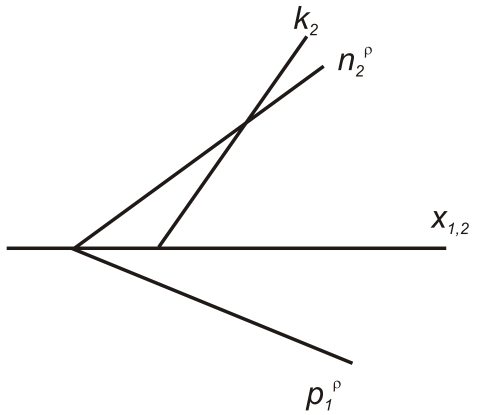


Obrázek 4.16:

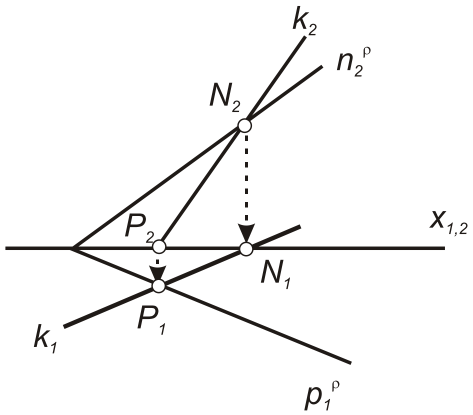
Příklad 4.4 Je dána rovina ρ a jeden průmět přímky k ležící v rovině ρ. Sestrojme druhý průmět přímky k.
a) Rovina ρ je učena přímkami a, b - obr. 4.15.
b) Rovina ρ je učena stopami - obr. 4.17.

Řešení: a) obr. 4.16

1. Sestrojíme průsečík A_1 přímky a_1 a k_1.
2. Sestrojíme průsečík B_1 přímky b_1 a k_1.
3. Odvodíme druhé průměty bodů A a B Na přímce a_2 dostaneme bod A_2 a podobně bod B_2.



Obrázek 4.17:



Obrázek 4.18:

4. Přímka k_2 je spojnicí bodů A_2 a B_2.

b) obr. 4.18

1. Sestrojíme nárys nárysného stopníku N_2 - průsečík přímky k_2 a stopy n_2^ρ.
2. Sestrojíme nárys půdorysného stopníku P_2 - průsečík přímky k_2 a osy $x_{1,2} = p_2^\rho$.
3. Určíme body N_1 a P_1, N_1 leží na ose $x_{1,2}$ a P_1 na stopě p_1^ρ.
4. Přímka k_1 je spojnicí bodů N_1 a P_1.

□

Hlavní přímky roviny

Hlavní přímka roviny ρ je přímka, která leží v rovině ρ a je rovnoběžná s průmětnou.

Horizontální hlavní přímka (hlavní přímka první osnovy) je rovnoběžná s půdorysnou. Speciálním případem horizontální hlavní přímky je půdorysná stopa. Všechny horizontální hlavní přímky jedné roviny jsou navzájem rovnoběžné - 4.19.

Frontální hlavní přímka (hlavní přímka druhé osnovy) je rovnoběžná s nárysnou. Speciálním případem frontální hlavní přímky je nárysná stopa. Všechny frontální hlavní přímky jedné roviny jsou navzájem rovnoběžné - 4.20.

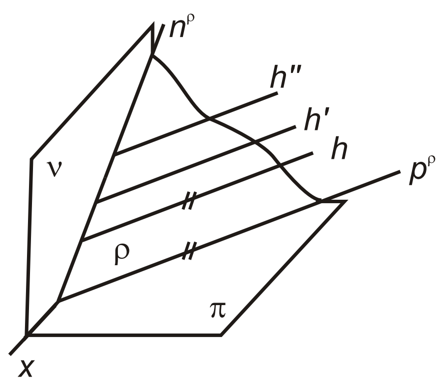
Příklad 4.5 Zobrazte nějakou (libovolnou) a) horizontální hlavní přímku roviny ρ - obr. 4.21, b) frontální hlavní přímku roviny ρ - obr. 4.23.

Řešení: a) (obr.4.22) Horizontální hlavní přímka je rovnoběžná s půdorysnou, proto je její nárys rovnoběžný s osou $x_{1,2}$.

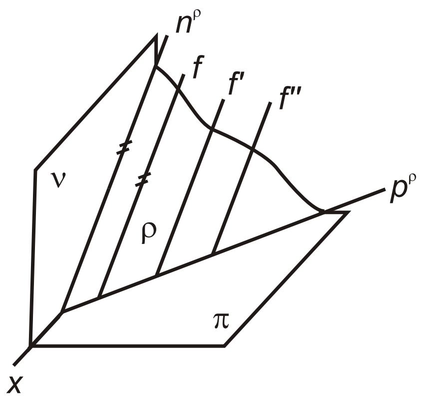
1. Sestrojíme nárys přímky h. ($h_2 || x_{1,2}$).
2. Půdorys přímky h je rovnoběžný se stopou p_1^ρ. Použijeme stopník N přímky h.

Kdyby rovina nebyla určena stopami, odvodili bychom půdorys pomocí průsečíků s jinými přímkami roviny.

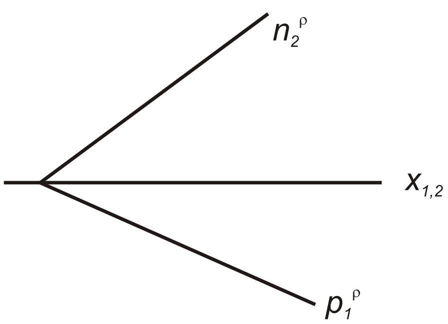
b) (obr.4.24) Frontální hlavní přímka je rovnoběžná s nárysnou, proto je její půdorys rovnoběžný s osou $x_{1,2}$.



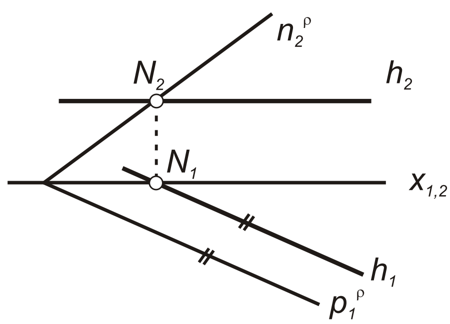
Obrázek 4.19:



Obrázek 4.20:



Obrázek 4.21:



Obrázek 4.22:

1. Sestrojíme půdorys přímky f. ($f_1||x_{1,2}$).
2. Nárys přímky f je rovnoběžný se stopou n_2^ρ. Použijeme stopník P přímky f.

Kdyby rovina nebyla určena stopami, odvodili bychom nárys pomocí průsečíků s jinými přímkami roviny.

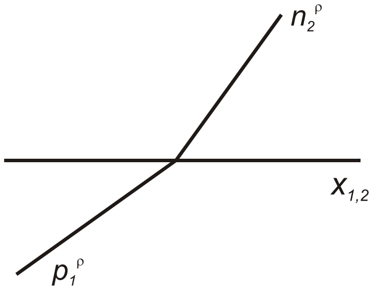
□

Spádové přímky roviny

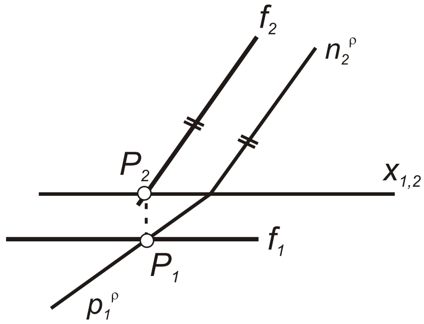
Spádová přímka je kolmá na hlavní přímky jednoho systému - obr. 4.25. To znamená, že máme dva systémy spádových přímek - spádové přímky kolmé na horizontální hlavní přímky - **spádové přímky první osnovy** a spádové přímky kolmé na frontální hlavní přímky - **spádové přímky druhé osnovy**.

Příklad 4.6 Sestrojíme spádovou přímku s první osnovy (kolmou k horizontálním hlavním přímkám).

Řešení: (obr. 4.26) Půdorys s_1 spádové přímky je kolmý k půdorysné stopě p_1^ρ, což plyne z věty o pravoúhlém průmětu pravého úhlu. Najdeme půdorysy stopníků této přímky a odvodíme je do nárysu. Nárys s_2 spádové přímky prochází nárysy těchto stopníků. Nárys spádové přímky nemá žádnou speciální polohu vůči stopám nebo ose x.

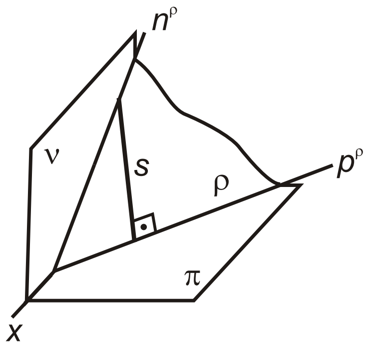


Obrázek 4.23:

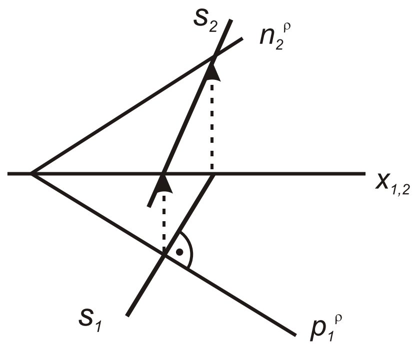


Obrázek 4.24:

□



Obrázek 4.25:



Obrázek 4.26:

4.5.2 Bod v rovině (základní úloha Z2)

Bod leží v rovině, právě když leží na některé přímce roviny. Chceme-li odvodit druhý průmět bodu ležícího v rovině, zvolíme přímku procházející tímto bodem (může to být i přímka hlavní) a použijeme řešení úlohy 4.5.1, tj. Z1. Bod leží na odvozené přímce a na ordinále.

Příklad 4.7 Rovina ρ je určena přímkami a, b. Sestrojme nárys bodu M ležícího v rovině ρ, známe-li jeho půdorys - obr.4.27.

Řešení: (obr.4.28)

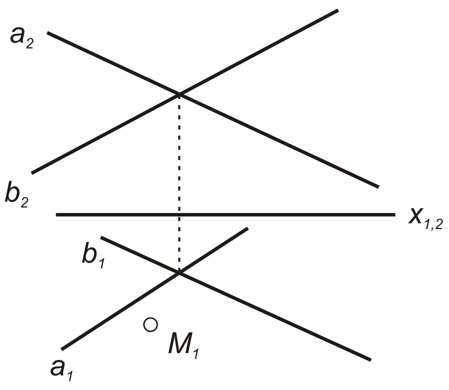
1. Bodem M_1 vedeme přímku k_1, tím jsme úlohu převedli na úlohu 4.5.1, tj. Z1.

   a) Sestrojíme průsečík A_1 přímky a_1 a k_1.

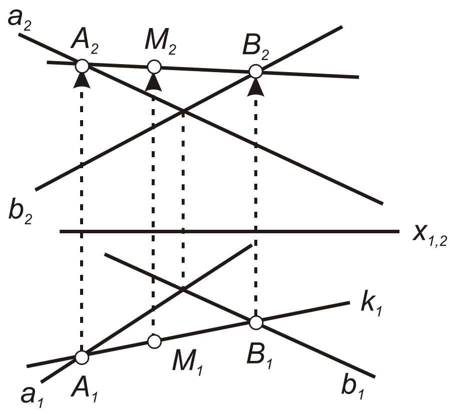
   b) Sestrojíme průsečík B_1 přímky b_1 a k_1.

   c) Odvodíme body A_2 a B_2. Po ordinále na přímce a_2 dostaneme bod A_2, na přímce b_2 dostaneme bod B_2.

   d) Přímka k_2 je spojnicí bodů A_2 a B_2.



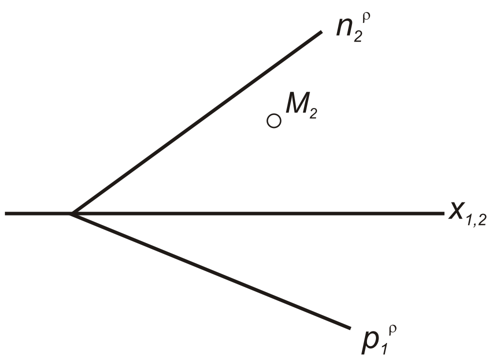
Obrázek 4.27:



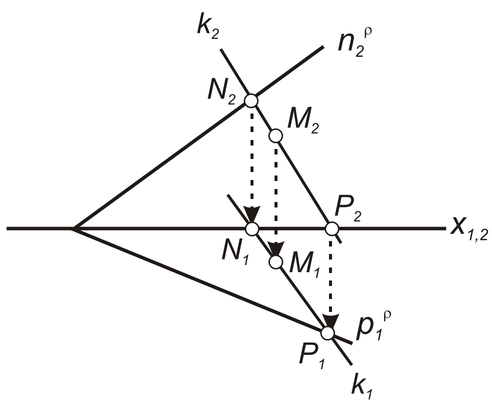
Obrázek 4.28:

2. Bod M_2 najdeme na přímce k_2 a na ordinále vedené bodem M_1.

□



Obrázek 4.29:



Obrázek 4.30:

Příklad 4.8 Rovina ρ je určena stopami. Sestrojme půdorys bodu M ležícího v rovině ρ, známe-li jeho nárys - obr.4.29.

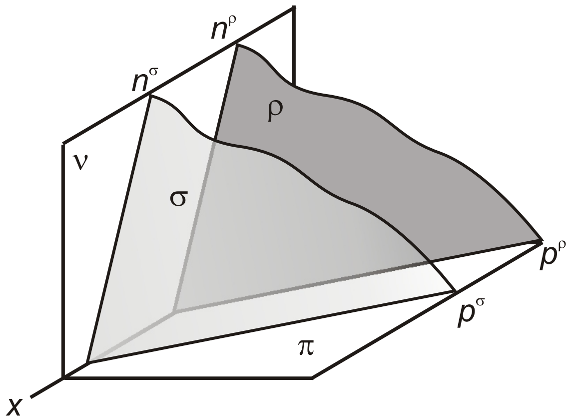
Řešení: (obr.4.30)

1. Bodem M_2 vedeme přímku k_2, tím jsme úlohu převedli na úlohu 4.5.1, tj. Z1.
   a) Sestrojíme nárys nárysného stopníku N_2 - průsečík přímky k_2 a stopy n_2^ρ.
   b) Sestrojíme nárys půdorysného stopníku P_2 - průsečík přímky k_2 a osy $x_{1,2} = p_2^\rho$.
   c) Odvodíme body N_1 a P_1, N_1 leží na ose $x_{1,2}$ a P_1 na stopě p_1^ρ.
   d) Přímka k_1 je spojnicí bodů N_1 a P_1.
2. Bod M_1 najdeme na přímce k_1 a na ordinále vedené bodem M_2.

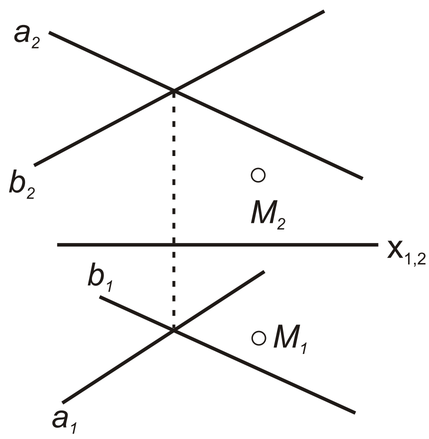
□

Při řešení této úlohy je vhodné uvědomit si následující fakta:

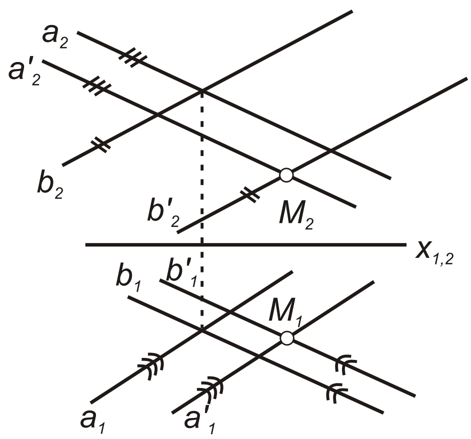
- Kritérium rovnoběžnosti přímky a roviny. Kritérium rovnoběžnosti dvou rovin.
- Rovnoběžné roviny mají rovnoběžné stopy.
- Stopy roviny obecně neprochází nárysem i půdorysem bodu ležícím v této rovině (aby nastal tento případ, musel by bod ležet na ose x).



Obrázek 4.31:



Obrázek 4.32:



Obrázek 4.33:

4.5.3 Rovnoběžné roviny (základní úloha Z3)

Příklad 4.9 Rovina ρ je určena přímkami a, b. Bodem M veďte rovinu σ rovnoběžnou s rovinou ρ - obr.4.32.

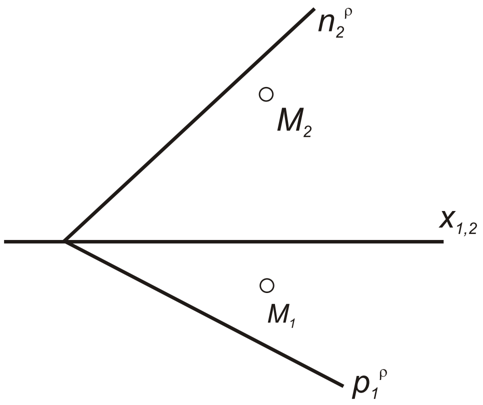
Řešení: (obr.4.33)

1. Bodem M vedeme přímku a' rovnoběžnou s přímkou a ($a'_1||a_1$, $a'_2||a_2$).
2. Bodem M vedeme přímku b' rovnoběžnou s přímkou b ($b'_1||b_1$, $b'_2||b_2$).
3. Přímkami a' b' je určena rovina σ.

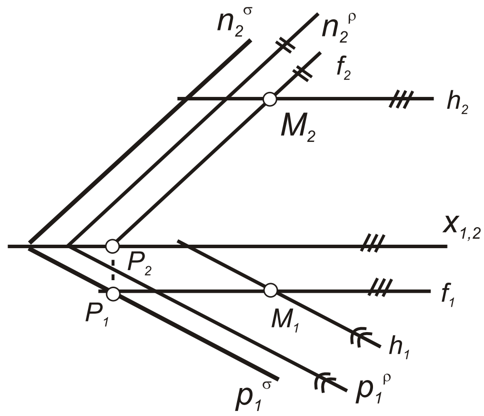
□

Příklad 4.10 Rovina ρ je určena stopami. Bodem M veďte rovinu σ rovnoběžnou s rovinou ρ - obr.4.34. Sestrojte stopy roviny σ.

Řešení: (obr.4.35)



Obrázek 4.34:



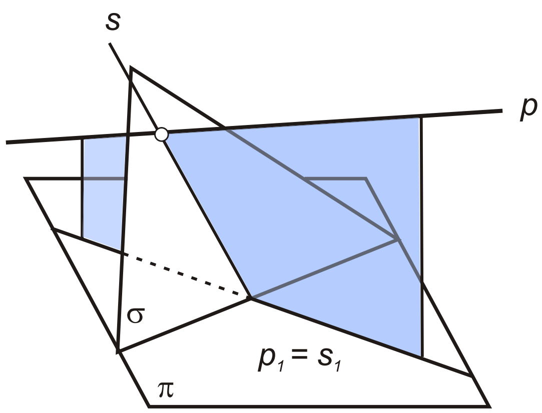
Obrázek 4.35:

1. Bodem M vedeme hlavní přímku h rovnoběžnou s půdorysnou stopou roviny ρ ($h_1 || p_1^\rho$, $h_2 || p_2^\rho = x_{1,2}$).
2. Bodem M vedeme hlavní přímku f rovnoběžnou s nárysnou stopou roviny ρ ($f_2 || n_2^\rho$, $f_1 || n_1^\rho = x_{1,2}$).
3. Přímkami h, f je určena rovina σ.
4. Pro sestrojení stop roviny σ nám stačí nalézt stopník jedné z přímek $h\,f$ - našli jsme půdorysný stopník P přímky f.
5. Půdorysná stopa roviny σ prochází půdorysným stopníkem a je rovnoběžná s půdorysnou stopou roviny ρ.
6. Nárysná stopa roviny σ je rovnoběžná s nárysnou stopou roviny ρ a protíná se s půdorysnou stopou na ose x.

□

4.5.4 Průsečík přímky s rovinou (základní úloha Z4)

Pro určení průsečíku přímky s rovinou použijeme **metodu krycí přímky**. V rovině σ zvolíme přímku s, která se “kryje” s přímkou p v některém průmětu, tj. leží s přímkou p v jedné promítací rovině, a zároveň leží v rovině σ. Přímka s je průsečnicí roviny σ a promítací roviny přímky p. Průsečík přímky p a s je zároveň průsečíkem přímky p s rovinou σ. V průmětně, ve které průměty přímek p a s nesplývají, najdeme jejich průsečík a odvodíme pomocí ordinály do druhé průmětny.



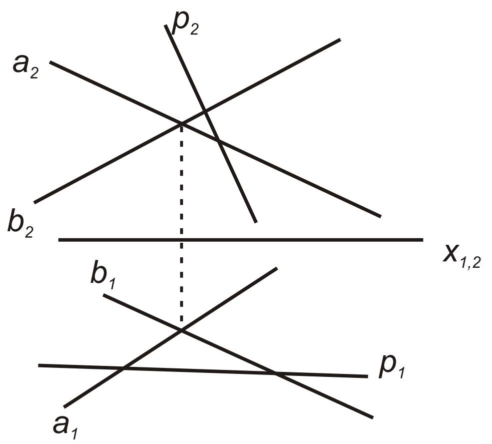
Obrázek 4.36:

Příklad 4.11 Rovina σ je určena přímkami a, b. Sestrojte průsečík přímky p s rovinou σ - obr.4.37.

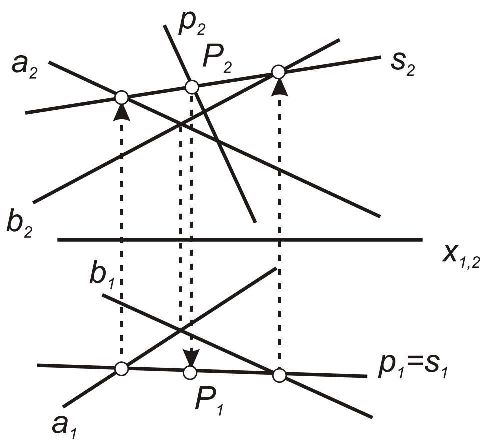
Řešení: (obr.4.38)

1. V rovině σ zvolíme **půdorysně krycí přímku** s ($s_1 = p_1$, $s \subset \sigma$).
2. Pomocí průsečíků přímky s s přímkami a, b odvodíme přímku s_2 (úloha 4.5.1, tj. Z1).
3. Průsečík P_2 přímek p_2 a s_2 je nárysem hledaného průsečíku přímky p s rovinou σ.
4. Půdorys P_1 průsečíku najdeme na přímce p_1 a na ordinále vedené bodem P_2.

□



Obrázek 4.37:



Obrázek 4.38:

Příklad 4.12 Rovina σ je určena stopami. Sestrojte průsečík přímky p s rovinou σ - obr.4.39.

Řešení: (obr.4.40)

1. V rovině σ zvolíme **nárysně krycí přímku** s ($s_2 = p_2$, $s \subset \sigma$).
2. Pomocí stopníků odvodíme přímku s do půdorysu (úloha 4.5.1, tj. Z1).
3. Průsečík P_1 přímek p_1 a s_1 je půdorysem hledaného průsečíku přímky p s rovinou σ.
4. Nárys P_2 průsečíku najdeme na přímce p_2 a na ordinále vedené bodem P_1.

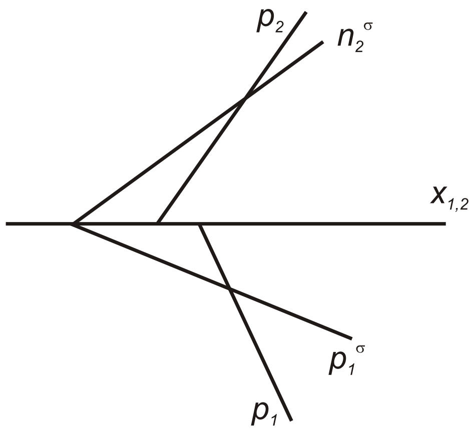
□

4.5.5 Průsečnice dvou rovin (základní úloha Z5)

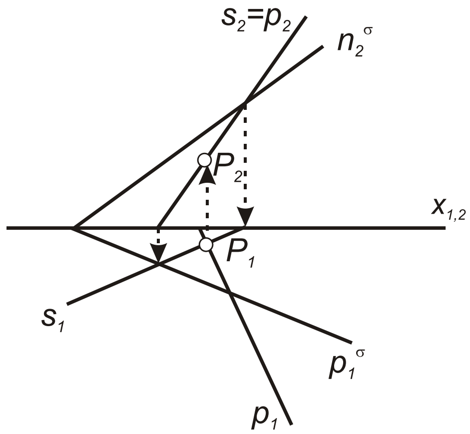
Příklad 4.13 Roviny ρ a σ jsou určeny stopami. Sestrojte průsečnici těchto rovin - obr.4.42.

Řešení: (obr.4.43)

1. Nárysný stopník průsečnice leží na nárysné stopě roviny ρ i roviny σ.
   ($N_2 \in n_2^\rho \cap n_2^\sigma$, $N_1 \in x_{1,2}$).
2. Půdorysný stopník průsečnice leží na půdorysné stopě roviny ρ i roviny σ.
   ($P_1 \in p_1^\rho \cap p_1^\sigma$, $P_2 \in x_{1,2}$).

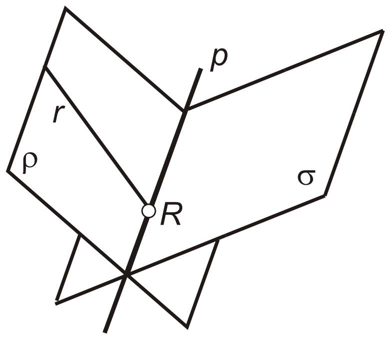


Obrázek 4.39:



Obrázek 4.40:

- Pokud přímka r leží v rovině ρ, pak průsečík R přímky r s rovinou σ leží na průsečnici p rovin ρ a σ.
- Průsečnice rovin je přímka ležící v obou rovinách, tj. její stopník leží na stopách obou rovin.



Obrázek 4.41:

3. Přímka NP je hledanou průsečnicí.

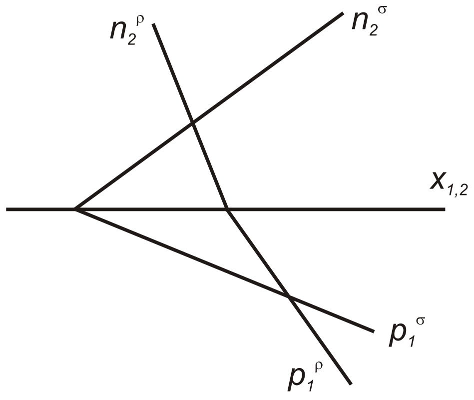
□

Příklad 4.14 Rovina ρ je určena přímkami r a q a rovina σ je dána stopami. Sestrojte průsečnici těchto rovin - obr.4.44.

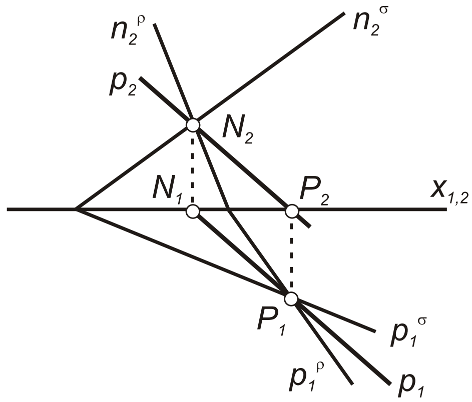
Řešení: (obr.4.45) Vyřešíme dvakrát úlohu průsečík přímky s rovinou.

1. Zvolíme krycí přímku s, tak aby $s_2 = q_2$ a $s \subset \sigma$.
2. Odvodíme půdorys s_2 přímky s. (Úloha 4.5.1).
3. Najdeme průsečík X_1 přímek s_1 a q_1.
4. Odvodíme bod X do nárysu na přímku q.
5. Podobně zvolíme krycí přímku u a najdeme průsečík Y.
6. Přímka XY je hledaná průsečnice.

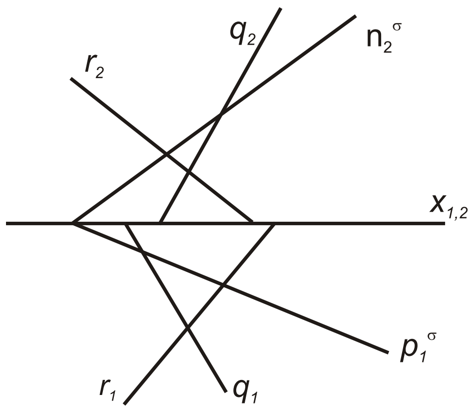
□



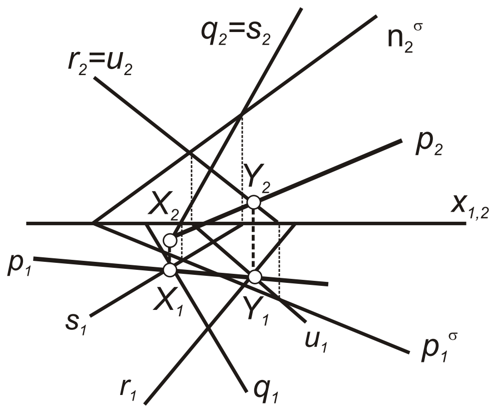
Obrázek 4.42:



Obrázek 4.43:



Obrázek 4.44:



Obrázek 4.45:

Poznámka 4.4 Všimněte si, že v některých úlohách jsme ke konstrukcím nepoužívali osu $x_{1,2}$, stačilo nám znát směr ordinály. Vzpomeneme si, že kolmé průměty téhož objektu do rovnoběžných rovin jsou shodné. Pokud tedy nezáleží na vzdálenosti od průměten, můžeme osu x vynechat, případně posunout průměty ve směry ordinály. Je to výhodné zejména v případech, kdy se nárys a půdorys překrývají a chceme zobrazení zpřehlednit.

Není-li zadaná osa x, nemůžeme používat stopy a stopníky.

4.6 Metrické úlohy

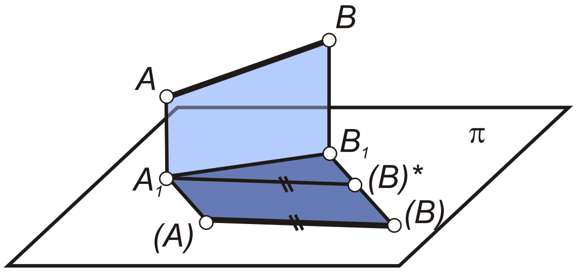
4.6.1 Skutečná velikost úsečky (základní úloha Z6)

Příklad 4.15 Sestrojte skutečnou velikost úsečky AB - obr.4.47.

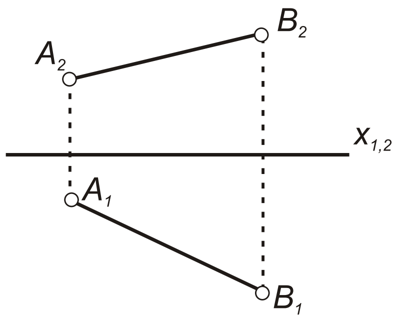
Řešení: (obr.4.48)

1. z_A (zetovou souřadnici bodu A) naneseme na kolmici vedenou bodem A_1, získaný bod označíme (A).
2. z_B (zetovou souřadnici bodu B) naneseme na kolmici vedenou bodem B_1, získaný bod označíme (B).

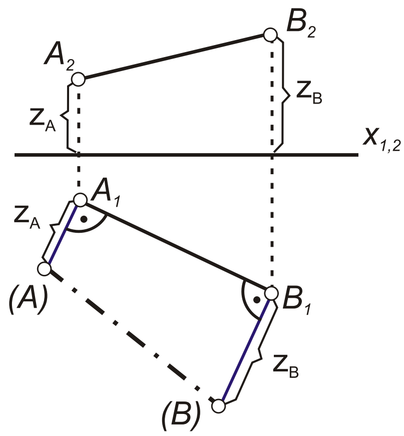
Na obrázku 4.46 je zřejmé, že body A, B a jejich průměty do půdorysny tvoří lichoběžník ABB_1A_1 s pravými úhly při vrcholech A_1 a B_1. V tomto lichoběžníku známe, kromě pravých úhlů, také velikost strany A_1B_1, a velikosti stran AA_1 (z-ová souřadnice bodu A) a BB_1 (z-ová souřadnice bodu B). Tento lichoběžník zobrazíme pomocí **sklopení** promítací roviny do půdorysny.
Podobně můžeme provést sklopení do nárysny.



Obrázek 4.46:



Obrázek 4.47:



Obrázek 4.48:

3. Spojnice bodů (A), (B) je sklopená přímka b. Vzdálenost bodů (A), (B) je skutečná velikost úsečky AB.

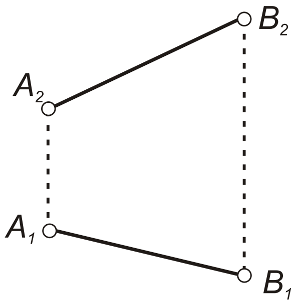
□

Poznámka 4.5 Mají-li body A, B opačná znaménka souřadnice z, pak body ABB_1A_1 netvoří lichoběžník, ale čtyřúhelník, ve kterém se dvě strany protínají. Při sklápění tohoto čtyřúhelníku naneseme příslušné souřadnice na opačně orientované kolmice.

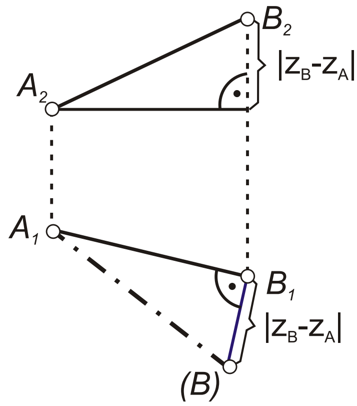
Poznámka 4.6 Je-li body A, B určena přímka p, pak sklopená přímka (p) je určena body $(A)(B)$. Odchylka přímky od půdorysny je rovna odchylce přímek $p(p)$.

Postup pro určování skutečné velikosti úsečky si můžeme zjednodušit použitím metody **rozdílového trojúhelníka**. V obrázku 4.46 je vyznačen pravoúhlý trojúhelník $A_1B_1(B)^*$ s pravým úhlem při vrcholu B_1. Úsečky $(A)(B)$ a $A_1(B)^*$ jsou rovnoběžné a shodné. Stačí tedy sestrojit tento rozdílový trojúhelník, kde velikost strany $B_1(B)^*$ je rovna rozdílu z-ových souřadnic bodů A a B.

I tento postup lze analogicky použít pro nárys, na kolmici k úsečce A_2B_2 ovšem naneseme rozdíl y-ových souřadnic bodů A a B.



Obrázek 4.49:



Obrázek 4.50:

Příklad 4.16 Sestrojte skutečnou velikost úsečky AB použitím rozdílového trojůhelníka - obr.4.49.

