Obsah

1 Skalární funkce více reálných proměnných

1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

Symbolem $\mathbb{R}^n$ označujeme **množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel**, tj. $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]\}$, $x_i \in \mathbb{R}$. Množinu $\mathbb{R}^n$ chápeme buď jako množinu bodů, nebo jako **vektorový prostor**, pokud v této množině zavedeme algebraické operace splňující axiómy lineárního prostoru. Vektory značíme $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, čísla x_i, $i = 1, \ldots, n$ se nazývají **složky (souřadnice)** vektoru (bodu).

Definice 1.1 : Nechť $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, potom pomocí následujících vztahů definujeme

1. **skalární součin** vektorů $\vec{x}, \vec{y}$
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,,$$
2. **normu vektoru** $\vec{x}$
$$\|\vec{x}\,\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}\,,$$
3. **vzdálenost** bodů $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ("délka vektoru $\vec{x} - \vec{y}$ ")
$$\rho(\vec{x}, \vec{y}\,) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,.$$

Vektorový prostor, v němž je definován skalární součin se nazývá **eukleidovský prostor**. Pro skalární součin se také používá značení $(\vec{x}, \vec{y}\,)$.

Z uvedených definic bezprostředně plyne:

1. Pro libovolné $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí

   a) $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$,

   b) $(\vec{x} + \vec{y}\,) \cdot \vec{z} = \vec{x} \cdot \vec{z} + \vec{y} \cdot \vec{z}$,

   c) $(\alpha\vec{x}\,) \cdot \vec{y} = \alpha\vec{x} \cdot \vec{y}$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$,

   d) $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$ pro $\vec{x} \neq \vec{0}$.

Vektor $\vec{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ se nazývá **nulový vektor**.

2. Pro libovolné $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí:

   a) $\|\vec{x}\,\| > 0$ pro $\vec{x} \neq \vec{0}$, $\|\vec{0}\,\| = 0$,

   b) $\|\alpha\vec{x}\,\| = |\alpha|\, \|\vec{x}\,\|$ pro libovolné $\alpha \in \mathbb{R}$,

   c) $\|\vec{x} + \vec{y}\,\| \leq \|\vec{x}\,\| + \|\vec{y}\,\|$ (trojúhelníková nerovnost).

3. Pro libovolné $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ platí:

   a) $\rho(\vec{x}, \vec{y}\,) \geq 0\,; \quad \rho(\vec{x}, \vec{y}\,) = 0,$ právě když $\vec{x} = \vec{y},$

   b) $\rho(\vec{x}, \vec{y}\,) = \rho(\vec{y}, \vec{x}\,),$

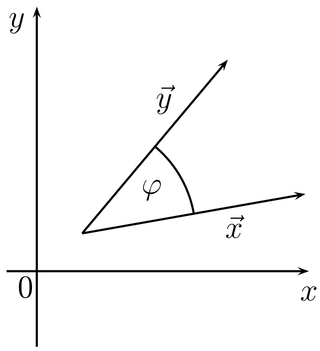
   c) $\rho(\vec{x}, \vec{z}\,) \leq \rho(\vec{x}, \vec{y}\,) + \rho(\vec{y}, \vec{z}\,)\,.$

4. Pro každé $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ platí Cauchyova-Schwarzova nerovnost

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}\,| \leq \|\vec{x}\,\| \cdot \|\vec{y}\,\|$$

tj.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} y_i^2}$$



5. Pro nenulové $\vec{x}, \vec{y}$ existuje číslo $\varphi \in \langle 0, \pi\rangle$, které se nazývá **úhlem vektorů** $\vec{x}, \vec{y}$, takové, že

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\,\| \cdot \|\vec{y}\,\|}\,,$$

   neboť $|\vec{x} \cdot \vec{y}\,| \leq \|\vec{x}\,\| \cdot \|\vec{y}\,\| \Leftrightarrow -1 \leq \frac{\vec{x}\cdot\vec{y}}{\|\vec{x}\,\|\cdot\|\vec{y}\,\|} \leq 1$ a odtud vyplývá $\vec{x} \cdot \vec{y} = \|\vec{x}\,\| \cdot \|\vec{y}\,\| \cos\varphi$ pro jisté $\varphi \in \langle 0, \pi\rangle$.

   Cvičení 1.1 : Dokažte ekvivalenci trojúhelníkové nerovnosti a Schwarzovy nerovnosti.

   [$\|\vec{x}\,\|^2 + 2\|\vec{x}\,\|\,\|\vec{y}\,\| + \|\vec{y}\,\|^2 = (\|\vec{x}\,\| + \|\vec{y}\,\|)^2 \geq \|\vec{x} + \vec{y}\,\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y}\,) = (\vec{x}, \vec{x}\,) + (\vec{x}, \vec{y}\,) + (\vec{y}, \vec{x}\,) + (\vec{y}, \vec{y}\,) = \|\vec{x}\,\|^2 + 2(\vec{x}, \vec{y}\,) + \|\vec{y}\,\|^2 \Leftrightarrow \|\vec{x}\,\|\,\|\vec{y}\,\| \geq |(\vec{x}, \vec{y}\,)|$.]

Z geometrického pohledu je okolí bodu vlastně koule, jejíž povrch je tvořen **sférou** $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| = \varepsilon\}$. Podobně nazýváme **kvádrem** množinu $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i;\ a_i, b_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n\}$.

Jestliže nadefinujeme otevřené množiny, potom hovoříme o topologii daného prostoru.

Definice 1.2 : (okolí, otevřená množina v $\mathbb{R}^n$)
Množinu $U(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$ nazveme **okolí bodu $\mathbf{x}_0$**.
Množinu $P(\mathbf{x}_0) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\}$ nazveme **prstencové okolí bodu $\mathbf{x}_0$**.
Řekneme, že bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ je **vnitřním bodem** množiny Ω, jestliže existuje okolí $U_\varepsilon(\mathbf{x}_0)$ takové, že $U_\varepsilon(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$.
Množinu vnitřních bodů množiny Ω značíme $\operatorname{int}\Omega$ a nazýváme **vnitřkem** množiny Ω.
Množina Ω se nazývá **otevřená**, když $\Omega = \operatorname{int}\Omega$ (je tvořena pouze vnitřními body).
Množina Ω se nazývá **souvislá**, jestliže její libovolné dva body lze spojit křivkou a Ω je **oblast**, jestliže je otevřená a souvislá.

Definice 1.3 : (uzavřená množina)
Bod $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ se nazývá **hromadný bod** množiny Ω, jestliže každé jeho prstencové okolí $P(\mathbf{x}_0)$ obsahuje alespoň jeden bod $\mathbf{x} \in \Omega$.
Takový bod množiny Ω, který není jejím hromadným bodem, se nazývá **izolovaný bod** množiny Ω.
Bod $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ je hraničním bodem Ω, když každé jeho okolí $U(\mathbf{x}_0)$ obsahuje jak body $\mathbf{x} \in \Omega$, tak body $\mathbf{y} \notin \Omega$.
Hranice množiny Ω je tvořena jejími hraničními body. Značíme ji $\partial\Omega$.
Uzávěr množiny Ω je množina $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.
Řekneme, že množina Ω je **uzavřená**, jestliže $\Omega = \overline{\Omega}$.
Řekneme, že množina Ω je **omezená**, jestliže
$\exists K \in \mathbb{R}\, \forall \mathbf{x} \in \Omega : \ \|\mathbf{x}\| < K$.

Okolí hromadného bodu obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny Ω. Kolem izolovaného bodu existuje okolí, které celé neleží v Ω. Část okolí hraničního bodu leží v množině, část vně množiny Ω.

Uzavřená množina se rovná svému uzávěru, obsahuje svou hranici.

Omezená množina leží v kouli o poloměru K.

Definice 1.4 : (posloupnost v $\mathbb{R}^n$)
Zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ přiřazující každému $k \in \mathbb{N}$ bod (vektor) $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **posloupnost (bodů, vektorů)** v $\mathbb{R}^n$. Značíme $f = \{\mathbf{x}_k\}$.

Definice 1.5 : (konvergentní posloupnost)
Posloupnost $\{\mathbf{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ je **konvergentní** v $\mathbb{R}^n$, jestliže

$$\exists\, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n\ \forall \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \in \mathbb{N} : k > k_0 \ \Rightarrow\ \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon .$$

Píšeme $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$, resp. $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$ pro $k \to +\infty$.

Protože máme eukleidovský vektorový prostor $\mathbb{R}^n$, hovoříme o konvergenci vzhledem k eukleidovské normě. Analogicky definujeme konvergenci vzhledem k jiné normě či jiné metrice.

Věta 1.1 : (konvergence po složkách)
Posloupnost $\{\mathbf{x}_k\}$ je konvergentní v $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když posloupnosti všech složek $\{x_{ki}\}$ jsou konvergentní v $\mathbb{R}$, tj.

$$\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{ki} \to x_{0i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n .$$

<u>Důkaz</u> : plyne ze vztahů

$$|x_{ki} - x_{0i}| \le \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - x_{0i})^2} .$$

Poznamenejme, že uzavřená množina obsahuje limity všech konvergentních posloupností prvků této množiny, tj. platí: $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je uzavřená ($\Omega = \overline{\Omega}$) právě tehdy, když každá konvergentní posloupnost prvků z Ω má limitu v Ω.

1.2 Základní vlastnosti funkcí v $\mathbb{R}^n$

Definičním oborem $D(f)$ funkce f je tedy množina Ω.

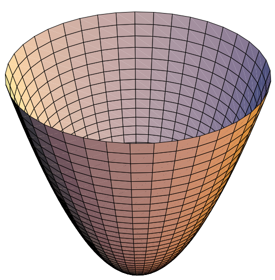
Definice 1.6 : (funkce n-proměnných)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zobrazení $f : \Omega \to \mathbb{R}$ přiřazující každému **argumentu $\mathbf{x} \in \Omega$ funkční hodnotu** $f(\mathbf{x})$ se nazývá **reálná funkce n reálných proměnných** definovaná na Ω.
Značíme $f : \mathbf{x} \to f(\mathbf{x})$, $f = f(\mathbf{x})$. ,
Množina

$$G = \{[\mathbf{x}, f(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^{n+1} : \ \mathbf{x} \in \Omega\}$$

se nazývá **graf funkce** f.
Množina

$$H_C = \{\mathbf{x} \in \Omega : \ f(\mathbf{x}) = C\}, \ C \in \mathbb{R},$$

se nazývá **hladina (vrstevnice) funkce** f. (Je to množina bodů definičního oboru, v nichž funkce f nabývá stejné funkční hodnoty).



Příklad 1.1 : Grafem funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ je *paraboloid* a její hladiny jsou kružnice o poloměru $\sqrt{C}$.

Definice 1.7 : (limita funkce n-proměnných)
Nechť je dána funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a nechť $\mathbf{x}_0$ je hromadný bod množiny Ω. Jestliže $\exists L \in \mathbb{R}$ takové, že

Jednotlivé podmínky v definici limity jsou ekvivalentní.
Také se nazývají Heineho, Cauchyho, popř. topologická definice limity.

1. $\forall \{\mathbf{x}_k\}, \ \mathbf{x}_k \in \Omega, \ \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0 : \ \ \mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0 \ \Rightarrow \ f(\mathbf{x}_k) \to L$,
2. $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta(\varepsilon) > 0 \, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$,
3. $\forall U(L) \subset \mathbb{R} \ \exists P(\mathbf{x}_0) \subset \mathbb{R} : \ \ f(\Omega \cap P(\mathbf{x}_0)) \subset U(L)$,

pak řekneme, že funkce f má v bodě $\mathbf{x}_0$ limitu L (vlastní) a píšeme

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L.$$

Cvičení 1.2 : Modifikujte Cauchyho definici limity pro

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \infty \quad \text{a} \quad \lim_{\mathbf{x} \to \infty} f(\mathbf{x}) = L.$$

[$\forall K > 0 \, \exists \delta(K) > 0 \, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \ 0 < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta \Rightarrow f(\mathbf{x}) > K$,
$\forall \varepsilon > 0 \, \exists K > 0 \, \forall \mathbf{x} \in \Omega, \ \|\mathbf{x}\| > K \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon$,]

<u>*Příklad 1.2*</u> :

Vypočítáme limitu funkce $f(x,y) = x^3 - y^3$ v bodě $[1,2]$.