Řešení: (obr.4.50) Pomocí **rozdílového trojúhelníka.**

1. Na kolmici vedenou bodem B_1 naneseme $|z_A - z_B|$, získaný bod označíme (B).
2. Spojnice bodů (B), A_1 je sklopená úsečka AB a vzdálenost bodů (B), A_1 je skutečná velikost úsečky AB.

Je zřejmé, že velikost úsečky rovněž zjistíme, vedeme-li kolmici bodem A (a není přitom důležité, do které poloroviny sklápíme). Ve všech případech vyjdou shodné trojúhelníky, které mají shodné přepony. Uvedený postup používá místo absolutních souřadnic souřadnice relativní. Použití relativních souřadnic vede k možnosti vynechání základnice.

□

4.6.2 Nanesení úsečky na přímku (základní úloha Z7)

Sklápění, které jsme využili v úloze 4.6.1, využijeme i v této úloze. Zvolíme na přímce dva body a sklopíme ji. Na sklopenou přímku naneseme úsečku ve skutečné velikosti a sklopíme zpět.

Při sklápění použijeme metodu rozdílového trojúhelníka.

Příklad 4.17 Je dána přímka b a na ní bod A. Naneste na přímku b od bodu A vzdálenost u - obr.4.51.

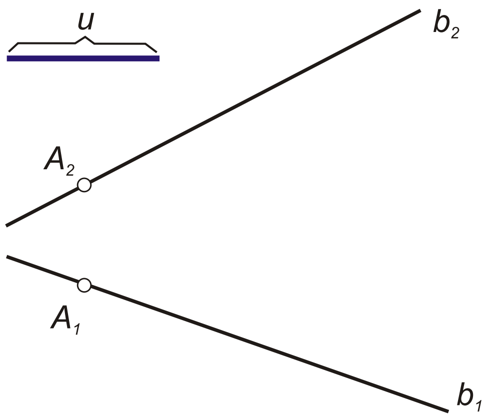
Řešení: (obr.4.52)

1. Zvolíme na přímce b bod $X \neq A$.
2. Sklopíme úsečku AX (použitím úlohy 4.6.1):

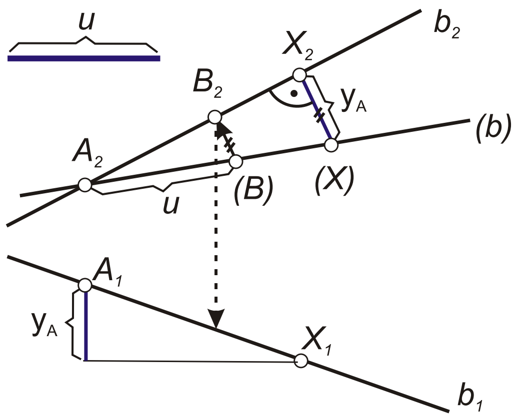
   (a) Na kolmici vedenou bodem X_2 naneseme $|z_X - z_A|$, získaný bod označíme (X).

   (b) Spojnice bodů $(X), A_2$ je sklopená přímka b.

3. Na sklopenou přímku b naneseme velikost u, získaný bod označíme (B).



Obrázek 4.51:



Obrázek 4.52:

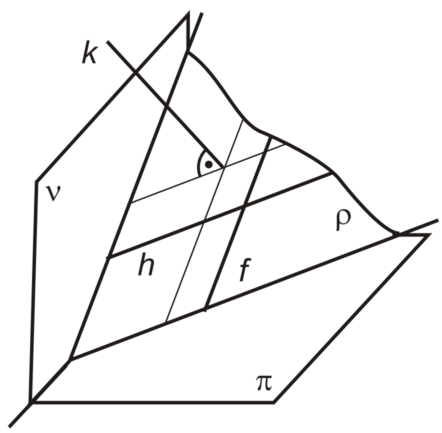
4. Bod (B) sklopíme zpět na přímku b_2 pomocí kolmice vedené bodem (B) k přímce b_2. Dostáváme bod B_2.
5. Bod B_1 odvodíme po ordinále na přímku b_1.
6. Úsečka AB má skutečnou velikost u.

□

4.6.3 Přímka kolmá k rovině (základní úloha Z8)

Při hledání přímky kolmé k rovině je vhodné si přípomenout:

- Kritérium kolmosti přímky a roviny.
- Větu o průmětu pravého úhlu.
- Protože $h||\pi$, tak $k_1 \perp h_1$.
- Protože $f||\nu$, tak $k_2 \perp f_2$.

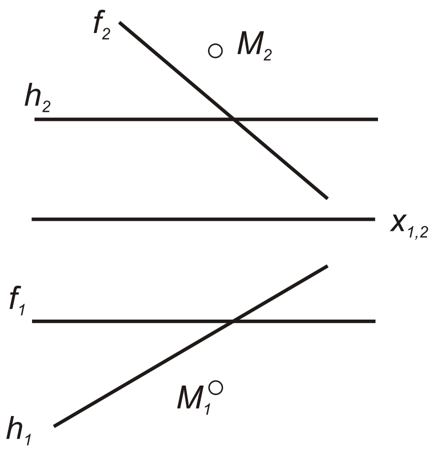


Obrázek 4.53:

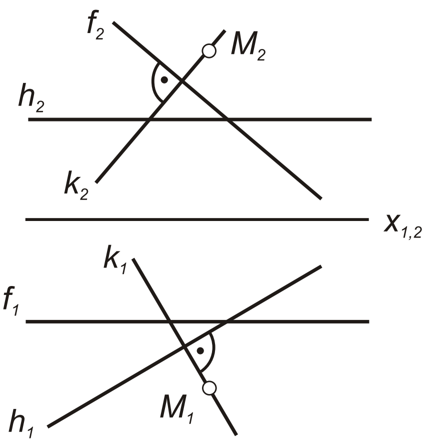
Příklad 4.18 Rovina ρ je určena hlavními přímkami h, f. Sestrojte kolmici k bodem M k rovině ρ - obr.4.54.

Řešení: (obr.4.55)

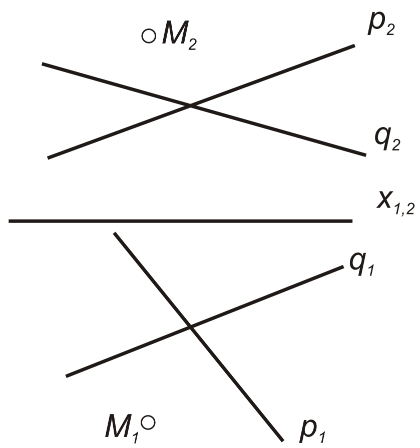
1. Bodem M_1 vedeme kolmici k_1 k přímce h_1.



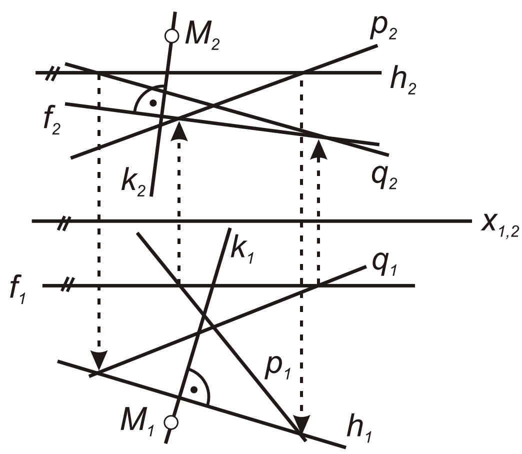
Obrázek 4.54:



Obrázek 4.55:



Obrázek 4.56:



Obrázek 4.57:

2. Bodem M_2 vedeme kolmici k_2 k přímce f_2.

□

Příklad 4.19 Rovina ρ je určena přímkami p, q. Sestrojte kolmici k bodem M k rovině ρ - obr.4.56.

Řešení: (obr.4.57)

1. Sestrojíme libovolné hlavní přímky h, f roviny ρ.

   a) Přímka f_1 je rovnoběžná s $x_{1,2}$, f_2 odvodíme pomocí průsečíků přímky f s p a q.
   b) Přímka h_2 je rovnoběžná s $x_{1,2}$, h_1 odvodíme pomocí průsečíků přímky h s p a q.

2. Postupujeme jako v předchozí úloze.

   a) Bodem M_1 vedeme kolmici k přímce h_1, dostaneme k_1.
   b) Bodem M_2 vedeme kolmici k přímce f_2, dostaneme k_2.

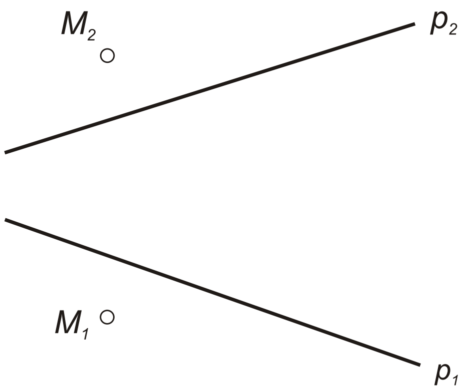
□

4.6.4 Rovina kolmá k přímce (základní úloha Z9)

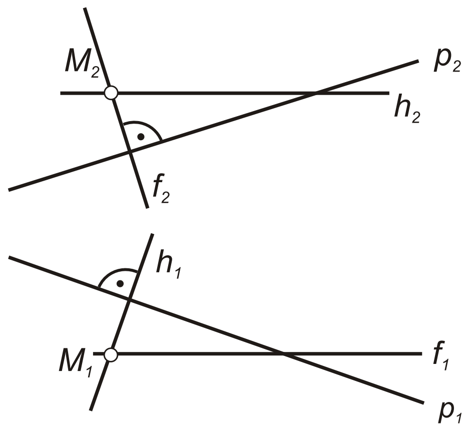
Tato úloha je obrácená k úloze předchozí, využijeme opět znalostí kritéria kolmosti přímky k rovině a hlavních přímek. Uvědomíme si, že nárys horizontální hlavní hlavní přímky je rovnoběžný s osou $x_{1,2}$ (neboli kolmý na ordinály) a půdorys je kolmý k zadané přímce. Pro frontální hlavní přímku platí, že půdorys je rovnoběžný s osou $x_{1,2}$ a nárys je kolmý k zadané přímce.

Tedy $h_1 \perp p_1$ a $h_2 || x_{1,2}$ a $f_2 \perp p_2$ a $f_1 || x_{1,2}$.

Hlavní přímky v této úloze proto neodvozujeme pomocí průsečíků, ale sestrojujeme kolmice k průmětům zadané přímky! Je totiž zřejmé, že hlavní přímky jsou zpravidla s danou přímkou mimoběžné, a tudíž průsečíky v prostoru neexistují.



Obrázek 4.58:



Obrázek 4.59:

Příklad 4.20 Je dána přímka p. Sestrojíme bodem M rovinu kolmou k přímce p - obr.4.58.

Řešení: (obr.4.59) Sestrojíme hlavní přímky hledané roviny σ.

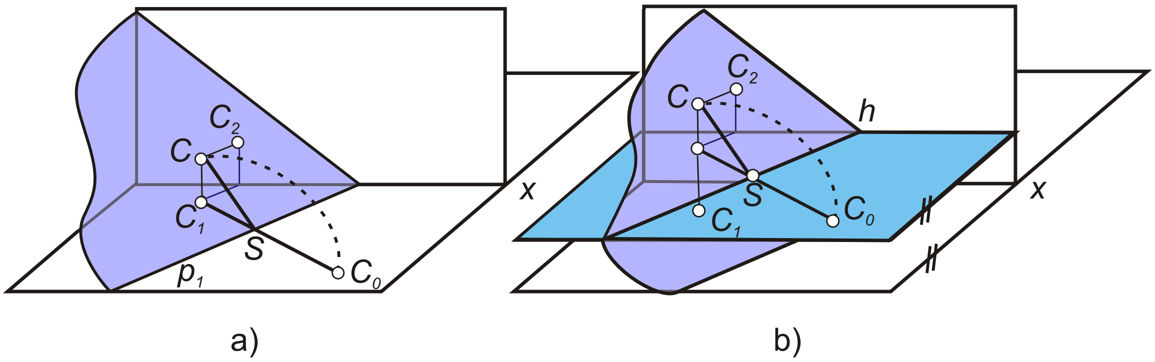
1. $h_1 \perp p_1$ a $h_2 || x_{1,2}$ a $M_1 \in h_1$, $M_2 \in h_2$.
2. $f_2 \perp p_2$ a $f_1 || x_{1,2}$ a $M_1 \in f_1$, $M_2 \in f_2$.
3. Rovina σ je určena přímkami h, f.

□

4.6.5 Otočení roviny do polohy rovnoběžné s průmětnou (základní úloha Z10)

Často je součástí prostorové konstrukce rovinná úloha. Potřebujeme například sestrojit podstavu nějakého tělesa v obecné rovině α. Víme, že útvar ležící v rovině rovnoběžné s průmětnou se promítne ve skutečné velikosti. Otočíme tedy rovinu α (některé její body) do polohy rovnoběžné s průmětnou π (obr. 4.60b)) nebo přímo do průmětny (obr. 4.60a)), provedeme požadovanou konstrukci a výsledek otočíme zpět.

Nejprve musíme určit přímku, kolem které budeme rovinu α otáčet. V případě, že otáčíme přímo do průmětny, je osou otáčení průsečnice rovin α a π, tedy **stopa roviny** α (obr. 4.60a)).



Obrázek 4.60:

Nemáme-li zadanou osu x nebo chceme-li si ušetřit práci se sestrojováním stopy, můžeme otočit rovinu α do polohy rovnoběžné s průmětnou kolem přímky rovnoběžné s průmětnou, tedy **hlavní přímky** roviny α (obr. 4.60b)).

Mezi body roviny α a body otočenými do průmětny existuje prostorová geometrická příbuznost - osová afinita. Víme, že rovnoběžným průmětem osové afinity získáme osovou afinitu v rovině, odtud plyne, že při konstrukcích můžeme využívat osové afinity mezi průměty bodů (například půdorysy) a otočenými body do téže průmětny (půdorysny). Osou afinity je osa otáčení, párem odpovídajících si bodů je průmět bodu (např. A_1) a jeho otočený obraz A_0.

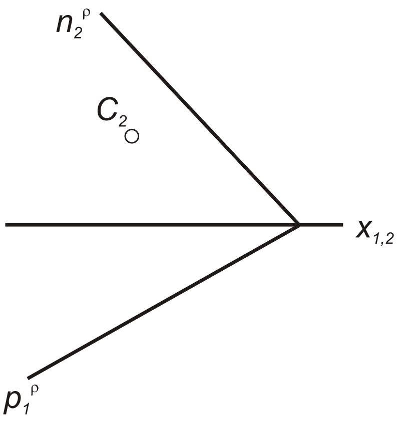
Postup řešení rovinné úlohy je následující:

1. Určíme **osu otáčení** - hlavní přímka nebo stopa roviny.
2. Sestrojíme **rovinu, střed a poloměr kružnice otáčení** (příklad 1.1 na straně 10).
3. Otočíme jeden bod.
4. Další otočené body získáme pomocí **afinity**.
5. Provedeme rovinnou konstrukci.
6. S využitím afinity otočíme výsledek zpět.
7. Body výsledného útvaru odvodíme do druhého průmětu.

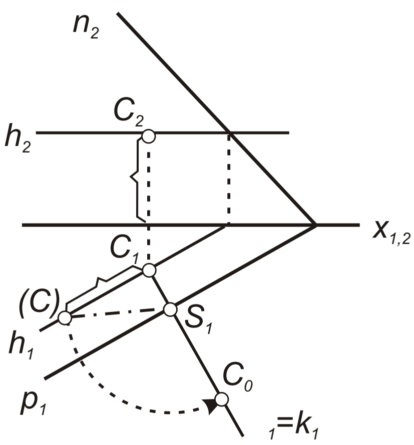
Příklad 4.21 Otočme rovinu α kolem stopy do průmětny - obr.4.61.

Řešení: (obr.4.62) Otočíme jeden bod roviny α.

1. Pomocí horizontální hlavní přímky h roviny α vedené bodem C odvodíme půdorys bodu C.
2. Budeme otáčet do půdorysny, tj. **osou otáčení** je půdorysná stopa p_1^α.
3. Rovina otáčení ρ bodu C se promítá do přímky k_1 procházející bodem C_1 a kolmé k ose otáčení p_1^α.



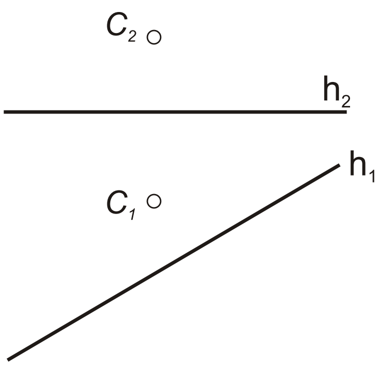
Obrázek 4.61:



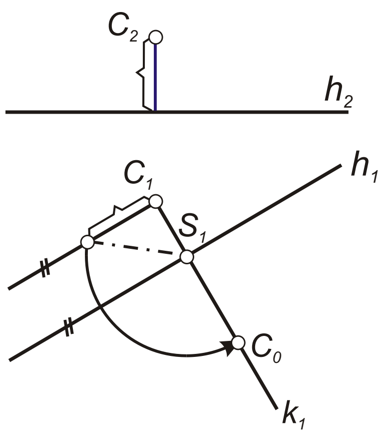
Obrázek 4.62:

4. Střed otáčení S je průsečík roviny ρ se stopou, tedy S_1 je průsečíkem přímky k_1 se stopou p_1^α.
5. Poloměr otáčení r je skutečná velikost úsečky CS. Skutečnou velikost úsečky určíme sklopením - na kolmici k úsečce C_1S naneseme zetovou souřadnici bodu C (tj. rozdíl zetových souřadnic bodů C a S, S má zetovou souřadnici 0, protože leží v půdorysně).
6. Na kolmici k_1 naneseme od bodu S_1 poloměr r, dostaneme tak otočený bod C_0.

□



Obrázek 4.63:



Obrázek 4.64:

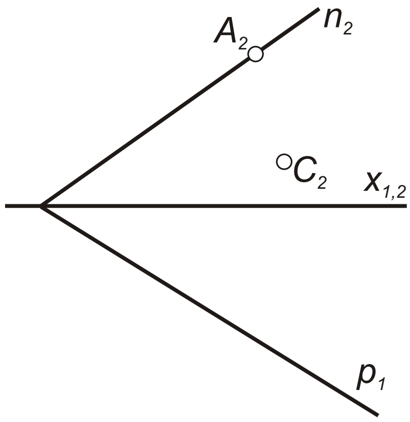
Příklad 4.22 Otočme rovinu α, určenou bodem C a hlavní přímkou h, kolem h do roviny rovnoběžné s průmětnou - obr.4.63.

Řešení: (obr.4.64) Otočíme jeden bod roviny α.

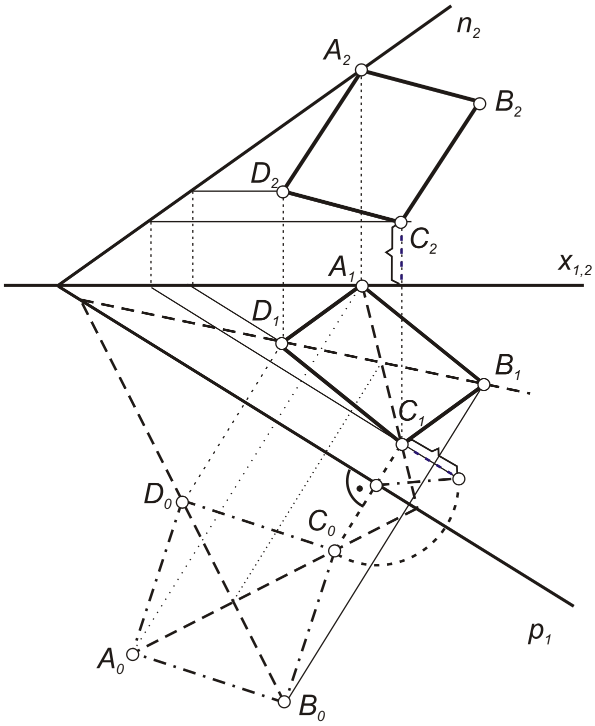
1. Otočíme rovinu α kolem hlavní přímky h do polohy rovnoběžné s půdorysnou.
2. Osou otáčení je hlavní přímka h.

3. Bodem C_1 vedeme kolmici k_1 k přímce h_1 (rovina otáčení se promítá do k_1).
4. Průsečík přímky k_1 s h_1 je půdorysem středu otáčení S.
5. Sklopíme úsečku CS a zjistíme skutečnou velikost poloměru otáčení r (na kolmici k C_1S naneseme rozdíl zetových souřadnic bodu CS a přímky h).
6. Od bodu S_1 naneseme na k_1 poloměr r a získáme otočený bod C_0.

□



Obrázek 4.65:



Obrázek 4.66:

Příklad 4.23 V rovině ρ jsou dány body A a C svými nárysy. Sestrojíme čtverec $ABCD$ s úhlopříčkou AC ležící v rovině ρ - obr.4.65.

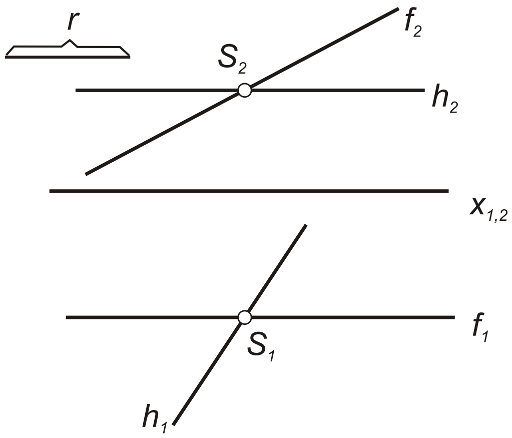
Řešení: (obr.4.66) Sestrojení čtverce je rovinná úloha. Rovinu ρ otočíme do půdorysny, sestrojíme čtverec v otočení a výsledek otočíme zpět.

1. Pomocí hlavní přímky odvodíme bod C do půdorysu, půdorys bodu A leží na ose $x_{1,2}$.
2. Otočíme bod C do půdorysny - získáme bod C_0.
3. Bod A_0 sestrojíme pomocí afinity (osa afinity je p_1^ρ, pár odpovídajících si bodů je A_1, A_0.
4. V otočení sestrojíme čtverec $A_0B_0C_0D_0$.
5. Pomocí afinity otočíme čtverec zpět do půdorysu. (Můžeme využít rovnoběžnosti protějších stran.)
6. S využitím hlavních přímek najdeme nárys čtverce.

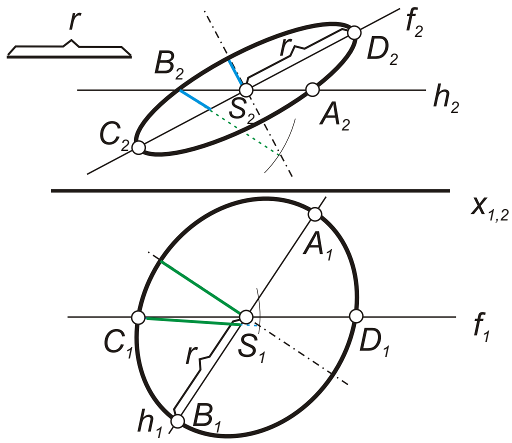
□

4.6.6 Obraz kružnice (základní úloha Z11)

Podívejme se, jak se v pravoúhlém promítání zobrazí kružnice. Pokud kružnice leží v rovině rovnoběžné s průmětnou, bude jejím obrazem shodná kružnice. Obrazem kružnice ležící v rovině kolmé na průmětnu bude úsečka, jejíž délka je rovna průměru kružnice. Obrazem kružnice v obecném případě je elipsa. Velikost průměru kružnice, který leží na hlavní přímce, se při pravoúhlém promítání zachová, ostatní průměry se v pravoúhlém promítání zkracuje. Průměr na hlavní přímce bude tedy hlavní osou elipsy, do které se kružnice zobrazí.



Obrázek 4.67:



Obrázek 4.68:

Příklad 4.24 V rovině $\rho(h, f)$ sestrojme kružnici $k(S, r)$ - obr.4.67.

Řešení:

1. Na horizontální hlavní přímku h naneseme v půdorysu od bodu S_1 na obě strany skutečnou velikost poloměru r - body označíme A_1, B_1 a odvodíme je po ordinále do nárysu.
2. Na frontální hlavní přímku f naneseme v nárysu od bodu S_2 na obě strany skutečnou velikost poloměru r - body označíme C_2, D_2 a odvodíme je po ordinále do půdorysu.
3. Obrazem kružnice v půdorysu je elipsa s hlavní osou A_1B_1, body C_1, D_1 leží na elipse. Pomocí proužkové konstrukce získáme vedlejší osu.
4. Obrazem kružnice v nárysu je elipsa s hlavní osou C_2D_2, body A_2, B_2 leží na elipse. Pomocí proužkové konstrukce získáme vedlejší osu.

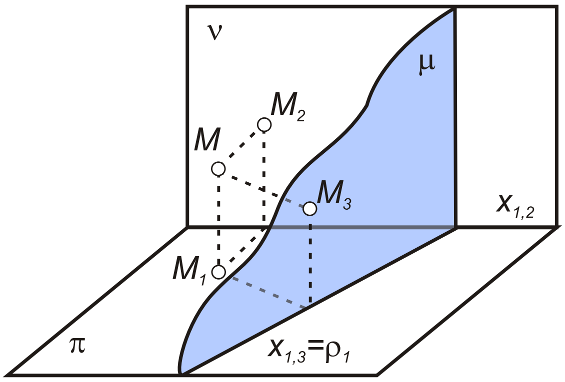
□

4.6.7 Transformace průměten (základní úloha Z12)

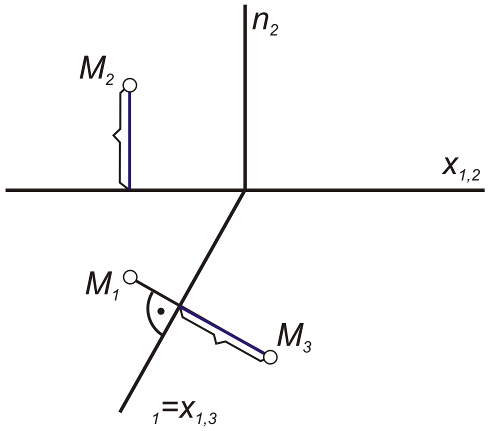
V předchozích úlohách jsme již mluvili o možnosti vynechání osy x, to znamená o posunutí půdorysny nebo nárysny. Nárys nebo půdorys útvarů se neměnil, neboť poloha nových průměten byla rovnoběžná s původními.

Nyní přejdeme od původních průměten k nové dvojici navzájem kolmých průměten. Jednu průmětnu necháme v původní poloze a jako druhou volíme libovolnou rovinu k ní kolmou (volíme ji vhodně tak, aby se použitím nových průměten úloha zjednodušila).

Zvolíme například třetí průmětnu μ kolmou k půdorysně π - obr.4.69. Průsečnice rovin μ a π bude novou osou x - označíme ji $x_{1,3}$. Promítneme bod M do třetí průmětny, průmět označíme indexem M_3 a provedeme sdružení průmětů. Ordinála bude spojnicí bodů M_1 a M_3 a bude kolmá k ose $x_{1,3}$, vzdálenost M_3 od osy $x_{1,3}$ je z-ovou souřadnicí bodu M - obr.4.70.

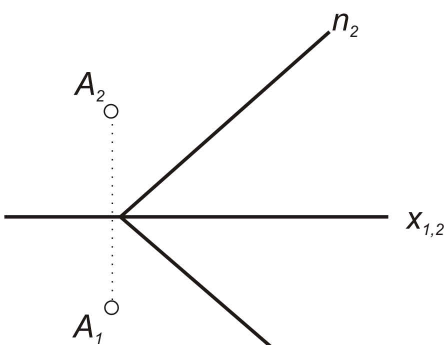


Obrázek 4.69:

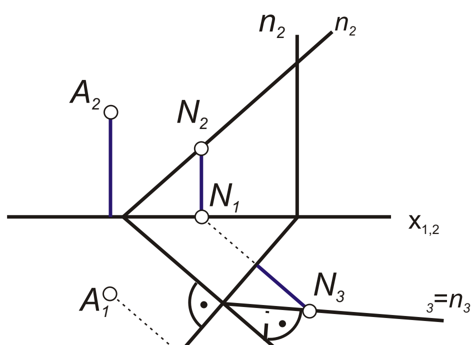


Obrázek 4.70:

Příklad 4.25 Určeme vzdálenost bodu A od roviny ρ s využitím třetí průmětny.



Obrázek 4.71:



Obrázek 4.72:

Řešení:

1. Zvolíme třetí průmětnu μ kolmou k půdorysně a kolmou k rovině ρ - rovina ρ se do nové průmětny zobrazí jako přímka.
2. Najdeme třetí průmět bodu A.
3. Najdeme třetí průmět libovolného bodu roviny ρ - zvolili jsme stopník N.
4. Třetím průmětem roviny ρ je přímka procházející bodem N_3 a protínající se se stopou p_1^ρ na ose $x_{1,3}$.
5. Vzdálenost A_3 a ρ_3 je hledanou vzdáleností bodu A od roviny ρ.

□

4.7 Kontrolní otázky

4.1 Definujte pojem stopník a stopa.

4.2 Vysvětlete pojem hlavní přímka.

4.3 Vysvětlete metodu krycí přímky.

4.4 K čemu se používá otáčení roviny?

4.5 V čem se liší otáčení roviny okolo stopy a okolo hlavní přímky?

Kapitola 5

Mnohočleny a algebraické rovnice

5.1 Pojem mnohočlenu (polynomu) v jedné proměnné

Připomeňme, že výrazům typu

$$a_2x^2 + a_1x + a_0$$

říkáme *kvadratický trojčlen*, když $a_2 \neq 0$. Číslům a_0, a_1, a_2 říkáme *koeficienty* a písmenem x označujeme proměnnou. Naznačujeme tím, že za x lze dosazovat různá čísla (reálná či komplexní). Množinu reálných čísle dále značíme symbolem $\mathbb{R}$ a množinu komplexních čísel označujeme $\mathbf{C}$.

Například pro kvadratický trojčlen $3x^2 - 5x + 1$ po dosazení

$$\begin{array}{lll} x = 0 & \text{dostaneme } 3 \cdot 0^2 - 5 \cdot 0 + 1 = 1 & (\text{hodnota v bodě } x = 0), \\ x = -2 & \text{dostaneme } 3 \cdot (-2)^2 - 5 \cdot (-2) + 1 = 23 & (\text{hodnota v bodě } x = -2). \end{array}$$

Definice 5.1 *Výraz tvaru*

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k \ , \quad a_n \neq 0 \tag{5.1}$$

se nazývá **mnohočlen n-tého stupně v proměnné x** *a čísla (reálná, resp. komplexní)* $a_k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n,\ n \in \mathbb{N}$ *($\mathbb{N}$ je množina přirozených čísel), se nazývají* **koeficienty mnohočlenu**. *Namísto názvu mnohočlen se pro výraz (5.1) používá také označení* **polynom n-tého stupně v proměnné x** *(v dalším textu budeme používat označení „polynom v jedné proměnné“).*

Definice 5.2 *Číslo*

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\alpha^k = a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_1\alpha + \alpha$$

se nazývá **hodnota polynomu v bodě** α.

Příklad 5.1 Je dán polynom $x^4 - 4x^3 - 76x^2 + 324x - 405$. Vypočteme hodnotu v bodech $\alpha_1 = -1$ a $\alpha_2 = 2 + \mathrm{i}$.

Řešení: Hodnota v bodě $\alpha_1 = -1$:

$$(-1)^4 - 4(-1)^3 - 76(-1)^2 + 324(-1) - 405 = 1 + 4 - 76 - 324 - 405 = -800 \ .$$

Hodnota v bodě $\alpha_2 = 2 + \mathrm{i}$:

$$\begin{aligned} &(2+\mathrm{i})^4 - 4(2+\mathrm{i})^3 - 76(2+\mathrm{i})^2 + 324(2+\mathrm{i}) - 405 = \\ &= (-7+24\mathrm{i}) - 4(2+11\mathrm{i}) - 76(3+4\mathrm{i}) + 324(2+\mathrm{i}) - 405 = 0 \ . \end{aligned} \tag{5.2}$$

□

Definice 5.3 *Polynom, který má všechny koeficienty rovny nule, se nazývá* **nulový polynom**.

Pro nulový polynom nedefinujeme stupeň. Mezi všemi polynomy je pouze jeden nulový polynom.

5.2 Algebraické operace s polynomy v jedné proměnné

Definice 5.4 *Dva polynomy* $\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k,\ a_n \neq 0,$ *a* $\sum\limits_{k=0}^{n} b_k x^k,\ b_n \neq 0,$ **si jsou rovny**, *je-li*

$$a_k = b_k \quad \textit{pro} \ \ k = 0, 1, 2, \ldots, n \ ,$$

tj. rovnají-li se koefiecienty u stejných mocnin x.

Příklad 5.2 Určíme koeficienty A, B, C polynomu

$$A(x^2+1) + Bx^2 + +Cx(x^2+1)$$

tak, aby byl roven polynomu $x^3 + x + 1$.

Řešení: Úpravou dostáváme

$$A(x^2+1) + Bx^2 + Cx(x^2+1) = Cx^3 + (A+B)x^2 + Cx + A \ .$$

Z rovnosti

$$Cx^3 + (A+B)x^2 + Cx + A = x^3 + x + 1$$

dostaneme porovnáním koeficientů u stejných mocnin x podmínky

$$C = 1, \quad A + B = 0, \quad A = 1 \ ,$$

takže $A = 1,\ B = -1,\ C = 1.$

□

Polynomy můžeme (stejně jako čísla) sečítat, odečítat, násobit i dělit. Sčítat a odečítat polynomy budeme podle pravidel pro počítání s mocninami:

$$\begin{aligned} & (3x^2 - x + 7) + (5x^4 - 7x^2 + 12x - 1) = \\ = \;& 5x^4 + (3 - 7)x^2 + (-1 + 12)x + (7 - 1) = 5x^4 - 4x^2 + 11x + 6\,, \\ & (3x^2 - x + 7) - (5x^4 - 7x^2 + 12x - 1) = \\ = \;& -5x^4 + (3 + 7)x^2 + (-1 - 12)x + (7 + 1) == -5x^4 + 10x^2 - 13x + 8\,. \end{aligned}$$

Násobit polynomy budeme podle distributivního zákona, tj. násobíme každý člen jednoho polynomu s každým členem druhého polynomu:

$$(x^2 + 1)(x^3 - x) = x^5 + x^3 - x^3 - x = x^5 - x\,.$$

Vidíme, že součet, rozdíl i součin polynomů je opět polynom. Jsou-li si dva polynomy rovny, jejich rozdíl je nulový polynom.

Dělení polynomů je složitější a (jak uvidíme v dalším textu) výsledkem není vždy polynom.