Nechť $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ jsou libovolné posloupnosti reálných čísel takové, že $x_k \to 1$ a $y_k \to 2$.

Využíváme větu 4.6 z MA1 o algebře limit funkcí jedné reálné proměnné.

Pak $x_k^3 \to 1$, $y_k^3 \to 8 \Rightarrow f(x_k, y_k) = x_k^3 - y_k^3 \to 1 - 8 = -7$. Tedy $\lim\limits_{[x,y]\to[1,2])} (x^3 - y^3) = -7$.

<u>*Příklad 1.3*</u> : Stanovme $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{y}{x}$.

Zvolíme posloupnost $\{x_k, y_k\} = \{\frac{1}{k}, \frac{c}{k}\}$, $c \in \mathbb{R}$, pak dostaneme $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\frac{c}{k}}{\frac{1}{k}} = c$. Vidíme, že daná funkce nemá v bodě $[0,0]$ limitu. (Číslo c můžeme volit libovolně, tedy neexistuje číslo L, ke kterému se blíží funkční hodnoty funkce f.)

Položíme-li $y = c\,x$, pak v limitě dostaneme $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{y}{x} = c$. K limitnímu bodu se blížíme po přímkách. Pozor tato metoda je vhodná pouze k důkazu neexistence limity, nikoli její existence.

Věta 1.2 : (jednoznačnost limity, algebra limit)

1. Má-li funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ limitu (vlastní), potom je tato limita jediná.

2. Existují-li $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L_f$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = L_g$, potom platí $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x}) = L_f \pm L_g$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) = L_f \cdot L_g$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})} = \frac{L_f}{L_g}$, $L_g \neq 0$.

<u>Důkaz</u> : Analogicky jako u funkcí jedné proměnné, viz věta 4.2 MA1.

Definice 1.8 : (částečné limity, vícenásobné limity v $\mathbb{R}^2$)
Mějme funkci $f = f(x,y)$ definovanou v okolí bodu $[x_0, y_0]$. Existuje-li pro každé pevné y

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y),$$

nazývá se **částečná (parciální) limita** funkce f v proměnné x. Existuje-li

$$L_1 = \lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

nazývá se **dvojnásobnou limitou** funkce f v bodě $[x_0, y_0]$. Analogicky definujeme pro pevné x

$$\psi(x) = \lim_{y\to y_0} f(x,y) \quad \text{a} \quad L_2 = \lim_{x\to x_0} \psi(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

<u>*Příklad 1.4*</u> : Pro funkci $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ najdeme dvojnásobné limity v bodě $[0,0]$.

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2} = 0\,.$$

Limitu funkce f budeme hledat "po přímkách" $y = kx$, potom

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{k^2x^2+x^2} = \frac{k}{k^2+1}\,,$$

tudíž hledaná limita neexistuje.

<u>*Příklad 1.5*</u> : Hledáme limity funkce f, kde

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x} & x \neq 0,\ y \neq 0,\\ 0 & x = 0,\ y = 0\,, \end{cases}$$

v okolí bodu $[0,0]$.

Z odhadu $\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|+|y|$ plyne $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)=0$, ale limity $\lim\limits_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$, $\lim\limits_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}$ neexistují, tudíž neexistují ani dvojnásobné limity.

Existence a rovnost dvojnásobných limit nezaručí existenci limity funkce v bodě a obráceně z existence limity nevyplývá existence dvojnásobných limit.
Přesto, jestliže existuje (dvojná) limita a "vnitřní limity", pak existují dvojnásobné limity.

Věta 1.3 : (vztah dvojné limity a dvojnásobných limit)
Nechť funkce $f = f(x,y)$ je definovaná (aspoň) v prstencovém okolí $P([x_0,y_0])$ bodu $[x_0,y_0]$ a existuje limita

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L.$$

Nechť dále existují částečné limity

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y), \quad [x_0,y] \in P([x_0,y_0]),$$

$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \psi(x), \quad [x,y_0] \in P([x_0,y_0]).$$

Potom existují dvojnásobné limity

$$L_1 = \lim_{y\to y_0}\varphi(y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

$$L_2 = \lim_{x\to x_0}\psi(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

a platí $L_1 = L_2 = L$. (Tedy existence $L, \varphi(x), \psi(x)$ je postačující podmínkou pro existenci L_1, L_2 a jejich rovnost L.)

Důkaz : Je založen na skutečnosti, že za uvedených předpokladů pro dostatečně malé δ a body $[x, y]$ splňující

$0 < \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ platí $|\varphi(y) - f(x, y)| < \varepsilon_1$ a $|f(x, y) - L| < \varepsilon_2$. Odtud dostaneme $|\varphi(y) - L| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2$.

Definice 1.9 : (Spojitost)
Funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je **spojitá** v hromadném bodě $\mathbf{x}_0$ množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jestliže

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Funkce f je **spojitá na množině** Ω, je-li spojitá v každém bodě $\mathbf{x} \in \Omega$. Bod $\mathbf{x}_0$ je **bodem nespojitosti** funkce, není-li v něm funkce f spojitá.

Funkce f je spojitá, když pro každou posloupnost $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$, posloupnost funkčních hodnot $\{f(\mathbf{x}_k)\}$ konverguje k číslu $f(\mathbf{x}_0)$. V izolovaném bodě $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ se funkce f považuje za spojitou, je-li v tomto bodě definována. Jestliže v bodě nespojitosti existuje vlastní limita funkce f, pak říkáme, že nespojitost je odstranitelná.

Věta 1.4 : (vlastnosti spojitých funkcí)

1. Součet, rozdíl, součin, podíl (s výjimkou nulových hodnot jmenovatele) spojitých funkcí je funkce spojitá.

2. Je-li f definovaná v nějakém okolí $\mathbf{x}_0$, spojitá v bodě $\mathbf{x}_0$ a $f(\mathbf{x}_0) \neq 0$, potom existuje okolí $U(\mathbf{x}_0)$ bodu $\mathbf{x}_0$, v němž
$$\operatorname{sign} f(\mathbf{x}) = \operatorname{sign} f(\mathbf{x}_0) \qquad \forall\, \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)\,.$$

3. (O mezihodnotě). Je-li f spojitá na souvislé množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a když pro $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \Omega$ je $f(\mathbf{x}_1) \neq f(\mathbf{x}_2)$, potom pro každé číslo $\overline{y}$ ležící mezi čísly $f(\mathbf{x}_1), f(\mathbf{x}_2)$ existuje aspoň jedno $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ takové, že $f(\mathbf{x}_0) = \overline{y}$.

4. (Weierstrass). Je-li funkce f spojitá na **kompaktní** (tzn. omezené a uzavřené) množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, potom je na Ω omezená a existují body $\mathbf{x}_m, \mathbf{x}_M \in \Omega$ takové, že
$$f(\mathbf{x}_m) = \inf_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x})\ ; \quad f(\mathbf{x}_M) = \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x})$$
(těmto číslům se říká minimum, resp. maximum funkce na množině Ω).

5. Je-li funkce f spojitá na kompaktní množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, potom je na Ω stejnoměrně spojitá, tj. pro každé dvě posloupnosti $\{\mathbf{x}_m\}\,, \{\mathbf{x}_k\}$ z Ω takové, že $\|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_k\| \to 0$, platí $|f(\mathbf{x}_m) - f(\mathbf{x}_k)| \to 0\,.$

Porovnejte větu 1.4 s větou 6.6 z MA1.

Příklad 1.6 :

1. Funkce $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ je spojitá v každém bodě $[x,y] \neq (0,0)$, ale v bodě $(0,0)$ spojitá není, a navíc nespojitost není odstranitelná.

2. Funkce $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x} & xy \neq 0\,, \\ 0 & xy = 0\,, \end{cases}$

   je spojitá v bodě $[0,0]$, avšak v každém okolí tohoto bodu existují body nespojitosti (body souřadnicových os).

3. Funkce $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0\,, \\ 0 & x^2+y^2 = 0\,, \end{cases}$

   je spojitá v bodě $[0,0]$, což dokážeme přechodem k polárním souřadnicím. Položíme $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, potom
   $$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0 \\ \varphi\in\langle 0,2\pi)}} \frac{r^3\cos\varphi(\sin\varphi)^2}{r^2} = 0\,.$$

Při přechodu k polárním souřadnicím platí následující ekvivalence $[x,y] \to [0,0] \Leftrightarrow \|[x,y]-[0,0]\| \to 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \Leftrightarrow \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} \to 0 \Leftrightarrow r \to 0_+$. Pomocí tohoto přechodu lze tedy dokázat existence limity funkce.

1.3 Derivace a diferenciál

Definice 1.10 : (derivace podle vektoru, parciální derivace) Mějme funkci $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ a existuje okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$.
Je dán (pevný) vektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s})|_{t=0} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{s}}\,,$$

pak se nazývá **derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ podle vektoru $\vec{s}$** (nebo také **variace funkce** f v bodě $\mathbf{x}_0$),
je-li $\vec{s}$ jednotkový vektor, tj. $\|\vec{s}\| = 1$, pak se tato limita nazývá **derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ ve směru $\vec{s}$.**
Jestliže $\vec{s} = \vec{e}_i$ (jednotkový vektor ve směru osy x_i), potom

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{e}_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}$$

a hovoříme o **parciální derivaci funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ podle** x_i a o funkci f říkáme, že je **derivovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$ podle proměnné** x_i.

Příklad 1.7: Uvažujeme funkci $f(x,y)=xy^2$, vektor $\vec{s}=(s_1,s_2)=(1,2)$ a bod $[x_0,y_0]=[1,1]$. Potom dostaneme

$$\begin{aligned}
\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{s}} &= \lim_{t\to 0}\tfrac{f(x_0+ts_1,y_0+ts_2)-f(x_0,y_0)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\tfrac{(1+t)(1+t\cdot 2)^2-1}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\tfrac{1+4t+4t^2+t+4t^2+4t^3-1}{t}=5\,,\\
\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{e}_1}=\tfrac{\partial f(1,1)}{\partial x} &= \lim_{t\to 0}\tfrac{f(1+t\cdot 1,1+t\cdot 0)-f(1,1)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\tfrac{(1+t)(1+t\cdot 0)^2-1}{t}=1\,,\\
\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{e}_2}=\tfrac{\partial f(1,1)}{\partial y} &= \lim_{t\to 0}\tfrac{f(1+t\cdot 0,1+t\cdot 1)-f(1,1)}{t}\\
&= \lim_{t\to 0}\tfrac{(1+t\cdot 0)(1+t\cdot 1)^2-1}{t}=2\,.
\end{aligned}$$

Z definice (1.9) pro funkci dvou proměnných plyne

$$\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=\lim_{t\to 0}\tfrac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}\,,\qquad \tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=\lim_{t\to 0}\tfrac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}\,.$$

Obecně platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_{01},\ldots,x_{0i}+t\,,\;x_{0i+1},\ldots,x_{0n})-f(x_{01},\ldots,x_{0n})}{t}\,.$$

Z uvedených vztahů vyplývá, že parciální derivace počítáme derivováním podle příslušné proměnné (ostatní proměnné se chovají jako konstanty). Například

$$\frac{\partial(xy^2)}{\partial x}=y^2\,,\qquad \frac{\partial(xy^2)}{\partial y}=2xy\,.$$

Geometrický význam derivace ve směru

Máme funkci $f:\Omega\to\mathbb{R}$, vnitřní bod $\mathbf{x}_0\in\Omega$, vektor $\vec{s}$ s jednotkovou normou $\|\vec{s}\|=1$ a úsečku $p:\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+t\vec{s}$, $t\in I$, $I=(-\delta,\delta)$, $\delta>0$, $p\subset\Omega$.

Položíme $g(t)=f(\mathbf{x}_0+t\vec{s})$, potom graf funkce $g:I\to\mathbb{R}$ je dán průnikem grafu funkce f a roviny ϱ, která obsahuje úsečku p a je kolmá k rovině-xy.

Platí

$$g'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\vec{s})-f(\mathbf{x}_0)}{t}=\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{s}}\,.$$

Hodnota derivace funkce f ve směru $\vec{s}$ je tudíž rovna směrnici tečny $\tau\in\varrho$ ke grafu funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$. Tato směrnice se rovná tangens úhlu tečny τ a přímky p (prodloužení úsečky p).

Definice 1.11 : (diference, totální diferenciál)
Je dán vnitřní bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Pro libovolné $\mathbf{x} \in \Omega$ označíme $\vec{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Vektor $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ $(=\Delta\mathbf{x} = d\mathbf{x}\,,\ h_i = dx_i)$ nazveme **diferencí argumentu**.

1. Funkci proměnné $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$
$$\Delta f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$
nazveme **diferencí funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ vzhledem k $\vec{\mathbf{h}}$** (tzv. **totální diference**).

2. Funkce f se nazývá **diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$**, existuje-li okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$, vektor $\vec{A} = (A_1, A_2, \dots A_n)$, a funkce $\omega(\vec{h})$ (proměnné $\vec{h}$) splňující podmínku
$$\lim_{\|\vec{h}\| \to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$
tak, že $\forall\, \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$ platí
$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \vec{A} \cdot \vec{h} + \omega(\vec{h})\,.$$
Funkce f je **diferencovatelná na** Ω, je-li diferencovatelná v každém bodě $\mathbf{x} \in \Omega$.

3. U diferencovatelné funkce se lineární forma $\vec{A} \cdot \vec{h}$ nazývá **(totálním) diferenciálem** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ a značí se
$$df = df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \vec{A} \cdot \vec{h}\,, \quad \vec{h} \in \mathbb{R}^n$$
a vektor $\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ se nazývá **totální derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$** nebo také **gradient** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$. Užívá se označení
$$\vec{A} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{x}_0)\,.$$
Diferenciál pak zapisujeme ve tvaru
$$df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{h} = \nabla f(\mathbf{x}_0)\, \vec{h} = f'(\mathbf{x}_0)\, d\mathbf{x}\,.$$

Pro funkci $f(x,y) = x^2 + 3y$ je $\vec{h} = (x - x_0, y - y_0)$ a $\Delta f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = x^2 - x_0^2 + 3y - 3y_0 = (x + x_0)(x - x_0) + 3(y - y_0) = (2x_0 + x - x_0)(x - x_0) + 3(y - y_0) = (2x_0, 3)(x - x_0, y - y_0) + (x - x_0)^2$. Tedy $\vec{A} = \operatorname{grad} f = (2x_0, 3)$ a $\omega(\vec{h}) = (x - x_0)^2$, neboť $\lim\limits_{\|\vec{h}\| \to 0} \frac{(x - x_0)^2}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0$.

Diferenciál df se rovná skalárnímu součinu gradientu $\operatorname{grad} f$ a diference argumentu $\vec{h}$.

Příklad 1.8 : Určíme diferenciál funkce $f(x,y) = xy^2$ v bodě $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]$. Platí

$f(x,y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) =$

$(x_0 + h_1)(y_0 + h_2)^2 - x_0 y_0^2 = y_0^2 h_1 + 2x_0 y_0 h_2 + 2y_0 h_1 h_2 + x_0 h_2^2 + h_1 h_2^2.$

Odtud $A_1 = y_0^2$, $A_2 = 2x_0y_0$, $\omega(\vec{h}) = 2y_0h_1h_2 + x_0h_2^2 + h_1h_2^2$.
Zbývá dokázat $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$, tedy $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{2y_0h_1h_2 + x_0h_2^2 + h_1h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$

$$\left[\begin{array}{l} h_1 = r\cos\varphi \\ h_2 = r\sin\varphi \end{array}\right] = \lim_{\substack{r\to 0\\ \varphi\in\langle 0,2\pi)}} \frac{2y_0r^2\cos\varphi\sin\varphi + x_0r^2\sin^2\varphi + r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r} = 0.$$

Diferenciál funkce $f = xy^2$ v bodě $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]$ má tvar $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = (y_0^2, 2x_0y_0)\cdot\vec{h} = y_0^2h_1 + 2x_0y_0h_2$.

1.4 Vlastnosti diferencovatelných funkcí

Věta 1.5 : (vlastnosti diferencovatelné funkce)
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$, potom

1. je v bodě $\mathbf{x}_0$ spojitá,
2. existuje v bodě $\mathbf{x}_0$ derivace funkce f podle libovolného vektoru $\vec{s}$ (tedy existují i všechny parciální derivace) a platí
$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial\vec{s}} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot\vec{s},$$
3. pokud v $\mathbb{R}^n$ uvažujeme kartézský souřadnicový systém a za bázi volíme jednotkové vektory ve směru os systému, pak
$$A_i = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}, \quad \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)_{\mathbf{x}_0}.$$

Pro funkci $f(x,y) = xy^2$, bod $[x_0, y_0] = [1,1]$ a směr $\vec{s} = (1,2)$ z příkladu (1.7) máme $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial\vec{s}} = (y_0^2, 2x_0y_0)\cdot\vec{s}$ $= (1,2)\cdot(1,2) = 5$.

Gradient výše uvedené funkce má v kartézském systému tvar $\operatorname{grad} f = (y^2, 2xy)$.

<u>Důkaz</u> :

1. Na okolí $U(\mathbf{x}_0)$ bodu $\mathbf{x}_0$ platí podle předpokladu $f(\mathbf{x}_0+\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot\vec{h} + \omega(\vec{h})$ a pro $\|\vec{h}\|\to 0$ je $\frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}\to 0 \Rightarrow \omega(\vec{h})\to 0$, pak také $f(\mathbf{x}_0+\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0)\to 0$, tedy funkce f je spojitá v bodě $\mathbf{x}_0$.
2. Nyní volíme $\vec{h} = t\vec{s}$, pak platí $f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s}) - f(\mathbf{x}_0) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot t\vec{s} + \omega(t\vec{s})$, kde $\frac{\omega(t\vec{s})}{\|t\vec{s}\|}\to 0 \Rightarrow \frac{\omega(t\vec{s})}{t}\to 0$.
Odtud plyne $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial\vec{s}} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\vec{s}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot\vec{s}$.
3. Pouze v kartézském souřadnicovém systému, tj. ve standardní bázi $\mathbb{R}^n$, je $\vec{A} = A_1\vec{e}_1 + A_2\vec{e}_2 + \ldots + A_n\vec{e}_n$, tedy
$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial\vec{e}_i} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot\vec{e}_i = (A_1,\dots,A_n)\cdot\vec{e}_i = A_i.$$

<u>*Důsledek 1.1*</u>: věty (1.5) Diferenciál funkce f v bodě $\mathbf{x}$ (v kartézském souřadnicovém vyjádření) můžeme psát ve tvaru

$$df(\mathbf{x},\vec{h}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}dx_n\,, \quad \vec{h} = d\mathbf{x}\,.$$

Například diferenciál funkce $f(x,y) = xy^2$ má tvar

$$df(\mathbf{x},(dx,dy)) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x}dx + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y}dy = y^2\,dx + 2xy\,dy\,.$$

<u>*Příklad 1.9*</u>: Uvedeme funkci, která má v bodě $[0,0]$ parciální derivace, ale není v tomto bodě spojitá:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & xy = 0\,. \\ 1 & xy \neq 0\,. \end{cases}$$

Potom $\lim\limits_{[x,y]\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje, avšak existují limity

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{f(0+h_1,0) - f(0,0)}{h_1} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = 0\,,$$

$$\lim_{h_2\to 0}\frac{f(0,0+h_2) - f(0,0)}{h_2} = \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = 0\,.$$

<u>*Příklad 1.10*</u>: Funkce, která má parciální derivace v celém $\mathbb{R}^2$, ale je v bodě $[0,0]$ nespojitá:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2 > 0\,, \\ 0 & x^2+y^2 = 0\,. \end{cases}$$

Podobně jako v předcházejícím příkladě z definice vypočteme $f_x(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$, $f_y(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$; avšak $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$ neexistuje, neboť $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}$.

<u>*Příklad 1.11*</u>: Funkce, která má parciální derivace v celém $\mathbb{R}^2$, je spojitá v $\mathbb{R}^2$ (viz příklad (1.6),3.), ale není diferencovatelná v bodě $[0,0]$:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 > 0\,, \\ 0 & x^2+y^2 = 0\,. \end{cases}$$

Potom platí

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x} = f_x(0,0) = 0\,, \qquad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y} = f_y(0,0) = 0$$

(na osách je funkce f nulová).

Pokud by funkce f byla diferencovatelná v počátku, pak pro vektor $\vec{h}$ s dostatečně malou normou musí platit

$f([0,0]+(h_1,h_2)) - f(0,0) = 0\cdot h_1 + 0\cdot h_2 + \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2+h_2^2} = \omega(\vec{h})$

a $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0\,.$

Avšak limita $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \lim\limits_{[h_1,h_2]\to[0,0]} \frac{h_1 h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,(h_1^2+h_2^2)}$ neexistuje, tedy funkce f není diferencovatelná v počátku.

Věta 1.6 : (postačující podmínka diferencovatelnosti)
Nechť funkce f má v okolí $U(\mathbf{x}_0)$ bodu $\mathbf{x}_0$ parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$. Jsou-li tyto parciální derivace spojité v bodě $\mathbf{x}_0$, potom je funkce f diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$.

Na příkladech jsme ukázali, že existence parciálních derivací není v $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ ekvivalentní diferencovatelnosti. Ekvivalence je platná pouze v $\mathbb{R}$ (věta 7.2, MA1).

Důkaz : Pro jednoduchost se omezíme na funkci dvou proměnných, tedy $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]$. Volíme vektor $\vec{h}$ tak, aby $\mathbf{x}_0 + \vec{h} \in U(\mathbf{x}_0)$, potom funkce $f(x, y_0)$ proměnné x je spojitá na intervalu $\langle x_0, x_0+h_1\rangle$ a derivovatelná na intervalu (x_0, x_0+h_1). Podle Lagrangeovy věty o střední hodnotě (věta 7.7, MA1) potom $\exists\,\vartheta_1 \in (0,1)$ takové, že platí

$$f(x_0+h_1, y_0) - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0+\vartheta_1 h_1, y_0)h_1\,,$$

a podobně $\exists\,\vartheta_2 \in (0,1)$ takové, že platí

$$f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0+h_1, y_0) = f'_y(x_0+h_1, y_0+\vartheta_2 h_2)h_2\,.$$

Pro diferenci $\Delta f(x_0, y_0, h_1, h_2) = \Delta f$ funkce f tedy máme

$$\begin{aligned}\Delta f &= f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0, y_0)\\ &= f(x_0+h_1, y_0+h_2) - f(x_0+h_1, y_0) + f(x_0+h_1, y_0) - f(x_0, y_0)\\ &= f'_y(x_0+h_1, y_0+\vartheta_2 h_2)h_2 + f'_x(x_0+\vartheta_1 h_1, y_0)h_1\,.\end{aligned}$$

Označíme-li

$$\begin{aligned}\omega_1(h_1,h_2) &= f'_x(x_0+\vartheta_1 h_1, y_0) - f'_x(x_0, y_0),\\ \omega_2(h_1,h_2) &= f'_y(x_0+h_1, y_0+\vartheta_2 h_2) - f'_y(x_0, y_0)\,,\end{aligned}$$

pak diferenci Δf můžeme psát ve tvaru

$$\Delta f = f'_x(x_0,y_0)h_1 + f'_y(x_0,y_0)h_2 + \underbrace{\omega_1 h_1 + \omega_2 h_2}_{\omega(\vec{h})}\,.$$

Zbývá dokázat rovnost $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$. Platí

$\left|\frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}\right| = \left|\frac{\omega_1 h_1 + \omega_2 h_2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}\right| \le |\omega_1 + \omega_2| \le |f'_x(x_0 + \vartheta_1 h_1, y_0) - f'_x(x_0, y_0)| + |f'_y(x_0 + h_1, y_0 + \vartheta_2 h_2) - f'_y(x_0, y_0)| \to 0$,

kde platnost limitního přechodu pro $\|\vec{h}\| \to 0$ vyplývá ze spojitosti parciálních derivací v bodě $[x_0, y_0]$.