5.3 Podíl dvou polynomů

Dělení polynomu polynomem nultého stupně (tj. nenulovou konstantou) je definováno takto:

$$\frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_0} = \frac{a_n}{b_0}x^n + \frac{a_{n-1}}{b_0}x^{n-1} + \cdots + \frac{a_1}{b_0}x + \frac{a_0}{b_0}\,.$$

Dělení polynomů definujeme obecně podobně jako dělení přirozených čísel:

$$\begin{aligned} &\tfrac{11}{4} = 2 + \tfrac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad 11 = 2 \cdot 4 + 3 \quad \text{(dělení se zbytkem, podíl není přirozené číslo)}, \\ &\tfrac{12}{4} = 3 \qquad\quad \Rightarrow \quad 12 = 3 \cdot 4 \qquad\;\; \text{(dělení beze zbytku, podíl je přirozené číslo)}\,. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Chceme-li stanovit podíl polynomů $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ a $S(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ (pro nenulový $S(x)$), musíme najít takové polynomy $Q(x)$ a $R(x)$ tak, aby platil vztah

$$\frac{P(x)}{S(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{S(x)}\,, \tag{5.4}$$

neboli

$$P(x) = S(x)Q(x) + R(x) \tag{5.5}$$

(srovnej s (5.3) pro dělení přirozených čísel). Pokud stupeň polynomu $S(x)$ je větší než stupeň $P(x)$, pak $Q(x) = 0$ a $R(x) = P(x)$. Postup, který pro dané polynomy $P(x)$ a $S(x)$ určí polynom $Q(x)$ (tj. *podíl*, resp. *částečný podíl*) a polynom $R(x)$ (tj. *zbytek*), se nazývá *algoritmus dělení polynomů.*

Příklad 5.3 Vypočteme podíl, resp. částečný podíl, polynomů

$$x^3 - 2x^2 + x - 1, \;\; x^2 - 3x + 2.$$

Řešení:

$$\begin{array}{llll}
(x^3- & 2x^2+ & x-1) & : \ (x^2-3x+2) = x+1 \ \text{(částečný podíl)} \\
\pm x^3\mp & 3x^2\pm & 2x & \\
\hline
 & x^2- & x-1 & \\
 & \pm x^2\mp & 3x\pm 2 & \\
\hline
 & & 2x-3 & \quad \text{(zbytek)}
\end{array}$$

Tedy

$$\frac{x^3-2x^2+x-1}{x^2-3x+2} = x+1+\frac{2x-3}{x^2-3x+2}\ ,$$

resp.

$$x^3-2x^2+x-1 = (x^2-3x+2)(x+1)+2x-3\ .$$

(Srovnej s (5.3).)

□

5.4 Hornerův algoritmus

Ve speciálním případě, když dělíme polynom

$$P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0$$

lineárním polynomem (polynomem prvního stupně)

$$S(x) = x-\alpha\ , \quad \text{kde } \alpha \text{ je dané číslo,}$$

je algoritmus dělení velmi jednoduchý a nazývá se *Hornerův algoritmus*. Než si jej uvedeme, připomeňme, že v tomto případě mají vzorce (5.4) a (5.5) tvar

$$\frac{P(x)}{x-\alpha} = Q(x) + \frac{R}{x-\alpha}\ , \tag{5.6}$$

resp.

$$P(x) = (x-\alpha)Q(x) + R\ , \tag{5.7}$$

kde R je polynom nultého stupně (konstanta) a je to hodnota polynomu $P(x)$ pro $x=\alpha$. Je totiž

$$P(\alpha) = (\alpha-\alpha)Q(x) + R = 0\cdot Q(x) + R = R\ .$$

Tento poznatek bude velice důležitý při určování kořenů algebraických rovnic (odst. 5.5).

Uveďme nyní různé verze algoritmu dělení lineárním činitelem.

1. verze algoritmu

$$\begin{array}{lllll}
(7x^4 & -2x^3 & +3x & +8) & : \ (x+1) = \ 7x^3-9x^2+9x-6 \\
\pm 7x^4 & \pm 7x^3 & & & \\
\hline
 & -9x^3 & +3x & +8 & \\
 & \mp 9x^3 & \mp 9x^2 & & \\
\hline
 & & 9x^2 & +3x & +8 \\
 & & \pm 9x^2 & \pm 9x & \\
\hline
 & & & -6x & +8 \\
 & & & \mp 6x & \mp 6 \\
\hline
 & & & & 14 \quad \text{(zbytek)}
\end{array}$$

Je tedy

$$\frac{7x^4 - 2x^3 + 3x + 8}{x+1} = 7x^3 - 9x^2 + 9x - 6 + \frac{14}{x+1} \qquad \Rightarrow \qquad R = P(-1) = 14\ . \tag{5.8}$$

2. verze algoritmu Polynom $P(x) = 7x^4 - 2x^3 + 3x + 8$ napíšeme ve tvaru

$$P(x) = (((7x-2)x+0)x+3)x+8\ . \tag{5.9}$$

Pro $x = -1$ počítáme hodnoty jednotlivých závorek:

$$\begin{array}{lll} q_3 & = a_4 & = 7 \\ q_2 & = 7(-1) - 2 = q_3\alpha + a_3 & = -9 \\ q_1 & = -9(-1) + 0 = q_2\alpha + a_2 & = 9 \\ q_0 & = 9(-1) + 3 = q_1\alpha + a_1 & = -6 \\ R & = -6(-1) + 8 = q_0\alpha + a_0 & = 14 = P(\alpha) \end{array}$$

Získaná čísla q_0, q_1, q_2, q_3 jsou koeficienty polynomu $Q(x)$, je tedy $Q(x) = 7x^3 - 9x^2 + 9x - 6$.

3. verze algoritmu Upravíme-li polynom do tvaru (5.9), lze pomocí kalkulátoru velice snadno vypočítat koeficienty polynomu $Q(x)$ i hodnotu $P(-1)$.

4. verze algoritmu Předchozí postup se dá zapsat do schématu, který se dobře pamatuje (v prvním řádku jsou koeficienty polynomu $P(x)$):

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_4 = 7 & a_3 = -2 & a_2 = 0 & a_1 = 3 & a_0 = 8 \\ & & -7 & 9 & -9 & 6 \\ \hline -1 & q_3 = 7 & q_2 = -9 & q_1 = 9 & q_0 = -6 & 14 = P(-1) \end{array}$$

Postup výpočtu:

1. $q_3 = a_4 = 7$;
2. $q_2 = \alpha q_3 + a_3 = (-1) \cdot 7 - 2 = -9$;
3. $q_1 = \alpha q_2 + a_2 = (-1) \cdot (-9) + 0 = 9$;
4. $q_0 = \alpha q_1 + a_1 = (-1) \cdot 9 + 3 = -6$;
5. $P(-1) = \alpha q_0 + a_0 = (-1) \cdot (-6) + 8 = 14$.

Tato verze Hornerova algoritmu je známa pod názvem *Hornerovo schéma.*

5.5 Algebraické rovnice

Kořen rovnice a základní věta algebry

Rovnice typu

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0\ , \tag{5.10}$$

kde a_k pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ jsou daná čísla (tzv. koeficienty rovnice) a $a_n \neq 0$, se nazývá *algebraická rovnice n-tého stupně v proměnné x.* Na levé straně rovnice je polynom $P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ obecně s komplexními koeficienty.

Řešení (kořen) rovnice (5.10) je číslo α takové, že $P(\alpha) = 0$. Platí následující velice důležitá základní věta algebry, kterou uvádíme bez důkazu:

Věta 5.1 *Každá algebraická rovnice má v oboru komplexních čísel alespoň jeden kořen. Jinými slovy: Pro každou algebraickou rovnici (je lhostejné, zda koeficienty jsou komplexní či reálné) existuje alespoň jedno číslo, které je kořenem této rovnice.*

Je-li číslo α kořenem rovnice (5.10), je ve vztahu (5.7) $R = 0$ a platí tedy rovnost

$$P(x) = (x - \alpha)Q(x) ,$$

kde $Q(x)$ je polynom stupně $n - 1$. Lineární polynom $x - \alpha$ se nazývá *kořenový činitel.*

Příklad 5.4 Jedním kořenem rovnice $x^3-2x^2-x+2 = 0$ je číslo 1. Vypočteme ostatní kořeny.

Řešení: Dělením polynomu $x^3 - 2x^2 - x + 2$ kořenovým činitelem $x - 1$ (např. Hornerovým schématem) zjistíme, že rovnici lze psát ve tvaru

$$(x - 1)(x^2 - x - 2) = 0 .$$

Další kořeny zjistíme řešením kvadratické rovnice

$$x^2 - x - 2 = 0 .$$

Kořeny této kvadratické rovnice jsou čísla -1 a 2. Daná rovnice třetího stupně má tedy kořeny $1, -1, 2$.

□

Z předchozího vidíme, že známe-li kořen α algebraické rovnice n-tého stupně, můžeme dělením kořenovým činitelem $x - \alpha$ dostat algebraickou rovnici stupně $n - 1$. Opakováním tohoto postupu lze tedy polynom na levé straně rovnice rozložit na součin kořenových činitelů:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n) ,$$

kde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou kořeny algebraické rovnice $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$. Vyskytuje-li se v rozkladu kořenový činitel $x - \alpha_i$ k-krát, nazývá se kořen α_i k-násobný kořen algebraické rovnice $P(x) = 0$.

Mají-li kořeny $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ násobnosti $k_1, k_2, \ldots, k_r$, kde $r \leq n$ a $k_1 + k_2 + \cdots + k_r = n$, pak rozklad polynomu lze zapsat ve tvaru

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2} \cdots (x - \alpha_r)^{k_r} .$$

Příklad 5.5 Jedním kořenem rovnice $8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = 0$ je číslo $\alpha_1 = \frac{3}{2}$. Vypočteme ostatní kořeny.

Řešení: Dělením zadaného polynomu $8x^3-36x^2+54x-27$ polynomem (kořenovým činitelem) $x-\frac{3}{2}$ získáme polynom $8x^2-24x+18$, řešíme tedy rovnici

$$8x^2-24x+18=0 \quad\Rightarrow\quad 4x^2-12x+9=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha_{2,3}=\frac{3}{2}\,.$$

Daná rovnice má tedy jeden trojnásobný kořen $\alpha_{1,2,3}=\frac{3}{2}$.

□

Poznámka 5.1 Rozklad polynomu $8x^3-36x^2+54x-27$ na součin kořenových činitelů má tvar

$$8x^3-36x^2+54x-27=8\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\,.$$

Vlastnosti kořenů algebraické rovnice s reálnými koeficienty

1. Má-li algebraická rovnice s reálnými koeficienty komplexní kořen $\alpha=a+b\mathrm{i}$, má také kořen $\overline{\alpha}=a-b\mathrm{i}$ (číslo komplexně sdružené k α).
2. Má-li algebraická rovnice s reálnými koeficienty vícenásobný komplexní kořen, potom číslo komplexně sdružené je také vícenásobným kořenem této rovnice a násobnosti obou kořenů jsou stejné.
3. Má-li algebraická rovnice s reálnými koeficienty komplexní kořeny, je jejich počet sudý.
4. Každá algebraická rovnice s reálnými koeficienty lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen.

Příklad 5.6 Jedním kořenem rovnice $x^4-8x^3+26x^2-36x+24=0$ je číslo $\alpha_1=3-\sqrt{3}\mathrm{i}$. Vypočteme ostatní kořeny.

Řešení: Druhým kořenem je číslo $\alpha_2=3+\sqrt{3}\mathrm{i}$. Hledáme polynom $q(x)$ takový, aby

$$\begin{aligned}(x-3+\sqrt{3}\mathrm{i})(x-3-\sqrt{3}\mathrm{i})q(x) &= x^4-8x^3+26x^2-36x+24 \\ (x^2-6x+12)q(x) &= x^4-8x^3+26x^2-36x+24 \\ q(x) &= \tfrac{x^4-8x^3+26x^2-36x+24}{x^2-6x+12}\end{aligned} \tag{5.11}$$

Dělením zjistíme, že $q(x)=x^2-2x+2$. Stačí tedy najít kořeny rovnice

$$x^2-2x+2=0 \quad\Rightarrow\quad \alpha_3=1+\mathrm{i},\;\; \alpha_4=1-\mathrm{i}\,.$$

Daná rovnice má tedy kořeny: $\alpha_1=3-\sqrt{3}\mathrm{i}$, $\alpha_2=3+\sqrt{3}\mathrm{i}$, $\alpha_3=1+\mathrm{i}$, $\alpha_4=1-\mathrm{i}$.

□

Příklad 5.7 Určíme kořeny rovnice $x^4+4x^3-16x-16=0$.

Řešení: Postupným dosazováním (zkusíme např. dosadit čísla $1, -1, 2, -2$ atd.) zjistíme, že čísla 2 a -2 jsou kořeny naší rovnice. Je tedy

$$(x-2)(x+2)(x^2+4x+4) = 0$$

a zbývá vyřešit kvadratickou rovnici $x^2 + 4x + 4 = 0$. Ta má jeden dvojnásobný kořen -2. Daná rovnice má tedy jeden trojnásobný kořen -2 a jednonásobný (jednoduchý) kořen 2.

□

Příklad 5.8 Vypočteme kořeny rovnice $3x^3 + 2x^2 - x - 4 = 0$.

Řešení: Postupným dosazováním zjistíme, že rovnice má kořen 1. Je tedy

$$(x-1)(3x^2+5x+4) = 0$$

a řešením rovnice $3x^2 + 5x + 4 = 0$ jsou čísla $-\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{23}}{6}\mathrm{i}$.
Daná rovnice má tedy tři kořeny 1 a $-\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{23}}{6}\mathrm{i}$.

□

5.6 Souvislost kořenů a koeficientů algebraické rovnice

Z předchozích příkladů je zřejmé, že u algebraických rovnic vyšších stupňů nám nezbývá nic jiného, než některá řešení rovnice buď uhádnout, nebo je určovat numerickými metodami, kterými se zabývá tzv. numerická matematika. Pro rovnice 3. a 4. stupně je sice možné použít vzorce pro výpočet kořenů, ale ty jsou značně komplikované. Pro rovnice vyšších stupňů takové vzorce vůbec neexistují. K určení kořenů napomohou vztahy (tzv. Viétovy vzorce) mezi koeficienty a kořeny polynomu. Pro nás budou významné dva z nich:

1. Součet všech kořenů násobený koeficientem a_n je roven opačnému koeficientu u x^{n-1}, tj.

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)a_n = -a_{n-1}\ .$$

2. Pro součin všech kořenů a koeficientu a_n platí

$$(\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \cdots \cdot \alpha_n) \cdot a_n = (-1)^n \cdot a_0\ .$$

Poznámka 5.2

1. Kořeny algebraické rovnice odhadujeme tak, že určíme dělitele absolutního členu a_0 a dosazením se přesvědčíme, zda je kořenem.

2. Pro kvadratický trojčlen lze velice snadno uvedené vlastnosti odvodit z rovnosti:

$$x^2 + a_1x + a_0 = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = x^2 - (\alpha_1+\alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2\ .$$

   Porovnáním koeficientů u stejných mocnin x dostáváme

$$\begin{aligned} a_1 &= -(\alpha_1+\alpha_2)\ , \\ a_0 &= \alpha_1\alpha_2\ . \end{aligned}$$

5.6.1 Cvičení

5.1 Určete koeficienty A, B, C polynomu $A(x-1) + B(x-1)x + Cx^2$ tak, aby byl roven polynomu $x+1$. [Výsledek: $A = -1,\ B = -2,\ C = 2$]

5.2 Jsou dány polynomy $6x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 4x + 5$ a $x + 1$. Vypočtěte jejich součet, rozdíl, součin. [Výsledek: $6x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 5x + 6$, $6x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 3x + 4$, $6x^5 + 8x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x + 5$]

5.3 Vypočtěte podíl polynomů:

1. $(3x^3 + 10x^2 + 2x - 3) : (x^2 + 5x + 6)$;
2. $(2x^4 - 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6) : (x^2 - 3x + 1)$;
3. $(2x^5 - x^4 - 3x^3 + x - 3) : (x - 3)$.

[Výsledek: 1. $3x - 5 + \frac{9x+27}{x^2+5x+6}$, 2. $2x^2 + 3x + 11 + \frac{25x-5}{x^2-3x+1}$, 3. $2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 36x + 109 + \frac{324}{x-3}$]

5.4 Jedním kořenem rovnice $P(x) = 0$ je číslo α. Vypočtěte ostatní kořeny.

1. $2x^3 + 6x^2 - 18x - 54 = 0,\quad \alpha = -3,$ [$\alpha_{1,2} = -3,\ \alpha_3 = 3$]
2. $x^3 + 2x^2 - 3x - 10 = 0,\quad \alpha = 2,$ [$-2 \pm \mathrm{i}$]
3. $14x^3 - 15x^2 + 6x - 1 = 0,\quad \alpha = \frac{1}{2},$ [$\frac{2\pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{7}$]
4. $x^4 + 3x^3 + 2x^2 - x + 5 = 0,\quad \alpha = -2 + \mathrm{i},$ [$-2 - \mathrm{i},\ \frac{1\pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$]
5. $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0,\quad \alpha = -2 - \mathrm{i},$ [$-2 + \mathrm{i},\ 1 \pm 2\mathrm{i}$]
6. $6x^8 - 5x^7 + 19x^6 - 15x^5 + 21x^4 - 15x^3 + 9x^2 - 5x + 1,\quad \alpha_{1,2,3} = \mathrm{i}$, (trojnásobný kořen) [$\alpha_{4,5,6} = -\mathrm{i},\ \alpha_7 = \frac{1}{2}, \alpha_8 = \frac{1}{3}$]

5.5 Hledáním celočíselných kořenů řešte dané rovnice.

1. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0,$ [$1, 2, 3$]
2. $x^3 - 5x^2 + 2x + 8 = 0,$ [$-1, 2, 4$]
3. $x^4 - 4x^2 + x + 2 = 0,$ [$1, -2, \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$]
4. $x^3 - x^2 - 7x + 15 = 0,$ [$-3, 2 \pm \mathrm{i}$]

5.6.2 Kontrolní otázky

5.1 Jaká řešení může mít kvadratická rovnice s reálnými koeficienty?

5.2 Zdůvodněte, proč je v počítačových aplikacích hodnota polynomu zpravidla vyčíslována Hornerovým algoritmem. (Návod: Porovnejte počet násobení, která je nutné provést pro určení hodnoty polynomu stupně n.)

5.3 Formulujte několika způsoby základní větu algebry.

5.4 Polynom (s reálnými koeficienty) lichého stupně má alespoň jeden reálný kořen. Zdůvodněte toto tvrzení.

Kapitola 6

Maticový počet

6.1 Pojem matice

Maticí typu (m, n), kde m, n jsou přirozená čísla, se rozumí soubor mn veličin a_{jk} zapsaných do m řádků a n sloupců tvaru:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{j1} & a_{j2} \dots & a_{jk} & \dots & a_{jn} \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

Veličiny $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn}$ ve schématu (6.1) nazýváme *prvky matice* a mohou to být čísla (reálná i komplexní) i funkce. Indexy j, k prvku a_{jk} určují *pozici* (umístění) *prvku* ve schématu. První index j udává pořadí řádku, druhý index k pořadí sloupce. Např. prvek a_{32} je umístěn ve 3. řádku a ve 2. sloupci, tj. má pozici 32.

Matici (6.1) budeme označovat $\mathbf{A}$ nebo (a_{ij}). Chceme-li současně vyjádřit, že matice $\mathbf{A}$ je typu (m, n), zapíšeme $\mathbf{A}_{(m,n)}$.

Je-li matice tvořena jediným sloupcem, resp. jediným řádkem, můžeme k označení jejích prvků použít pouze jeden index, např.

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \quad \text{resp.} \quad \mathbf{C} = (c_1, c_2, \dots, c_n).$$

Prvky a_{ii} matice (6.1) nazýváme *diagonální* prvky, všechny diagonální prvky tvoří *hlavní diagonálu* matice.

6.2 Vlastnosti matic

6.2.1 Rovnost matic

Řekneme, že dvě matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, téhož typu (m, n) jsou si *rovny*, jestliže prvky ve stejných pozicích si jsou rovny, tj. platí rovnost

$$a_{ij} = b_{ij}, \quad \text{pro každé } \; i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n \; .$$

Zapisujeme $\mathbf{A} = \mathbf{B}$. V opačném případě řekneme, že matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{B}$ jsou různé a zapisujeme $\mathbf{A} \neq \mathbf{B}$.

Příklad 6.1 Matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ si nejsou rovny, protože $\mathbf{A}$ je matice typu $(2, 2)$, zatímco $\mathbf{B}$ je matice typu $(2, 3)$.

Příklad 6.2 Označíme-li

$$D = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{pmatrix}, \quad \text{potom rovnost} \quad D = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

je stručným zápisem čtyř rovností $d_1 = -1, d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = -4$.

Příklad 6.3 Rovnost matic typu $(3, 1)$

$$\begin{pmatrix} x + 5y - 3z \\ 2x - 7y + z \\ 6y - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

je jeden z možných zápisů soustavy tří lineárních rovnic

$$\begin{aligned} x + 5y - 3z &= -9 \\ 2x - 7y + z &= 3 \\ 6y - z &= -3 \; . \end{aligned}$$

6.2.2 Transponování matic

Je-li dána matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (m, n), potom matice $\mathbf{B} = (b_{ji})$ typu (n, m), pro jejíž prvky platí

$$b_{ji} = a_{ij} \quad \text{pro každé } \; i = 1, \ldots, m, \;\; j = 1, \ldots, n \; ,$$

se nazývá *transponovaná matice k matici* $\mathbf{A}$ a značí se $\mathbf{A}^T$.

Příklad 6.4 Transponovaná matice k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1, & 3, & 0 \\ 7, & 4, & -1 \\ -4, & -3, & 0 \\ 2, & 1, & 5 \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

je matice

$$\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1, & 7, & -4, & 2 \\ 3, & 4, & -3, & 1 \\ 0, & -1, & 0, & 5 \end{pmatrix} = (a_{ji}) \ ,$$

tj. prvek z pozice (i, j) se objeví v pozici (j, i).

Z definice transponované matice vyplývá

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} \ . \tag{6.3}$$

Pomocí horního indexu T se dá matice typu $(n, 1)$ zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T \ .$$

Je účelné si zvyknout na označování n-tic čísel právě naznačeným způsobem.

6.2.3 Význačné matice

1. *Nulová matice* má všechny prvky nulové; budeme ji značit $\mathbf{0}$.

2. *Čtvercová matice* je matice, jejíž počet řádků je stejný jako počet sloupců (v opačném případě mluvíme o *obdélníkové matici*). Počet řádků (a tedy i počet sloupců) u čtvercové matice se nazývá *řád matice.*

   Je zřejmé, že transponovaná matice ke čtvercové matici n-tého řádu je opět čtvercová matice stejného řádu.

3. *Diagonální matice* je čtvercová matice, jejíž prvky ležící mimo hlavní diagonálu jsou nulové.

   Zvláštním případem diagonální matice je *jednotková matice*, která má na diagonále všechny prvky rovné 1, tj. platí

$$\begin{aligned} a_{ij} &= 0 \quad \text{pro každé} \quad i \neq j, \ i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n \ , \\ a_{ii} &= 1 \quad \text{pro každé} \quad i = 1, 2, \ldots, n \ . \end{aligned}$$

   Jednotkovou matici značíme I.

4. *Symetrická matice* je čtvercová matice, pro jejíž prvky platí
$$a_{ij} = a_{ji} \quad \text{pro každé} \quad i = 1, 2, \ldots, n, \quad j = 1, 2, \ldots, n\ .$$
Snadno lze ověřit, že
   (a) pro symetrickou matici je $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$;
   (b) každá diagonální matice je symetrická;
   (c) jednotková matice je symetrická.

5. *Horní trojúhelníková matice* $\mathbf{U} = (u_{ij})$ je čtvercová matice, jejíž prvky pod hlavní diagonálou jsou nulové, tj. platí
$$u_{ij} = 0 \quad \text{pro} \quad i > j\ .$$
Dolní trojúhelníková matice $\mathbf{L} = (l_{ij})$ je čtvercová matice, jejíž prvky nad hlavní diagonálou jsou nulové, tj. platí
$$l_{ij} = 0 \quad \text{pro} \quad i < j\ .$$

6.3 Aritmetické operace s maticemi

6.3.1 Součet matic

Pro matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ **téhož** typu (m, n) definujeme

1. *součet matic* jako matici $S = (s_{ij})$ typu (m, n), pro jejíž prvky platí
$$s_{ij} = a_{ij} + b_{ij};$$
2. *rozdíl matic* jako matici $R = (r_{ij})$ typu (m, n), pro jejíž prvky platí
$$r_{ij} = a_{ij} - b_{ij};$$
pro $i = 1, 2, \ldots, m$ a $j = 1, 2, \ldots, n$.

Krátce řečeno: sčítáme, resp. odečítáme, prvky ve stejných pozicích. Značíme $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, resp. $\mathbf{A} - \mathbf{B}$.

Příklad 6.5 Čtvercovou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ lze zapsat jako součet horní a dolní trojúhelníkové matice. Pro matici 3. řádu je tedy
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix}.$$
Toto vyjádření se používá u numerických metod řešení soustav lineárních rovnic, zvláště u tzv. metody LU-rozkladu.

Sčítání matic je definováno tak, že platí:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}\ , \quad \text{(komutativní zákon)} \tag{6.4}$$
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})\ , \quad \text{(asociativní zákon)} \tag{6.5}$$
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T\ , \tag{6.6}$$
$$\mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}\ . \tag{6.7}$$

6.3.2 Násobení matice číslem

Pro libovolnou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (m,n) definujeme r-násobek (r reálné nebo komplexní číslo) matice $\mathbf{A}$ jako matici typu (m,n), jejíž prvky jsou r-násobky prvků a_{ij}, tedy

$$r\mathbf{A} = (r \cdot a_{ij}) \quad \text{pro} \;\; i = 1,\dots,m, \; j = 1,\dots,n \; .$$

Tedy matici vynásobíme číslem r tak, že číslem r vynásobíme **všechny** její prvky. Odtud plyne, že pro násobek matice platí:

$$\begin{aligned}
&r\mathbf{A} + s\mathbf{A} = (r+s)\mathbf{A} \; , \quad \text{(distributivní zákon)} \\
&r(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = r\mathbf{A} + r\mathbf{B} \; , \quad \text{(distributivní zákon)} \\
&r(s\mathbf{A}) = (rs)\mathbf{A} \; , \\
&(r\mathbf{A})^T = r\mathbf{A}^T \; ,
\end{aligned}$$

kde r, s jsou čísla (reálná nebo komplexní).

Příklad 6.6 Je dána matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ třetího řádu. Vytvoříme matici $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$, kde λ je libovolné číslo (reálné nebo komplexní).
Řešení:

$$\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{pmatrix} .$$

S maticí tohoto typu se setkáme při výpočtu tzv. vlastních čísel matice.

Příklad 6.7 Matici, obsahující komplexní čísla, můžeme vyjádřit pomocí matic s reálnými čísly:

$$\begin{pmatrix} 2+3\mathrm{i} & 4-5\mathrm{i} \\ -2 & 6\mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} .$$

6.3.3 Součin matic

Součin matic je definován složitějším způsobem než předchozí operace s maticemi, proto si nejdříve budeme postup ilustrovat na jednoduchém příkladě:

Příklad 6.8

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 6, & 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 7 \\ 9 \cdot 1 + 4 \cdot 6, & 9 \cdot (-1) + 4 \cdot 7 \\ 5 \cdot 1 + 0 \cdot 6, & 5 \cdot (-1) + 0 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 19 \\ 33 & 19 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} .$$

Příklad 6.9 Násobení dvou matic provedeme pro obecné matice $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu $(3,2)$ a $\mathbf{B} = (b_{ij})$ typu $(2,2)$.
Řešení:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}, & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}, & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21}, & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} \end{pmatrix} .$$

Uveďme obecné zásady, které platí pro výpočet součinu dvou matic **A** a **B** :

1. Aby součin dvou matic **A** a **B** byl definován, musí být počet sloupců matice **A** stejný jako počet řádků matice **B**, tj. je-li matice $\mathbf{A} = (a_{ik})$ typu (m, p), musí být matice $\mathbf{B} = (b_{kj})$ typu (p, n), tj.
$$\mathbf{A}_{(m,p)} \cdot \mathbf{B}_{(p,n)} = \mathbf{C}_{(m,n)} \ .$$
2. Prvek c_{ij} výsledné matice $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je
$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}. \qquad (6.8)$$
3. Výsledná matice **C** je typu (m, n).

Poznámka 6.1 Pokud považujeme řádky (resp. sloupce) matice za řádkové (resp. sloupcové) aritmetické vektory, lze vztah (6.8) pro prvek c_{ij} chápat jako skalární součin i-tého řádkového vektoru matice **A** a j-tého sloupcového vektoru matice **B**. Tím je také zdůvodněna podmínka pro typ matic, která musí být pro definici součinu splněna.

Vlastnosti součinu matic

1. *Násobení matic není obecně komutativní.* Je-li definován součin **AB**, nemusí být definován součin **BA**, protože nemusí být splněna podmínka pro počet řádků a sloupců. Ale i v případě, že součiny **AB** i **BA** jsou definovány, nemusí platit **AB**=**BA** (viz následující příklad). Ovšem v některých případech daný vztah platí.

   Příklad 6.10
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} ,$$
   ale
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} .$$

   V tomto případě je tedy $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$. Rovnost platí pouze pro některé speciální dvojice matic, např. je-li jedna z matic jednotková.

2. Pro libovolnou matici **A** platí $\mathbf{0A} = \mathbf{0}$ a $\mathbf{A0} = \mathbf{0}$, kde **0** je nulová matice (jsou-li součiny na levých stranách definovány). Pro čtvercové matice platí $\mathbf{A}\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}\cdot\mathbf{A}$, kde **A** je libovolná čtvercová matice.

3. Pro libovolnou matici **A** je $\mathbf{AI} = \mathbf{A}$ a $\mathbf{IA} = \mathbf{A}$, kde **I** je jednotková matice (jsou-li součiny na levých stranách definovány).

4. Součin dvou nenulových matic může být nulová matice. To znamená, že z rovnosti $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$ nevyplývá, že musí být **A** nebo **B** nulová matice. Je třeba si uvědomit, že v případě čísel (reálných nebo komplexních) z nulovosti součinu plyne nulovost alespoň jednoho z čísel. To využíváme často při řešení rovnic. Pro maticové rovnice však takové postupy nelze použít.

Příklad 6.11

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Jsou-li všechny následující součiny matic definovány (mají smysl), platí:

4. $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$, (asociativní zákon)
5. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C} = \mathbf{AC} + \mathbf{BC}$, (distributivní zákon)
6. $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$,
7. $r(\mathbf{AB}) = (r\mathbf{A})\mathbf{B} = \mathbf{A}(r\mathbf{B})$, kde r je libovolné číslo.
8. Pomocí součinu matic můžeme definovat *mocninu čtvercové matice*:
   (a) $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$;
   (b) $\mathbf{A}^n = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{A}$ pro $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2$;
   (c) Definujeme $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$.

6.4 Determinant čtvercové matice

V tomto odstavci se budeme zabývat pouze čtvercovými maticemi.

6.4.1 Definice determinantu

Pojem determinant matice si nejdříve zavedeme pro (číselnou) matici 2. a 3. řádu a pak teprve přistoupíme k definici determinantu matice n-tého řádu.

Je dána čtvercová *matice 2. řádu*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} . \tag{6.9}$$

Číslo $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$ se nazývá *determinant matice* $\mathbf{A}$ a značí se

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} , \qquad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} , \qquad \det \mathbf{A} .$$

Je dána čtvercová *matice 3. řádu*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} .$$

Číslo

$$a_{11}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\mathbf{A}_{11}} - a_{12}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}_{\mathbf{A}_{12}} + a_{13}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}_{\mathbf{A}_{13}} . \tag{6.10}$$

se nazývá *determinant* matice $\mathbf{A}$ a značí se

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{A}\,.$$

Determinanty $\mathbf{A}_{11}$, $\mathbf{A}_{12}$, $\mathbf{A}_{13}$ v (6.10) jsme vytvořili vynecháním prvního řádku a postupně prvního, druhého a třetího sloupce původní matice třetího řádu.

Analogicky jako v (6.10) definujeme determinant čtvercové matice n-tého řádu pro $n > 3$ (pomocí determinantů $(n-1)$-ho řádu):

Determinant čtvercové matice (n-tého řádu)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

je číslo označované $\det \mathbf{A}$ a definované takto:

1. Pro $n = 1$ je $\det \mathbf{A} = a_{11}$.
2. Pro $n = 2$ je $\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
3. Pro $n > 2$ je

$$\det \mathbf{A} = a_{11} \det \mathbf{A}_{11} - a_{12} \det \mathbf{A}_{12} + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det \mathbf{A}_{1n}, \tag{6.11}$$

kde matice $\mathbf{A}_{1i}$ pro $i = 1, 2, \dots, n$ jsou matice $(n-1)$-ho řádu a vzniknou z matice $\mathbf{A}$ vynecháním 1. řádku a i-tého sloupce, $i = 1, 2, \dots, n$.

Poznámka 6.2 Vyjádření determinantu vztahem (6.11) se nazývá *rozvoj determinantu podle 1. řádku.*

Příklad 6.12 Vypočteme determinant matice $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-6) - 5 \cdot 4 = -38.$$

Příklad 6.13 Vypočteme determinant matice $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Řešení:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} &= 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} + 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = \\ &= 0 \cdot 1 - 3 \cdot (-3) + 4 \cdot 7 = 37 \end{aligned}$$

6.4.2 Sarrusovo pravidlo

Předpis (6.10) pro určení determinantu matice třetího řádu se nazývá *Sarrusovo pravidlo.* Z (6.10) rozepsání determinantů a roznásobením dostaneme

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}\ . \tag{6.12}$$

Pro zapamatování volby příslušných tří výběrů s kladným, případně záporným znaménkem se používá obvykle jedno z následujících dvou schémat. Matici $\mathbf{A}$ rozšíříme na matici typu $(5,3)$ (resp. typu $(3,5)$) tak, že pod (resp. za) matici $\mathbf{A}$ připíšeme ještě první a druhý řádek (resp. první a druhý sloupec) matice $\mathbf{A}$. Dostaneme matice

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}$$

v nichž výběry s kladným znaménkem jsou vyznačeny souvislými čarami a výběry se záporným znaménkem čárkovaně.

"Nebezpečnost" tohoto pravidla spočívá v tom, že je mnohdy nesprávně aplikováno i na výpočet determinantů matic vyšších řádů. POZOR, je to hrubá CHYBA.

Příklad 6.14 Sarrusovým pravidlem vypočteme determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} .$$

Řešení:
$\det \mathbf{A} = 0 \cdot 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) \cdot (-2) + 4 \cdot 1 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \cdot (-2) - 3 \cdot 1 \cdot (-1) - 0 \cdot (-1) \cdot 3 = 37\ .$

Příklad 6.15 Rozvojem podle 1. řádku vypočteme determinant matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \end{pmatrix} .$$

Řešení:

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} - 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix} .$$

Převedli jsme výpočet determinantu 4. řádu na výpočet 4 determinantů 3. řádu. Pomocí (6.10) dostáváme

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot (-49) - 0 \cdot (-12) + (-1) \cdot 27 - 2 \cdot 4 = -84\ .$$

6.4.3 Další způsoby výpočtu determinantu

Postup výpočtu determinantu rozvojem podle prvního řádku lze modifikovat tak, že provedeme rozvoj podle libovolného řádku, popř. sloupce.
Rozvoj determinantu podle i-tého řádku zapíšeme

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= (-1)^{i+1}a_{i1}\det \mathbf{A}_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}\det \mathbf{A}_{i2} + \cdots + \\ &+ (-1)^{i+n}a_{in}\det \mathbf{A}_{in} = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det \mathbf{A}_{ij} \ ,\end{aligned} \tag{6.13}$$

a rozvoj podle j-tého sloupce zapíšeme

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= (-1)^{1+j}a_{1j}\det \mathbf{A}_{1j} + (-1)^{2+j}a_{2j}\det \mathbf{A}_{2j} + \cdots + \\ &+ (-1)^{n+j}a_{nj}\det \mathbf{A}_{nj} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det \mathbf{A}_{ij} \ .\end{aligned} \tag{6.14}$$

Matice $\mathbf{A}_{ij}$ je matice řádu $n-1$ vzniklá z původní matice $\mathbf{A}$ vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce.