Tedy funkce f je v bodě $[x_0, y_0]$ diferencovatelná.

Pozor, obrácené tvrzení k větě (1.6) neplatí. Funkce $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x} & x \ne 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ je diferencovatelná v počátku, její parciální derivace podle x však zde není spojitá.

Věta 1.7 : (algebra diferenciálu a gradientu)
Nechť funkce f, g jsou diferencovatelné na množině Ω a pro body $\mathbf{x} \in \Omega$ označíme $df = df(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$, $dg = dg(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \operatorname{grad} g(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$, potom na Ω platí

$$\begin{array}{ll} d(cf) = c\,df\,, & \operatorname{grad}(cf) = c \operatorname{grad} f\,, \\ d(f \pm g) = df \pm dg\,, & \operatorname{grad}(f \pm g) = \operatorname{grad} f \pm \operatorname{grad} g\,, \\ d(fg) = g\,df + f\,dg\,, & \operatorname{grad}(fg) = g \operatorname{grad} f + f \operatorname{grad} g\,, \\ d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g\,df - f\,dg}{g^2}\,, & \operatorname{grad}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g}{g^2}\,, \quad g(\mathbf{x}) \ne 0\,. \end{array}$$

<u>Důkaz</u> : Je podobný jako u funkcí jedné proměnné. (MA1, věta 7.3)

Celou větu (1.8) lze formulovat a dokázat pro složenou funkci $f(\vec{u}(\mathbf{x})) = f(u_1, \dots, u_m)$. Potom $\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$.

Také hovoříme o "řetězovém pravidlu".

Věta 1.8 : (diferenciál a derivace složené funkce)
Nechť funkce $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ jsou diferencovatelné v bodě $[x_0, y_0]$ a funkce $f(u,v)$ je diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0]$, kde $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Potom složená funkce $f(u(x,y), v(x,y))$ je diferencovatelná v $[x_0, y_0]$ a platí (v bodě $[x_0, y_0]$)

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv \\ &= \frac{\partial f}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dx + \frac{\partial u}{\partial y}\,dy\right) + \frac{\partial f}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\,dx + \frac{\partial v}{\partial y}\,dy\right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial x}} dx + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial y}} dy\,. \end{aligned}$$

<u>*Příklad 1.12*</u> : Funkce $u(x,y) = -2xy$, $v(x,y) = x + y$ jsou diferencovatelné na $\mathbb{R}^2$ a funkce $f(u,v) = u + v^2$ je také diferencovatelná na $\mathbb{R}^2$.

Pro diferenciál složené funkce $f(u(x,y),v(x,y))$ tedy na $\mathbb{R}^2$ platí

$$\begin{aligned} df &= 1\,du + 2v\,dv \\ &= 1\,[(-2y)\,dx - 2x\,dy] + 2(x+y)(dx+dy) \\ &= 2x\,dx + 2y\,dy\,. \end{aligned}$$

Zároveň $f(u(x,y),v(x,y)) = -2xy + (x+y)^2 = x^2+y^2$, tedy $df = 2x\,dx + 2y\,dy$.

Při přechodu k polárním souřadnicím $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ má jednotkový vektor ve "směru r" tvar $\vec{\bar{e}}_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ a pro jednotkový vektor ve "směru φ" platí $\vec{\bar{e}}_2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$.

Matice přechodu M od báze $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ k bázi $\vec{\bar{e}}_1, \vec{\bar{e}}_2$ má tedy tvar $M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Nyní vyjádříme gradient funkce $f = f(x,y)$ v novém souřadném systému, tedy

$$\left(\tfrac{\partial f}{\partial x}, \tfrac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \left(\tfrac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \tfrac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi,\ \tfrac{\partial f}{\partial x}(-\sin\varphi) + \tfrac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi\right).$$

Zároveň z diferenciálu složené funkce plyne $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$ a $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\varphi$.

Porovnáním dostaneme pro gradient funkce f v polárních souřadnicích

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right).$$

<u>*Příklad 1.13*</u> : (derivace paraboloidu podél kružnice)

Nechť $f(x,y) = x^2+y^2$ a $x(r,t) = r\cos t$, $y(r,t) = r\sin t$.

Potom $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{df}{dx}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{df}{dy}\dfrac{dy}{dt} = 2x(-r\sin t) + 2y(r\cos t) = 2r^2(-\cos t\sin t + \sin t\cos t) = 0$.

Věta 1.9 : (vlastnosti gradientu)
Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}$.

i) Položíme-li $\vec{z} = \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{x})}{\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|}$, tedy $\|\vec{z}\| = 1$, potom platí $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec{z}} = \max\limits_{\|\vec{s}\|=1} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec{s}}$, $\vec{s}$ je libovolný vektor (změna funkce ve směru gradientu je největší).

ii) Vektor $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) (\neq \vec{o})$ je kolmý k tečné varietě (přímka, rovina, ...) hladiny $H = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$ v bodě $\mathbf{x}_0$.

<u>Důkaz</u> :

i) Z věty (1.5) plyne $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec{s}} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \vec{s}$. Z Cauchy – Schwarzovy nerovnosti dostaneme pro $\|\vec{s}\| = 1$ vztah

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec{s}} \le \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\| \cdot \|\vec{s}\| = \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|\,.$$

Zároveň pro vektor $\vec{z}$ platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec{z}}(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{x})}{\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|} = \|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|\,.$$

Odtud plyne první tvrzení věty.

ii) Pro jednoduchost volíme funkci $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$. Hladinu $H=\{[x,y]\in\mathbb{R}^2 : f(x,y)=C)\}$ popíšeme parametricky $x=x(t), y=y(t)$. Tedy $f(x(t),y(t))=C$. Funkci f budeme nyní derivovat podle proměnné t (podél hladiny H). Potom platí

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\operatorname{grad} f\cdot\left(\frac{\partial x}{\partial t},\frac{\partial y}{\partial t}\right)=0\,.$$

Odtud je vidět, že tečný vektor $(\frac{dx}{dt},\frac{dy}{dt})$ k hladině je kolmý ke $\operatorname{grad} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Příklad 1.14 : Máme k funkci $f(x,y)=x^3-y^2$, bodu $B=[1,2]$ a vektoru $\vec{v}=(3,4)$ určit směr největšího růstu v bodě B a derivaci podle vektoru $\vec{v}$.

Směr největšího růstu funkce f v bodě B je dán vektorem $\operatorname{grad} f(1,2)=(3x^2\,,\,-2y)_{[1,2]}=(3,-4)$.

Pro derivace podle vektoru $\vec{v}$ platí
$\frac{\partial f(1,2)}{\partial\vec{v}}=\operatorname{grad} f(1,2)\cdot\vec{v}=(3,-4)\cdot(3,4)=0\,.$
Vidíme, že vektor $\vec{v}=(3,4)$ je tečný vektor k hladině
$H=\{[x,y]:x^3-y^2=-3\}$ v bodě $B=[1,2]$.

Libovolný vektor $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ tečné nadroviny k hladině je kolmý k vektoru $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$.

Pro $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ má tečná nadrovina k hladině (tj. přímka) tvar $f'_x(x-x_0)+f'_y(y-y_0)=0$ a tečná nadrovina ke grafu funkce (tj. rovina) má tvar $u-u_0=f'_x(x-x_0)+f'_y(y-y_0)$.

Definice 1.12 : (tečné lineární variety)
Graf lineární funkce $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ dané předpisem

$$u(\mathbf{x})=\vec{a}\cdot\mathbf{x}+d=a_1x_1+\cdots+a_nx_n+d\,,\quad \text{kde } \vec{a}\in\mathbb{R}^n,\ d\in\mathbb{R}\,.$$

se nazývá **nadrovina** v $\mathbb{R}^{n+1}$ a prochází-li bodem $[\mathbf{x}_0,u_0]$, pak lze vyjádřit pomocí rovnice

$$u-u_0=\vec{a}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=a_1(x_1-x_{01})+\cdots+a_n(x_n-x_{0n})\,.$$

Nechť funkce $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$, $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\neq\vec{o}$, potom

1. **tečná nadrovina k hladině** $H=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x}_0)\}$ funkce f procházející bodem $\mathbf{x}_0$ má rovnici
$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)=0\,.$$
2. **tečná nadrovina ke grafu funkce** $u=f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ v bodě grafu $[\mathbf{x}_0,u_0]\in\mathbb{R}^{n+1}$, kde $u_0=f(\mathbf{x}_0)$, je dána rovnicí
$$u-u_0=\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\,.$$

<u>*Poznámka 1.1*</u>: Graf funkce $u = f(\mathbf{x})$ je vlastně nulovou hladinou funkce $g(\mathbf{x}, u) = f(\mathbf{x}) - u = 0$.
Tečná nadrovina k hladině funkce g v bodě $[\mathbf{x}_0, u_0]$ má tedy tvar $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}_0) \cdot ([\mathbf{x}, u] - [\mathbf{x}_0, u_0]) = 0$ a odtud dostaneme $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - 1(u - u_0) = 0$.

<u>*Příklad 1.15*</u>: Je dána funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Hladiny této funkce jsou kulové plochy, které leží v $\mathbb{R}^3$; graf funkce f leží v $\mathbb{R}^4$. Hladina procházející bodem $[x_0, y_0, z_0]$ má rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = u_0$, $\quad u_0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$.

Tečná rovina k této hladině v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ má rovnici

$$a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0) = 0\,, \quad \vec{a} = \operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)\,,$$

tj.

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0\,.$$

Tečná nadrovina ke grafu této funkce leží v $\mathbb{R}^4$ a má rovnici

$$u - u_0 = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0)\,.$$

<u>*Cvičení 1.3*</u>: Ke grafu funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v $\mathbb{R}^2$ určete rovnici tečné roviny (v $\mathbb{R}^3$) v bodě $B = [1, 2, ?]$.
[$B = [1, 2, f(1, 2)] = [1, 2, 5]$, $\operatorname{grad} f(1, 2) = (2x, 2y)_{[1,2]} = (2, 4) \quad \Rightarrow$ tečná rovina je $\quad u - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)$.]

Definice 1.13 : (směr růstu, poklesu)
Vektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$, $(\|\vec{s}\| = 1)$ se nazývá **směrem růstu (poklesu)** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$, jestliže

$$\exists\, \delta > 0 : \; f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s}) > (<) f(\mathbf{x}_0), \quad \forall\, t \in (0, \delta)\,,$$

tj. ve směru $\vec{s}$ se hodnota funkce f zvětšuje (zmenšuje).

Věta 1.10 : (směr růstu, poklesu diferencovatelné funkce)
Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$. Vektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$, je **směrem růstu (poklesu)** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$, jestliže

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{s} > 0 \qquad (\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{s} < 0)\,.$$

(Tedy vektory $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$ a $\vec{s}$ svírají ostrý (tupý) úhel.)

<u>*Příklad 1.16*</u>: Určete, zda vektor $\vec{s} = (1, 3)$ je směrem růstu(poklesu) funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $B = [1, 1]$.
Protože $\operatorname{grad} f(1, 1) \cdot \vec{s} = (2, 2) \cdot (1, 3) = 8 > 0$, tak vektor $\vec{s}$ je směrem růstu funkce f v bodě B.

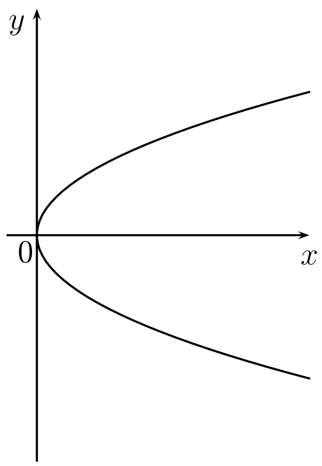
1.5 Řešitelnost funkcionálních rovnic

Motivační příklady:

1. Řešíme-li diferenciální rovnici $(2x+y)\,dx+(x+2y)\,dy=0$, pak dostaneme funkcionální rovnici $x^2+xy+y^2-C=0$.

   Kdy a kde existuje řešení uvedené funkcionální rovnice ?

$y^2 - x = 0$



2. Řešením rovnice $y^2-x=0$ jsou např. funkce

   $$y=\sqrt{x}\,,\quad y=-\sqrt{x}\,,\quad x\geq 0$$

   (množiny dvojic $(x,\sqrt{x})$, $(x,-\sqrt{x})$).
   Pro $x<0$ není rovnice řešitelná v $\mathbb{R}$ (neexistuje reálná funkce $y=f(x)$, která by splňovala rovnici).
   Pro $x\geq 0$ je rovnice řešitelná, má dvě spojitá řešení a nekonečně mnoho nespojitých řešení.
   Pro $x\geq 0$, $y\geq 0$ je rovnice řešitelná jednoznačně, tj. mezi nezápornými funkcemi existuje jediné řešení.

Při popisu řešení rovnice $F(\mathbf{x},y)=0$ vlastně zkoumáme "nulovou" hladinu funkce $F(\mathbf{x},y)$.

Definice 1.14 : (řešení funkcionální rovnice)
Mějme funkci $F(\mathbf{x},y):\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ a uvažujeme rovnici o $n+1$ neznámých $F(\mathbf{x},y)=0$. Funkce $y=y(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}\in\Omega$ se nazývá **globálním řešením** této rovnice, jestliže

$$\forall\,\mathbf{x}\in\Omega:\quad F(\mathbf{x},y(\mathbf{x}))=0\,.$$

Jestliže $\forall\,\mathbf{x}\in U(\mathbf{x}_0)\subset\Omega:\ F(\mathbf{x},y(\mathbf{x}))=0$, pak $y=y(\mathbf{x})$ se nazývá **lokálním řešením** dané rovnice.

Při tom nás zajímá:
1. Jak zaručíme **existenci** řešení rovnice.
2. Jak zaručíme **existenci jediného** řešení.
3. Jaké jsou vlastnosti řešení (**spojitost**, **diferencovatelnost**).

Funkce $y=f(\mathbf{x})$, se také nazývá **implicitní řešení** rovnice $F(\mathbf{x},y)=0$.

Věta 1.11 : (o globální řešitelnosti)
Předpokládáme, že funkce $F(x,y)$ je definována na obdélníku $\langle a,b\rangle\times\langle c,d\,\rangle\subset\mathbb{R}^2$ a pro každé pevné $x_0\in\langle a,b\rangle$ je funkce $F(x_0,y)$ spojitá v proměnné y. Jestliže platí

$$F(x,c)\cdot F(x,d)\leq 0\quad\forall x\in\langle a,b\rangle\,,$$

potom existuje alespoň jedna funkce $y=y(x)$ definovaná na $\langle a,b\rangle$ taková, že je řešením rovnice $F(x,y)=0$, tj. platí

$$F(x,y(x))=0\quad\forall x\in\langle a,b\rangle\,.$$

Důkaz : Nechť $x_0 \in \langle a, b\rangle$ je libovolné, ale pevné, pak funkce $h(y) = F(x_0, y)$ je spojitá na $\langle c, d\rangle$ a splňuje podmínku $h(c)\cdot h(d) \le 0$. Podle věty 6.6 z MA1 existuje alespoň jedno číslo y_0 takové, že platí

$$h(y_0) = 0\,, \quad \text{tj.} \quad F(x_0, y_0) = 0\,.$$

Tímto způsobem ke každému $x \in \langle a, b\rangle$ určíme $y \in \langle c, b\rangle$, neboli existuje alespoň jedna funkce $y = y(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$, která splňuje rovnici $F(x, y) = 0 \;\; \forall x \in \langle a, b\rangle$.

Předchozí věta zaručuje pouze existenci globálního řešení, nikoliv jednoznačnost (může existovat další funkce $\overline{y} = \overline{y}(x)$, která je řešením). Jednoznačnost zaručíme jistou podmínkou monotonie.

Věta 1.12 : (o lokální řešitelnosti, o implicitní funkci)
Předpokládáme, že:

1. funkce $F = F(x, y)$ je definovaná a spojitá na nějakém okolí $U([x_0, y_0])$ bodu $[x_0, y_0]$,
2. je splněna rovnost $F(x_0, y_0) = 0$,
3. funkce $F_y = \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}$ je definovaná na okolí $U([x_0, y_0])$, spojitá v bodě $[x_0, y_0]$ a $\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Potom:

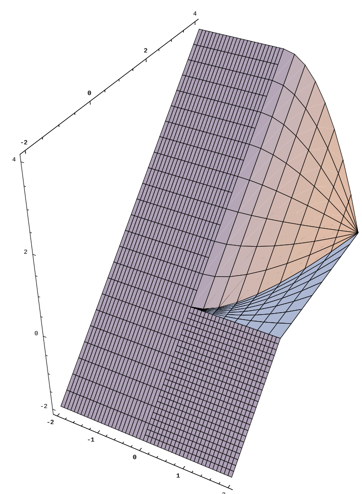
a) existuje okolí I bodu x_0 a existuje funkce $y = y(x)$ definovaná na I;

b) tato funkce $y = y(x)$ je jediným (lokálním) řešením rovnice $F(x, y) = 0$ na I, tj. $F(x, y(x)) = 0 \;\; \forall x \in I$;

c) funkce $y = y(x)$ je spojitá na I a splňuje podmínku $y_0 = y(x_0)$.

Nutnost spojitosti parciální derivace F_y ilustruje příklad funkce $F(x, y) =$

$$\begin{cases} y - x^2 & y - x^2 \ge 0,\\ & x \ge 0 \wedge y \ge 0\\ 0 & y - x^2 \le 0,\\ & x \ge 0 \wedge y \ge 0\\ y & x \le 0 \vee y \le 0, \end{cases}$$



která je diferencovatelná v bodě $[0, 0]$, ale na okolí počátku neexistuje právě jedno řešení $y = y(x)$ rovnice $F(x, y) = 0$.

Důkaz :

Nechť $F_y(x_0, y_0) = \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y} > 0$ (pro $F_y(x_0, y_0) < 0$ je důkaz podobný). Ze spojitosti funkce F_y plyne, že existuje okolí $\tilde{U}([x_0, y_0])$ bodu $[x_0, y_0]$, ve kterém je $F_y[x, y] > 0$ (plyne z věty (1.4) 2.) . Volíme $y_1 < y_0 < y_2$ tak, že $[x_0, y_1], [x_0, y_2] \in \tilde{U}([x_0, y_0])$. Protože $F_y > 0$, tak funkce $F(x, y)$ je rostoucí funkcí v proměnné y na $\tilde{U}([x_0, y_0])$. Zároveň $F[x_0, y_0] = 0$, tedy $F(x_0, y_1) < 0$ a $F(x_0, y_2) > 0$.

Ze spojitosti funkcí $F(x, y_1)$, $F(x, y_2)$ plyne, že existuje otevřený interval I obsahující x_0, ve kterém $F(x, y_1) < 0$ a $F(x, y_2) > 0$ pro každé $x \in I \subset \tilde{U}([x_0, y_0])$.

Tedy funkce F je spojitá na $I \times \langle y_1, y_2 \rangle$ rostoucí v proměnné y a $F(x, y_1) \cdot F(x, y_2) < 0$. Z předchozí věty (1.11) a monotonie v y vyplývá, že ke každému $x \in I$ existuje právě jedno $y(x)$ takové, že $F(x, y(x)) = 0$.

Nyní dokážeme, že tato funkce $y = y(x)$ je na intervalu I spojitá.

Nechť $x_n \to \overline{x} \subset I$. Ukážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} y(x_n) = y(\overline{x})$. Víme, že $y_1 < y_n = y(x_n) < y_2$ pro každé n. Předpokládejme pro spor, že $y_n \not\to \overline{y} = y(\overline{x})$, potom

i) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \tilde{y} \neq \overline{y}$. V tomto případě ze spojitosti funkce F na okolí bodu $[x_0, y_0]$ plyne $0 = F(x_n, y_n) \to F(\overline{x}, \tilde{y}) = 0$, což je však spor s již dokázanou jednoznačností nulového bodu $\overline{y}$, který odpovídá $\overline{x} \in I$ $(F(\overline{x}, \overline{y}) = 0)$.

ii) nebo $\limsup y_n > \liminf y_n$. Z definice supréma vyplývá, že existuje vybraná posloupnost $\{y_{n_k}\}$ z posloupnosti $\{y_n\}$ taková, že $y_{n_k} \to y_s = \limsup y_n$. Zároveň $F(x_{n_k}, y_{n_k}) = 0$, tedy opět ze spojitosti funkce F plyne $F(\overline{x}, y_s) = 0$. Podobně dostaneme rovnost $F(\overline{x}, y_i) = 0$, kde $y_i = \liminf y_n$. To je znovu spor s jednoznačností bodu $\overline{y}$.

Věta 1.13 : (O derivaci řešení)
Jsou-li splněny všechny předpoklady věty (1.12) o funkci $F(x, y)$ a navíc funkce $F(x, y)$ je diferencovatelná v bodě $[x_0, y_0]$ (nebo jsou-li F_x, F_y spojité v bodě $[x_0, y_0]$), potom lokální řešení $y = y(x)$ rovnice $F(x, y) = 0$ je funkce diferencovatelná v bodě x_0 a platí

$$y'(x_0) = -\frac{F_x[x_0, y_0]}{F_y[x_0, y_0]}.$$

<u>Důkaz</u> : Víme, že existuje interval I obsahující bod x_0 a funkce $y = y(x)$ definovaná na I tak, že $F(x, y(x)) = 0$

$\forall x \in I$, funkce $y = y(x)$ je spojitá na I a splňuje podmínku $y_0 = y(x_0)$.

Z diferencovatelnosti funkce $F(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$ vyplývá

$0 = F(x, y(x)) - F(x_0, y_0) = F_x(x_0, y_0)h_1 + F_y(x_0, y_0)h_2 + \omega(\vec{h})$; $\quad \frac{\omega(\vec{h})}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \to 0$, $\quad \vec{h} = (h_1, h_2) = (x - x_0, y(x) - y_0)$.

Vydělíme uvedenou rovnost $\|\vec{h}\|$ a upravíme

$$0 = F_x(x_0, y_0)\frac{h_1}{\|\vec{h}\|} + F_y(x_0, y_0)\frac{h_2}{\|\vec{h}\|} + \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} =$$

$$F_x(x_0, y_0)\frac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} + F_y(x_0, y_0)\frac{y-y_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} + \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} =$$

$$F_x(x_0, y_0)\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)^2}} + F_y(x_0, y_0)\frac{\frac{y-y_0}{x-x_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)^2}} + \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}.$$

Ze spojitost funkce $y = y(x)$ plyne, když $x - x_0 = h_1 \to 0$, pak $h_2 = y(x) - y(x_0) \to 0$ a také $\|\vec{h}\| \to 0$.

Nyní budeme pro spor předpokládat, že $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{y-y_0}{x-x_0} = \pm\infty$, pak z předchozí rovnosti limitním přechodem pro $x \to x_0$ dostaneme $0 = F_y(x_0, y_0)$, což je spor s předpokladem.

Opět upravíme poslední rovnost do tvaru

$$0 = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)^2}} \left(F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)\,\frac{y-y_0}{x-x_0}\right) + \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|},$$

a limitním přechodem pro $x \to x_0$ dostaneme

$$0 = \lim_{x \to x_0} \left(F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)\,\frac{y-y_0}{x-x_0}\right)$$
$$= F_x(x_0, y_0) + F_y(x_0, y_0)\,y'(x_0).$$

Odtud již plyne tvrzení věty.

Poznámka 1.2: Věty (1.11), (1.12), (1.13) jsou speciální případy tzv. **věty o implicitní funkci**. Implicitní funkcí se obvykle nazývá funkce, kterou my zde označujeme jako lokální řešení funkcionální rovnice. Vzorec $F_x + F_y\,y' = 0$ z věty (1.13) se také často nazývá vzorcem pro "implicitní derivování".