Číslo (pro daná $i = 1, 2, \ldots, n,\ j = 1, \ldots, n$)

$$D_{ij} = (-1)^{i+j}\det \mathbf{A}_{ij}, \tag{6.15}$$

se nazývá *algebraický doplněk* prvku a_{ij}.

Rozvoj determinantu podle i-tého řádku (vztah 6.13) lze pomocí algebraických doplňků psát ve tvaru

$$\det \mathbf{A} = a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \cdots + a_{in}D_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_{ij} \ . \tag{6.16}$$

Rozvoj determinantu podle j-tého sloupce (viz (6.14)) lze pomocí algebraických doplňků psát ve tvaru resp. podle

$$\det \mathbf{A} = a_{1j}D_{1j} + a_{2j}D_{2j} + \cdots + a_{nj}D_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}D_{ij} \ . \tag{6.17}$$

Nyní si pro výpočet determinantu můžeme vybrat vhodný řádek nebo sloupec, podle kterého provedeme rozvoj. Nejčastěji vybíráme takový řádek nebo sloupec, v němž je nejvíce nulových prvků.

Příklad 6.16 Umíme-li nyní provést rozvoj determinantu podle libovolného sloupce nebo řádku, pokusme se vypočítat determinant matice z předchozího příkladu kratším postupem. Provedeme-li rozvoj podle druhého sloupce, je zřejmé, že v rozvoji dostaneme pouze dva nenulové sčítance a budeme tedy počítat pouze dva determinanty 3. řádu.

$$\begin{aligned}\det \mathbf{A} &= (-1)^{2+2}\cdot 3\cdot \det \mathbf{A}_{22} + (-1)^{3+2}\cdot 4\cdot \det \mathbf{A}_{32} = \\ &= (-1)^{4}\cdot 3\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{5}\cdot 4\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} \ .\end{aligned}$$

Příklad 6.17 Úplnou matematickou indukcí lze dokázat, že determinant trojúhelníkové matice je roven součinu prvků na diagonále. Důkaz provedeme pro horní trojúhelníkovou matici.
Pro $n = 2$ je

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} \\ 0 & u_{22} \end{vmatrix} = u_{11}u_{12}.$$

Předpokládejme, že tvrzení platí pro trojúhelníkovou matici $(n-1)$-ho řádu. Rozvineme-li determinant horní trojůhelníkové matice n-tého řádu podle prvků n-to řádku, dostaneme

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2n} \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{n+n} u_{nn} \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & \dots & u_{1,n-1} \\ 0 & u_{22} & \dots & u_{2,n-1} \\ \dots & & & \\ 0 & 0 & \dots & u_{n-1,n-1} \end{vmatrix} = u_{11}u_{22}\dots u_{n-1,n-1} \cdot u_{nn}.$$

Stejným způsobem lze dokázat tvrzení pro dolní trojúhelníkovou matici.

6.4.4 Vlastnosti determinantů

1. *Pro libovolnou čtvercovou matici* $\mathbf{A}$ *platí* $\det \mathbf{A}^T = \det \mathbf{A}$.

Pro determinant matice 2. řádu je důkaz uvedeného tvrzení elementární.

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det \mathbf{A}^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Je tedy $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.

Pro determinant matice $\mathbf{A}$ 3. řádu dostaneme rozvojem podle 1. řádku

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

a pro determinant matice transponované $\mathbf{A}^T$ dostaneme rozvojem podle prvního sloupce

$$\det \mathbf{A}^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} \\ a_{22} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Pro determinant matice 3. řádu tedy platí $\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}^T$.

Úplnou matematickou indukcí lze analogickým postupem dokázat uvedenou vlastnost pro determinant matice n-tého řádu.

Důsledkem uvedené vlastnosti je, že *všechna tvrzení o determinantech, která platí pro řádky matice, platí i pro její sloupce.*

2. *Zaměníme-li v matici pořadí dvou řádků, změní se znaménko determinantu.*

Pro determinant matice 2. řádu je zřejmě

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Úplnou indukcí lze opět ukázat, že tvrzení platí i pro determinant matice řádu $n > 2$. Důsledkem tvrzení 2. je:

3. *Má-li matice dva řádky stejné, je determinant matice nulový.*

4. Z definice determinantu vyplývá, že *je-li jeden řádek matice* $\mathbf{A}$ *nulový, je* $\det \mathbf{A} = 0$.

5. *Vznikne-li matice* $\mathbf{B}$ *z matice* $\mathbf{A}$ *vynásobením jednoho řádku číslem* k*, je*
$$\det \mathbf{B} = k \ \det \mathbf{A}.$$

6. *Vznikne-li matice* $\mathbf{B}$ *z matice* $\mathbf{A}$ *přičtením* k*-násobku* i*-tého řádku k* j*-tému, je*
$$\det \mathbf{B} = \det \mathbf{A}.$$

Pro matici 2. řádu je

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} + ka_{11} & a_{22} + ka_{12} \end{vmatrix} &= a_{11}(a_{22} + k \cdot a_{12}) - a_{12}(a_{21} + k \cdot a_{11}) = \\ = \quad a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + k(a_{11}a_{12} - a_{12}a_{11}) &= \det \mathbf{A} + k \cdot 0\ . \end{aligned}$$

7. *Jsou-li* $\mathbf{A}$ *a* $\mathbf{B}$ *čtvercové matice téhož řádu, pak* $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$.

Příklad 6.18 Vypočteme determinant $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{vmatrix}$.

Řešení: Od druhého řádku odečteme dvojnásobek prvního řádku a od třetího a čtvrtého odečteme první řádek. Potom provedeme rozvoj determinantu podle prvního sloupce.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & -5 & -6 \\ 0 & -1 & -2 & -5 \\ 0 & -2 & -5 & -10 \end{vmatrix} = (-1)^3 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & 10 \end{vmatrix}.$$

Od druhého řádku odečteme první řádek, od třetího dvojnásobek prvního řádku a provedeme rozvoj podle prvního sloupce:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - 5 \cdot 1 = 1\ .$$

Je tedy $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{vmatrix} = 1.$

6.5 Inverzní matice

6.5.1 Regulární a singulární matice, inverzní matice

Čtvercová matice, jejíž determinant je různý od nuly, se nazývá *regulární* matice.
Čtvercová matice, jejíž determinant je roven nule, se nazývá *singulární* matice.

Nechť $\mathbf{A}$ je regulární matice, $\mathbf{I}$ jednotková matice. Jestliže pro matici $\mathbf{X}$ platí

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I}\ , \tag{6.18}$$

nazývá se matice $\mathbf{X}$ inverzní matice k matici $\mathbf{A}$ a značí se $\mathbf{A}^{-1}$.

Vztah (6.18) lze psát tedy ve tvaru

$$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}\ .$$

Inverzní matice $\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1}$ je tedy řešením maticové rovnice $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$.

Příklad 6.19 Stanovme matici $\mathbf{X}$ takovou, že platí $\mathbf{AX} = \mathbf{I}$, kde

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ a } \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Řešení: Tedy

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Z podmínky rovnosti matic řešíme soustavu rovnic

$$\begin{array}{ll} x_{11} + x_{21} = 1\ , & x_{12} + x_{22} = 0\ , \\ x_{11} + 2x_{21} = 0\ , & x_{12} + 2x_{22} = 1\ \ . \end{array}$$

Řešení těchto dvou soustav snadno vypočteme:

$$\begin{array}{ll} x_{11} = 2, & x_{12} = -1 \\ x_{21} = -1, & x_{22} = 1\ . \end{array}$$

Tedy

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\ .$$

Vidíme, že stanovení inverzní matice je ekvivalentní k určení řešení soustav lineárních rovnic (viz kap. 3).

6.5.2 Vlastnosti inverzní matice

1. Ke každé čtvercové matici existuje nejvýše jedna inverzní matice.

2. Ke každé regulární matici existuje právě jedna inverzní matice.

3. $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$;

4. $\mathbf{I}^{-1} = \mathbf{I}$;

5. $(\mathbf{AC})^{-1} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$, jakmile je definována alespoň jedna strana této rovnosti;

6. $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$;

7. $\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}$.

8. Inverzní matice $\mathbf{X}$ k diagonální matici $\mathbf{D} = (d_i)$, $d_i \neq 0$, je opět diagonální matice $\mathbf{X} = \mathbf{D}^{-1} = \left(\frac{1}{d_i}\right)$; rozepsáno

$$\mathbf{D}^{-1} = \begin{pmatrix} d_1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & d_2, & \dots, & 0 \\ \dots & & & \\ 0, & 0, & \dots, & d_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1}, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \frac{1}{d_2}, & \dots, & 0 \\ \dots & & & \\ 0, & 0, & \dots, & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$

6.6 Vlastní čísla a vlastní vektory matice

6.6.1 Charakteristický polynom a charakteristická rovnice matice

Mějme čtvercovou matici $\mathbf{A} = (a_{ij})$ řádu n. Determinant matice $\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}$

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11}, & -a_{12}, & \dots, & -a_{1n} \\ -a_{21}, & \lambda - a_{22}, & \dots, & -a_{2n} \\ \dots & & & \\ -a_{n1}, & -a_{n2}, & \dots, & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

je polynom stupně n v proměnné λ s reálnými koeficienty. Tento polynom se nazývá **charakteristický polynom** matice $\mathbf{A}$.

Algebraická rovnice

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0 \tag{6.19}$$

je *charakteristická rovnice* matice $\mathbf{A}$.

6.6.2 Výpočet vlastních čísel matice

Kořeny rovnice (6.19) nazýváme *vlastní čísla* matice $\mathbf{A}$. Je-li λ_0 k-násobným kořenem charakteristické rovnice, říkáme, že je *k-násobným vlastním číslem* matice $\mathbf{A}$. Místo pojmu vlastní číslo matice se také používá název *charakteristická hodnota* matice $\mathbf{A}$. Kořeny charakteristické rovnice hledáme v množině komplexních čísel.

Množina všech vlastních čísel matice $\mathbf{A}$ se nazývá *spektrum matice* $\mathbf{A}$.

Příklad 6.20 Najděte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Nejdříve vypočteme charakteristický polynom matice **A**

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \lambda^3+\lambda^2-2\lambda\ .$$

Řešíme charakteristickou rovnici matice **A**

$$\lambda^3+\lambda^2-2\lambda = 0\ .$$

Jejím řešením dostaneme tři jednoduchá (reálná) vlastní čísla matice **A**:

$$\lambda_1 = 1, \qquad \lambda_2 = -2, \qquad \lambda_3 = 0.$$

Příklad 6.21 Najděte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}\ .$$

Řešení: Charakteristický polynom matice **A** má tvar

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda+1 & -4 \\ -1 & 0 & \lambda+4 \end{vmatrix} = \lambda^3+6\lambda^2+9\lambda = \lambda(\lambda+3)^2\ .$$

Jeho kořeny jsou $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \lambda_3 = -3$. Matice **A** má tedy jednoduché vlastní číslo 0 a dvojnásobné vlastní číslo -3.

Příklad 6.22 Najděte vlastní čísla matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\ .$$

Řešení: Charakteristická rovnice matice **A**

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & 2 \\ 0 & -2 & \lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda^2-4\lambda+8) = 0$$

má reálný kořen $\lambda_1 = 1$ a komplexně sdružené kořeny $\lambda_2 = 2+2\mathrm{i},\ \lambda_3 = 2-2\mathrm{i}$. Matice **A** má tedy jednonásobná vlastní čísla $1, 2+2\mathrm{i}, 2-2\mathrm{i}$.

6.6.3 Vlastní vektory matice

Je-li číslo λ_0 vlastním číslem matice $\mathbf{A}$, je matice $\lambda_0\mathbf{I} - \mathbf{A}$ singulární (má nulový determinant). Pro její hodnost tedy platí $h(\lambda_0\mathbf{I} - \mathbf{A}) < n$.

Homogenní soustava rovnic

$$\begin{array}{rrrrl} (\lambda_0 - a_{11})x_1 & + a_{12}x_2 & + \cdots & + a_{1n}x_n & = 0, \\ a_{21}x_1 & + (\lambda_0 - a_{22})x_2 & + \cdots & + a_{2n}x_n & = 0, \\ \cdots & & & & \\ a_{n1}x_1 & + a_{n2}x_2 & + \cdots & + (\lambda_0 - a_{nn})x_n & = 0. \end{array} \tag{6.20}$$

má matici soustavy $\lambda_0\mathbf{I} - \mathbf{A}$ (ta je singulární) a má tudíž nekonečně mnoho řešení tvaru $(x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$. Každé netriviální, tj. nenulové, řešení soustavy (6.20) se nazývá *vlastní vektor* (nebo také *charakteristický vektor*) matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ_0.

Příklad 6.23 Hledejme vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & 6 \\ 6, & -3 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Charakteristická rovnice

$$\det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 2, & -6 \\ -6, & \lambda + 3 \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 42 = (\lambda + 7)(\lambda - 6) = 0$$

má kořeny $\lambda_1 = -7, \lambda_2 = 6$. Vlastní vektory matice $\mathbf{A}$ příslušející vlastnímu číslu hledáme jako řešení homogenní soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rcrl} (\lambda - 2)x_1 & - & 6x_2 & = 0, \\ -6x_1 & + & (\lambda + 3)x_2 & = 0. \end{array}$$

Pro $\lambda_1 = -7$ řešíme soustavu

$$\begin{array}{rrl} -9x_1 & -6x_2 & = 0, \\ -6x_1 & -4x_2 & = 0. \end{array}$$

Tato soustava má nekonečně mnoho řešení a vyhovuje jí každá dvojice $x_1 = 2t, x_2 = -3t,\ t \in \mathbb{R}$. To znamená, že vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ příslušejícím vlastnímu číslu $\lambda_1 = -7$ je každý vektor tvaru $(2t, -3t)$, $t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

Pro $\lambda = 6$ řešíme soustavu lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrl} 4x_1 & -6x_2 & = 0, \\ -6x_1 & +9x_2 & = 0. \end{array}$$

Řešením této rovnice je každá dvojice $x_1 = 3t, x_2 = 2t,\ t \in \mathbb{R}$. Vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ příslušejícím vlastnímu číslu $\lambda_2 = 6$ je každý vektor tvaru $(3t, 2t),\ t \in \mathbb{R}, t \neq 0$.

Příklad 6.24 Hledejme vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2, & -1 & 2 \\ 5, & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Charakteristická rovnice

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda-2, & 1 & -2 \\ -5, & \lambda+3 & -3 \\ 1 & 0 & \lambda+2 \end{vmatrix} = \lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1 = (\lambda+1)^3 = 0$$

má trojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Vlastní vektor hledáme jako řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrl} -3x_1 & +x_2 & -2x_3 & = 0, \\ -5x_1 & +2x_2 & -3x_3 & = 0, \\ x_1 & & +x_3 & = 0. \end{array}$$

Řešením této soustavy je každá trojice $x_1 = t, x_2 = t, x_3 = -t,\ \ t \in \mathbb{R}$. Vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ příslušejícím vlastnímu číslu $\lambda_{1,2,3} = -1$ je každý vektor tvaru $(t,t,-t),\ t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$.

Příklad 6.25 Hledejme vlastní vektory matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0, & 1 & 0 \\ -4, & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Charakteristická rovnice

$$\det(\lambda\mathbf{I}-\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} \lambda, & -1 & 0 \\ 4, & \lambda-4 & 0 \\ 2 & -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^3-6\lambda^2+12\lambda-8 = (\lambda-2)^3 = 0$$

má trojnásobný kořen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Vlastní vektor hledáme jako řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrl} 2x_1 & -x_2 & = 0, \\ 4x_1 & -2x_2 & = 0, \\ 2x_1 & -x_2 & = 0. \end{array}$$

Řešením této soustavy je každá trojice $x_1 = t, x_2 = 2t, x_3 = r,\ \ t,r \in \mathbb{R}$. Vlastním vektorem matice $\mathbf{A}$ příslušejícím vlastnímu číslu $\lambda_{1,2,3} = 2$ je každý vektor tvaru $(t,2t,r),\ t,r \in \mathbb{R},\ |t| + |r| \neq 0$ (parametry t a r nemohou být současně rovny 0).

6.7 Cvičení

6.1 Řešte následující maticové rovnice, tj. určete matici $\mathbf{X}$ tak, aby platila rovnost

1. $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -5 & 6 & -2 \end{pmatrix} + \mathbf{X} = 3\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $$\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ 2 & 3\mathrm{i} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - (1+\mathrm{i})\mathbf{X} = \mathrm{i}\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -2 \\ 3 & 1+\mathrm{i} \\ 1 & 1-\mathrm{i} \end{pmatrix}$$

[Výsledky: 1. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} -1 & 8 & 9 \\ 11 & -15 & 5 \end{pmatrix}$, 2. $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1-\mathrm{i} & \frac{1+\mathrm{i}}{2} \\ \frac{-1-5\mathrm{i}}{2} & \frac{3+\mathrm{i}}{2} \\ \frac{-1-\mathrm{i}}{2} & \frac{-1-\mathrm{i}}{2} \end{pmatrix}$]

6.2 Ukažte, že pro každou čtvercovou matici $\mathbf{A}$ je $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^T$ symetrická matice. (Návod: Máte prokázat, že $\mathbf{B} = \mathbf{B}^T$. Podle třetího vztahu v (6.4) stanovte $(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)^T$ a použijte (6.3).)

6.3 Jsou dány matice $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

1. Určete matici $\mathbf{X} + 2\mathbf{Y}$.
2. Zjistěte, zda existuje dvojice čísel $p \neq 0,\ q \neq 0$ taková, že $p\mathbf{X} + q\mathbf{Y}$ je nulová matice.

[Výsledek: 1. $\mathbf{X} + 2\mathbf{Y} = -8\mathbf{Y}$, 2. $q = 10p$]

6.4 Pro zadané matice $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ určete $\mathbf{AB}$ a $\mathbf{BA}$ (pokud tyto součiny existují).

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$
2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -8 \end{pmatrix}$
3. $\mathbf{A} = (5, 2, -3)$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

[1. $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} 53 & 29 \\ -9 & 64 \end{pmatrix}$, $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 7 \\ -17 & 51 & -5 \\ 1 & 38 & 63 \end{pmatrix}$,
2. $\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} -9 & 22 \\ 1 & -48 \end{pmatrix}$, $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} -19 & 8 \\ 39 & -38 \end{pmatrix}$,
3. $\mathbf{AB} = -4$, $\mathbf{BA} = \begin{pmatrix} 10 & 4 & -6 \\ -5 & -2 & 3 \\ 20 & 8 & -12 \end{pmatrix}$.]

6.5 Vypočítejte součin matic

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{pmatrix} \cdot (1, 2, 3)$.

[Výsledky: 1. $(14, 12, 16)^T$, 2. $10 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.]

6.6 Ukažte, že pro diagonální matice $\mathbf{D}_1,\ \mathbf{D}_2$ platí $\mathbf{D}_1\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_2\mathbf{D}_1$, pokud jsou dané matice stejného řádu.

6.7 Vypočtěte $\mathbf{A}^2$ a $\mathbf{A}^3$, je-li $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$[\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 16 \\ -8 & -7 \end{pmatrix}, \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} -29 & 20 \\ -10 & -39 \end{pmatrix}]$

6.8 Je-li $\mathbf{A}$ symetrická, jsou $\mathbf{A}^2,\ \mathbf{A}^3, \ldots, \mathbf{A}^n$ symetrické matice. Dokažte. (Návod: Označte $\mathbf{A}^2 = \mathbf{C} = (c_{ij})$. Pomocí (6.8) vyjádřete c_{ij} a c_{ji}.]

6.9 Je dána matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Utvořte matice $\mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3$;
2. Vyslovte domněnku o tvaru matice $\mathbf{A}^n$ a dokažte její správnost úplnou indukcí.

$\left[\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$

6.10 Vypočtěte determinanty

1. $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 5 & -6 \end{vmatrix}$; 2. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -7 & 6 & 5 \\ 8 & -9 & 10 \end{vmatrix}$.

[Výsledky: 1. -38, 2. -60]

6.11 Vypočtěte $\det \mathbf{A}$ a $\det \mathbf{A}^T$ pro $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -6 & 5 & 4 \\ 7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$. Porovnejte svůj výsledek s pravidlem 1 na str. 24.

[Výsledek: $\det \mathbf{A} = -217$]

6.12 Rozvojem podle některého řádku nebo sloupce vypočtěte determinant $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -7 & 6 & 0 \\ -8 & 0 & 8 & 0 \end{vmatrix}$.

[-544]

6.13 Zdůvodněte následující tvrzení:

1. Determinant diagonální matice je roven součinu prvků na diagonále. (Návod: Použijte definici determinantu.)
2. Determinant jednotkové matice je roven 1.
3. Jednotková matice je regulární.

6.14 Vypočtěte determinant matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} k & k+1 & k+2 \\ k+3 & k+4 & k+5 \\ k+6 & k+7 & k+8 \end{pmatrix}$. [det $\mathbf{A} = 0$]

6.15 Řešte nerovnici $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$. [$x \in (-6, -4)$]

6.16 Vypočtěte tzv. Vandermondův determinant $\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{vmatrix}$, kde x_1, x_2, x_3 jsou libovolná reálná nebo komplexní čísla.

[Výsledek: $(x_2 - x - 1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$]

6.17 Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$
[$\lambda_1 = 6,\ (t,t),\ t \in \mathbb{R},\ t \neq 0,\ \lambda_2 = -1,\ (-5t, 2t),\ t \in \mathbb{R},\ t \neq 0$]

6.18 Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
[$\lambda_1 = 0,\ (t,0,0),\ t \in \mathbb{R},\ t \neq 0,\ \lambda_2 = -1,\ (t,t,t),\ t \in \mathbb{R},\ t \neq 0,$
$\lambda_3 = 1,\ (t,-t,t),\ t \in \mathbb{R},\ t \neq 0$]

6.19 Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice $\mathbf{A}$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
[$\lambda_1 = -1,\ (t,0,0),\ t \in \mathbb{R},\ t \neq 0,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1,\ (-t+r, t, r),\quad t, r \in \mathbb{R},\ |t| + |r| \neq 0.$]

6.8 Kontrolní otázky

6.1 Pro jaké matice je definována mocnina, tj. $\mathbf{X}^n$, kde n je přirozené číslo?

6.2 Pro jaké matice je definován determinant.

6.3 Uveďte vztah, jaký platí mezi det $\mathbf{A}$ a det $\mathbf{A}^n$.

6.4 Definujte regulární a singulární matici.

6.5 Doplňte následující tabulku, tj. rozhodněte, kdy součinem dvou čtvercových matic je matice singulární či regulární.

A	**B**	**A.B**
regulární	regulární	
singulární	regulární	
regulární	singulární	
singulární	singulární	

6.6 Formulujte obecnou podmínku regularity a singularity součinu libovolného počtu čtvercových matic.

6.7 Definujte inverzní matici a uveďte, pro které matice je tento pojem definován.

6.8 Jak rozhodnete, zda dvě matice jsou vzájemně inverzní? Proveďte pro matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.9 Vyjádřete $(\mathbf{A}.\mathbf{B})^{-1}$ pomocí $\mathbf{A}^{-1}$ a $\mathbf{B}^{-1}$.

6.10 Uveďte a zdůvodněte vztah, který platí mezi determinantem regulární matice a determinantem matice k ní inverzní.

6.11 Definujte pojem vlastní číslo matice a uveďte, pro jaké matice je tento pojem definován.

6.12 Nechť λ je vlastní číslo matice $\mathbf{A}$. Definujte vlastní vektor $\boldsymbol{u}$ matice $\mathbf{A}$ příslušný vlastnímu číslu λ.

6.13 Jaká vlastní čísla má diagonální matice?

6.14 Jaká vlastní čísla má horní nebo dolní trojúhelníková matice?

6.15 Které matice mají alespoň jedno reálné vlastní číslo?
(Návod: Uvědomte si, že výpočet vlastních čísel se provádí pomocí hledání kořenů polynomu - viz kontrolní otázka 4 na straně 57.)

Kapitola 7

Soustavy lineárních rovnic

V této kapitole se budeme zabývat soustavami lineárních rovnic, to znamená několika lineárními rovnicemi, které musí být současně splněny.

7.1 Základní pojmy

Definice 7.1 *Soustavu m lineárních rovnic o n neznámých zapisujeme ve tvaru*

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \tag{7.1}$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \tag{7.2}$$
$$\vdots \tag{7.3}$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \tag{7.4}$$
$$\tag{7.5}$$

kde a_{ij}, b_i pro $i = 1, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$ jsou daná čísla. Hledáme n-tici čísel (reálných nebo komplexních) $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ takovou, že po dosazení v_i za x_i do (7.1) dostaneme identity.

Označujeme-li

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

pak (7.1) lze zapsat ve tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\,, \tag{7.6}$$

Matice $\mathbf{A}$ se nazývá *matice soustavy* (7.1), matice $\mathbf{b}$ se nazývá *sloupec pravých stran* a matice $\mathbf{x}$ se nazývá *matice neznámých*. Matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{b}$ zapisujeme také společně jako jednu matici, označujeme ji $\mathbf{A}|\mathbf{b}$, v níž poslední sloupec tvoří sloupec pravých stran a při jejím zápisu pomocí prvků oddělujeme poslední sloupec svislou čarou, tj.

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Matice $\mathbf{A}|\mathbf{b}$ se nazývá *rozšířená matice soustavy*. Je-li matice pravých stran $\mathbf{b}$ nulová, nazývá se taková soustava *homogenní*. Je-li alespoň jedno z čísel $b_i,\ i = 1, 2, \dots, m$, nenulové, mluvíme o *nehomogenní soustavě*.

Pojem řešitelnosti soustavy lineárních rovnic

Na soustavě dvou rovnic se dvěma neznámými x, y

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 , \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2 \end{aligned}$$

si ukážeme tři možnosti pro řešitelnost soustavy lineárních rovnic.

(a) *Soustava má jediné řešení.* Například soustava

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

má jediné řešení $\mathbf{x} = (2, 1)^T$. Vidíme, že $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, tj. matice soustavy je regulární.

Jestliže x a y považujeme za souřadnice bodu v rovině, pak každá rovnice soustavy vyjadřuje přímku v rovině. Dvojice v_1, v_2 je řešením soustavy, právě když bod $[v_1, v_2]$ leží na obou přímkách.

V našem případě mají obě přímky společný bod $[2, 1]$ - viz obr. 7.1.

(b) *Soustava má nekonečně mnoho řešení.* Například soustava

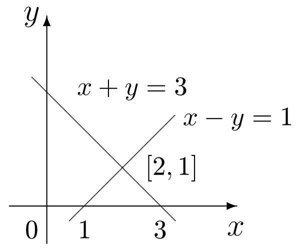
$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2x + 2y &= 6 \end{aligned}$$

obsahuje dvě rovnice, z nichž druhá je dvojnásobkem první. Druhá rovnice tedy nedává žádnou novou informaci o dvojici neznámých x, y, a proto ji můžeme vynechat. Tím se soustava redukuje na jednu rovnici se dvěma neznámými. Jejím řešením je nekonečně mnoho dvojic, pro něž platí

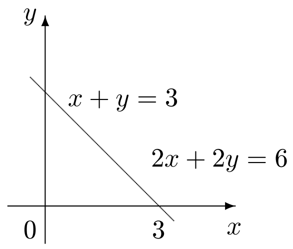
$$y = 3 - x,$$

např. $(1, 2)^T,\ (2, 1)^T,\ (-1, 4)^T$ atd. Vidíme, že $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$, tj. matice soustavy je singulární.

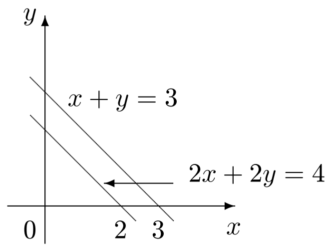
Geometricky vyjadřují obě rovnice tutéž přímku (viz obr. 7.2).



Obrázek 7.1:



Obrázek 7.2:



Obrázek 7.3:

(c) *Soustava nemá řešení.* Například soustava

$$\begin{aligned} x+y &= 3 \\ 2x+2y &= 4 \end{aligned}$$

nemá řešení, neboť levá strana 2. rovnice je dvojnásobek levé strany 1. rovnice, pro pravé strany však uvedený vztah neplatí. Vidíme, že $\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 0$. Geometricky vyjadřují obě rovnice dvě různé rovnoběžné přímky (nemají společný bod) – viz obr.7.3.

Poznámka 7.1 Řešit soustavu znamená najít obecné řešení, tj. popsat všechna její řešení, popř. zjistit, že je neřešitelná. Má-li soustava nekonečně mnoho řešení, „řešit soustavu“ znamená uvést předpis, podle něhož lze vyjádřit jednotlivé neznámé. V předchozím příkladě (b) lze tento předpis uvést ve tvaru

$$x = t, \quad y = 3 - t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Geometricky řečeno, zapsali jsme přímku $x + y = 3$ v parametrickém tvaru.

Částečným (partikulárním) řešením rozumíme jedno z řešení.

7.2 Metody řešení soustav lineárních rovnic

7.2.1 Elementární úpravy matice

Elementárními úpravami matice $\mathbf{W}$ budeme rozumět kteroukoli z následujících úprav:

- výměnu i-tého a j-tého řádku;
- vynásobení i-tého řádku nenulovým číslem;
- přičtení k-násobku i-tého řádku k j-tému řádku.

Elementárními úpravami matice $\mathbf{W}$ vznikne matice $\tilde{\mathbf{W}}$. O maticích $\mathbf{W}$ a $\tilde{\mathbf{W}}$ říkáme, že jsou *ekvivalentní.* Značíme $\mathbf{W} \sim \tilde{\mathbf{W}}$.

Mějme dánu soustavu lineárních rovnic tvaru (7.1) s maticí soustavy $\mathbf{A} = (a_{ij})$ typu (m, n) a s rozšířenou maticí $\mathbf{A}|\mathbf{b}$. Lze dokázat, že elementárními úpravami rozšířené matice soustavy získáme matici, které odpovídá soustava rovnic se stejným řešením, jaké měla soustava původní.

Poznámka 7.2 Někdy se za elementární úpravy považuje i vyškrtnutí nulového řádku. Tato úprava však mění typ matice, a proto ji za elementární úpravu nebudeme považovat.

Další pojem, který zavedeme, je „matice ve stupňovitém tvaru“. Řekneme, že matice $\mathbf{A}$ je ve *stupňovitém tvaru*, jestliže platí:
Je-li v některém řádku první nenulový prvek na i-tém místě, potom ve všech dalších řádcích jsou všechny prvky až do i-tého včetně rovny nule.

7.2.2 Gaussova eliminační metoda

Proces Gaussovy eliminace budeme při řešení soustavy lineárních rovnic realizovat na prvky rozšířené matice soustavy. Uvedeme paralelně dva způsoby vylučování neznámých, jednak přímo v soustavě, jednak s prvky rozšířené matice soustavy. Cílem úprav je převést rozšířenou matici soustavy do stupňovitého tvaru.

Příklad 7.1

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 2 \\ x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & -7 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & \text{-7} \end{array}\right).$$

Řešení:

1. krok Ze všech rovnic, kromě první, vyloučíme neznámou x_1. U rozšířené matice soustavy to znamená, že chceme, aby v pozicích $(2,1)$ a $(3,1)$ byly nulové prvky. První řádek opíšeme a postupně jej násobíme číslem -2 a přičteme ke druhému řádku, číslem -1 a přičteme ke třetímu řádku.

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5 \\ & -5x_2 & -x_3 & = & -8 \\ & -2x_2 & +4x_3 & = & -12 \end{array} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & -2 & 4 & -12 \end{array}\right).$$

2. krok Vyloučíme x_2 ze třetí rovnice. U rozšířené matice soustavy násobíme druhý řádek číslem $-\frac{2}{5}$ a přičteme ke třetímu řádku. Tím dostaneme v pozici $(3,2)$ nulový prvek.

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & 5 \\ & -5x_2 & -x_3 & = & -8 \\ & & \frac{22}{5}x_3 & = & -\frac{44}{5} \end{array} \qquad \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{22}{5} & -\frac{44}{5} \end{array}\right). \tag{7.7}$$

Rozšířená matice soustavy (7.7) je již ve stupňovitém tvaru. Proces Gaussovy eliminace je u konce. Soustavu (7.7) již snadno vyřešíme zpětným dosazením:

$$\begin{aligned} \frac{22}{5}x_3 = -\frac{44}{5} \qquad &\Rightarrow \qquad x_3 = -2 \\ -5x_2 - x_3 = -8 \qquad &\Rightarrow \qquad x_2 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \qquad &\Rightarrow \qquad x_1 = 1\,. \end{aligned}$$

Jediným řešením soustavy je trojice čísel $(1,2,-2)^T$. O správnosti řešení se můžeme přesvědčit dosazením trojice do dané soustavy.

Dalšími dvěma příklady budeme ilustrovat použití Gaussovy eliminace pro případ soustavy, která má nekonečně mnoho řešení, a pro případ neřešitelné soustavy.

Příklad 7.2 Řešme soustavu

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -3 \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & = & 1 \\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & -3. \end{array}$$

Řešení: V tomto příkladě již budeme vylučovat neznámé Gaussovou eliminací pouze v rozšířené matici soustavy.

Rozšířenou matici soustavy

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

převedeme Gaussovou eliminací na matici

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Rozšířená matice soustavy má po eliminaci jeden řádek nulový a ten odpovídá rovnici $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0$, která je splněna identicky, tj. platí pro libovolnou čtveřici čísel, a proto můžeme tuto rovnici vynechat. Ekvivalentní soustava vzniklá po eliminaci má tedy tvar

$$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -3 \\ & & x_3 & -2x_4 & = & 6. \end{array} \tag{7.8}$$

Chceme zjistit výsledný tvar řešení. Převedeme soustavu (7.8) na tvar

$$\begin{array}{rrrcrr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 4 & +4x_4, \\ & x_2 & -\ x_3 & = & -3 & -\ x_4, \\ & & x_3 & = & 6 & +2x_4. \end{array}$$

Jestliže do této soustavy dosadíme $x_4 = t,\ t \in \mathbb{R}$, dostaneme soustavu, kterou již umíme řešit zpětným dosazením.

Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení tvaru

$$x_1 = -8, \quad x_2 = 3 + t, \quad x_3 = 6 + 2t, \quad x_4 = t, \qquad t \in \mathbb{R}\ ,$$

např. partikulární řešení jsou $(-8, 4, 8, 1)^T$, $(-8, 3, 6, 0)^T$ apod. Řešení (rozumí se obecné) lze psát také ve tvaru

$$\mathbf{x} = (-8, 3, 6, 0)^T + t(0, 1, 2, 1)^T.$$

Příklad 7.3 Řešme soustavu

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 10 \end{array}.$$

Řešení: Rozšířenou matici soustavy

$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{ccr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 10 \end{array}\right)$$

upravíme eliminací na tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$

Ekvivalentní soustava vzniklá po eliminaci má tedy tvar

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 4 \\ & 3x_2 & +7x_3 & = & 5 \\ & & 0 \cdot x_3 & = & 3. \end{array}$$

Neexistuje x_3 takové, aby byla splněna poslední rovnice vzniklé soustavy. Daná soustava je tudíž také neřešitelná.

7.2.3 Podmínky řešitelnosti soustavy lineárních rovnic

Při realizaci Gaussovy eliminace lze zároveň rozhodnout o řešitelnosti a jednoznačnosti řešení soustavy. Pomocí matice a rozšířené matice soustavy můžeme vyslovit obecné podmínky řešitelnosti a jednoznačnosti řešení.

Každé matici $\mathbf{A}$ přiřadíme celé nezáporné číslo $h(\mathbf{A})$, které nazýváme *hodnost matice* a definujeme jako počet nenulových řádků v matici, kterou dostaneme převedením matice $\mathbf{A}$ do stupňovitého tvaru.

Vraťme se nyní k příkladům z předcházejícího odstavce a zkusme formulovat podmínky řešitelnosti (Frobeniova věta) uvedených soustav pomocí hodnosti matice soustavy a hodnosti matice rozšířené.

Příklad 7.4 1. V příkladě 3.2, kde soustava měla jediné řešení, vznikla po eliminaci rozšířená matice ve tvaru

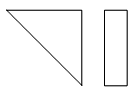
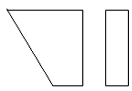
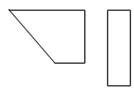
$$\mathbf{A}|\mathbf{b} = \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & -5 & -1 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{22}{5} & -\frac{44}{5} \end{array}\right).$$

Matice soustavy i rozšířená matice mají 3 nenulové řádky, a proto mají obě hodnost 3, tj.

$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3.$$

2. V příkladě 3.3, kde soustava měla nekonečně mnoho řešení, vznikla po eliminaci rozšířená matice ve tvaru
$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$
Zde je
$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3.$$
Připomeňme, že šlo o soustavu, která má čtyři neznámé.

3. V příkladě 3.4, kde soustava neměla řešení, vznikla po eliminaci rozšířená matice ve tvaru
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$
V tomto případě je
$$h(\mathbf{A}) = 2, \quad h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = 3.$$

Tvar soustavy			
Podmínky	$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}\|\mathbf{b}) = n$	$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}\|\mathbf{b}) < n$	$h(\mathbf{A}) < h(\mathbf{A}\|\mathbf{b})$
Řešitelnost	Existuje jediné řešení	Existuje nekonečně mnoho řešení	Neexistuje řešení

Tabulka 7.1:

V uvedených příkladech je zajímavé si všimnout vztahu mezi hodností matice soustavy a hodností matice rozšířené. U řešitelné soustavy (případ 1. a 2.) platí $h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$, u neřešitelné (případ 3.) je $h(\mathbf{A}) \neq h(\mathbf{A}|\mathbf{b})$. Tyto vlastnosti platí obecně (Frobeniova věta) a lze je shrnout do tabulky 7.1 (n v tabulce značí počet neznámých dané soustavy lineárních rovnic).

Věta 7.1 *(Frobeniova) Soustava lineárních rovnic*
$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$$
o n neznámých má alespoň jedno řešení, právě když
$$h(\mathbf{A}) = h(\mathbf{A}|\mathbf{b}) \ ,$$
tj. hodnost matice soustavy se rovná hodnosti rozšířené matice.

7.2.4 Cramerovo pravidlo

Příklad 7.5 Pro ilustraci Cramerova pravidla vyřešíme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &= b_2. \end{aligned}$$

Řešení: Vynásobíme první rovnici číslem a_{22}, druhou rovnici číslem $-a_{12}$ a obě rovnice sečteme. Vyloučíme tak proměnnou x_2 a dostaneme jednu rovnici pro neznámou x_1

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = a_{22}b_1 - a_{12}b_2 \ .$$

Je-li

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0 \ ,$$

pak

$$x_1 = \frac{a_{22}b_1 - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \ .$$

Obdobně dostaneme (vyloučením proměnné x_1)

$$x_2 = \frac{a_{11}b_2 - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \ .$$

Vzorce pro x_1 a x_2 můžeme přepsat pomocí determinantů na tvar

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \ , \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \ .$$

Uvedené vzorce jsou speciálním případem tzv. *Cramerova pravidla.*

Uvažujme soustavu n rovnic o n neznámých $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (matice soustavy $\mathbf{A}$ je **čtvercová**) s regulární maticí soustavy $\mathbf{A}$ (tj. $\det \mathbf{A} \neq 0$). Potom má soustava řešení a toto řešení můžeme vyjádřit pomocí determinantů ve tvaru

$$x_1 = \frac{\det \mathbf{A}_1}{\det \mathbf{A}} \ , \quad x_2 = \frac{\det \mathbf{A}_2}{\det \mathbf{A}} \ , \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\det \mathbf{A}_n}{\det \mathbf{A}} \ , \tag{7.9}$$

kde $\mathbf{A}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, je matice, která vznikne z matice $\mathbf{A}$ nahrazením jejího k-tého sloupce sloupcem pravých stran. Vzorce (7.9) se nazývají *Cramerovo pravidlo.*

Ve srovnání s ostatními metodami řešení soustav lineárních rovnic (v numerické matematice) je řešení soustavy pomocí Cramerova pravidla pro $n > 3$ mnohem pracnější a časově náročnější. Navíc tuto metodu lze použít jen pro soustavy s regulární maticí. Crammerovo pravidlo ale na druhé straně poslouží k odvození vzorců v různých aplikacích.

Příklad 7.6 Pomocí Cramerova pravidla vyřešíme soustavu

$$\begin{array}{rrrrr} 4x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 2, \\ & -x_2 & +x_3 & = & -10, \\ 2x_1 & +3x_2 & -2x_3 & = & 24. \end{array}$$

Řešení: Matice soustavy je čtvercová a

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

proto můžeme Cramerovo pravidlo použít. Vypočteme tedy postupně determinanty $\det \mathbf{A}_1$, $\det \mathbf{A}_2$, a $\det \mathbf{A}_3$.

$$\det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -10 & -1 & 1 \\ 24 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 8\ , \qquad \det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 0 & -10 & 1 \\ 2 & 24 & -2 \end{vmatrix} = -32\ ,$$

$$\det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -10 \\ 2 & 3 & 24 \end{vmatrix} = 8\ .$$

Podle (7.9) je tedy

$$x_1 = \frac{8}{-4} = -2, \qquad x_2 = \frac{-32}{-4} = 8 \qquad x_3 = \frac{8}{-4} = -2.$$

Poznámka 7.3 Ze vzorců (7.9) můžeme také odvodit jeden důležitý výsledek týkající se řešení homogenní soustavy s regulární maticí soustavy. U homogenní soustavy jsou $\det \mathbf{A}_k = 0$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$ a soustava má tedy vždy jen nulové (tzv. triviální) řešení.

7.3 Soustavy lineárních rovnic s parametrem

Budeme se zabývat soustavou lineárních algebraických rovnic $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ (homogenní i nehomogenní), v níž některé z prvků a_{ij}, b_i nejsou udány jako čísla, ale jako parametry, které mohou nabývat libovolných hodnot z dané číselné množiny. Hodnost matice i rozšířené matice takové soustavy závisí obecně na hodnotách parametru, a proto na hodnotách parametru závisí i existence či neexistence řešení. U soustav s parametrem je třeba nejdříve provést rozbor a teprve pak hledat příslušná řešení soustavy, pokud existují.

Příklad 7.7 Provedeme rozbor existence řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrl} -x_1 & +px_2 & +3x_3 & = -1 \\ -2x_1 & +x_2 & +px_3 & = -3 \\ x_1 & -5x_2 & -7x_3 & = 0 \end{array} \tag{7.10}$$

v závislosti na parametru $p \in \mathbb{R}$ a najděte všechna její řešení.
Řešení: Nejprve zjistíme, pro které hodnoty parametru p je matice soustavy regulární. Stanovíme proto $\det \mathbf{A}$:

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} -1 & p & 3 \\ -2 & 1 & p \\ 1 & -5 & -7 \end{vmatrix} = (p-2)(p-17)\ .$$

Matice $\mathbf{A}$ je regulární, právě když $\det \mathbf{A} \neq 0$, tj. když $p \neq 2$ a $p \neq 17$. Musíme tedy vyšetřit zvlášť tři případy.

1. Pro hodnoty parametru $p \neq 2$ a $p \neq 17$ můžeme hledat řešení soustavy např. pomocí Cramerova pravidla:

$$\det \mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} -1 & p & 3 \\ -3 & 1 & p \\ 0 & -5 & -7 \end{vmatrix} = 26(2-p) \, ,$$
$$\det \mathbf{A}_2 = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -2 & -3 & p \\ 1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 2-p \, ,$$
$$\det \mathbf{A}_3 = \begin{vmatrix} -1 & p & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -5 & 0 \end{vmatrix} = 3(2-p) \, .$$

   Odtud

$$x_1 = \frac{26(2-p)}{(p-2)(p-17)} = \frac{26}{17-p} \, , \quad x_2 = \frac{(2-p)}{(p-2)(p-17)} = \frac{1}{17-p} \, ,$$
$$x_3 = \frac{3(2-p)}{(p-2)(p-17)} = \frac{3}{17-p}$$

   pro $p \neq 2$ a $p \neq 17$.

2. Pro hodnotu parametru $p = 2$ je $\det \mathbf{A} = 0$ a Cramerovo pravidlo tedy nelze použít. Gaussovou eliminací dostaneme, že rozšířená matice soustavy (7.10) má tvar

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 1 & -5 & -7 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & -4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

   a soustava tedy má nekonečně mnoho řešení ve tvaru

$$x_1 = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}t, \quad x_2 = \frac{1}{3} - \frac{4}{3}t, \quad x_3 = t \, , \qquad t \in \mathbb{R} \, .$$

3. Pro hodnotu parametru $p = 17$ má rozšířená matice soustavy (7.10) tvar

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 17 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 17 & -3 \\ 1 & -5 & -7 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 17 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -\frac{1}{11} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{15}{44} \end{array} \right) .$$

   Vidíme, že hodnost matice soustavy je menší než hodnost rozšířené matice soustavy, a tedy soustava v tomto případě nemá řešení.

Příklad 7.8 Provedeme rozbor existence řešení soustavy lineárních rovnic

$$\begin{array}{rrrrl} x & +y & +2z & +2t & = 2 \\ x & +2y & +3z & +t & = 3 \\ x & & +z & +3t & = a \end{array} \tag{7.11}$$

v závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ a najděte všechna její řešení.
Řešení: Tuto soustavu nelze řešit postupem z předchozího příkladu, protože matice soustavy není čtvercová. Použijeme tedy Gaussovu eliminaci. Po úpravě dostaneme rozšířenou matici soustavy ve tvaru

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a-1 \end{array}\right)$$

1. Pro $a = 1$ je hodnost matice soustavy stejná jako hodnost matice rozšířené a je rovna 2. Soustava má tedy nekonečně mnoho řešení tvaru

$$x = 1 - 3p - q, \quad y = 1 + p - q, \quad z = q, \quad t = p, \qquad p, q \in \mathbb{R} .$$

2. Pro $a \neq 1$ nemá soustava řešení, protože hodnost matice soustavy je 2, kdežto hodnost matice rozšířené je 3.

7.4 Výpočet inverzní matice

7.4.1 Výpočet inverzní matice eliminací

Na obecné regulární matici $\mathbf{A}$ třetího řádu ukážeme, jak lze určit prvky inverzní matice modifikovanou Gaussovou eliminací.

Označíme prvky matice $\mathbf{A}$ a $\mathbf{A}^{-1}$:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} , \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} . \tag{7.12}$$

Naším úkolem je najít matici $\mathbf{A}^{-1}$ takovou, aby

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = I , \tag{7.13}$$

kde $\mathbf{I}$ je jednotková matice. Rovnost $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$ lze rozepsat pomocí tří rovností takto:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{7.14}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \tag{7.15}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{13} \\ x_{23} \\ x_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \tag{7.16}$$

Máme tedy tři soustavy rovnic se stejnou maticí soustavy $\mathbf{A}$. O matici $\mathbf{A}$ víme, že je regulární, všechny tři soustavy mají tedy jediné řešení. Neznámé v soustavách jsou prvky inverzní matice

$\mathbf{A}^{-1}$. Řešením první soustavy dostaneme prvky x_{11}, x_{21}, x_{31}, řešením druhé soustavy prvky x_{12}, x_{22}, x_{32} a řešením třetí soustavy prvky x_{13}, x_{23}, x_{33}. Použijeme-li pro řešení všech tří soustav (se stejnou maticí soustavy) Gaussovu eliminační metodu, můžeme eliminaci provádět současně tak, že vytvoříme modifikovanou rozšířenou matici soustavy ve tvaru

$$\left(\left. \underbrace{\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}}_{(1)} \right| \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{(2)} \right) . \tag{7.17}$$

Gaussovu eliminační metodu můžeme modifikovat tak, aby v rozšířené matici soustavy (7.17) na místě matice $\mathbf{A}$ (v (7.17) je toto místo označeno (1)) vznikla jednotková matice. Na místě jednotkové matice (označeno (2)) pak vznikne matice inverzní. Tato modifikace Gaussovy eliminace se nazývá *Jordanova eliminační metoda*, jejíž princip se dá charakterizovat v několika krocích:

1. Vytvoříme rozšířenou matici (7.17).
2. V ní eliminujeme známým postupem prvky pod diagonálou (GEM). Analogickým postupem eliminujeme i prvky nad diagonálou.
3. Dělíme řádek, pomocí něhož jsme provedli eliminaci, jeho diagonálním prvkem.

Jinými slovy v Jordanově eliminační metodě odečítáme řádek matice ve vhodných násobcích od všech řádků matice (s výjimkou daného řádku). Tak zároveň odpadne realizace zpětného chodu, tj. zpětné dosazování.

Tímto algoritmem dostaneme

a) na místě původní matice $\mathbf{A}$ matici jednotkovou,

b) na místě jednotkové matice matici inverzní $\mathbf{A}^{-1}$.

Příklad 7.9 Jordanovou metodou určíme inverzní matici k matici

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Řešení: Vytvoříme rozšířenou matici

$$\mathbf{A}|\mathbf{I} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) .$$

1. krok Známým postupem dostaneme v pozicích $(2,1)$ a $(3,1)$ nulové prvky.

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 3 & 0 & -2 \end{array} \right) .$$

2. krok Stejným postupem eliminujeme prvek v pozici $(3, 2)$ a dostaneme matici

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 2 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

K dokončení úpravy druhého sloupce k prvnímu řádku přičteme druhý řádek a tím eliminujeme prvek v pozici $(1, 2)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -6 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Pomocí násobků třetího řádku eliminujeme dva prvky třetího sloupce v pozicích $(1, 3)$ a $(2, 3)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 7 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 0 & 11 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

3. krok Poslední krok spočívá v převedení matice, která je na místě původní matice $\mathbf{A}$, na matici jednotkovou. První a třetí řádek vydělíme číslem 4, druhý řádek číslem -4:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{array}\right).$$

Hledaná inverzní matice má tedy tvar

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{11}{4} & \frac{1}{4} & \frac{7}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Tím jsme vyřešili současně všechny tři soustavy rovnic (7.14). Správnost výsledku můžeme ověřit platností rovností $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \mathbf{I}$ (stačí ověřit platnost jedné z nich).

7.4.2 Výpočet inverzní matice pomocí determinantu

Věta 7.2 *Nechť $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $i, j = 1, \ldots, n$, je regulární matice řádu n. Pak*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} D_{11}, & D_{21}, & \ldots, & D_{n1} \\ D_{12}, & D_{22}, & \ldots, & D_{n2} \\ \ldots & & & \\ D_{1n}, & D_{2n}, & \ldots, & D_{nn} \end{pmatrix}, \tag{7.18}$$

kde D_{ij} je algebraický doplněk prvku a_{ij} – viz (6.15).

Důkaz: Označme $\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{C} = (c_{ij})$. Ověříme, že matice $\mathbf{C}$ je jednotková. Podle definice součinu matic je

$$c_{ij} = \frac{1}{\det \mathbf{A}}(a_{i1}D_{j1} + a_{i2}D_{j2} + \cdots + a_{in}D_{jn}) \ .$$

Je-li $i = j$, pak podle (6.16) je

$$a_{i1}D_{i1} + a_{i2}D_{i2} + \cdots + a_{in}D_{in} = \det \mathbf{A} \ ,$$

a tedy $c_{ii} = 1$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Je-li $i \neq j$, pak součet

$$a_{i1}D_{j1} + a_{i2}D_{j2} + \cdots + a_{in}D_{jn}$$

představuje rozvoj determinantu (podle i-tého řádku) matice, která vznikla z matice $\mathbf{A}$ nahrazením j-tého řádkového vektoru i-tým řádkovým vektorem. Jde tedy o determinant matice, která má dva řádky stejné. To znamená, že determinant je roven nule, takže $c_{ij} = 0$ pro $i \neq j$. Matice $\mathbf{C}$ je tedy jednotková.

Analogicky se dokáže, že také $\mathbf{BA}$ je jednotková matice.

■

Příklad 7.10 Pro matici druhého řádu

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix}$$

je podle (6.15)

$$D_{11} = a_{22}, \quad D_{12} = -a_{21}, \quad D_{21} = -a_{12}, \quad D_{22} = a_{11},$$

a tedy podle (7.18)

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \begin{pmatrix} a_{22}, & -a_{12} \\ -a_{21}, & a_{11} \end{pmatrix} \ .$$

Poznámka 7.4 Vzorec (7.18) je pro praktický výpočet inverzní matice vhodný pouze u matic nejvýše třetího řádu. Pro matice čtvrtého řádu vyžaduje výpočet jednoho determinantu čtvrtého řádu a šestnácti determinantů třetího řádu.

7.5 Cvičení

7.1 Nalezněte všechna řešení soustav lineárních rovnic:

1. $$\begin{array}{llll} x_1 & +x_2 & +x_3 & = 5 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = 1 \\ x_1 & & +x_3 & = 3 \end{array}$$ $[x_1 = 1 + t, x_2 = 2, x_3 = 2 - t, \ t \in \mathbb{R}]$

2. $$\begin{array}{lllrr} 2x_1 & -x_2 & +3x_3 & = & 9 \\ 3x_1 & -5x_2 & +x_3 & = & -4 \\ 4x_1 & -7x_2 & +x_3 & = & 5 \end{array}$$ [Řešení neexistuje.]

3. $$\begin{array}{rrrrcr} x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & -x_2 & -x_3 & -2x_4 & = & -4 \\ 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & -x_4 & = & -6 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -x_4 & = & -4 \end{array}$$

[$x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = 0, x_4 = 1.$]

4. $$\begin{array}{rrrcr} x & +2y & -3z & = & 5 \\ 3x & -4y & +5z & = & 6 \end{array}$$

[$x = \frac{1}{5}(t+16), y = \frac{1}{16}(14t+9), z = t,\ t \in \mathbb{R}.$]

5. $$\begin{array}{rrrcr} 5x & +3z & +u & = & 0 \\ & 4y & +2t & = & 6 \\ x & +3z & +5u & = & 0 \\ & 2y & +4t & = & 6 \\ x & +z & +u & = & 0 \end{array}$$

[$x = t, y = 1, z = -2t, t = 1, u = t,\ t \in \mathbb{R}.$]

7.2 Nalezněte všechna řešení homogenních soustav lineárních rovnic:

1. $$\begin{array}{rrrcr} x & +y & +z & = & 0 \\ x & +3y & +6z & = & 0 \\ x & +8y & -3z & = & 0 \end{array}$$

[$x = 0, y = 0, z = 0.$]

2. $$\begin{array}{rrrrcr} 2x & -4y & +5z & +3t & = & 0 \\ 4x & -8y & +17z & +11t & = & 0 \\ 3x & -6y & +4z & +2t & = & 0 \end{array}$$

[$x = 2r, y = s, z = -5r+5s, t = 7r-7s,\ r, s \in \mathbb{R}.$]

7.3 Pomocí Cramerova pravidla řešte soustavu

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -2 \\ x_1 & -4x_2 & +2x_3 & = & -1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 0. \end{array}$$

[$x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 2.$]

7.4 Řešte soustavy lineárních rovnic s parametrem $p \in \mathbb{R}$

1. $$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & +px_3 & = & p \\ x_1 & +px_2 & +x_3 & = & p \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 1 \end{array}$$

[Pro $p = 1$ je $x_1 = 1 - t - s, x_2 = t, x_3 = s, \quad t, s \in \mathbb{R}$,
pro $p \neq 1$ je $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = 1$]

2. $$\begin{array}{rrcr} px_1 & +x_2 & = & 1 \\ x_1 & +px_2 & = & p \end{array}$$

[Pro $p = 1$ je $x_1 = t, x_2 = 1-t,\ t \in \mathbb{R}$, pro $p = -1$ je $x_1 = -1+t, x_2 = t,\ t \in \mathbb{R}$,
pro $p \neq 1 \wedge p \neq -1$ je $x_1 = 0, x_2 = 1.$]

3. $$\begin{array}{rcrcl} px_1 & + & x_2 & = & p \\ x_1 & + & px_2 & = & 0 \end{array}$$
[Pro $p = 1$ nemá soustava řešení, pro $p = -1$ nemá soustava řešení, pro $p \neq 1 \wedge p \neq -1$ je $x_1 = \frac{p^2}{p^2-1}, x_2 = \frac{p^2}{1-p^2}$.]

4. $$\begin{array}{rcrcl} px_1 & + & x_2 & = & p \\ x_1 & + & px_2 & = & p \end{array}$$
[Pro $p = 1$ je $x_1 = t, x_2 = 1 - t,\ t \in \mathbb{R}$, pro $p = -1$ nemá soustava řešení, pro $p \neq 1 \wedge p \neq -1$ je $x_1 = \frac{p}{p+1}, x_2 = \frac{p}{p+1}$.]

7.5 Najděte inverzní matici k matici $\mathbf{A}$:

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$; [$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$.]

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$; [$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.]

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; [$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.]

7.6 Kontrolní otázky

7.1 Definujte hodnost matice.

7.2 Jakou hodnost má matice
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}?$$

7.3 Formulujte Frobeniovu větu pro popis množiny řešení dané soustavy lineárních rovnic v závislosti na hodnosti matice soustavy, hodnosti soustavy rozšířené a počtu neznámých.

7.4 Uveďte nutnou a postačující podmínku pro existenci alespoň jednoho řešení soustavy lineárních rovnic.

7.5 Proč je nevhodné použití Cramerova pravidla pro řešení soustav rovnic s větším počtem rovnic (a neznámých)?

7.6 Vysvětlete rozdíl mezi Gaussovou a Jordanou eliminační metodou.

7.7 Uveďte dvě metody výpočtu inverzní matice k dané regulární matici.

Kapitola 8

Vektorový počet

8.1 Euklidovský prostor $\mathbb{E}_3$

Vlastnostmi euklidovských prostorů $\mathbb{E}_2$ (rovina) a $\mathbb{E}_3$ (prostor – trojdimenzionální prostor) se zabývá planimetrie a stereometrie na střední škole. Euklidovský prostor $\mathbb{E}_3$ je bodový prostor, v němž je definována vzdálenost dvou jeho bodů X, Y (značíme ji $|XY|$) jako velikost úsečky XY s tím, že pro libovolné tři body X, Y, Z z $\mathbb{E}_3$ platí

1. $|XY| \geq 0$ a $|XY| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X = Y$,
2. $|XY| = |YX|$,
3. $|XY| + |YZ| \geq |XZ|$.

První dvě vlastnosti mají zřejmý geometrický význam. Třetí z vlastností se nazývá *trojúhelníková nerovnost* a slovně ji lze vyjádřit takto: součet délek dvou stran v trojúhelníku je větší než délka třetí strany. Rovnost nastane jen tehdy, jestliže dané body leží v přímce.

V euklidovském prostoru $\mathbb{E}_3$ zavedeme *kartézskou soustavu souřadnic*, kterou tvoří bod O (počátek) a uspořádaná trojice vzájemně kolmých souřadnicových os x, y, z. Na souřadnicových osách jsou dány body E_x, E_y, E_z tak, že (obr. 8.1)

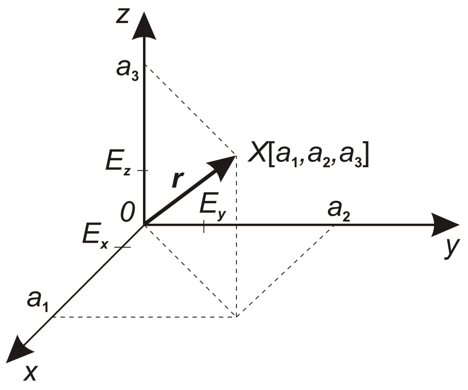
$$|OE_x| = |OE_y| = |OE_z| = 1.$$

Určením bodů E_x, E_y a E_z je stanovena i orientace souřadnicových os i souřadnicového systému (zpravidla se v aplikacích pracuje s pravotočivým kartézským souřadnicovým systémem). Pro určení orientace souřadnicového systému používáme pravidlo pravé ruky, které je známé ze středoškolské fyziky.

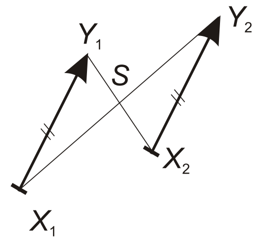
Pomocí pravoúhlých průmětů bodu prostoru $\mathbb{E}_3$ do souřadnicových os přiřazujeme každému bodu A uspořádanou trojici čísel $A[a_1, a_2, a_3]$. Obráceně, každé trojici čísel a_i, $i = 1, 2, 3$, přiřazujeme jediný bod $A \in \mathbb{E}_3$.

Vzdálenost bodů $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3] \in \mathbb{E}_3$ definujeme v euklidovském prostoru $\mathbb{E}_3$ jako číslo

$$d = |AB| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}. \tag{8.1}$$



Obrázek 8.1:

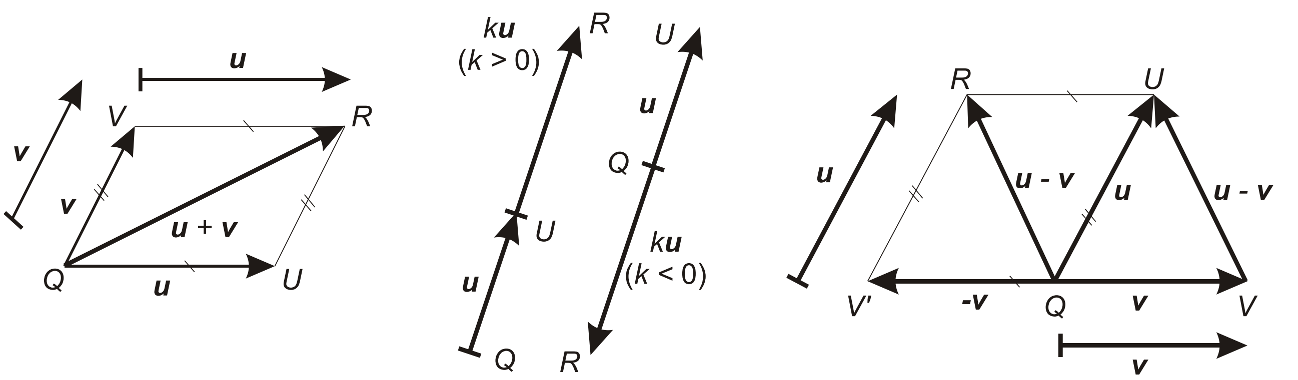


Obrázek 8.2:

8.2 Vázaný a volný vektor

Vázaným vektorem rozumíme uspořádanou dvojici bodů A, B, tj. orientovanou úsečku. Pro vázaný vektor daný body A, B se používá značení $\overrightarrow{AB}$, resp. $B - A$, resp. $\boldsymbol{AB}$. Bod A je počátečním bodem a bod B koncovým bodem tohoto vektoru. S takto vymezeným pojmem vektoru pracuje fyzika např. při popisu sil.

Uvažujme množinu všech vázaných vektorů $\overrightarrow{XY}$, které splňují následující podmínku: pro každé dva vektory $\overrightarrow{X_1Y_1}$ a $\overrightarrow{X_2Y_2}$ z této množiny mají úsečky X_1Y_2 a Y_1X_2 společný střed S – obr. 8.2. Jinými slovy tato množina je tvořena rovnoběžnými úsečkami stejné délky a o stejné orientaci. Tuto množinu nazýváme *volným vektorem* a značíme ji $\vec{a}$, resp. $\boldsymbol{a}$. Samozřejmě platí, že vázaným vektorem $\overrightarrow{AB}$ je jednoznačně určen (reprezentován) volný vektor $\boldsymbol{a}$. Vázaný vektor $\overrightarrow{AB}$ je možné chápat jako *umístění volného vektoru* $\boldsymbol{a}$ *do bodu* A. V dalším textu se budeme zabývat volnými vektory, a proto budeme slovo „volný“ vynechávat.



Obrázek 8.3:

Na obr. 8.3 je znázorněno, jak je určen pro vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jejich součet $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$. Vektory umístíme do bodu Q a trojúhelník UQV doplníme na rovnoběžník. Vázaný vektor $\boldsymbol{QR}$ je pak umístěním hledaného vektoru $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$.

Na tomto obrázku je znázorněno i násobení vektoru $\boldsymbol{u}$ (reálným) číslem k, tj. vektor $k\boldsymbol{u}$. Uvedena je varianta pro násobení kladným i záporným číslem. Jestliže zvolíme $k = -1$, pak značíme $(-1)\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$ a říkáme, že vektor $-\boldsymbol{a}$ je *opačný* k vektoru $\boldsymbol{a}$. Dále je na obr. 8.3 znázorněno určení rozdílu vektorů $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$. Tuto operaci můžeme provést pomocí součtu vektoru $\boldsymbol{u}$ s vektorem opačným k vektoru $\boldsymbol{v}$, tj. využijeme vztahu $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v})$.

Velikostí vektoru $\boldsymbol{a}$ rozumíme velikost úsečky X_iY_i, která je umístěním vektoru $\boldsymbol{a}$. Vektor, jehož velikost je rovna nule, nazýváme *nulový vektor* a značíme $\vec{o}$, resp. $\boldsymbol{o}$.

8.3 Souřadnice vektoru a algebraické operace s vektory

Uvažujme vektor $\boldsymbol{u}$ a jeho umístění $\overrightarrow{AB}$. Nechť souřadnice bodů v dané souřadnicové soustavě jsou dány takto: $A[a_1, a_2, a_3]$, $B[b_1, b_2, b_3]$. Čísla

$$u_1 = b_1 - a_1, \quad u_2 = b_2 - a_2, \quad u_3 = b_3 - a_3$$

se nezmění, zvolíme-li jiné umístění vektoru $\boldsymbol{u}$. Proto uspořádanou trojici (u_1, u_2, u_3) nazýváme *souřadnicemi vektoru* $\boldsymbol{u}$ *v dané souřadnicové soustavě* a píšeme $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$.

Pro *nulový vektor* platí $\boldsymbol{o} = (0, 0, 0)$.

Velikost vektoru $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ je číslo

$$|\boldsymbol{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}. \tag{8.2}$$

Velikost nulového vektoru je nulová. Je-li $|\boldsymbol{u}| = 1$, říkáme, že vektor $\boldsymbol{u}$ je *jednotkový vektor*.

Pojem vektoru a jeho souřadnic jsme zavedli na základě geometrie prostoru $\mathbb{E}_3$. Vektor však lze chápat jako uspořádanou n-tici reálných čísel x_i, $i = 1, \dots, n$. V technických aplikacích pak např. mluvíme o stavovém vektoru jistého systému apod. Vektor tedy může mít i jiný počet složek a nemusí vždy vycházet jen z geometrických představ.

Nyní určíme, jaké souřadnice mají vektory, které vzniknou z daných vektorů pomocí aritmetických operací. Snadno zjistíme (načrtněte si obrázek), že pro součet $\boldsymbol{s}$ vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$, kde $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$, platí

$$\boldsymbol{s} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3). \tag{8.3}$$

Pro součin čísla α a vektoru $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ platí

$$\boldsymbol{s} \ = \alpha\boldsymbol{u} \ = (\alpha u_1, \alpha u_2, \alpha u_3). \tag{8.4}$$

Uvedené operace (součet dvou vektorů a násobení vektoru „skalárem“) mají následující vlastnosti:

1.	komutativní zákon	$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$
2.	asociativní zákon	$(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{z}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{z})$
3.		$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{o}=\boldsymbol{u}$
4.	distributivní zákon	$\alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$
5.	distributivní zákon	$(\alpha+\beta)\cdot\boldsymbol{u}=\alpha\boldsymbol{u}+\beta\boldsymbol{u}$
6.		$1\cdot\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$
7.	asociativní zákon	$\alpha(\beta\boldsymbol{u})=(\alpha\beta)\boldsymbol{u}.$
8.		$\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u})=\boldsymbol{o}.$

Platnost vlastností 1 – 8 se snadno ověří přímým výpočtem pomocí souřadnic vektorů $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{z}$.

Vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ nazveme *kolineární*, je-li jeden z nich násobkem druhého, tj. pokud existuje reálné číslo λ tak, že

$$\boldsymbol{u}=\lambda\cdot\boldsymbol{v} \text{ nebo } \boldsymbol{v}=\lambda\cdot\boldsymbol{u}. \tag{8.5}$$

Pokud je uvedené $\lambda>0$, říkáme, že vektory jsou *souhlasně kolineární.*

Rozdíl vektorů $\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}$ určíme snadno jako vektor

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{v})\,. \tag{8.6}$$

Pro souřadnice vektoru $\boldsymbol{r}$ platí: $\boldsymbol{r}=(u_1-v_1,u_2-v_2,u_3-v_3)$.

Důležitou operací je tzv. *normování vektoru.* Podstatou této operace je, že k danému nenulovému vektoru $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2,u_3)$ stanovíme *jednotkový vektor* $\boldsymbol{e}$ tak, aby s ním byl souhlasně kolineární. Platí

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e} &= \frac{1}{|\boldsymbol{u}|}\cdot\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}\,(u_1,u_2,u_3)= \\ &= \left(\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}},\frac{u_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}},\frac{u_3}{\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}}\right).\end{aligned} \tag{8.7}$$

8.4 Vektorové zaměření prostou $\mathbb{E}_3$ a ortonormální báze

Všechny vektory, které můžeme utvořit uspořádanými dvojicemi bodů z $\mathbb{E}_3$, tvoří tzv. *vektorové zaměření euklidovského prostoru* $\mathbb{E}_3$, které označíme $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$. Zaměření euklidovského prostoru $\mathbb{E}_3$ je také možné chápat jako množinu všech uspořádaných trojic reálných čísel (u_1,u_2,u_3). V prostoru $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$ jsou důležité jednotkové vektory

$$\boldsymbol{e}_1=(1,0,0),\quad \boldsymbol{e}_2=(0,1,0),\quad \boldsymbol{e}_3=(0,0,1)\,. \tag{8.8}$$

Vektory $\boldsymbol{e}_i$, $i=1,2,3$, nazveme bázové vektory. Budeme rovněž říkat, že tvoří bázi prostoru $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$. Jednotkové vektory $\boldsymbol{e}_i$ umístěné do počátku určí na souřadnicových osách postupně body $E_x[1,0,0]$, $E_y[0,1,0]$, $E_z[0,0,1]$. Odtud ihned vidíme, že vektory $\boldsymbol{e}_i$ jsou rovněž vzájemně kolmé, takže tvoří tzv. *ortonormální bázi.* Pomocí nich můžeme všechny vektory z $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$ jednoznačně vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{u}=u_1\cdot\boldsymbol{e}_1+u_2\cdot\boldsymbol{e}_2+u_3\cdot\boldsymbol{e}_3=\sum_{i=1}^{3}u_i\boldsymbol{e}_i. \tag{8.9}$$

K tomu, abychom uspořádanou trojici u_1, u_2, u_3 považovali za souřadnice vektoru $\boldsymbol{u}$ v bázi $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$, tvořené jednotkovými vektory $\boldsymbol{e}_i$, nás nyní opravňuje (8.9).