Příklad 1.17: Rovnice $x - y^2 = 0$ v okolí bodu $[0,0]$ nemá podle věty (1.16) zaručenou jednoznačnou (lokální) řešitelnost, neboť $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y|_{[0,0]} = 0$. V okolí bodu $[0,0]$ má daná rovnice dvě řešení $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$.

V bodě $[1,1]$ je $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y\Big|_{[1,1]} \neq 0$ a úloha má jedno řešení $y = \sqrt{x}$ a její derivaci v bodě $x_0 = 1$ lze stanovit z rovnice $1 - 2y \cdot y' = 0$, tj. $y'(1) = \frac{x}{2y}\Big|_{[1,1]} = \frac{1}{2}$.

Naše předchozí úvahy můžeme rozšířit i na rovnici o větším počtu neznámých nebo na soustavu rovnic o větším počtu neznámých. To je obsahem následující věty, kterou uvedeme bez důkazu.

Věta 1.14 : (Obecná věta o lokální řešitelnosti)
Předpokládejme, že

1. funkce $F = F(\mathbf{x}, y) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ je diferencovatelná v bodě $[\mathbf{x}_0, y_0] \in \mathbb{R}^{n+1}$ a v jeho okolí;
2. platí $F(\mathbf{x}_0, y_0) = 0$;
3. funkce $F_y(\mathbf{x}, y)$ ($n+1$ proměnných) je spojitá a nenulová v bodě $[\mathbf{x}_0, y_0]$.

Potom platí:

a) existuje okolí $U(\mathbf{x}_0)$ bodu $\mathbf{x}_0$, okolí $U(y_0)$ bodu $y_0 \in \mathbb{R}$ a funkce $y = y(\mathbf{x})$ definovaná v okolí $U(\mathbf{x}_0)$,

b) funkce $y = y(\mathbf{x})$ je jediným řešením rovnice $F(\mathbf{x}, y) = 0$ v okolí $U(\mathbf{x}_0)$, tj. platí $F(\mathbf{x}, y(\mathbf{x})) = 0 \quad \forall\ \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$, $y(\mathbf{x}) \in U(y_0)$,

c) tato funkce je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$ a platí

$$\begin{aligned} y_0 &= y(\mathbf{x}_0)\,, \\ \frac{\partial y(\mathbf{x})}{\partial x_i} &= -\frac{F_{x_i}(\mathbf{x}_0, y_0)}{F_y(\mathbf{x}_0, y_0)}\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,. \end{aligned}$$

Příklad 1.18: Mějme rovnici $xy + xz + yz - 11 = 0$. Posuďme řešitelnost této rovnice v okolí bodu $M = [1,2,3]$. Funkce $F(x,y,z) = xy + xz + yz - 11$ je diferencovatelná podle všech proměnných (tj. v $\mathbb{R}^3$) a $F_y = x + z$, $F_z = x + y$. Dále je $F_z(M) = 3 \neq 0$, a tedy v okolí bodu M existuje jediné řešení $z = f(x,y)$ dané rovnice, toto řešení je diferencovatelné a platí

$$z_x(1,2) = \frac{\partial z(1,2)}{\partial x} = -\frac{F_x(M)}{F_z(M)} = -\frac{y+z}{x+y}\bigg|_M = -\frac{5}{3}\,,$$
$$z_y(1,2) = \frac{\partial z(1,2)}{\partial y} = -\frac{F_y(M)}{F_z(M)} = -\frac{x+z}{x+y}\bigg|_M = -\frac{4}{3}\,.$$

V tomto případě řešení rovnice můžeme stanovit explicitně: $z = \frac{11-xy}{x+y}$ a příslušné derivace pak vypočítat derivováním.

<u>*Příklad 1.19*</u>: (Nejednoznačná řešitelnost funkcionálních rovnic)

Věty (1.11) – (1.14) uvádí podmínky jednoznačné řešitelnosti rovnic $F(x,y) = 0$, resp. $F(\mathbf{x}, y) = 0$.

V aplikacích nás však často zajímají takové body (tzv. **singulární body rovnice**) $[\overline{x}, \overline{y}] \in \mathbb{R}^2$, v nichž platí

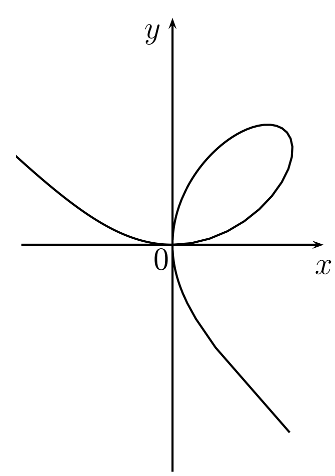
$$F(\overline{x},\overline{y}) = 0\,, \quad F_x(\overline{x},\overline{y}) = 0\,, \quad F_y(\overline{x},\overline{y}) = 0\,.$$

V tomto případě si pomůžeme parametrizací a hledáme dvojici funkcí (křivku) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in I$ splňující podmínky

$$\forall\, t \in I:\ F(x(t), y(t)) = 0\,,$$
$$\exists\, \overline{t} \in I:\ \overline{x} = x(\overline{t})\,,\ \overline{y} = y(\overline{t}) \quad \text{(křivka prochází bodem } \overline{x}, \overline{y}\text{)}.$$

Je zřejmé, že v okolí singulárních bodů rovnice nemusí být zmíněná křivka grafem žádné funkce typu $y = f(x)$, resp. $x = \varphi(y)$.

$x^3 + y^3 - 3xy = 0$



Bod $[\overline{x}, \overline{y}] = [0,0]$ je singulárním bodem rovnice

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0\,, \quad a > 0\,.$$

Zde

$$x(t) = \frac{3at}{1+t^3}\,, \quad y(t) = \frac{3at^2}{1+t^3}\,, \quad t \neq -1,\ \ \overline{t} = 0\,.$$

Křivka se nazývá Descartův list. V okolí bodu $[0,0]$ má daná rovnice čtyři řešení.

Zde poznamenejme, že neumíme poskytnout obecnou metodu, jak k dané rovnici stanovit uvedenou dvojici parametrických funkcí. Geometricky řečeno jde o problém, jak nejvhodněji parametrizovat křivku, která je dána rovnicí.

1.6 Derivace a diferenciály vyšších řádů. Taylorova věta.

Poznamenejme, že existence parciálních derivací funkce f na okolí bodu $\mathbf{x}_0$ nezaručuje spojitost funkce f na tomto okolí, viz příklad 1.10.

Věta 1.15 : (věta o střední hodnotě)

i) (Složková verze). Nechť funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je spojitá v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a na nějakém okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ bodu $\mathbf{x}_0 = [x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}]$ existují parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Potom pro každý bod $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$, $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ existují $\xi_i \in (x_{0i}, x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ tak, že platí formule

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \; & \frac{\partial f(\xi_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1}\,(x_1 - x_{01}) + \\ & \frac{\partial f(x_{01}, \xi_2, x_3, \dots, x_n)}{\partial x_2}\,(x_2 - x_{02}) + \\ & \dots + \frac{\partial f(x_{01}, x_{02}, \dots, \xi_n)}{\partial x_n}\,(x_n - x_{0n})\,. \end{aligned}$$

ii) (Vektorová verze). Nechť funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, která obsahuje body $\mathbf{x}_t = \mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, $0 \le t \le 1$. Potom existuje $\tau \in (0, 1)$ takové, že platí

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0 + \tau(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\,.$$

Důkaz :

a) (pro jednoduchost je uveden pro funkci 2 proměnných:) Z existence parciálních derivací funkce $f = f(x, y)$ vyplývá, že ve směru os lze použít Lagrangeovu větu o střední hodnotě z MA1 (věta 7.7). Potom

$$\begin{aligned} f(x,y) - f(x_0,y_0) &= (f(x,y) - f(x_0,y)) + (f(x_0,y) - f(x_0,y_0)) \\ &= \frac{\partial f(\xi_1, y)}{\partial x}\,(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, \xi_2)}{\partial y}\,(y - y_0)\,. \end{aligned}$$

b) Označíme $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$, $t \in \langle 0, 1\rangle$. Z předpokladu plyne, že funkce $g(t)$ je spojitá na $\langle 0, 1\rangle$ a diferencovatelná na $(0, 1)$. Proto existuje $\tau \in (0, 1)$ tak, že

$$g(1) - g(0) = g'(\tau)(1 - 0)\,.$$

Zároveň platí $g(1) = f(\mathbf{x})$, $g(0) = f(\mathbf{x}_0)$ a

$$\begin{aligned} g'(\tau) &= \lim_{t\to\tau} \tfrac{f(\mathbf{x}_0+t(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))-f(\mathbf{x}_0+\tau(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{t-\tau} \qquad (t-\tau=r) \\ &= \lim_{r\to 0} \tfrac{f(\mathbf{x}_0+\tau(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)+r(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))-f(\mathbf{x}_0+\tau(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{r} \text{ (z definice)} \\ &= \tfrac{\partial f(\mathbf{x}_0+\tau(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))}{\partial(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} \quad \text{(z věty (1.5))} \\ &= \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0+\tau(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0))\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)\,. \end{aligned}$$

Odtud již plyne tvrzení b) věty.

Definice 1.15 : (druhá parciální derivace)
Nechť funkce $f:\Omega\to\mathbb{R}$ má parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ v okolí $U(\mathbf{x}_0)\subset\Omega$. Existuje-li, pak se následující limita

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0+t\vec{e}_j)}{\partial x_i}-\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\bigg|_{\mathbf{x}_0},$$

nazývá **druhá parciální derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$.**
Značíme

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)\bigg|_{\mathbf{x}_0}=\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j\partial x_i}\,.$$

Podobně definujeme vyšší parciální derivace, např.

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}\right)\bigg|_{\mathbf{x}_0}=\frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_k\partial x_j\partial x_i}\,.$$

Nechť funkce f je diferencovatelná na okolí $U(\mathbf{x}_0)$. Je-li každá z funkcí $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$, $i=1,2,\dots,n$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$, říkáme, že funkce f je v bodě $\mathbf{x}_0$ **dvakrát diferencovatelná.**

Jestliže je funkce f dvakrát diferencovatelná, pak existují diferenciály jejich parciálních derivací a tedy existují i druhé parciální derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$.

Věta 1.16 : (záměnnost parciálních derivací)
Je-li funkce f dvakrát diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$, potom

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j\partial x_i}\,,\qquad i,j=1,2,\dots,n\,;$$

tj. druhé derivace jsou záměnné.

U funkcí, které nejsou dvakrát diferencovatelné, nemusí platit záměnnost smíšených parciálních derivací. Například pro funkci

$$f=\begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & [x,y]\neq[0,0] \\ 0 & [x,y]=[0,0] \end{cases}$$

neplatí věta 1.16 v počátku.

Důkaz : Pro jednoduchost provedeme důkaz pouze pro funkci dvou proměnných $f=f(x,y)$. Položíme $\mathbf{x}_0=[x_0,y_0]$, zvolíme $h\in\mathbb{R}$ tak, že $[x_0+h,y_0+h]\in U(\mathbf{x}_0)$ a definujeme

$$F(h)=\tfrac{1}{h^2}\big[f(x_0+h,y_0+h)-f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0+h)+f(x_0,y_0)\big]\,.$$

Označíme $\frac{\partial f}{\partial x} = f_x\,,\ \frac{\partial f}{\partial y} = f_y\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{xy}\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{yx}\,.$ Z předpokladu existence parciálních derivací funkce f na okolí $U(\mathbf{x}_0)$ a věty (1.15) (o střední hodnotě) plyne existence čísla $\tau_x \in (0,1)$ takového, že

$$F(h) = \tfrac{1}{h}\big[f_x(x_0 + \tau_x h, y_0 + h) - f_x(x_0 + \tau_x h, y_0)\big]\,.$$

Z diferencovatelnosti parciálních derivací funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ vyplývá

Pro "malé $o(h)$" platí

$$\lim_{h\to 0} \frac{o(h)}{h} = 0\,.$$

$$f_x(x_0 + \tau_x h, y_0 + h) - f_x(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)\tau_x h + f_{yx}(x_0, y_0) h + o(h)\,.$$

$$f_x(x_0 + \tau_x h, y_0) - f_x(x_0, y_0) = f_{xx}(x_0, y_0)\tau_x h + o(h)\,.$$

Tedy

$$F(h) = f_{yx}(x_0, y_0) + \tfrac{o(h)}{h} \to f_{yx}(x_0, y_0)\,.$$

Analogicky dostaneme

$$F(h) = \tfrac{1}{h^2}\big[f(x_0+h, y_0+h) - f(x_0, y_0+h) - f(x_0+h, y_0) + f(x_0, y_0)\big]$$

$$= \tfrac{1}{h}\big[f_y(x_0 + h, y_0 + \tau_y h) - f_y(x_0, y_0 + \tau_y h)\big] \to f_{xy}(x_0, y_0)\,.$$

Neboli

$$f_{yx}(x_0, y_0) = f_{xy}(x_0, y_0)\,.$$

Příklad 1.20 : Funkce $f(x, y) = x^2 y$ má parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy\,, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

a pro smíšené parciální derivace platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x\,.$$

Věta 1.17 : Nechť funkce f je diferencovatelná na okolí $U(\mathbf{x}_0)$. Jsou-li parciální derivace $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}\,,\ i, j = 1, 2, \ldots, n$ spojité v bodě $\mathbf{x}_0$, pak funkce f je dvakrát diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$.