Obecně považujeme za ortonormální bázi prostoru $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$ každou trojici navzájem kolmých jednotkových vektorů. Vztahy mezi souřadnicemi bodu v různých kartézských soustavách souřadnic (určených vždy bodem a ortonormální bází) uvedeme v odstavci **??**.

Ve fyzice a v mechanice je zvykem značit v prostoru $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$ bázové vektory $\boldsymbol{e}_i$ symboly $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

8.5 Lineární závislost a nezávislost vektorů

Uvažujme vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ a reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Řekneme, že vektor $\boldsymbol{w}$ je lineární kombinací vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ pro *kombinační koeficienty* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, jestliže

$$\boldsymbol{w} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{u}_i. \tag{8.10}$$

Řada úvah v geometrii je opřena o pojmy lineární závislost či nezávislost vektorů. Vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ jsou *lineárně závislé*, jestliže jeden z nich lze vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících vektorů.

Vektory jsou *lineárně nezávislé*, nejsou-li lineárně závislé, tedy vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \ldots, \boldsymbol{u}_r$ jsou *lineárně nezávislé*, jestliže žádný z nich nelze vyjádřit jako lineární kombinaci zbývajících vektorů.

V prostoru $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$ lze lineární závislost vektorů charakterizovat takto:

1. *Dva vektory* $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden je násobkem druhého. Lineárně závislé (tj. kolineární) vektory lze umístit na tutéž přímku. V opačném případě jsou dva vektory v $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$ lineárně nezávislé.

2. *Tři vektory* $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když jeden z nich je lineární kombinací ostatních, tedy např. $\boldsymbol{u}_3 = \lambda_1 \boldsymbol{u}_2 + \lambda_2 \boldsymbol{u}_2$. Tři lineárně závislé vektory lze vždy umístit do téže roviny (tzv. komplanární vektory), resp. na tutéž přímku (kolineární vektory). V opačném případě jsou vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ lineárně nezávislé.

3. *Čtyři vektory* jsou v $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$ vždy lineárně závislé. Podobně skupina více než čtyř vektorů v $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$ je vždy lineárně závislá.

Pro posouzení lineární závislosti či nezávislosti tří vektorů v $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$ s výhodou využijeme vlastností determinantů. Sestavme matici $\mathbf{U}$, jejíž řádky tvoří souřadnice vektorů $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$. Z vlastností determinantů plyne

$$\det \mathbf{U} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{u}_1 \\ \boldsymbol{u}_2 \\ \boldsymbol{u}_3 \end{vmatrix} = 0, \tag{8.11}$$

právě když jsou vektory $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ lineárně závislé.

8.6 Báze a dimenze

Bází prostoru $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$ rozumíme libovolnou trojici lineárně nezávislých vektorů. Snadno plyne, že každá čtveřice vektorů je již lineárně závislá.

Počet prvků v různých bázích téhož prostoru je shodný a nazývá se *dimenze*. Zaměření $\mathcal{V}(\mathbb{E}_2)$ euklidovské roviny má dimenzi dvě. Prostor $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$ má dimenzi tři. Je možné i zobecnění na prostory vyšších dimenzí.

8.7 Skalární součin vektorů

Nejprve připomeneme definici úhlu a velikosti úhlu dvou vektorů. Úhlem dvou nenulových vektorů rozumíme konvexní úhel umístění těchto vektorů do společného bodu. Pro velikost φ úhlu (v obloukové míře) dvou nenulových vektorů platí $0 \leq \varphi \leq \pi$.

Ve fyzice se počítá práce, kterou vykoná síla $\boldsymbol{F}$ působící po dráze, která je umístěním vektoru $\boldsymbol{s}$, jako tzv. skalární součin vektorů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{s}$. Velikost úhlu vektorů $\boldsymbol{F}$ a $\boldsymbol{s}$ označme φ. Pro vykonanou práci platí

$$A = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} = |\boldsymbol{F}| \cdot |\boldsymbol{s}| \cdot \cos\varphi\ .$$

Skalární součin $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}$ dvou nenulových vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ definujeme jako číslo, které je součinem velikostí obou vektorů a kosinu velikosti úhlu, který tyto vektory svírají, tj.

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}|\ |\boldsymbol{v}| \cos\varphi. \tag{8.12}$$

Pokud je alespoň jeden z vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ nulový, definujeme jejich skalární součin jako nulový.

Použijeme-li (8.12) pro výpočet skalárních součinů vektorů $\boldsymbol{e}_i$ ortonormální báze, dostaneme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 1, \\ \boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_2 \cdot \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_3 \cdot \boldsymbol{e}_1 = 0. \end{aligned}$$

Obecně lze pro bázové vektory stručně zapsat výsledek skalárního násobení pomocí tzv. *Kroneckerova delta*

$$\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij} = \{\ 0\ \text{ pro} i \neq j 1\ \text{pro} i = j. \tag{8.13}$$

Poznamenejme bez důkazu, že skalární součin je distributivní operací – viz tabulka v závěru odstavce.

Vypočteme skalární součin vektorů $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$. V ortonormální bázi tvořené vektory $\boldsymbol{e}_i$ vyjádříme vektory $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ jako lineární kombinaci bázových vektorů:

$$\boldsymbol{u} = \sum_{i=1}^{3} u_i \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{v} = \sum_{j=1}^{3} v_j \boldsymbol{e}_j.$$

Pak provedeme násobení podle distributivního zákona. Dostaneme

$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = \left(\sum_{i=1}^{3} u_i \boldsymbol{e}_i \right) \left(\sum_{j=1}^{3} v_j \boldsymbol{e}_j, \right) = \sum_{i,j=1}^{3} u_i v_j (\boldsymbol{e}_i \boldsymbol{e}_j)\ .$$

Použijeme-li (8.13), získáme výsledek

$$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{3}u_iv_i=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3. \tag{8.14}$$

Ze vztahů (8.12) a (8.14) vyplývá, že skalární součin je komutativní, tj. $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$. Položíme-li v (8.14) $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{u}$, obdržíme jiný možný způsob výpočtu velikosti vektoru $\boldsymbol{u}$

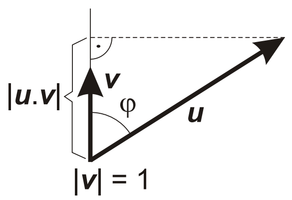
$$|\boldsymbol{u}|=\sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2}\,. \tag{8.15}$$

Pomocí (8.12) zjistíme, že nutnou a postačující podmínkou *kolmosti* dvou nenulových vektorů je *nulovost jejich skalárního součinu.* Při výpočtech s vektory se často používá následující implikace (samozřejmě by mohla být doplněna na ekvivalenci)

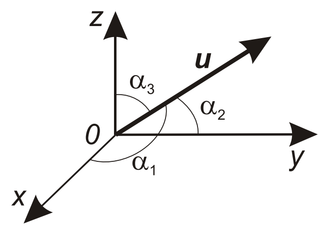
$$(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0)\Rightarrow(\boldsymbol{u}=\boldsymbol{o})\vee(\boldsymbol{v}=\boldsymbol{o})\vee((\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{o})\wedge(\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{o})\wedge(\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v})).$$

Slovně: je-li skalární součin dvou vektorů nulový, pak buď alespoň jeden z vektorů je nulový, nebo jsou dané vektory na sebe kolmé. Je vhodné si uvědomit rozdíl oproti počítání v oboru reálných čísel.

Povšimněme si ještě jednou vzorce (8.12) pro $\boldsymbol{u}\neq 0$ a $|\boldsymbol{v}|=1$. V tomto případě značí absolutní hodnota skalárního součinu $|\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}|$ velikost pravoúhlého průmětu (obr. 8.4) vektoru $\boldsymbol{u}$ na přímku, jejíž směr je určen vektorem $\boldsymbol{v}$.



Obrázek 8.4:



Obrázek 8.5:

Shrneme nejdůležitější vlastnosti, které se používají při výpočtech za použití skalárního součinu:

1.	definice	$\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{o},\ \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{o},\ \boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\lvert\boldsymbol{u}\rvert\,\lvert\boldsymbol{v}\rvert\cos\varphi$
2.	výpočet	$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\sum_{i=1}^{3}u_iv_i$
3.	komutativní zákon	$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u}$
4.	distributivní zákon	$\boldsymbol{u}\cdot(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{z})=\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{z}$
5.	velikost	$\lvert\boldsymbol{u}\rvert=\sqrt{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}}$
6.	kolmost	pro $\boldsymbol{u}\neq\boldsymbol{o},\ \boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{o}$ platí $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}=0\Leftrightarrow\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$

Příklad 8.1 Pomocí vlastností skalárního součinu dvou vektorů upravíme rovnici pro neznámý vektor $\boldsymbol{x}$ a dané nenulové vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$:

$$3\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{x}-2\boldsymbol{x}\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{x}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=0.$$

Řešení: Vypočteme

$$\begin{aligned} 3\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{x}(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a}) &= 0 \\ 3\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{x} - 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{b} + 2\boldsymbol{x}\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{x} &= 0 \\ \boldsymbol{a}\,\boldsymbol{x} &= 0 \end{aligned}$$

Řešením rovnice jsou všechny vektory $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{a}$ a nulový vektor.

Příklad 8.2 Stanovíme jednotkový vektor $\boldsymbol{n}$, který je kolmý k daným dvěma vektorům $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Uvažujme $\boldsymbol{a} = (0, 1, 2)$ a $\boldsymbol{b} = (2, 1, 0)$.
Řešení: Pro hledaný vektor $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ musí platit $|\boldsymbol{n}| = 1$ a

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{a} = 0, \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b} = 0. \tag{8.16}$$

Pro dané souřadnice vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ dostáváme z (8.16) soustavu

$$\begin{array}{rrrl} & n_2 & +2n_3 & = 0 \\ 2n_1 & +n_2 & & = 0 \end{array}$$

Řešení (proveďte si) můžeme psát ve tvaru $n_3 = t,\ n_2 = -2t,\ n_1 = t$, kde $t \in \mathbb{R}$. Parametr t stanovíme tak, aby byla splněna i podmínka $|\boldsymbol{n}| = 1$. Platí

$$|\boldsymbol{n}| = \sqrt{t^2 + 4t^2 + t^2} = |t|\sqrt{6} = 1.$$

Řešením je tedy vektor $\boldsymbol{n} = \frac{\sqrt{6}}{6}(1, -2, 1)$ a vektor k němu opačný.
Jiný postup řešení této úlohy bude uveden v příkladu 8.3.

V mechanice se používají tzv. *směrové kosiny vektoru* $\boldsymbol{u}$. Jsou to kosiny úhlů α_i, které svírá vektor $\boldsymbol{u}$ postupně s vektory báze $\boldsymbol{e}_i$, $i = 1, 2, 3$. Dostaneme je snadno z (8.12) a (8.14):

$$\cos(\alpha_i) = \frac{u_i}{|\boldsymbol{u}|}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{8.17}$$

Umocněním rovnic (8.17) na druhou a sečtením odvodíme důležitý vztah

$$\cos^2(\alpha_1) + \cos^2(\alpha_2) + \cos^2(\alpha_3) = 1 . \tag{8.18}$$

Porovnáme-li (8.17) a (8.7), zjistíme, že směrové kosiny vektoru $\boldsymbol{u}$ jsou souřadnicemi jednotkového vektoru kolineárního s vektorem $\boldsymbol{u}$.

8.8 Vektorový součin

Vektorový součin zavedeme pro vektory z $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$. Použití vektorového součinu je velmi časté např. v mechanice při stanovení momentu síly apod.

Vektorovým součinem dvou vektorů, z nichž jeden je nulový, je nulový vektor. Uvažujme nenulové vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ v $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$. Jejich vektorovým součinem (v tomto pořadí) rozumíme vektor $\boldsymbol{w}$, který má tyto vlastnosti:

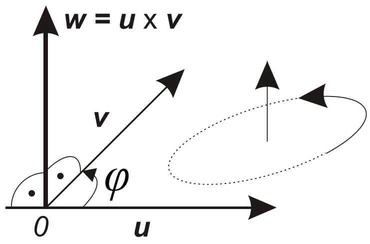
1. vektor $\boldsymbol{w}$ je kolmý na vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$;

2. trojice vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ je stejně orientovaná (pravotočivě) jako trojice bázových vektorů $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ – obr. 8.6;

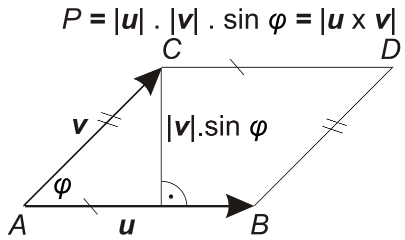
3. velikost $|\boldsymbol{w}| = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \sin\varphi$, kde $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$ je velikost úhlu vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$.

Vektorový součin vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ značíme $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$.

Geometrický význam třetí vlastnosti lze formulovat takto: velikost $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|$ vektoru $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ je rovna obsahu rovnoběžníku sestrojeného pomocí vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ (obr. 8.7).



Obrázek 8.6:



Obrázek 8.7:

Podle výše uvedených vlastností vektorového součinu lze vypočítat, že pro vektory báze $\boldsymbol{e_i}$ platí

$$1. \qquad \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{0}\ , \quad i = 1, 2, 3; \tag{8.19}$$

$$2. \qquad \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_{i+1} = \boldsymbol{e}_{i+2}\ , \quad i = 1, 2, 3; \tag{8.20}$$

$$3. \qquad \boldsymbol{e}_{i+1} \times \boldsymbol{e}_i = -\boldsymbol{e}_{i+2}\ , \quad i = 1, 2, 3. \tag{8.21}$$

Ve vztazích (8.19) je nutné chápat indexy „modulo“ 3, tj. je-li hodnota některého výrazu větší než 3, pak číslo 3 odečteme. Např. druhá uvedená vlastnost má pro $i = 2$ tvar

$$\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_{(4 \bmod 3)} = \boldsymbol{e}_1\ .$$

Nyní vyjádříme vektorový součin pomocí souřadnic vektorů

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3).$$

Použijeme-li (8.19), dostaneme

$$\begin{aligned} \boldsymbol{w} &= \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = (u_1\boldsymbol{e}_1 + u_2\boldsymbol{e}_2 + u_3\boldsymbol{e}_3) \times (v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3) = \\ &= u_1v_2(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2) + u_1v_3(\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_3) + u_2v_1(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1) + \\ &+ u_2v_3(\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3) + u_3v_1(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1) + u_3v_2(\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_2) \\ &= (u_2v_3 - u_3v_2)\boldsymbol{e}_1 + (u_3v_1 - u_1v_3)\boldsymbol{e}_2 + (u_1v_2 - u_2v_1)\boldsymbol{e}_3 = \\ &= \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)\ . \end{aligned} \tag{8.22}$$

Výsledek v (8.22) se dá stručně zapsat symbolickým determinantem (pozor na pořadí!):

$$\boldsymbol{w} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 & \boldsymbol{e}_2 & \boldsymbol{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} \tag{8.23}$$

Ze známé vlastnosti o záměně dvou řádků v determinantu (8.23) plyne, že pro vektorové násobení nenulových vektorů nebude platit komutativní zákon. Platí tu však, že

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u}) \,. \tag{8.24}$$

Z vlastnosti (8.24) plyne, že při vektorovém násobení vektorové rovnosti či rovnice daným vektorem je nutné rozlišit násobení zprava a zleva podobně jako v případě matic.

Z definice vektorového součinu dále vyplývá, že $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$, právě když jsou vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ lineárně závislé, tj. kolineární, neboli jeden vektor je násobkem druhého vektoru. V symbolickém tvaru:

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{o} \quad \Leftrightarrow \quad (\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{u} = \lambda \boldsymbol{v}) \vee (\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{u})$$

Shrneme nejdůležitější vlastnosti, které se používají při výpočtech za použití vektorového součinu:

1.	definice	$\lvert\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}\rvert = \lvert\boldsymbol{u}\rvert\,\lvert\boldsymbol{v}\rvert \sin\varphi$, kolmost a pravidlo pravé ruky
2.	výpočet	viz vztah (8.22)
3.	antikomutativní zákon	$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = -(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u})$
4.	distributivní zákon	$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{z}$
5.	distributivní zákon	$\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{z}) \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{u} + \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{u}$

Příklad 8.3 Pomocí vektorového součinu znovu vyřešíme příklad 8.2, tj. stanovíme jednotkový vektor $\boldsymbol{n}$, který je kolmý k daným dvěma vektorům $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$, je-li $\boldsymbol{a} = (0, 1, 2)$ a $\boldsymbol{b} = (2, 1, 0)$.
Řešení: Pro hledaný vektor $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$ musí platit

$$\boldsymbol{n} = \pm \frac{\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}}{\lvert\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\rvert}.$$

Pro dané souřadnice máme:

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \left(\begin{vmatrix} 1, & 2 \\ 1, & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 0, & 2 \\ 2, & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0, & 1 \\ 2, & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2, 4, -2).$$

Vypočteme-li velikost vektoru a provedeme jeho normování, dojdeme (spolu s vektorem opačným) k řešení podrobně uvedeném v příkladu 8.2.

Příklad 8.4 Určíme obsah trojúhelníka SQR, je-li $S[1, 1, 1]$, $Q[3, 2, -1]$ a $R[4, 5, 0]$.
Řešení: K určení obsahu použijeme geometrického významu velikosti vektorového součinu vektorů. Označme $\boldsymbol{q} = Q - S$ a $\boldsymbol{r} = R - S$. Vypočteme-li $\lvert\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{r}\rvert$, dostaneme obsah rovnoběžníku, který vznikne doplněním trojúhelníka SQR. Pro obsah trojúhelníka SQR tedy platí

$$P_{\Delta SQR} = \frac{1}{2} \lvert\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{r}\rvert.$$

Pro dané souřadnice máme: $\boldsymbol{q} = (2, 1, -2)$, $\boldsymbol{r} = (3, 4, -1)$,

$$\boldsymbol{q} \times \boldsymbol{r} = \left(\begin{vmatrix} 1, & -2 \\ 4, & -1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2, & -2 \\ 3, & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2, & 1 \\ 3, & 4 \end{vmatrix} \right) = (7, -4, 5).$$

Nyní určíme obsah trojúhelníka:

$$P_{\Delta SQR} = \frac{1}{2}\sqrt{7^2 + (-4)^2 + 5^2} = \frac{3}{2}\sqrt{10}.$$

8.9 Smíšený součin

Jsou-li dány vektory $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3), \boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$, definujeme pro ně *smíšený součin* $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ jako *číslo*

$$\Delta = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}). \tag{8.25}$$

Na základě definice vektorového a skalárního součinu a s uplatněním vztahů (8.22) lze ukázat, že

$$\Delta = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}. \tag{8.26}$$

Příklad 8.5 Pro dané vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{w}$ je dán smíšený součin $\Delta = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$. Pomocí Δ určíme $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ (záměna dvou operandů) a $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ (cyklická záměna operandů).

Řešení: Ze vztahu (8.26) plyne, že $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) = -\Delta$, neboť v determinantu dojde k výměně prvního a druhého řádku.

V případě cyklické záměny operandů provedeme vlastně dvě výměny řádků, tj. dvakrát dojde ke změně znaménka, neboli platí

$$(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (-1)^2\Delta = \Delta.$$

Významná je geometrická interpretace smíšeného součinu. Snadno lze zdůvodnit, že číslo

$$|\Delta| = |(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})| \tag{8.27}$$

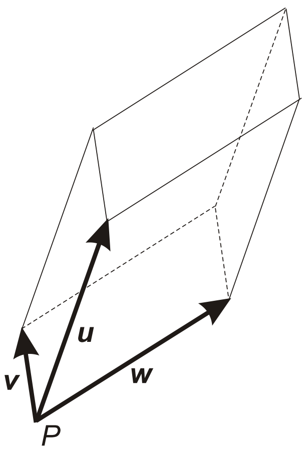
udává *objem rovnoběžnostěnu*, který je určen vektory $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ umístěnými do společného bodu P (obr. 8.8). Pro objem V rovnoběžnostěnu platí $V = P.a$, kde P je obsah podstavy a a je výška rovnoběžnostěnu. Stačí si však uvědomit, že $P = |\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}|$ (viz obr. 8.7 a obr. 8.9) a výška a odpovídá pravoúhlému průmětu vektoru $\boldsymbol{u}$ do směru vektoru $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$, tedy je $a = \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$ – obr. 8.4. Pro vektor $\boldsymbol{n}$ v obr. 8.9 platí

$$\boldsymbol{n} = \frac{1}{|\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}|}(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}),$$

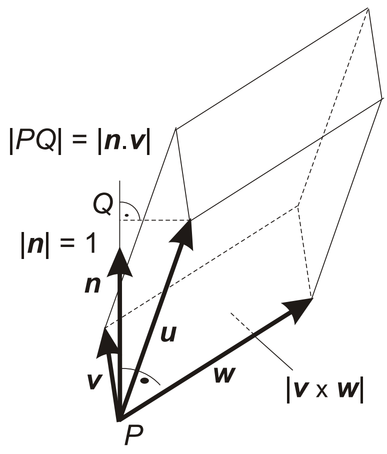
tj. vznikne normováním vektoru $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$.

Jinými slovy: geometrická interpretace absolutní hodnoty smíšeného součinu plyne z geometrické interpretace vektorového a skalárního součinu.

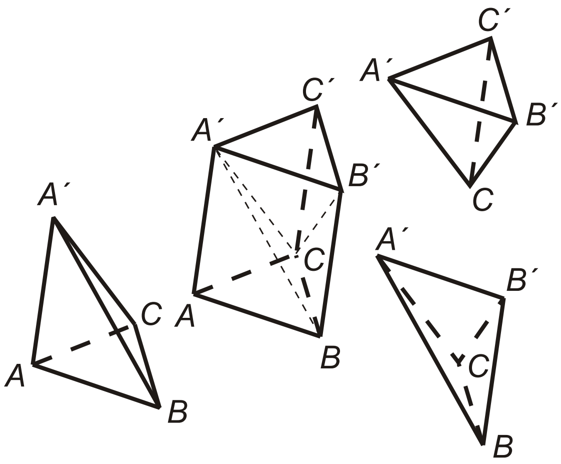
Smíšený součin vektorů $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ je roven nule jen v případě, jsou-li dané vektory *lineárně závislé*. Vektory jsou v tomto případě komplanární nebo dokonce kolineární a nelze proto mluvit o vytvoření tělesa podle obr. 8.8.



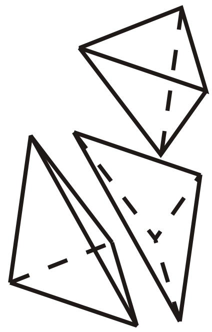
Obrázek 8.8:



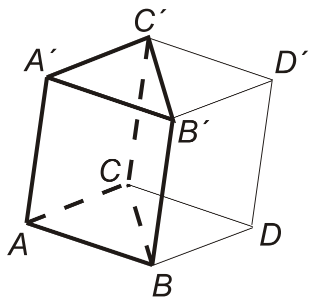
Obrázek 8.9:



Obrázek 8.10:



Obrázek 8.11:



Obrázek 8.12:

Příklad 8.6 Pro čtyřstěn $ABCA'$ stanovíme jeho objem V. Uvažujme $A[1,1,0]$, $B[2,-2,3]$, $C[4,4,1]$ a $A'[2,0,7]$.
Řešení: K výpočtu objemu využijeme geometrické interpretace absolutní hodnoty smíšeného součinu tří vektorů. Označíme $\boldsymbol{b} = B - A = (1,-3,3)$, $\boldsymbol{c} = C - A = (3,3,1)$ a $\boldsymbol{v} = A' - A = (1,-1,7)$.

Vypočteme smíšený součin $(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{v})$. Platí:

$$\Delta = (\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{v}) = \begin{vmatrix} 1, & -3, & 3 \\ 3, & 3, & 1 \\ 1, & -1, & 7 \end{vmatrix} = 21 - 3 - 9 - 9 + 1 + 63 = 64. \tag{8.28}$$

Vypočtené číslo udává objem rovnoběžnostěnu, který lze podle obr. 8.10 rozložit na dva trojboké hranoly o stejném objemu a každý z těchto trojbokých hranolů pak na tři čtyřstěny – obr. 8.11 a 8.12 – o stejném objemu. Snadno tedy stanovíme objem V zadaného čtyřstěnu

$ABCA'$. Platí
$$V = \frac{1}{6}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{v}) = \frac{64}{6} = 10\frac{2}{3}. \tag{8.29}$$

8.10 Lagrangeova identita a Cauchyova nerovnost

Vyjádřeme $|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|^2$ pomocí velikostí vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$ a pomocí jejich skalárního součinu. Podle definice vektorového součinu platí

$$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2 \sin^2\varphi.$$

Vzhledem k tomu, že $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$ a vzhledem k definici (8.12) skalárního součinu máme

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|^2 &= |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2(1 - \cos^2\varphi) = \\ &= |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2 - |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2\cos^2\varphi = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2. \end{aligned}$$

Tak jsme dokázali *Lagrangeovu identitu*:

$$|\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}|^2 = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2 - (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2,$$

která vyjadřuje velikost vektorového součinu dvou vektorů pomocí velikosti a skalárního součinu těchto vektorů.

Vypočtěme nyní druhou mocninu skalárního součinu dvou vektorů, tj. určíme $(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2$. Podle (8.12) platí
$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2 = (|\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\cos\varphi)^2 = |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2\cos^2\varphi.$$
Vzhledem k tomu, že $\cos^2\varphi \leq 1$, můžeme psát

$$(\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v})^2 \leq |\boldsymbol{u}|^2|\boldsymbol{v}|^2.$$

Tento vztah se nazývá *Cauchyova nerovnost* a ukazuje, že při počítání s vektory, v tomto případě s jejich skalárním součinem, neplatí prostá analogie s aritmetikou reálných čísel.

8.11 Cvičení

8.1 Je dán bod $A[3, -5, 1]$. Určete souřadnice bodu, který je symetrický k bodu A podle
a) počátku, b) roviny xz, c) osy y.
[a) $[-3, 5, -1]$, b) $[3, 5, 1]$, c) $[-3, -5, -1]$]

8.2 Na ose x stanovte bod, jenž má stejnou vzdálenost od bodů $A[4, 1, -2]$, $B[1, 0, 3]$.
[$\frac{11}{6}$,0,0]

8.3 Rozhodněte, zda body $A[-2, 1, 4], B[3, 0, 1]$, $C[1, 1, 1]$ leží na jedné přímce. [použijte např. trojúhelníkovou nerovnost – neleží]

8.4 Je dán rovnoběžnostěn $ABCDA'B'C'D'$ a vektory $\boldsymbol{a} = B - A$, $\boldsymbol{b} = D - A$, $\boldsymbol{c} = A' - A$. Graficky v náčrtu znázorněte vektory
a) $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, b) $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \frac{d1}{d3}\boldsymbol{c}$.

8.5 V bodě O kvádru $OABCDEFG$ působí tři síly, které jsou dány vektory $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OG}$. V náčrtu zobrazte sílu $\overrightarrow{OR}$, která účinek daných třech sil ruší.

8.6 Je dán čtyřstěn $OABC$. Hranami vycházejícími z bodu O jsou určeny vektory $\boldsymbol{a} =\overrightarrow{OA}$, $\boldsymbol{b} =\overrightarrow{OB}$, $\boldsymbol{c} =\overrightarrow{OC}$. Pomocí těchto vektorů vyjádřete vektor $\overrightarrow{OT}$, je-li T těžiště stěny ABC.
[$\overrightarrow{OT}= \frac{1}{3}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$]

8.7 Jsou dány vektory $\boldsymbol{a} = (5,7,2)$, $\boldsymbol{b} = (3,0,4)$, $\boldsymbol{c} = (-6,1,-1)$. Určete vektor $\boldsymbol{d} = 3\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$.

8.8 Vypočtěte velikost vektoru $\boldsymbol{a} = (-4,4,\sqrt{3})$ a určete jednotkový vektor $\boldsymbol{n}$, který je s ním (souhlasně) kolineární.
[$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{35}, \boldsymbol{n} = \frac{1}{\sqrt{35}}\,(-4,4,\sqrt{3})$]

8.9 Rozhodněte, zda čtyřúhelník o vrcholech $A[2,1,1]$, $B[5,5,6]$, $C[6,11,14]$ a $D[3,7,9]$ je rovnoběžník. [je, $B-A = C-D$]

8.10 Jsou dány vrcholy trojúhelníka $A[-1,2,3]$, $B[5,-3,4]$, $C[2,1,6]$. Vektory $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BC}, \boldsymbol{AC}$ vyjádřete jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{e}_i$, $i=1,2,3$ ortonormální báze $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$.
[$\overrightarrow{AB}= 6\boldsymbol{e_1} - 5\boldsymbol{e_2} + \boldsymbol{e_3}$ atd.]

8.11 Rozhodněte, zda vektory $\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{BC}$ jsou kolineární, když $A[2,4,1]$, $B[3,7,5]$, $C[4,10,9]$. [jsou kolineární]

8.12 Vyjádřete vektor $\boldsymbol{d} = (0,20,18)$ jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{a} = (3,5,6), \boldsymbol{b} = (2,-7,1)$, $\boldsymbol{c} = (12,0,6)$. [$\boldsymbol{d} = 4\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$]

8.13 Pro která α, β jsou vektory $\boldsymbol{a} = (\alpha,2,-2), \boldsymbol{b} = (3,1,\beta)$ kolineární?
[$\alpha = 6, \beta = -1$]

8.14 Rozhodněte, zda vektory $\boldsymbol{a} = (-1,3,2)$, $\boldsymbol{b} = (2,-3,-4)$, $\boldsymbol{c} = (-3,12,6)$ jsou lineárně závislé či nezávislé.
[determinant dle 8.11 je nulový, vektory jsou lineárně závislé]

8.15 Pro které $x \in \mathbb{R}$ jsou vektory $\boldsymbol{a} = (1,1,x), \boldsymbol{b} = (x,1,1), \boldsymbol{c} = (1,x,1)$ lineárně závislé? [$x = 1$]

8.16 Pro které x jsou vektory $\boldsymbol{a} = (2,3,-1), \boldsymbol{b} = (1,-5,x)$ vzájemně kolmé? [stanovíme x tak, aby $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$, výsledek $x = -13$]

8.17 Určete vektor $\boldsymbol{r}$ tak, aby platilo $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r} = -5$, $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r} = -11$, $\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{r} = 20$, jestliže $\boldsymbol{a} = (2,1,3)$, $\boldsymbol{b} = (1,-3,2)$, $\boldsymbol{c} = (3,2,-4)$.
[$\boldsymbol{r} = (2,-3,-2)$]

8.18 Určete vektor $\boldsymbol{r} = (3,-9,z)$, jehož $|\boldsymbol{r}| = 12$. [$z = \pm 3\sqrt{6}$]

8.19 Vypočtěte odchylku vektorů $\boldsymbol{a} = (4,-2,4), \boldsymbol{b} = 3\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 + 6\boldsymbol{e}_3$.
[$\cos\varphi = \frac{16}{21}$; $\varphi \doteq 40^0 20'$]

8.20 Určete jednotkový vektor, který je současně kolmý k vektorům $\boldsymbol{a} = (3, 6, 8)$ a $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, 0)$. $[(0, \mp\frac{4}{5}, \pm\frac{3}{5})]$

8.21 Vypočtěte velikost průmětu vektoru $\boldsymbol{a} = (6, -2, 1)$ do jednotkového vektoru kolineárního s vektorem $\boldsymbol{AB}$, $A[3, 4, -2], B[4, -2, -3]$. $[\frac{17}{\sqrt{38}}]$

8.22 Vypočtěte vektorový součin $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, je-li $\boldsymbol{a} = 4\boldsymbol{e}_1 - 2\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3$, $\boldsymbol{b} = (3, 2, 6)$. $[(-20, -12, 14)]$

8.23 Pro dané vektory $\boldsymbol{a} = (3, 5, -1), \boldsymbol{b} = (0, -2, 1), \boldsymbol{c} = (-2, 2, 3)$ vypočtěte $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$. $[(3, 3, 0)]$

8.24 Vypočtěte $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})-(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{v})\times\boldsymbol{w}$ pro vektory $\boldsymbol{a} = (1, 2, -2), \boldsymbol{b} = (-2, 3, 1), \boldsymbol{c} = (2, -2, 2)$, $\boldsymbol{u} = (-1, 3, 5)$, $\boldsymbol{v} = (1, 0, -2)$, $\boldsymbol{w} = (3, -2, 2)$. $[(8, -14, -13)]$

8.25 Zjednodušte $\quad \boldsymbol{i} \times [(\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k}) \times \boldsymbol{i} - (\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}) \times (\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k})]$. $[\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}]$

8.26 Určete vektor $\boldsymbol{c} = (9, y, z)$ tak, aby byl kolmý k vektorům $\boldsymbol{a} = (10, -14, 2), \boldsymbol{b} = (6, 5, -2)$. $[\boldsymbol{c} = (9, 14, 54)]$

8.27 Proveďte vektorové násobení $\quad (2\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b})$. $[7\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}]$

8.28 Stanovte obsah rovnoběžníku o vrcholech $A[2, 1, 1]$, $B[5, 5, 6]$, $C[6, 11, 14]$ a $D[3, 7, 9]$. $[\sqrt{381}]$

8.29 Vypočtěte smíšený součin vektorů $\boldsymbol{a} = (1, 2, 3), \boldsymbol{b} = (-1, 0, 2)$, $\boldsymbol{c} = (3, 4, 0)$. Výsledek interpretujte geometricky. $[-8]$

8.30 Rozhodněte, zda vektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ jsou lineárně závislé či nezávislé. Platí $\boldsymbol{a} = (3, 1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (2, 7, 4), \boldsymbol{c} = (1, 2, 1)$. [jsou nezávislé]

8.31 Pro jaké t je smíšený součin $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$, jestliže $\boldsymbol{a} = (0, -1, 2)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 1, 2)$, $\boldsymbol{c} = (0, 1, t + 1)$. $[t = -3]$

8.32 Vypočtěte smíšený součin $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$, jestliže $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}, \boldsymbol{w} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$. $[4(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{b})]$

8.12 Kontrolní otázky

8.1 Definujte lineární závislost n vektorů. Jaký je speciální význam definice pro $n = 2$?

8.2 Definujte lineární nezávislost n vektorů. Jaký je speciální význam definice pro $n = 2$?

8.3 Jak rozhodnete, že dané tři vektory tvoří bázi v $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$?

8.4 Jsou dány nenulové vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ a pro skalární součin platí $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0$. Jakou vlastnost pak mají dané vektory?

8.5 Jsou dány vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ v $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$ a pro vektorový součin platí $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$. Jakou vlastnost pak mají dané vektory?

8.6 Jsou dány vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ v $\mathcal{V}(\mathbb{E}_3)$ a pro smíšený součin platí $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = 0$. Jakou vlastnost pak mají dané vektory?