Důkaz : Ze spojitosti druhých parciálních derivací a věty 1.6 plyne diferencovatelnost prvních parciálních derivací funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$, tedy funkce f je dvakrát diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$.

Definice 1.16 : (druhý diferenciál)
Předpokládejme, že funkce f má v bodech $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$ diferenciál $df(\mathbf{x},\vec{h}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \vec{h}$. Pro pevné $\vec{h}$ je $df(\mathbf{x},\vec{h}) : U(\mathbf{x}_0) \to \mathbb{R}$ funkcí $\mathbf{x}$. Diferenciál funkce $df(\mathbf{x},\vec{h})$ (proměnné $\mathbf{x}$) v bodě $\mathbf{x}_0$ opět vzhledem k $\vec{h}$ se nazývá **druhým diferenciálem funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$** a značí se

$$d(df(\mathbf{x},\vec{h}))|_{\mathbf{x}_0} = d^2 f(\mathbf{x}_0,\vec{h}) \; ; \quad \vec{h} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) \, .$$

Platí

$$df(\mathbf{x},\vec{h}) - df(\mathbf{x}_0,\vec{h}) = d^2 f(\mathbf{x}_0,\vec{h}) + \omega(\vec{h}) \, , \qquad \lim_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} \to 0 \, .$$

Diferenciál k-tého řádu definujeme rekurentně

$$d(d^{k-1} f(\mathbf{x},\vec{h})) = d^k f(\mathbf{x},\vec{h}) \, .$$

Pro dvakrát diferencovatelnou funkci f dostaneme

$$\begin{aligned} d^2 f(\mathbf{x},\vec{h}) &= d(df(\mathbf{x},\vec{h})) = d(\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \vec{h}) = \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right) h_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right) h_i h_j = \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i \Big) h_j \, . \end{aligned}$$

U dvakrát diferencovatelné funkce f existují diferenciály parciálních derivací, tedy i gradientu a proto i diferenciál diferenciálu.

Takže

$$d^2 f(\mathbf{x},\vec{h}) = \vec{h} \cdot \mathbb{H}(\mathbf{x}) \cdot \vec{h}^T \, ,$$

kde $\mathbb{H}(\mathbf{x})$ je **Hessova matice** s prvky $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.
Druhý diferenciál je kvadratická forma v proměnné $\vec{h}$.

V maticové symbolice je $\vec{h}^T = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$.

<u>*Příklad 1.21*</u> : Pro funkci $f(x,y) = x^2 + xy$ je

$$df = (y+2x)\, dx + x\, dy = (y+2x, x)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(y+2x)\, dx + d(x)\, dy = (2\, dx + 1\, dy)\, dx + (1\, dx + 0\, dy)\, dy \\ &= \big(2\, dx + 1\, dy, 1\, dx + 0\, dy\big)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= \left((dx,dy)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, (dx,dy)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= (dx,dy)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = 2\, dx^2 + 2\, dxdy + 0\, dy^2 \, . \end{aligned}$$

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Pro funkci dvou proměnných platí
$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$.

Při výpočtu Hessovy matice, si můžeme pomoci pravidlem "gradient na gradient", tedy
$\mathbb{H} = \operatorname{grad}^T(\operatorname{grad} f) = \Big(\operatorname{grad}^T(\frac{\partial f}{\partial x}) \; \operatorname{grad}^T(\frac{\partial f}{\partial y})\Big) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) & \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) & \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) \end{pmatrix}$.

Formální pravidlo pro výpočet diferenciálu vyššího řádu funkce $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\, dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\, dx_n\right)^k f\,.$$

Pro funkci dvou proměnných platí $d^3 f =$ $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x \partial y} dx^2 dy +$ $+3\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial^2 y} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$.

Druhá derivace ve směrech $\vec{s}$, $\vec{r}$

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \vec{r}\,\partial \vec{s}} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left[\operatorname{grad} f(\mathbf{x} + t\vec{r})\vec{s}^{\,T} - \operatorname{grad} f(\mathbf{x})\vec{s}^{\,T}\right] = \vec{r} \cdot \mathbb{H}(\mathbf{x}) \cdot \vec{s}^{\,T}\,.$$

Německý matematik Ludwig Otto Hesse Hesse (1811-1874).

se věnoval především studiu algebraických rovnic a teorii invariantů.

Věta 1.18 : (Taylorova věta)
Nechť funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je v okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ bodu $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ $(k+1)$-krát diferencovatelná. Potom pro každé $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$ položíme $\vec{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ a **Taylorův rozvoj** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ je dán vztahem

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) + \frac{d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h})}{2!} + \cdots + \frac{d^k f(\mathbf{x}_0, \vec{h})}{k!} + R_{k+1}(\mathbf{x}_0, \vec{h}),$$

kde

$$R_{k+1}(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(\mathbf{x}_0 + \vartheta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \vec{h}), \quad 0 < \vartheta < 1\,.$$

Důkaz : Položíme $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0))$. Vyjádříme jednotlivé derivace funkce g pomocí funkce f:

Poznamenejme, že derivace funkce g v bodě 0 je vlastně derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ podle vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$, viz definice 1.10.

$$g'(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(t) - g(0)}{t} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}, \vec{h})\,,$$

$$g'(t) = \lim_{\xi\to t} \frac{g(\xi) - g(t)}{\xi - t} = \lim_{\xi\to t} \frac{f(\mathbf{x}_0 + \xi\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h})}{\xi - t} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h}) \cdot \vec{h},$$

$$g''(0) = \lim_{t\to 0} \frac{g'(t) - g'(0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{grad}\left[f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0)\right]}{t} \cdot \vec{h}$$

$$= \left(\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial(f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0))}{\partial x_1}\right), \cdots, \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left(\frac{\partial(f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0))}{\partial x_n}\right)\right) \cdot \vec{h}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} h_1 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} h_n, \cdots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} h_1 + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} h_n\right) \cdot \vec{h}$$

$$= \vec{h} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix} \cdot \vec{h}^T = \vec{h} \cdot \mathbb{H}(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{h}^T$$

$$= d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h})\,.$$

Analogicky postupujeme při výpočtu $g''(t)$, $g'''(t)\cdots$. Protože funkce f je $(k+1)$-krát diferencovatelná, pak i funkce g je $(k+1)$-krát diferencovatelná a z Taylorova rozvoje (MA1 věta 7.9) funkce jedné reálné proměnné dostaneme

$$g(t)-g(0)=\frac{g'(0)}{1!}t+\frac{g''(0)}{2!}t^2+\cdots+\frac{g^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}t^{k+1},\ \xi\in(0,t)\,.$$

Odtud a z rovnosti $g(1)-g(0)=f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)$ plyne tvrzení věty.

Příklad 1.22 : Taylorův rozvoj funkce $f(x,y)=x$ v bodě $\mathbf{x}_0=[x_0,y_0]$ pro $k=1$ je dán vztahy:

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+R_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{x}),$$

$$R_2(\mathbf{x}_0,\mathbf{x})=\frac{1}{2!}\Big(\frac{\partial^2 f(\xi_0,\eta_0)}{\partial x^2}(x-x_0)^2+2\frac{\partial^2 f(\xi_0,\eta_0)}{\partial x\partial y}(x-x_0)(y-y_0)$$
$$+\frac{\partial^2 f(\xi_0,\eta_0)}{\partial y^2}(y-y_0)^2\Big),\qquad \xi_0\in(x_0,x)\,;\ \eta_0\in(y_0,y).$$

Tedy $\quad x-x_0=1\cdot(x-x_0)+0\,.$

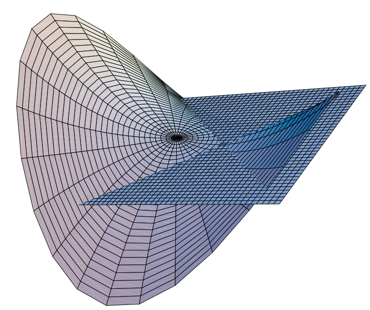
Taylorovu formuli používáme pro **aproximaci** diference $\Delta f=f(\mathbf{x})-f(\mathbf{x}_0)$ pomocí diferenciálů.

Příklad 1.23 : Pro funkci $f(x,y)=xy$ lze diferenci $\Delta f=xy-x_0y_0$ psát ve tvaru

$$\Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0)\ \approx\ \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\Delta y\,,$$
$$xy-x_0y_0\ \approx\ y_0\,\Delta x+x_0\,\Delta y$$

kde chyba aproximace je

$$R_2(x_0,y_0,x,y)\ =\ \Delta x\cdot\Delta y=(x-x_0)\cdot(y-y_0)\,.$$



Graf funkce $f(x,y)=xy$ s tečnou rovinou v bodě $[1,0]$.

2 Základní pojmy optimalizace v $\mathbb{R}^n$

2.1 Lokální a globální extrémy

Definice 2.1 : (Extrémy) Máme $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}\,,\ \mathbf{x}_0 \in \Omega\,.$
(A) Číslo $f(\mathbf{x}_0)$ se nazývá **lokální minimum (maximum)** funkce f, když existuje okolí $U(\mathbf{x}_0)$ bodu $\mathbf{x}_0$ takové, že platí

$$f(\mathbf{x}_0) \le f(\mathbf{x}) \quad (f(\mathbf{x}_0) \ge f(\mathbf{x})) \quad \forall\, \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \cap \Omega.$$

Bod $\mathbf{x}_0$ je pak **bod lokálního minima (maxima)** na množině $\Omega\,.$ Píšeme

$$f(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \cap \Omega} f(\mathbf{x}), \quad \big(f(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \cap \Omega} f(\mathbf{x})\big).$$

Pokud pro $\mathbf{x} \ne \mathbf{x}_0$ platí **ostré** nerovnosti, potom hovoříme o **ostrém (lokálním) minimu (maximu)**.
(B) Číslo $f(\mathbf{x}_0)$ se nazývá **globální minimum (maximum)** funkce f na Ω, platí-li

$$f(\mathbf{x}_0) \le f(\mathbf{x}) \quad (f(\mathbf{x}_0) \ge f(\mathbf{x})) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \Omega\,.$$

Píšeme

$$f(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x}), \quad \big(f(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x})\big).$$

Bod $\mathbf{x}_0$ je pak **bod globálního minima (maxima)** na množině $\Omega\,.$ Extrémem funkce f rozumíme maximum nebo minimum této funkce.

Pozor nulové parciální derivace neznamenají nulový diferenciál, např. funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \ne y \\ x & x = y \end{cases}$$

má parciální derivace v bodě $[0,0]$ rovny nule, ale není zde diferencovatelná, ani nenabývá v bodě $[0,0]$ extrému.