8.7 Odpovědi na předcházející tři otázky zdůvodněte pomocí geometrické interpretace významu jednotlivých součinů vektorů.

Kapitola 9

Analytická geometrie lineárních útvarů v $\mathbb{E}_3$

V této části textu budeme aplikovat některé poznatky vektorového počtu na popis lineárních geometrických útvarů v prostoru $\mathbb{E}_3$. Pracovat budeme s body, přímkami a rovinami. Zkoumat budeme jejich vzájemnou polohu – *polohové vztahy* a uvedeme i potřebný aparát pro určení vzdáleností či odchylek (velikostí úhlů) – *metrické vztahy.*

Používat budeme popisu objektů pomocí rovnic, tj. tzv. *analytické metody.* Jiného popisu geometrických objektů používá *syntetická geometrie*, kterou jste poznali na základní a střední škole. V syntetické geometrii se pracuje s grafickým znázorněním objektů a jako nástroj se používá kružítko a pravítko. Zdůrazněme, že obě metody popisují stejné objekty a doporučujeme, aby při analytické metodě byly postupy a výsledky výpočtů konfrontovány s názornějším syntetickým popisem.

9.1 Rovnice přímky

9.1.1 Vektorová rovnice přímky

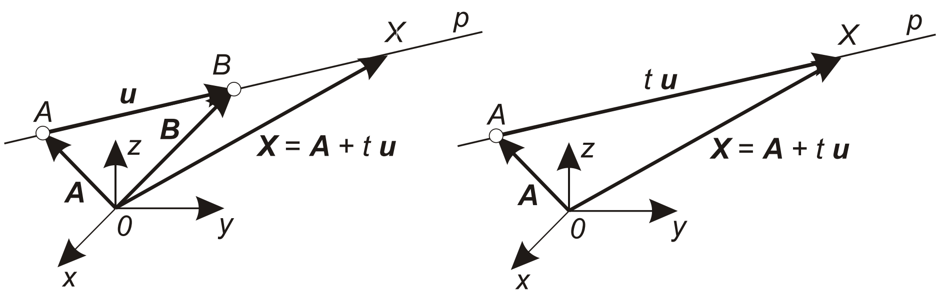
Uvažujme přímku p určenou dvěma různými body A, B. *Směrovým vektorem přímky p* rozumíme libovolný nenulový vektor, který je kolineární s vektorem $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{AB} = B - A$. Pro libovolný bod X na přímce p platí

$$X - A = t(B - A) = t \cdot \boldsymbol{u}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,.$$

Tak dostáváme tzv. *vektorovou rovnici přímky p*

$$X = A + t \cdot \boldsymbol{u}\,, \quad t \in \mathbb{R}\,. \tag{9.1}$$

V rovnici užíváme symbolů X, A, B, které označují body, ale zde se jedná o polohové vektory $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ daných bodů – obr. 9.1. Symbolem t je označen tzv. *parametr*. Bodu A, resp. B, přísluší parametr $t = 0$, resp. $t = 1$. Uvedená vektorová rovnice přímky je formálně stejná pro vyjádření přímek v libovolném euklidovském prostoru, tj. v $\mathbb{E}_2$, resp. v $\mathbb{E}_3$, ale i v euklidovských prostorech vyšších dimenzí.



Obrázek 9.1:

9.1.2 Parametrické vyjádření přímky

Rozepíšeme-li rovnici (9.1) do jednotlivých složek pomocí souřadnic bodů $X[x, y, z]$, $A[a_1, a_2, a_3]$ a vektoru $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$, dostaneme *parametrické vyjádření* přímky p:

$$x = a_1 + tu_1, \quad y = a_2 + tu_2, \quad z = a_3 + tu_3, \quad t \in \mathbb{R}\ . \tag{9.2}$$

Z hlediska fyziky a mechaniky jsou uvedené rovnice (9.1) a (9.2) popisem rovnoměrného přímočarého pohybu a parametr t udává čas. Chceme-li analyticky vyjádřit jen (uzavřenou) úsečku AB, resp. polopřímku AB, volíme $t \in \langle 0, 1\rangle$, resp. $t \in \langle 0, \infty)$. Podobně libovolným omezeným intervalem $\langle d, h\rangle$ je určena úsečka DH ležící na přímce p, kde $D = A + d \cdot \boldsymbol{u}$ a $H = A + h \cdot \boldsymbol{u}$.

Snadno zjistíme, že např. středu S úsečky AB odpovídá parametr $t = \frac{1}{2}$.

V aplikacích geometrie se pro tři body A, B, X, $A \neq B$, $X \neq B$, ležící na jedné přímce používá tzv. *dělící poměr* λ *bodu* X *vzhledem k bodům* A, B, který je definován vztahem $\boldsymbol{AX} = \lambda \boldsymbol{XB}$ a značíme $\lambda = (A, B; X)$. Snadno zjistíme, že např. pro střed S úsečky AB platí $(A, B; S) = -1$.

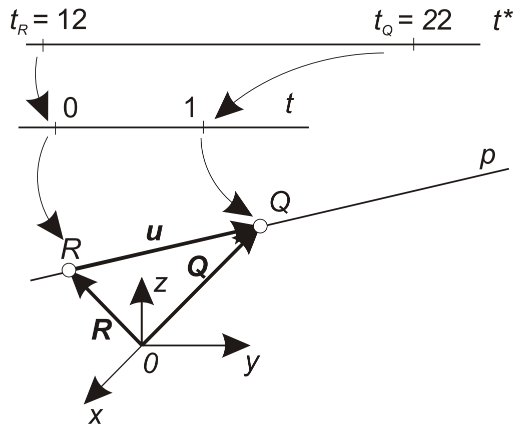
V následujícím příkladu si ukážeme, že přímku je možné parametrizovat podle konkrétního zadání jinak, než jsme uvedli v (9.2). Provedeme tzv. *lineární transformaci parametru.*

Příklad 9.1 Hmotný bod koná přímočarý rovnoměrný pohyb z bodu $R[1, 5, 2]$ (čas $t_R = 12$) do bodu $Q[3, 2, 7]$ (čas $t_Q = 22$). Určíme čas a bod, v němž hmotný bod dosáhne "výšky" $v = 6$.
Řešení: Nejprve sestavíme parametrické rovnice přímky RQ podle (9.2). Platí $\boldsymbol{u} = Q - R = (2, -3, 5)$. Parametrické rovnice jsou pak tvaru

$$x = 1 + 2t, \quad y = 5 - 3t, \quad z = 2 + 5t, \quad t \in \mathbb{R}\ . \tag{9.3}$$

Nyní provedeme transformaci parametru t tak, aby byly splněny podmínky úlohy. Zavedeme nový parametr $t^\star$ tak, že t bude lineární funkcí $t^\star$, tj. $t = \alpha t^\star + \beta$. Hodnoty α a β stanovíme tak, aby pro $t^\star = 12$ bylo $t = 0$ a pro $t^\star = 22$ bylo $t = 1$, tj. dostáváme soustavu

$$\begin{aligned} 12\alpha + \beta &= 0 \\ 22\alpha + \beta &= 1, \end{aligned}$$



Obrázek 9.2:

která má řešení $\alpha = 0,1$, $\beta = -1,2$. Dosadíme $t = 0,1\ t^\star - 1,2$ do parametrického vyjádření (9.3) a dostaneme

$$x = -1,4 + 0,2t^\star,\ y = 8,6 - 0,3t^\star,\ z = -4 + 0,5t^\star,\ t^\star \in \mathbb{R}\,. \tag{9.4}$$

Nyní určíme bod dráhy, který má "výšku" $v = 6$, tj. bod přímky (9.4), který má souřadnici $z = 6$. Platí tedy $6 = -4 + 0,5t^\star$. Snadno vypočteme čas $t^\star = 20$. Hledaný bod X má pak souřadnice $X[2,6; 2,6; 6]$.

9.2 Vzájemná poloha dvou přímek

K diskusi vzájemné polohy dvou přímek využijeme vektorové algebry. Každou z přímek p a q určíme bodem a směrovým vektorem. Nechť rovnice daných přímek jsou tvaru

$$\begin{aligned} p: &\quad X = P + t\,\boldsymbol{p}, \quad t \in \mathbb{R} \\ q: &\quad Y = Q + s\,\boldsymbol{q}, \quad s \in \mathbb{R}\,. \end{aligned}$$

Vzájemnou polohu přímek p a q lze posoudit na základě vlastností vektorů $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ a $\boldsymbol{PQ}$ (platí $\boldsymbol{p} \neq \boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{q} \neq \boldsymbol{o}$). Přehledně je klasifikace vzájemné polohy uvedena v tab. 9.1.

$\boldsymbol{p}$,$\boldsymbol{q}$ kolineární	$\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{PQ}$ kolineární	totožné přímky
	$\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{PQ}$ nekolineární	různé rovnoběžky
$\boldsymbol{p}$,$\boldsymbol{q}$ nekolineární	$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ a $\boldsymbol{PQ}$ lineárně závislé	různoběžky
	$\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ a $\boldsymbol{PQ}$ lineárně nezávislé	mimoběžky

Tabulka 9.1:

Příklad 9.2 Rozhodneme o vzájemné poloze přímky a a osy y. Přímka a je určena body $A[-2,3,-4]$ a $A'[1,-1,2]$.
Řešení: Označme $\boldsymbol{a}$ směrový vektor přímky a. Vypočteme $\boldsymbol{a} = A' - A = (3,-4,6)$.

Pro osu y můžeme za určující prvky vzít počátek $O[0,0,0]$ a vektor $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0)$.

Je zřejmé, že směrové vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{e}_2$ jsou nekolineární (žádný z nich nelze vyjádřit jako násobek druhého). Uvažované přímky jsou tedy podle tab. 9.1 buď různoběžné nebo mimoběžné. Nyní záleží na tom, zda vektor $\boldsymbol{OA}$ "příčky" je na vektorech $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{e}_2$ lineárně závislý nebo nezávislý. Proto vypočteme determinant

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{e_2} \\ \boldsymbol{OA} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3, & -4, & 6 \\ 0, & 1, & 0 \\ -2, & 3, & -4 \end{vmatrix} = -12+0+0+12-0-0=0.$$

Vektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}_2$ a $\boldsymbol{OA}$ jsou lineárně závislé. Přímky a a y jsou tedy různoběžné.

Stanovíme souřadnice jejich průsečíku Q. Napíšeme parametrické vyjádření těchto přímek:

$$\begin{array}{lllll} a: & x=-2+3t, & y=3-4t, & z=-4+6t, & t \in \mathbb{R} \\ y: & x=0, & y=s, & z=0, & s \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Řešíme tedy soustavu tří rovnic pro neznámé t a s (víme, že soustava bude mít jediné řešení):

$$-2+3t=0, \quad 3-4t=s, \quad -4+6t=0$$

Zřejmě $t=\frac{2}{3}$ a $s=\frac{1}{3}$. Hledaný průsečík $Q[0,\frac{1}{3},0]$.

9.3 Rovina

Uvažujme rovinu ρ určenou třemi *nekolineárními body* A,B,C. Analytický popis roviny ρ může mít několik tvarů. Postupně uvedeme vektorovou rovnici, normálový a parametrický tvar, obecnou rovnici a úsekový tvar rovnice.

9.3.1 Vektorová rovnice roviny

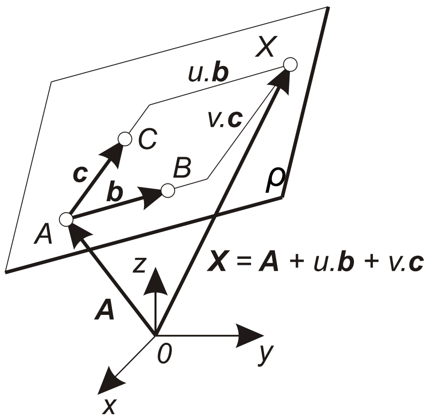
Označme $\boldsymbol{b} = B - A$, $\boldsymbol{c} = C - A$. Vektor $(X - A)$ určený daným bodem A a libovolným bodem X roviny ρ vyjádříme jako lineární kombinaci vektorů $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, tj. vektory $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},X-A$ jsou lineárně závislé (komplanární):

$$X - A = u\cdot\boldsymbol{b} + v\cdot\boldsymbol{c}\,,$$

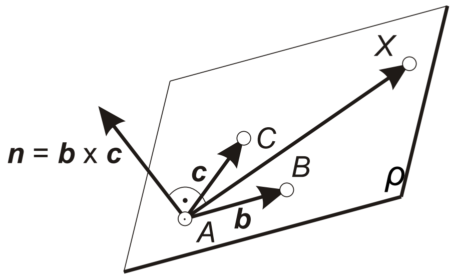
neboli

$$X = A + u\cdot\boldsymbol{b} + v\cdot\boldsymbol{c}\,,\quad (u,v)\in\mathbb{R}^2. \tag{9.5}$$

Rovnice (9.5) je *vektorovou rovnicí roviny* ρ. Parametry jsou označeny u,v a dvojici $\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ nazýváme *zaměření roviny*. Na obr. 9.3 je znázorněn význam těchto parametrů a rovnice (9.5).



Obrázek 9.3:



Obrázek 9.4:

9.3.2 Parametrické vyjádření roviny

Rovnici (9.5) rozepíšeme do jednotlivých složek. Označme souřadnice bodů $X[x, y, z]$, $A[x_A, y_A, z_A]$ a souřadnice vektorů $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ a $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$. *Parametrické rovnice* roviny ρ jsou pak tvaru:

$$x = x_A + u \cdot b_1 + v \cdot c_1, \tag{9.6}$$
$$y = y_A + u \cdot b_2 + v \cdot c_2, \tag{9.7}$$
$$z = z_A + u \cdot b_3 + v \cdot c_3. \tag{9.8}$$

9.3.3 Hessův normálový tvar rovnice roviny

Pomocí operací s vektory můžeme rovinu popsat i jinou cestou (obr. 9.4): Vektory $\boldsymbol{b} = B - A$ a $\boldsymbol{c} = C - A$ vynásobíme vektorově a označíme $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$. Vektor $\boldsymbol{n}$ – tzv. *normálový vektor roviny* – je kolmý k nekolineárním vektorům $\boldsymbol{b}$ a $\boldsymbol{c}$ (tj. vektor $\boldsymbol{n}$ je směrovým vektorem kolmice k rovině ρ). *Hessův normálový tvar rovnice roviny* ρ představuje podmínku

$$(X - A) \cdot \boldsymbol{n} = 0, \tag{9.9}$$

kde X je libovolný (obecný) bod roviny ρ. Vycházíme z toho, že pro $X \neq A$ musí být vektory $\boldsymbol{XA}$ a $\boldsymbol{n}$ kolmé. Je-li $X = A$, pak vektor $\boldsymbol{XA}$ je nulový a vztah (9.9) je splněn.

9.3.4 Obecná rovnice roviny

Vyjdeme z Hessova normálového tvaru (9.9) a označíme normálový (nenulový) vektor $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)$. Rozepíšeme-li rovnici (9.9) do jednotlivých složek, obdržíme *obecnou rovnici roviny* ρ

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z + d = 0\ , \tag{9.10}$$

v níž koeficient $d = -(x_A n_1 + y_A n_2 + z_A n_3)$. Koeficient d tedy určíme dosazením souřadnic libovolné bodu A roviny do rovnice (9.10).

Obecnou rovnici roviny ρ lze odvodit také z parametrického vyjádření (9.6). Stačí vyloučit parametry u, v.

9.3.5 Úsekový tvar rovnice roviny

Uvažujme rovnici (9.10) pro případ $d \neq 0$ a nenulové složky vektoru $\boldsymbol{n}$. Můžeme psát

$$\frac{x}{-\frac{d}{n_1}} + \frac{y}{-\frac{d}{n_2}} + \frac{z}{-\frac{d}{n_3}} = 1\ , \tag{9.11}$$

V rovnici (9.11) označme $d_x = -\frac{d}{n_1}$, $d_y = -\frac{d}{n_2}$, $d_z = -\frac{d}{n_3}$. Získáváme tak *úsekový tvar rovnice roviny*

$$\frac{x}{d_x} + \frac{y}{d_y} + \frac{z}{d_z} = 1\ . \tag{9.12}$$

Název tohoto tvaru rovnice roviny vychází ze skutečnosti, že čísla d_x, d_y, d_z udávají "úseky", které rovina ρ vytíná na souřadnicových osách, přesněji rovina ρ protíná souřadnicové osy v bodech $P_x[d_x, 0, 0]$, $P_y[0, d_y, 0]$, $P_z[0, 0, d_z]$. Toto tvrzení plyne z toho, že výpočet průsečíků roviny ρ např. se souřadnicovou osou x můžeme provést z rovnice (9.12) tak, že položíme $y = z = 0$ (tím jsou charakterizovány všechny body ležící na ose x).

Pokud je rovina ρ rovnoběžná s některou souřadnicovou osou, pak je v rovnici (9.10) příslušná složka vektoru $\boldsymbol{n}$ rovna nule, tj. v rovnici (9.12) chybí příslušný člen. Konkrétně např. pro rovinu ρ rovnoběžnou s osou x, $x \not\subset \rho, \rho \not\parallel (xy)$, lze uvést úsekový tvar rovnice $\frac{y}{d_y} + \frac{z}{d_z} = 1$ a podobně pro další případy. V úsekové tvaru však nelze uvést rovnici rovin, které procházejí počátkem O. Pro takové roviny je totiž v rovnici (9.10) $d = 0$.

Příklad 9.3 Pro rovinu $\alpha = (LMN)$ uveďte jednotlivé typy (vektorový, parametrický, Hessův, obecný, úsekový) jejího analytického popisu, je-li $L[2, 4, 0]$, $M[1, -2, 2]$, $N[-1, 1, 6]$.
Řešení: Zaměření roviny α tvoří např. vektory $\boldsymbol{a} = M - L = (-1, -6, 2)$ a $\boldsymbol{b} = N - L = (-3, -3, 6)$. Vybrat by bylo možné i jiné zaměření roviny, např. místo vektoru $\boldsymbol{b} = N - L$ můžeme uvažovat vektor $\boldsymbol{b}^\star = M - N$ apod.

Vektorová rovnice roviny α je např. tvaru

$$X = L + u \cdot \boldsymbol{a} + v \cdot \boldsymbol{b} = [2, 4, 0] + u(-1, -6, 2) + v(-3, -3, 6)\ . \tag{9.13}$$

Jiný tvar vektorové rovnice roviny α (vektory $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}^\star$ umístíme do bodu N) je

$$X = N + u \cdot \boldsymbol{a} + v \cdot \boldsymbol{b}^\star = [-1, 1, 6] + u(-1, -6, 2) + v(2, -3, -4)\ . \tag{9.14}$$

Parametrické vyjádření roviny α získáme rozepsáním vztahu (9.13) nebo (9.14), příp. i jiného vektorového vyjádření, do složek. Z (9.13) máme $x = 2 - u - 3v$, $y = 4 - 6u - 3v$, $z = 2u + 6v$. Ukázali jsme tak, že pro danou rovinu není její vektorová rovnice vyjádřena jednoznačně (volitelný je bod roviny a její zaměření). Pochopitelně i parametrické vyjádření závisí na výběru určujících prvků roviny.

Určíme nyní normálový vektor $\boldsymbol{n}$ roviny α. Stanovíme $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$, tj.

$$\boldsymbol{n} = \left(\begin{vmatrix} -6, & 2 \\ -3, & 6 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} -1, & 2 \\ -3, & 6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1, & -6 \\ -3, & -3 \end{vmatrix} \right) = (-30, 0, -15).$$

Normálový vektor n roviny je určen jednoznačně až na násobek, tj. místo vektoru $\boldsymbol{n}$ můžeme uvažovat libovolný nenulový vektor $\boldsymbol{n}^\star$ kolineární s vektorem $\boldsymbol{n}$. Zvolme $\boldsymbol{n}^\star = -\frac{1}{15} \cdot \boldsymbol{n}$, tj. $\boldsymbol{n}^\star = (2, 0, 1)$. Hessův normálový tvar rovnice roviny α můžeme zapsat jako $(X - L) \cdot \boldsymbol{n}^\star = 0$, tj.

$$(x - 2, y - 4, z) \cdot (2, 0, 1) = 0 \; . \tag{9.15}$$

Obecný tvar rovnice roviny můžeme nyní určit několika způsoby. Nejjednodušší cestou je rozepsání rovnice (9.15). Jinou možností je např. využití vztahu (9.10). Snadno obdržíme obecnou rovnici roviny α:

$$2x + z - 4 = 0 \; . \tag{9.16}$$

Je zřejmé, že obecný tvar rovnice roviny je určen jednoznačně až na násobek nenulovým reálným číslem. To je nepochybně výhoda tohoto tvaru pro mnohé aplikace (např. při návrhu datového popisu objektů v CAD/CAM).

Uvedeme ještě *úsekový tvar rovnice* roviny α. Rovnici (9.16) upravíme na tvar (9.12). Platí

$$\frac{x}{2} + \frac{z}{4} = 1 \; . \tag{9.17}$$

Z úsekového tvaru si dokážeme snadno představit, jak je rovina α umístěna vzhledem k osám systému souřadnic. Rovina α je rovnoběžná s osou y, osu x protíná v bodě $X[2, 0, 0]$ a osu z v bodě $Z[0, 0, 4]$.

9.4 Vzájemná poloha dvou rovin, průsečnice dvou rovin

Uvažujeme dvě roviny α, resp. β, a každou určíme bodem A, resp. B, a normálovým vektorem $\boldsymbol{n}_\alpha$, resp. $\boldsymbol{n}_\beta$. Rovnice daných daných rovin v Hessově normálovém tvaru jsou

$$\alpha: \quad (X - A) \cdot \boldsymbol{n}_\alpha = 0 \; , \tag{9.18}$$

$$\beta: \quad (Y - B) \cdot \boldsymbol{n}_\beta = 0 \; . \tag{9.19}$$

Vzájemnou polohu rovin α a β lze posoudit na základě vlastností vektorů $\boldsymbol{n}_\alpha$, $\boldsymbol{n}_\beta$ a $\boldsymbol{AB} = B - A$ (platí $\boldsymbol{n}_\alpha \neq \boldsymbol{o}$ a $\boldsymbol{n}_\beta \neq \boldsymbol{o}$). Přehledně je klasifikace vzájemné polohy dvou rovin uvedena v tab. 9.2.

$\boldsymbol{n}_\alpha$,$\boldsymbol{n}_\beta$ kolineární	$\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{AB} = 0$	totožné roviny
	$\boldsymbol{n}_\alpha \cdot \boldsymbol{AB} \neq 0$	různé rovnoběžné roviny
$\boldsymbol{n}_\alpha$,$\boldsymbol{n}_\beta$ nekolineární		různoběžné roviny

Tabulka 9.2:

O vzájemné poloze dvou rovin lze rozhodnout také např. na základě diskuse řešení soustavy, kterou vytvoříme z obecných rovnic daných rovin.

Příklad 9.4 Rozhodněte o vzájemné poloze rovin α a β daných parametrickým vyjádřením:

$$\alpha: \qquad x = 1 + u + 2v \; , \quad y = -2 + 6u - 3v \; , \quad z = 2 - 2u - 4v \; ;$$

$$\beta: \qquad x = 2 + 2s \; , \quad y = r \; , \quad z = -4s \; ,$$

kde u a v jsou parametry ve vyjádření roviny α a s a r jsou parametry pro rovinu β.
Řešení: Pro každou z rovin stanovíme nejprve normálový vektor. Pomocí vektorového součinu příslušných vektorů zaměření obdržíme

$$\boldsymbol{n}_\alpha = \left(\begin{vmatrix} 6, & -2 \\ -3, & -4 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1, & -2 \\ 2, & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1, & 6 \\ 2, & -3 \end{vmatrix} \right) = (-30, 0, -15) ,$$
$$\boldsymbol{n}_\beta = \left(\begin{vmatrix} 0, & -4 \\ 1, & 0 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2, & -4 \\ 0, & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2, & 0 \\ 0, & 1 \end{vmatrix} \right) = (4, 0, 2) .$$

Vektory $\boldsymbol{n}_\alpha$ a $\boldsymbol{n}_\beta$ jsou kolineární, neboť $\boldsymbol{n}_\alpha = -\frac{15}{2}\boldsymbol{n}_\beta$. Dané roviny jsou tedy buď rovnoběžné, nebo totožné. Určíme “příčku” AB daných rovin a podle tab. 9.2 posoudíme nulovost skalárního součinu vektoru $\boldsymbol{AB}$ s některým z normálových vektorů. Z parametrického vyjádření daných rovin snadno zvolíme (možný je i výběr jiných bodů) $A[1, -2, 2]$, $B[2, 0, 0]$ a máme $\boldsymbol{AB} = B - A = (1, 2, -2)$. Pro zmíněný skalární součin platí

$$\boldsymbol{n}_\beta \cdot (B - A) = (4, 0, 2) \cdot (1, 2, -2) = 0 .$$

Ukázali jsme tedy, že dané roviny α a β jsou totožné.

Pro dvě různoběžné roviny α a β je možné stanovit rovnici (vektorovou nebo parametrickou) jejich společné přímky – tzv. *průsečnice*. Postupovat můžeme několika způsoby. Popíšeme-li obě roviny pomocí obecné rovnice, stačí řešit soustavu, která je tvořena těmito rovnicemi, tj. soustavu:

$$\begin{aligned} n_{x,\alpha}x + n_{y,\alpha}y + n_{z,\alpha}z + d_\alpha &= 0 , \\ n_{x,\beta}x + n_{y,\beta}y + n_{z,\beta}z + d_\beta &= 0 . \end{aligned} \tag{9.20}$$

Pro směrový vektor $\boldsymbol{p}$ průsečnice p platí (normálové vektory různoběžných rovin jsou nekolineární) $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{n}_\alpha \times \boldsymbol{n}_\beta$.

Příklad 9.5 Určíme průsečnici (pokud existuje) rovin ρ a σ:

$$\begin{aligned} \rho : &\quad x + 2y - 3z + 1 = 0 , \\ \sigma : &\quad 2x - 2y + 3z - 4 = 0 , \end{aligned}$$

Řešení: Sestavíme rozšířenou matici soustavy a provedeme Gaussovu eliminaci.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 2, & -3 & -1 \\ 2, & -2, & 3 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1, & 2, & -3 & -1 \\ 0, & -6, & 9 & 6 \end{array} \right) .$$

Řešení můžeme psát ve tvaru

$$z = t , \quad y = -1 + \frac{3}{2}t , \quad x = -1 + 3t + 2 - 3t = 1 , \quad t \in \mathbb{R} ,$$

což jsou parametrické rovnice hledané průsečnice rovin ρ a σ. Poznamenejme, že průsečnice je určena bodem $P[1, -1, 0]$ a např. směrovým vektorem $\boldsymbol{p} = (0, 3, 2)$.

Určení přímky jako průsečnice dvou různoběžných rovin – viz (9.20) – je dalším způsobem popisu přímky (kromě vektorového a parametrického popisu).

9.5 Geometrická interpretace Gaussovy eliminace

Uvažujme tři roviny α, β a γ. Diskuse jejich vzájemné polohy souvisí s diskusí řešitelnosti soustavy lineárních rovnic, kterou tvoří obecné rovnice daných rovin.

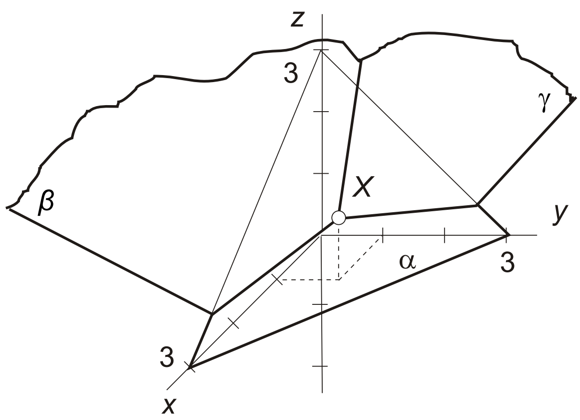
Uvažujme konkrétní roviny:

$$\alpha: \; x+y+z-3=0\,, \quad \beta: \; x+2y-z-2=0\,, \quad \gamma: \; 2x+y-z-2=0\,.$$

Určení společného bodu X těchto rovin provedeme řešením soustavy lineárních rovnic Gaussovou eliminací:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1, & 1, & 1 & 3 \\ 1, & 2, & -1 & 2 \\ 2, & 1, & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & 1, & 1 & 3 \\ 0, & 1, & -2 & -1 \\ 0, & -1, & -3 & -4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1, & 1, & 1 & 3 \\ 0, & 1, & -2 & -1 \\ 0, & 0, & -5 & -5 \end{array}\right).$$

Řešením soustavy je, jak snadno zjistíme, $z=y=x=1$, neboli průsečíkem daných rovin je bod $X[1,1,1]$.



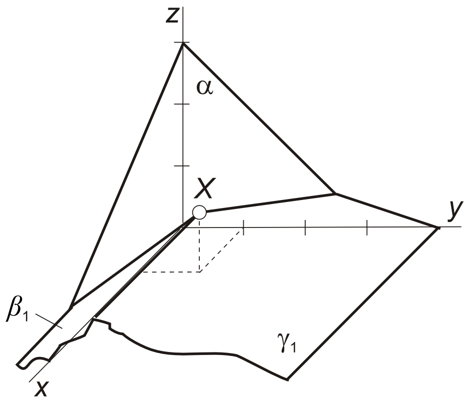
Obrázek 9.5:

Všimněme si nyní, jaký proces byl z geometrického hlediska realizován Gaussovou eliminací. V každém kroku eliminačního procesu soustava popisuje tři roviny s uvedeným společným bodem X. Po prvním kroku eliminace uvažujeme místo rovin β a γ roviny

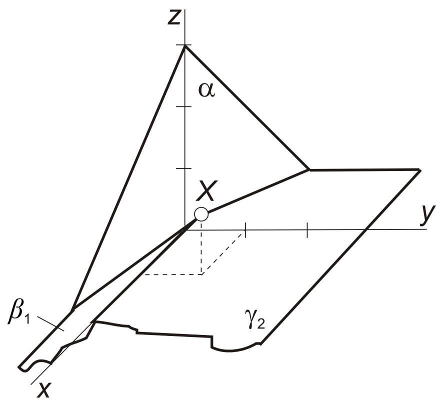
$$\beta_1: \; y-2z+1=0\,, \quad \gamma_1: \; y+3z-4=0\,.$$

V druhém kroku dojde k výměně roviny γ_1 za rovinu γ_2 s rovnicí (po úpravě) $z-1=0$.

Na obr. 9.5 je znázorněna výchozí situace. Obr. 9.6 zobrazuje situaci po prvním eliminačním kroku a na obr. 9.7 je uvedena výsledná konfigurace. Geometrickou podstatou Gaussovy eliminace (ale i jiných, podstatně složitějších eliminačních postupů) je, že získáváme nové geometrické objekty (zde roviny), které mají vzhledem k systému souřadnic speciální polohu. Např. roviny β_1 a γ_1 jsou rovnoběžné s osou x, rovina γ_2 je rovnoběžná jak s osou x, tak s osou y, tj. je rovnoběžná s rovinou (xy).



Obrázek 9.6:



Obrázek 9.7:

9.6 Vzájemná poloha přímky a roviny

Nechť je přímka p daná vektorovou rovnicí

$$X = A + t \cdot \boldsymbol{u} \tag{9.21}$$

a rovina ρ Hessovým normálovým tvarem

$$(X - B) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \ . \tag{9.22}$$

O vzájemné poloze přímky p a roviny ρ lze rozhodnout na základě skalárního součinu $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}$ směrového vektoru přímky a normálového vektoru roviny a případně i vektoru “příčky” AB. Klasifikace vzájemné polohy přímky a roviny je uvedena v tab. 9.3 ($\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$, $\boldsymbol{n} \neq \boldsymbol{o}$).

$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} = 0$	$(B - A) \cdot \boldsymbol{n} = 0$	$p \subset \rho$
	$(B - A) \cdot \boldsymbol{n} \neq 0$	rovnoběžnost, $p \not\subset \rho$
$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \neq 0$		různoběžnost

Tabulka 9.3:

Určení průsečíku v případě různoběžné přímky a roviny provedeme pomocí výpočtu příslušného parametru t z rovnice (9.21).

Je-li bod X společným bodem přímky a roviny, plyne z (9.22) a z (9.21) po jednoduché úpravě

$$[(A - B) + t \cdot \boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{n} = 0 \ .$$

Pro parametr t získáme lineární rovnici

$$(A - B) \cdot \boldsymbol{n} + t \cdot (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n}) = 0 \ , \tag{9.23}$$

která má jediné řešení t_0, neboť skalární součin $\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{n} \neq 0$. Hledaným průsečíkem je bod $P = A + t_0 \cdot \boldsymbol{u}$.

Příklad 9.6 Rozhodneme o vzájemné poloze přímky p a roviny α a jsou-li různoběžné, určíme jejich průsečík. Pro přímku platí $p = RQ$, $R[1,1,1]$, $Q[2,3,0]$ a rovina $\alpha = (ABC)$ je určena body $A[-1,2,-3]$, $B[2,0,4]$, $C[0,4,-2]$.
Řešení: Určíme směrový vektor $\boldsymbol{p}$ přímky p a zaměření $\boldsymbol{b} = B - A, \boldsymbol{c} = C - A$ roviny α. Platí

$$\boldsymbol{p} = Q - R = (1,2,-1)\ , \quad \boldsymbol{b} = (3,-2,7)\ , \quad \boldsymbol{c} = (1,2,1)\ . \tag{9.24}$$

Snadno vypočteme vektorový součin $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = (-16,4,8)$ a zvolíme normálový vektor $\boldsymbol{n} = (-4,1,2)$ roviny α ($\boldsymbol{n}$ je nenulový a kolineární s vektorem $\boldsymbol{w}$).

Pomocí skalárního součinu $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{n}$ (viz tab. 9.3) rozhodneme o vzájemné poloze daných objektů. Platí $\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{n} = (1,2,-1) \cdot (-4,1,2) = -4 \neq 0$, tj. vektory $\boldsymbol{p}$ a $\boldsymbol{n}$ nejsou kolmé a v důsledku toho je přímka p různoběžná s rovinou α.

Pro výpočet průsečíku přímky p a roviny α sestavíme parametrické vyjádření přímky p a obecnou rovnici roviny α. Platí

$$p: \quad x = 1 + t\ , \quad y = 1 + 2t\ , \quad z = 1 - t\ , \quad t \in \mathbb{R}\ . \tag{9.25}$$

Obecná rovnice roviny α (má normálový vektor $\boldsymbol{n}$) je tvaru $-4x + y + 2z + d = 0$. Absolutní člen d této rovnice stanovíme např. z podmínky $B \in \alpha$, tj. $-8 + 0 + 8 + d = 0$, neboli $d = 0$ (zjistili jsme, že rovina α prochází počátkem souřadnicového systému). Máme tedy:

$$\alpha: \quad -4x + y + 2z = 0\ . \tag{9.26}$$

Jestliže nyní z (9.25) dosadíme do (9.26), dostaneme lineární rovnici pro hledanou hodnotu parametru t. Po snadných úpravách obdržíme rovnici $-4t - 1 = 0$, tudíž průsečíku X přímky p a roviny α odpovídá na přímce p parametr $t_0 = -\frac{1}{4}$. Po dosazení hodnoty parametru do (9.25) máme $X = [\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{5}{4}]$.

Vzhledem k záporné hodnotě parametru t_0 jsme zjistili, že průsečík X leží na polopřímce opačné k polopřímce RQ. Platí $X = R - \frac{1}{4}(Q - R)$.

9.7 Vzdálenost bodů, přímek a rovin

V přehledu uvedeme metody a příp. i příslušné vzorce pro určení vzdáleností. V celém odstavci uvažujeme body A a B, přímky p, q ($p \parallel q$), r (r mimoběžná s q) a roviny α a β ($\alpha \parallel \beta$) dané takto:

$$\begin{gathered} A[a_1,a_2,a_3]\ , \quad B[b_1,b_2,b_3]\ , \\ p:\ X = A + t \cdot \boldsymbol{u}\ , \quad q:\ Y = B + s \cdot \boldsymbol{u}\ , \quad r:\ Z = C + w \cdot \boldsymbol{v}\ , \\ \alpha:\ (X - A) \cdot \boldsymbol{n} = 0\ , \quad \beta:\ (Y - B) \cdot \boldsymbol{n} = 0\ . \end{gathered} \tag{9.27}$$

Značíme dále $\boldsymbol{u} = (u_1,u_2,u_3)$, $\boldsymbol{n} = (n_1,n_2,n_3)$ atd. Pro absolutní člen obecné rovnice roviny α používáme označení d.

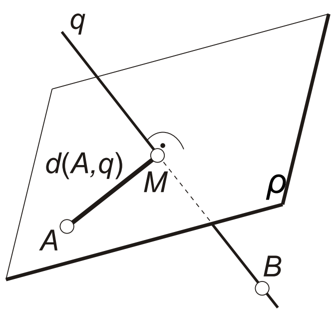
9.7.1 Vzdálenost bodů A, B

Příslušný vzorec je důsledkem opakovaného použití Pythagorovy věty a odpovídá samozřejmě vztahu pro určení velikosti vektoru $(B - A)$:

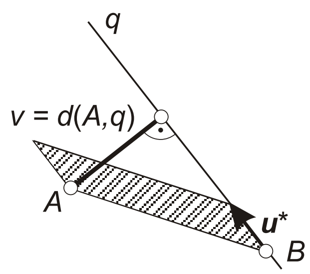
$$d(A,B) = |AB| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(b_i-a_i)^2}\,. \tag{9.28}$$

9.7.2 Vzdálenost bodu A od přímky q

Postupovat můžeme tak, že bodem A proložíme rovinu ρ kolmou na přímku q a určíme průsečík M přímky q s rovinou ρ. Pro hledanou vzdálenost platí $d(A,q) = d(A,M)$ – obr. 9.8.



Obrázek 9.8:



Obrázek 9.9:

Hledanou vzdálenost lze získat rovněž pomocí vektorového počtu, zejména pomocí geometrických vlastností vektorového součinu. Označme $\boldsymbol{u}^\star = \frac{1}{|\boldsymbol{u}|}\boldsymbol{u}$ normalizovaný směrový vektor přímky q a uvažujme vektor $(B - A)$ – obr. 9.9. Z vlastností vektorového součinu víme, že velikost $|(B-A)\times\boldsymbol{u}^\star|$ udává obsah rovnoběžníku určeného umístěním daných vektorů. Vzhledem k tomu, že strana rovnoběžníku ležící na přímce q má jednotkovou délku, je obsah rovnoběžníku roven jeho výšce v, tj. hledané vzdálenosti $d(A,q)$. Platí tedy

$$d(A,q) = |(B-A)\times\boldsymbol{u}^\star| = \frac{1}{|\boldsymbol{u}|}|(B-A)\times\boldsymbol{u}| \tag{9.29}$$

Příklad 9.7 Určíme výšku v_a v trojúhelníku ABC, kde $A[1,1,1]$, $B[2,3,4]$ a $C[-1,-1,-1]$.
Řešení: Pro hledanou výšku v_a platí $v_a = d(A,BC)$. Vzdálenost bodu A od přímky BC určíme podle vzorce (9.29):

$$\begin{aligned} v_a &= d(A,BC) = \frac{1}{d(B,C)}|(B-A)\times(B-C)| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{50}}|(1,2,3)\times(3,4,5)| = \sqrt{\frac{4+16+4}{50}} = \frac{2}{5}\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Příklad 9.8 Na úsečce AB určíme bod X, který má minimální vzdálenost od daného bodu C. $A[1,1,1]$, $B[2,3,4]$ a $C[-1,-1,-1]$.

Řešení: Určíme bod $M \in AB$, který určuje vzdálenost bodu C od přímky AB. Pokud bod M náleží úsečce AB, bude $X = M$. Padne-li bod M mimo úsečku AB, splyne bod X s jedním z krajních bodů úsečky AB. Je-li $d(C, A) < d(C, B)$, bude $X = A$, jinak $X = B$.

Pro určení bodu M vedeme bodem C rovinu ρ kolmou na přímku AB. Pro normálový vektor roviny ρ platí $\boldsymbol{n} = B - A = (1, 2, 3)$. Obecná rovnice roviny ρ po dopočítání absolutního členu z podmínky $C \in \rho$ má tvar $x + 2y + 3z + 6 = 0$.

Určíme průsečík M přímky AB s rovinou ρ. Přímka AB má parametrické vyjádření

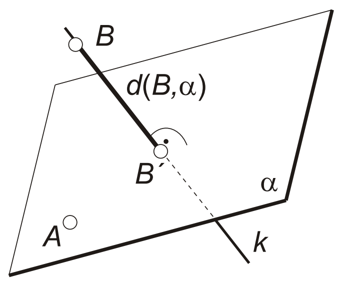
$$x = 1 + t\,, \quad y = 1 + 2t\,, \quad z = 1 + 3t\,, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Po dosazení a úpravě stanovíme pro průsečík M parametr $t_0 = -\frac{6}{7}$. Jelikož $t_0 \notin \langle 0, 1\rangle$, nenáleží bod M úsečce AB.

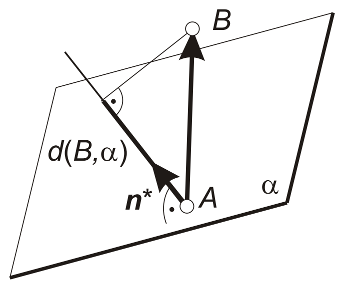
Řešením úlohy bude tedy jeden z krajních bodů úsečky. Vypočteme $d(A, C) = \sqrt{12}$ a $d(B, C) = \sqrt{50}$. Je tedy $d(A, C) < d(B, C)$ a řešením úlohy je bod $M = A$. Zdůvodnění tohoto závěru plyne i z toho, že $t_0 < 0$, tj. bod M leží na opačné polopřímce k polopřímce AB a bod A odděluje body M a B.

9.7.3 Vzdálenost bodu B od roviny α

Konstruktivní postup řešení úlohy vede k určení paty B' kolmice k vedené z bodu B k rovině α. Hledaná vzdálenost $d(B, \alpha) = d(B, B')$ – obr. 9.10.



Obrázek 9.10:



Obrázek 9.11:

S využitím geometrické interpretace absolutní hodnoty skalárního součinu vektorů snadno dojdeme k jiné možnosti určení vzdálenosti. Označíme $\boldsymbol{n}^\star$ jednotkový normálový vektor roviny α. Hledaná vzdálenost – obr. 9.11

$$d(B, \alpha) = |\boldsymbol{n}^\star \cdot (B - A)| = \frac{1}{|\boldsymbol{n}|} |\boldsymbol{n} \cdot (B - A)|\,. \tag{9.30}$$

Po úpravě (jde vlastně analogii k převedení Hessova normálového tvaru rovnice roviny na obecnou rovnici) můžeme psát

$$d(B, \alpha) = \frac{|n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3 + d|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}\,. \tag{9.31}$$

9.7.4 Vzdálenost rovnoběžných přímek p a q

Snadno zjistíme, že $d(p,q) = d(A,q)$, tj. vzdálenost dvou rovnoběžných přímek můžeme určit jako vzdálenost zvoleného bodu na jedné z daných přímek od druhé přímky. Určení vzdálenosti $d(A,q)$ jsme podrobně probrali v odst. 9.7.2.

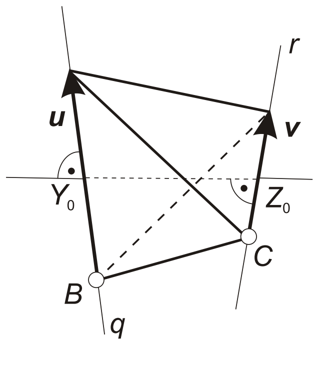
9.7.5 Vzdálenost mimoběžných přímek q a r

Vzdálenost mimoběžných přímek q a r je určena tzv. *nejkratší příčkou mimoběžek.* Označme body, v nichž nejkratší příčka protíná dané mimoběžky, Y_0 a Z_0. Lze ukázat, že

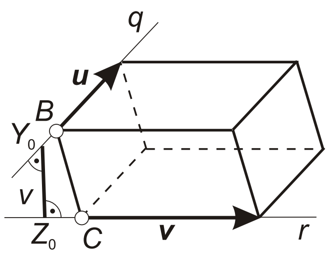
$$d(Y_0,Z_0) = \min\{d(Y,Z); Y \in q, Z \ \in r\} \Leftrightarrow (Y_0Z_0 \perp q) \wedge (Y_0Z_0 \perp r)\ .$$

Nejkratší příčka mimoběžek je kolmá k oběma mimoběžkám. Na obr. 9.12 jsou uvedeny mimoběžky q a r a pro lepší názornost je doplněn čtyřstěn. V odst. 9.9 uvedeme více poznatků o příčkách mimoběžek. Zde určíme vzdálenost mimoběžek q a r pomocí vektorové algebry. Uvažujme vektory $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ a $C - B$ – obr. 9.13. Víme, že objem V rovnoběžnostěnu určeného třemi vektory se rovná absolutní hodnotě smíšeného součinu daných vektorů, tj.

$$V = |(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, C - B)|. \tag{9.32}$$



Obrázek 9.12:



Obrázek 9.13:

Připomeňme, že obsah rovnoběžníku se rovná velikosti vektorové součinu vektorů určených jeho stranami. Podstava rovnoběžnostěnu z obr. 9.13 má tedy obsah

$$P = |\boldsymbol{u} \ \times \boldsymbol{v}|. \tag{9.33}$$

Pro výšku v rovnoběžnostěnu platí $v = \frac{V}{P}$ a zároveň $v = d(Y_0, Z_0) = d(q,r)$.

Pro vzdálenost mimoběžek q a r jsme tedy odvodili vztah

$$v = \frac{|(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, C - B)|}{|\boldsymbol{u} \ \times \boldsymbol{v}|}. \tag{9.34}$$

Příklad 9.9 Určíme vzdálenost mimoběžek a a b. Přímka a je rovnoběžná s osou z a prochází bodem $A[2,1,0]$, přímka b je průsečnicí rovin daných obecnými rovnicemi $x - y + z = 0$ a $2x +$

$y + 2z = 0$.
Řešení: Označme $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$ směrové vektory stejnojmenných přímek. Uvažovat můžeme $\boldsymbol{a} = (0, 0, 1)$ a vektor $\boldsymbol{b}$ vypočteme jako vektorový součin normálových vektorů daných rovin, tj.

$$\boldsymbol{b} = (1, -1, 1) \times (2, 1, 2) = (-3, 0, 3).$$

Pro další výpočet musíme znát ještě jeden bod přímky b, zde je takovým bodem počátek $O[0, 0, 0]$.

Nyní již můžeme určit vzdálenost mimoběžek a a b podle vztahu (9.34):

$$v = \frac{|(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, A - O)|}{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|} = \frac{1}{3}\text{abs}\left(\begin{vmatrix} 0, & 0, & 1 \\ -3, & 0, & 3 \\ 2, & 1, & 0 \end{vmatrix}\right) = 1 \,.$$

Doporučujeme čtenáři, aby si v náčrtku vyznačil dané přímky. K tomuto zadání se vrátíme ještě v příkladu 9.10.

9.7.6 Vzdálenost přímky p od rovnoběžné roviny β

Platí $d(p, \beta) = d(A, \beta)$, tj. vzdálenost přímky od rovnoběžné roviny se rovná vzdálenosti zvoleného bodu přímky od dané roviny. Určení vzdálenosti $d(A, \beta)$ jsme podrobně probrali v odst. 9.7.3.

9.7.7 Vzdálenost rovnoběžných rovin α a β

Platí $d(\alpha, \beta) = d(A, \beta)$, tj. vzdálenost rovnoběžných rovin se rovná vzdálenosti zvoleného bodu v jedné rovině od druhé roviny. Určení vzdálenosti $d(A, \beta)$ jsme podrobně probrali v odst. 9.7.3.

9.8 Odchylky přímek a rovin

V tomto odstavci uvažujeme přímky a, b a roviny α, β dané takto:

$$\begin{aligned} a: \; X = A + t \cdot \boldsymbol{u} \,, \quad & b: \; Y = B + s \cdot \boldsymbol{v} \,, \\ \alpha: \; (X - N) \cdot \boldsymbol{n} = 0 \,, \quad & \beta: \; (Y - M) \cdot \boldsymbol{m} = 0 \,. \end{aligned} \tag{9.35}$$

Odchylkou dvou geometrických útvarů rozumíme velikost (ostrého nebo pravého) úhlu, který dané útvary svírají. Pro odchylku φ tedy platí $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$.

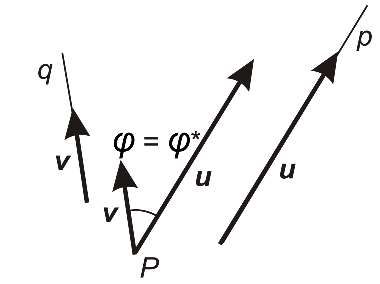
9.8.1 Odchylka přímek p a q

Pomocí skalárního součinu směrových vektorů lze určit odchylku daných přímek. Označme $\varphi^\star$ odchylku vektorů $\boldsymbol{u}$ a $\boldsymbol{v}$. Platí $0 \le \varphi^\star \le \pi$ a podle definice skalárního součinu je

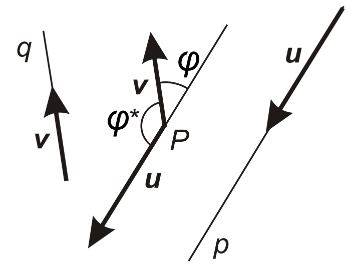
$$\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v} = |\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}| \cdot \cos \varphi^\star.$$

Pro odchylku φ přímek p a q – obr. 9.14 a 9.15 – platí

$$\cos \varphi = \frac{|\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}|}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{v}|}. \tag{9.36}$$



Obrázek 9.14:



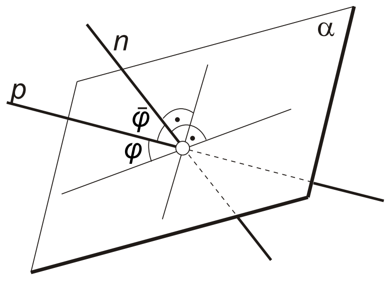
Obrázek 9.15:

9.8.2 Odchylka přímky p a roviny α

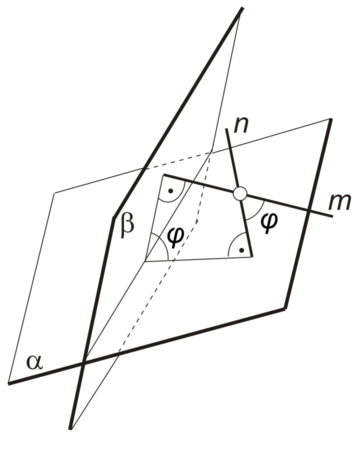
Podle předcházejícího odstavce snadno určíme odchylku $\bar{\varphi}$ přímky p a normály n roviny α. Pro odchylku φ přímky p a roviny α platí $\varphi = \frac{\pi}{2} - \bar{\varphi}$ (jedná se o velikost doplňkového úhlu) – obr. 9.16.

Výsledný vztah je tvaru

$$\sin\varphi = \cos(\frac{\pi}{2} - \varphi) = \cos\bar{\varphi} = \frac{|\boldsymbol{u}\ \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{u}| \cdot |\boldsymbol{n}|}. \tag{9.37}$$



Obrázek 9.16:



Obrázek 9.17:

9.8.3 Odchylka rovin α a β

Odchylku φ daných rovin určíme jako odchylku jejich normál – obr. 9.17. Platí tedy

$$\cos\varphi = \frac{|\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{m}|}{|\boldsymbol{n}| \cdot |\boldsymbol{m}|}. \tag{9.38}$$

9.9 Příčky mimoběžek

Příčkou mimoběžek a, b rozumíme každou přímku p, která dané mimoběžky a, b protíná. Mezi všemi příčkami dvou mimoběžek můžeme hledat takovou, která splňuje další podmínky. Z hlediska aplikací mají význam následující úlohy:

1. určit příčku mimoběžek procházející daným bodem M,
2. určit příčku daného směru, tj. příčku rovnoběžnou s danou přímkou c, resp. příčku s daným směrovým vektorem,
3. určit nejkratší příčku, tj. příčku kolmou k daným mimoběžkám.

Předpokládejme, že mimoběžky a, b jsou dány vektorovými rovnicemi

$$a: \quad X = A + t \cdot \boldsymbol{a}, \quad b: \quad Y = B + u \cdot \boldsymbol{b} \,. \tag{9.39}$$

9.9.1 Příčka mimoběžek a, b bodem M

Příčku p mimoběžek a, b procházející bodem M určíme jako průsečnici rovin $\alpha = (Ma)$ a $\beta = (Mb)$ – obr. 9.18. Pro tuto průsečnici známe jeden bod – bod M – a můžeme určit její směrový vektor $\boldsymbol{p}$ pomocí vektorového součinu normálových vektorů rovin α a β. V symbolickém zápisu:

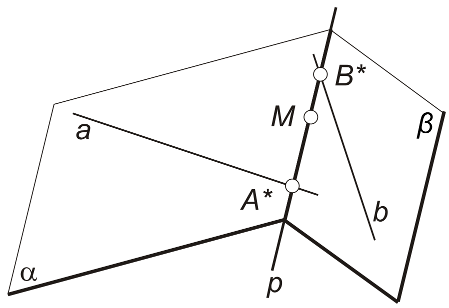
$$\boldsymbol{p} = ((M - A) \times \boldsymbol{a}) \times ((M - B) \times \boldsymbol{b}) \,. \tag{9.40}$$

Vektorová rovnice příčky p je tvaru

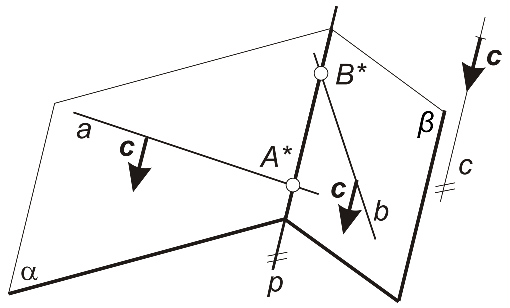
$$Z = M + v \cdot \boldsymbol{p}, \quad v \in \mathbb{R} \,, \tag{9.41}$$

kde v je parametr a směrový vektor $\boldsymbol{p}$ je dán vztahem (9.40).

Pokud by bylo potřeba v rámci řešení úlohy určit i body $A^\star$, resp. $B^\star$, v nichž příčka p protíná přímku a, resp. b, můžeme je určit jako průsečíky rovin α, resp. β s danými mimoběžkami.



Obrázek 9.18:



Obrázek 9.19:

9.9.2 Příčka mimoběžek a, b rovnoběžná s přímkou c

Sestavíme vektorovou rovnici příčky p mimoběžek a, b rovnoběžné s přímkou c. Směrovým vektorem přímky c nechť je vektor $\boldsymbol{c}$. Příčku p můžeme určit jako průsečnici rovin α a β, kde rovina α je určená bodem A a zaměřením $\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{c}$; rovina β obsahuje bod B a má zaměření $\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{c}$.

Podobně jako v úloze o příčce mimoběžek vedené daným bodem, můžeme i zde určit body $A^\star, B^\star$, v nichž příčka protíná dané mimoběžky – obr. 9.19.

9.9.3 Nejkratší příčka mimoběžek a, b

V odst. 9.7.4 jsme popsali vlastnosti nejkratší příčky daných mimoběžek. Určili jsme pak vzdálenost mimoběžek. Nyní uvedeme postup, kterým je možné stanovit vektorovou rovnici nejkratší příčky, příp. určit body $A^\star, B^\star$, v nichž nejkratší příčka protíná dané mimoběžky.

Vzhledem k tomu, že nejkratší příčka je kolmá k daným mimoběžkám, můžeme určit směrový vektor $\boldsymbol{p}$ této příčky pomocí vektorového součinu směrových vektorů $\boldsymbol{a}$ a $\boldsymbol{b}$. Tím jsme ale úlohu o nejkratší příčce převedli na úlohu předcházející, tj. na určení příčky o daném směrovém vektoru.

Příklad 9.10 Určíme body $A^\star$ a $B^\star$, v nichž nejkratší příčka mimoběžek a a b protíná tyto přímky. Stejně jako v příkladu 9.9 je přímka a rovnoběžná s osou z a prochází bodem $A[2, 1, 0]$ a přímka b je průsečnicí rovin daných obecnými rovnicemi $x - y + z = 0$ a $2x + y + 2z = 0$.
Řešení: Pro směrový vektor nejkratší příčky platí $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. V příkladu 9.9 jsme vypočetli $\boldsymbol{b} = (-3, 0, 3)$. Snadno plyne, že $\boldsymbol{p} = (0, -3, 0)$. Uvažujme pro další výpočet vektor $\boldsymbol{e}_2$, který je kolineární s vektorem $\boldsymbol{p}$.

Určíme příčku se směrovým vektorem $\boldsymbol{e}_2$ – odst. 9.9.2. Připomeňme, že $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{e}_3$. Pro rovinu α lze pak uvažovat $\boldsymbol{e}_1$ jako její normálový vektor. Obecná rovnice roviny α $(A \in \alpha)$ je tvaru $x - 2 = 0$. Vzhledem k tomu, že parametrické rovnice přímky b lze psát ve tvaru $x = -t, y = 0, z = t$ – uvažovali jsme směrový vektor kolineární s vektorem $\boldsymbol{b}$, dostáváme $B^\star[2, 0, -2]$. Stanovíme-li obecnou rovnici roviny β a určíme-li průsečík s přímkou a, obdržíme $A^\star[2, 1, -2]$. K tomuto výsledku však můžeme dojít i úvahou založenou na tom, že přímka a je rovnoběžná s osou z.

Potvrzuje se výsledkem z příkladu 9.9 – vzdálenost mimoběžek a a b se rovná jedné, neboť $|A^\star B^\star| = 1$.

9.10 Cvičení

9.1 Pro přímku AB uveďte vektorovou rovnici a parametrické vyjádření, je-li $A[1, 0, -2]$, $B[2, 4, -4]$.

[a) $X = [1, 0, -2] + t(1, 4, -2),\ t \in \mathbb{R}$,
b) $x = 1 + t,\ y = 4t,\ z = -2 - 2t,\ t \in \mathbb{R}$]

9.2 Který z bodů $A[5, 7, 1], B[0, \frac{\mathrm{d}1}{\mathrm{d}2}, 0]$ leží na přímce p: $x = 1 + 2t,\ y = 2 + 3t,\ z = 3 + 6t$?
[$A \notin p, B \in p$]

9.3 Napište parametrické rovnice přímky p, která je vedená bodem $A[3,5,1]$ rovnoběžně s přímkou q: $x = 2 + 4t,\ y = -3t,\ z = -3$.
$[x = 3 + 4u, y = 5 - 3u, z = 1]$

9.4 Určete pravoúhlý průmět přímky p: $x = 3 - 5t,\ y = 4 + 6t,\ z = 6 + 8t$ do roviny xy. $[x = 3 - 5u,\ y = 4 + 6u,\ z = 0]$

9.5 Rozhodněte o vzájemné poloze přímek a, b:

1. $a: \quad x = 1 + 2t, \quad y = 7 + t, \quad z = 3 + 4t, \quad t \in \mathbb{R};$
   $b: \quad x = 6 + 3u, \quad y = -1 - 2u, \quad z = -2 + u, \quad u \in \mathbb{R}.$
2. $a: \quad x = 2 + 4t, \quad y = -6t, \quad z = -1 - 8t, \quad t \in \mathbb{R};$
   $b: \quad x = 7 - 6u, \quad y = 2 + 9u, \quad z = 12u, \quad u \in \mathbb{R}.$
3. $a: \quad x = 1 + 2t, \quad y = 2 - 2t, \quad z = -t, \quad t \in \mathbb{R};$
   $b: \quad x = -2u, \quad y = -5 + 3u, \quad z = 4, \quad u \in \mathbb{R}.$

Jedná-li se o různoběžky, vypočtěte souřadnice jejich průsečíku. Jedná-li se o rovnoběžky nebo různoběžky, napište obecnou rovnici roviny, ve které přímky a, b leží.
[(a) různoběžky; $P[-3,5,-5]$, $9x + 10y - 7z - 58 = 0$,
(b) rovnoběžky; $5x - 22y + 19z + 9 = 0$,
(c) mimoběžky]

9.6 Rovina ρ prochází bodem $A[-2,5,7]$ a její normálový vektor je $\boldsymbol{n} = (21,15,8)$. Uveďte obecnou rovnici roviny ρ a rozhodněte, zda rovina ρ prochází počátkem O. $[21x + 15y + 8z = 0,\ O \in \rho]$

9.7 Rovina σ je určena body $A[2,3,1], B[3,1,4], C[2,1,5]$. Napište různá analytická vyjádření roviny σ. [např. obecná rovnice je $x + 2y + z - 9 = 0$]

9.8 Napište obecnou rovnici roviny, pro níž znáte její parametrické rovnice

$$x = u + v, \quad y = u - v, \quad z = 5 + 6u - 4v, \quad u, v \in \mathbb{R}\,.$$

$[x + 5y - z + 5 = 0]$

9.9 Sestavte rovnici roviny v úsekovém tvaru, jestliže tato rovina prochází bodem $A[3,5,-7]$ a na souřadnicových osách vytíná stejně dlouhé úseky. $[\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{1} = 1]$

9.10 Určete rovinu, která je rovnoběžná s přímkou $x = 1 + 82t,\ y = 7\ z = 5 + 79t$ a ve které leží přímka (daná jako průsečnice dvou rovin) $3x - 4y + z - 12 = 0$, $\quad 4x - 7y - 3z + 4 = 0$.
$[79x - 147y - 82z + 184 = 0]$

9.11 Rozhodněte o vzájemné poloze rovin ρ a σ:

1. $\rho: \quad 3x - 2y - 3z + 5 = 0, \quad \sigma: \quad 9x - 6y - 9z - 5 = 0;$
2. $\rho: \quad x + y + z - 1 = 0, \quad \sigma: \quad 2x + 2y - 2z + 3 = 0.$

[(a) rovnoběžné různé; (b) různoběžné]

9.12 Vyšetřete vzájemnou polohu následujících tří rovin, jejichž obecné rovnice jsou:

$$2x - 4y + 5z - 21 = 0, \quad x - 3y + 18 = 0, \quad 6x + y + z - 30 = 0\ .$$

[protínají se v bodě $[3, 5, 7]$]

9.13 Pro kterou hodnotu $\lambda \in \mathbb{R}$ nemají roviny o rovnicích $x+y+z-3=0$, $x+\lambda y+z+1=0$, $2x+y-z-2=0$ žádný společný bod? [$\lambda = 1$]

9.14 Rozhodněte o vzájemné poloze přímky p a roviny ρ.

1. $p:\ x = -1+2t,\ y = 3+4t,\ z = 3t, \quad \rho:\ 3x - 3y + 2z - 5 = 0.$
2. $p:\ x = 13+8t,\ y = 1+2t,\ z = 4+3t, \quad \rho:\ x + 2y - 4z + 1 = 0.$

[(a) $p||\rho,\ p \not\subset \rho$, (b) $p \subset \rho$]

9.15 Stanovte průsečíky přímky p: $x = 6+2t,\ y = -2+4t,\ z = -5t$ se souřadnicovými rovinami. [$[6,-2,0], [7,0,-\frac{5}{2}], [0,-14,15]$]

9.16 Sestavte parametrické rovnice průsečnice rovin
$\rho:\ x+y+z-1=0$ a $\sigma:\ 2x+y-z+2=0$.
[např. $x = -3+2t,\ y = 4-3t,\ z = t$]

9.17 Určete obecnou rovnici roviny, která prochází bodem $A[-3,1,0]$ a průsečnicí rovin
$\rho:\ x+2y-z+4=0$ a $\sigma:\ 3x-y+2z-1=0$. [$20x+19y-5z+41=0$]

9.18 Přímka p je dána jako průsečnice rovin o rovnicích
$x-3y+2z+4=0, 2x+y-3z-6=0$.
Určete obecné rovnice pravoúhlých průmětů přímky p do souřadnicových rovin xz a yz.
[$x-z-2=0, y-z-2=0$]

9.19 Vypočtěte vzdálenost bodu M od roviny ρ:

1. $M[1,2,-3], \quad \rho:\ 2x+3y-4z+5=0;$
2. $M[7,-1,2], \quad \rho = ABC,\ A[-5,0,0], B[0,0,\frac{5}{2}], C[0,-\frac{5}{2},0].$

[(a) $4,6$; (b) 2]

9.20 Vypočtěte vzdálenost bodu M od přímky p:

1. $M[1,3,5], \quad p = \rho \cap \sigma,\ \rho:\ 2x+y+z-1=0,$
   $\sigma:\ 3x+y+2z-3=0;$
2. $M[1,2,5], \quad p:\ x = t,\ y = 1-2t,\ z = 3+t.$

[(a) $\sqrt{14}$, (b) $\sqrt{\frac{35}{6}}$]

9.21 Vypočtěte vzdálenost přímek a, b:

1. $a:\ x = 3+t,\ y = 1-t,\ z = 2+2t,$
   $b:\ x = -u,\ y = 2+3u,\ z = 3u;$

2. $a: \ x = 2 + 3t, \ y = -1 + 4t, \ z = 2t,$
   $b: \ x = 7 + 3u \ y = 1 + 4u, \ z = 3 + 2u;$

[(a) $\frac{18}{\sqrt{110}}$, (b) 3]

9.22 Vypočtěte odchylku φ přímek a, b, je-li
$a: \ x = 1 + 3t, \ y = -2 + 6t, \ z = 5 + 2t,$
$b: \ x = 2u \ y = 3 + 9u, \ z = -1 + 6u.$ [$\varphi = \arccos \frac{72}{77}$]

9.23 Vypočtěte odchylku φ rovin ρ a σ, kde $\rho: \ x + 2y - 3z = 0, \ \sigma: \ 2x + 3y + z + 8 = 0.$ [$\varphi = \arccos \frac{5}{14}$]

9.24 Vypočtěte odchylku přímky p a roviny ρ, kde $p: \ x = 1 + t, \ y = 2 + t, \ z = 3 + t,$ $\rho: \ x + 2y + 2z - 3 = 0.$ [$\varphi = 74{,}2^0$]

9.25 Vypočtěte souřadnice bodu, který je souměrně položen podle roviny $\rho: \ x - 4y + z + 7 = 0$ k bodu $A[2, 7, 1]$. [$[4, -1, 3]$]

9.26 Počátkem O je vedena rovina kolmá k přímce $p: \ x = -2 + 4t, \ y = 3 + 5t, \ z = 1 - 2t.$ Určete její obecnou rovnici. [$4x + 5y - 2z = 0$]

9.27 Napište parametrické rovnice přímky jdoucí bodem $A[-1, 0, 4]$, která protíná přímku $p:$ $x = 1 + t, \ y = 2t, \ z = 4 - t$ pod pravým úhlem. Jaké souřadnice má průsečík těchto přímek? [$x = -1 + 5u, \ y = -2u, \ z = 4 + u$; $[\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{13}{3}]$]

9.28 Napište parametrické rovnice příčky mimoběžek
$a: \ x = 1 - t, y = t, z = 4t, \quad b: \ x = 2 - u, \ y = 4 + 2u, z = 1$, která leží v rovině $\rho: \ y + 2z = 0.$ [$x = 1 + 4u, y = -2u, z = u$]

9.29 Napište parametrické rovnice příčky mimoběžek
$a: \ x = t, y = 1 - t, z = 3 + t, \quad b: \ x = 2 + 2u, \ y = 3 - u, z = 4 + 3u$, která prochází počátkem O. [$x = 22v, y = -19v, z = 31v$]

9.30 Určete příčku mimoběžek $a: \ x = 3 + t, y = -1 + 2t, z = 4t, \quad b: \ x = -2 + 3u, y = -1, z = 4 - u$, pro níž je dán její směrový vektor $\boldsymbol{s} = (1, 1, 2)$. [$2y - z + 2 = 0, x - 7y + 3z - 17 = 0$]

9.31 Napište parametrické rovnice nejkratší příčky osy y a přímky $p: \ x = 3 + 4t, y = 1 - t,$ $z = 2 + 5t.$ [např. $x = 5u, y = \frac{63}{41}, z = -4u$]

9.11 Kontrolní otázky

9.1 Uveďte přehled různých způsobů analytického popisu přímky v $\mathbb{E}_3$.
(Návod: jde o tři možnosti.)

9.2 Uveďte přehled různých způsobů analytického popisu roviny v $\mathbb{E}_3$.
(Návod: jde o pět možností.)

9.3 Uveďte, pro které roviny není dané vyjádření definováno.

9.4 Popište algoritmus, pomocí něhož rozhodnete o vzájemné poloze

1. dvou přímek,
2. dvou rovin,
3. přímky a roviny.

9.5 Jak se liší odchylka vektorů a odchylka přímek?

9.6 Uveďte, jaký geometrický význam má nulovost jednotlivých koeficientů v obecné rovnici roviny.

9.7 Slovně pomocí geometrických pojmů (obsah rovnoběžníku, jeho výška) popište vzorec pro výpočet vzdálenosti bodu od přímky.

9.8 Slovně pomocí geometrických pojmů (rovnoběžnostěn, objem, obsah podstavy, výška) popište vzorec pro výpočet vzdálenosti dvou mimoběžek.

Literatura

[1] Bohne, E. – Klix, W.D.: Geometrie – Grundlagen für Anwendungen. Leipzig, Fachbuchverlag 1995.

[2] Demlová, M. – Nagy, J.: Algebra. Praha, SNTL 1985.

[3] Holenda, J.: Lineární algebra I. Plzeň, ZČU 1995.

[4] Ježek, F. – Míková, M.: Maticová algebra a analytická geometrie. Plzeň, ZČU 2003.

[5] Jirásek, F. – Kriegelstein, E. – Tichý, Z.: Sbírka řešených příkladů z matematiky. Praha, SNTL/Alfa 1987.

[6] Luhan, E. – Novotný, M. – Vojíková, J.: Sbírka řešených příkladů z matematiky. Plzeň, VŠSE 1965.

[7] Mezník, I. – Karásek, J. – Miklíček, J.: Matematika I pro strojní fakulty. Praha, SNTL 1992.

[8] Polák, J.: Přehled středoškolské matematiky. Praha, SPN 1991.

[9] Rogers, D.F. – Adams, J.A.: Mathematical Elements for Computer Graphics. New York, Mc Graw–Hill 1990.

[10] Štauberová, Z.: Mongeovo promítání. Plzeň, ZČU 2004.

[11] Tesková, L.: Sbírka příkladů z lineární algebry. Plzeň, ZČU 1997.

[12] Urban, A.: Deskriptivní geometrie I. Praha, SNTL 1965.