Věta 2.1 : (Nutná podmínka existence lokálního extrému) Nechť funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je v bodě $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ diferencovatelná (definice (1.2)) a má v tomto bodě lokální extrém. Potom

$$df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 0 \quad \forall\, \vec{h} \in \mathbb{R}^n\,, \quad (\Rightarrow \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0})\,.$$

<u>Důkaz</u> : (sporem)

Nechť $\exists\, \vec{h} \ne 0 \in \mathbb{R}^n$ takové, že $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) > 0\,.$

(Pro $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) < 0$ je důkaz podobný).

Tedy $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{h} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} > 0\,.$

Odtud vyplývá, že existuje $\delta > 0$ takové, že

$$f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) > 0 \quad \text{pro} \quad t \in (0, \delta)\,,$$
$$f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) < 0 \quad \text{pro} \quad t \in (-\delta, 0)\,,$$

což je spor s definicí extrému funkce f v bodě $\mathbf{x}_0\,.$

Definice 2.2 : (Stacionární bod)
Nechť f je diferencovatelná funkce v bodě $\mathbf{x}_0$. Bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ se nazývá **stacionární bod** diferencovatelné funkce f, když

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}\,.$$

Body, ve kterých diferenciál funkce neexistuje nebo je nulový, se nazývají **kritické** body funkce f (viz MA1 definice 7.4).

Příklad 2.1 :

Pro funkci $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$ máme $\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2 - 4\,,\ 4x_2 - 2x_1 - 6)\,.$

V bodě $[0, 0]$ určuje $\operatorname{grad} f(0, 0) = (-4, -6)$ směr největšího růstu funkce f a $-\operatorname{grad} f = (4, 6)$ určuje směr největšího poklesu. Například vektor $\vec{v} = (1, 0)$ určuje směr poklesu v bodě $[0, 0]$, neboť $\operatorname{grad} f \cdot \vec{v} = (-4, -6) \cdot (1, 0) = -4 < 0\,.$

Pro stacionární body platí

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 - 4 = 0 \\ 4x_2 - 2x_1 - 6 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{7}{3}, \\ x_2 &= \tfrac{8}{3}. \end{aligned}$$

Příklad 2.2 :

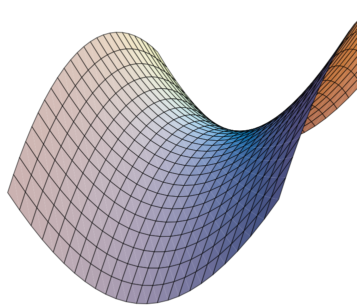
1. Pro funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$ je $\operatorname{grad} f = (2x, 2y)$ a bod $A = [0, 0]$ je stacionární bod. Bod A je bodem minima funkce f a všechny směry jsou v tomto bodě směry růstu.

   Pro druhý diferenciál funkce f platí:
   $d^2(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 2\,dx^2 + 2\,dy^2 > 0 \quad \forall\, \vec{h} = (dx, dy) \neq (0, 0)\,.$

2. Pro funkci $f(x, y) = x^2 - y^2$ je $\operatorname{grad} f = (2x, -2y)$ a opět bod $A = [0, 0]$ je stacionární bod funkce f. Na přímce $y = 0$ má funkce $f(x, 0) = x^2$ minimum v bodě $x = 0$ a na přímce $x = 0$ má funkce $f(0, y) = -y^2$ maximum v bodě $y = 0\,.$

   Pro druhý diferenciál funkce f nyní platí:
   $d^2(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 2\,dx^2 - 2\,dy^2\,.$ Odtud dostaneme
   $d^2(\mathbf{x}_0, (1, 0)) = 2 > 0\,,\ \ d^2(\mathbf{x}_0, (0, 1)) = -2 < 0\,.$

   Závěr: Stacionární bod $[0, 0]$ je ve směru $\vec{s} = (1, 0)$ bodem minima funkce f a ve směru $\vec{s} = (0, 1)$ je bodem maxima funkce f (bod $[0, 0]$ je tzv. **sedlový bod**).



Graf funkce $x^2 - y^2$.

Věta 2.2 : (Postačující podmínky existence lokálního extrému)
Nechť funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je dvakrát diferencovatelná ve vnitřním bodě $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ a $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 0 \;\; \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$. Jestliže

1. $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) > 0 \;\; \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n, \;\; \vec{h} \neq \vec{0}$,

   pak je v bodě $\mathbf{x}_0$ ostré lokální minimum;

2. $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) < 0 \;\; \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n, \;\; \vec{h} \neq \vec{0}$,

   pak je v bodě $\mathbf{x}_0$ ostré lokální maximum;

3. $\exists \vec{h}_1 \neq \vec{0} : d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_1) = 0$ a $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \geq 0$ nebo $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \leq 0 \;\; \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$,

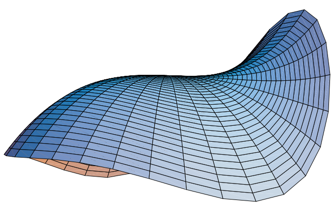
   pak (zatím) nemůžeme rozhodnout,

4. $\exists \vec{h}_1, \vec{h}_2 \in \mathbb{R}^n$:

   $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_2) < 0$, pak ve směru $\vec{h}_2$ je funkce konkávní (v $\mathbf{x}_0$ je maximum),

   $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_3) > 0$, pak ve směru $\vec{h}_3$ je funkce konvexní (v $\mathbf{x}_0$ je minimum),

   v bodě $\mathbf{x}_0$ nenastává extrém, ale $\mathbf{x}_0$ je **sedlový bod**.



Graf funkce $-x^2 + y^3$, která má stacionární bod $[0,0]$ a $d^2 f = -2\,dx^2 + 6y\,dy^2$. V bodě $[0,0]$ platí $d^2 f = -2\,dx^2 \leq 0$. Ve směru $\vec{h}_1 = (0,1)$ je $d^2 f([0,0],(0,1)) = 0$ a neumíme tedy podle věty 2.2 rozhodnout o typu extrému v bodě $[0,0]$.

Důkaz : Funkce f je dvakrát diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$, tedy podle definice (1.15) existuje okolí $U(\mathbf{x}_0)$, na kterém je funkce f diferencovatelná. Z věty (1.11) vyplývá pro $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \vec{h} \in U(\mathbf{x}_0)$ existence $\tau \in (0,1)$ takového, že

$$f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0 + \tau\vec{h}, \vec{h}) = \frac{1}{\tau}\, df(\mathbf{x}_0 + \tau\vec{h}, \tau\vec{h}) .$$

Zároveň z definice druhého diferenciálu dostaneme

$$df(\mathbf{x}_0 + \tau\vec{h}, \tau\vec{h}) - df(\mathbf{x}_0, \tau\vec{h}) = d^2 f(\mathbf{x}_0, \tau\vec{h}) + \omega(\tau\vec{h}), \qquad \frac{\omega(\tau\vec{h})}{\|\tau\vec{h}\|^2} \to 0.$$

Nyní využijeme předpokladu věty $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 0$ a rovnosti $d^2 f(\mathbf{x}_0, \tau\vec{h}) = \tau^2 d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h})$, tedy

$$f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \tau \left(d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) + \|\vec{h}\|^2 \frac{\omega(\tau\vec{h})}{\|\tau\vec{h}\|^2} \right)$$

$$= \tau\, \|\vec{h}\|^2 \left(d^2 f(\mathbf{x}_0, \tfrac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}) + \tilde{\omega}(\vec{h}) \right), \qquad \tilde{\omega}(\vec{h}) = \frac{\omega(\tau\vec{h})}{\|\tau\vec{h}\|^2}.$$

Protože druhý diferenciál $d^2 f(\mathbf{x}_0, \frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|})$ je spojitý v proměnné $\vec{h}$, nabývá podle věty (1.4) na kompaktní množině $M = \{\vec{v} : \|\vec{v}\| = 1\}$ (jednotková sféra) svého minima v nějakém vektoru $\vec{v}_0$. Odtud a z předpokladu $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) > 0$ máme $d^2 f(\mathbf{x}_0, \frac{\vec{h}}{\|\vec{h}\|}) \geq d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{v}_0) = A > 0$. Neboli

$$f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) \geq \tau \, \|\vec{h}\|^2 \big(A + \tilde{\omega}(\vec{h})\big) .$$

Pro dostatečně malé $\vec{h}$ je $A + \tilde{\omega}(\vec{h}) > 0$ ($\tilde{\omega}(\vec{h}) \to 0$), tedy $f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) > 0$ a v bodě $\mathbf{x}_0$ je ostré lokální minimum.

ad 2) Za předpokladu $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) < 0$ dospějeme analogickým způsobem k závěru, že v dostatečně malém okolí bodu $\mathbf{x}_0$ je $f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0)$ záporné a v bodě $\mathbf{x}_0$ je ostré lokální maximum.

Zbývající podmínky nejsou podmínkami pro extrém (a proto není co dokazovat), pouze logicky doplňují seznam znaménkových možností druhého diferenciálu.

Poznámka 2.1: Uvedeme ekvivalentní podmínky či ekvivalentní názvy příslušných vlastností zahrnutých v předpokladech věty (2.2). Platí $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \vec{h}\,\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)\vec{h}^T$

1. • kvadratická forma $\vec{h}\,\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)\vec{h}^T$ je **pozitivně definitní**,
   • matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ je pozitivně definitní,
   • všechny hlavní minory matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou kladné, tj.

   $$M_1 > 0,\ M_2 > 0,\ M_3 > 0,\ \ldots,$$

   • všechna vlastní čísla matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou kladná.

Pro druhý diferenciál funkce f platí: $\forall \vec{h} \neq \vec{0}$ je
$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) > 0 .$$

Hlavní minory matice $\mathbb{H}$ jsou determinanty čtvercových submatic, obsahujících levý horní roh $\mathbb{H}$.

2. • kvadratická forma $\vec{h}\,\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)\vec{h}^T$ je **negativně definitní**,
   • matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ je negativně definitní,
   • hlavní minory matice $\mathbb{H}(\mathbf{x})$ pravidelně střídají znaménka a první minor je záporný, tj.

   $$M_1 < 0,\ M_2 > 0,\ M_3 < 0,\ \ldots,$$

   • všechna vlastní čísla matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou záporná.

Pro druhý diferenciál funkce f platí: $\forall \vec{h} \neq \vec{0}$ je
$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) < 0 .$$

3. • kvadratická forma $\vec{h}\,\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)\vec{h}^T$ a matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou **pozitivně semidefinitní** nebo **negativně semidefinitní**,

Pro druhý diferenciál funkce f platí: $\forall \vec{h} \neq \vec{0}$ je
$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \leq 0$$
nebo
$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \geq 0$$
a $\exists\, \vec{h}_1 \neq \vec{0}$:
$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_1) = 0\,.$$

$\exists\, \vec{h}_2 \neq \vec{0}$:
$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_2) > 0$$
a $\exists\, \vec{h}_3 \neq \vec{0}$:
$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_3) < 0\,.$$

- alespoň jeden z hlavních minorů je nulový a platí

$$M_1 \geq 0,\ M_2 \geq 0,\ \ldots,\ \text{nebo } M_1 \leq 0,\ M_2 \geq 0,\ M_3 \leq 0,\ \ldots,$$

- vlastní čísla $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou nezáporná nebo nekladná, aspoň jedno je nulové.

4.
- kvadratická forma $\vec{h}\,\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)\vec{h}^T$ a matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou **indefinitní**,
- pro znaménka minorů nenastává ani jeden z předchozích případů,
- vlastní čísla matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou kladná i záporná.

Příklad 2.3 : Vyšetříme lokální extrémy funkce

$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2.$

Stacionární bod $\mathbf{x}_0$ určíme ze soustavy

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= 4\,, \\ -2x_1 + 4x_2 &= 6\,. \end{aligned}$$

Odtud

$$\mathbf{x}_0 = \left[\tfrac{7}{3}, \tfrac{8}{3}\right]\,, \quad \mathbb{H} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} M_1 &= 4 > 0\,, \\ M_2 &= 12 > 0\,. \end{aligned}$$

Hessova matice (a tedy i druhý diferenciál) je pozitivně definitní. Proto funkce f má v bodě $\mathbf{x}_0$ minimum:

$$\min f(x_1, x_2) = f\left(\tfrac{7}{3}, \tfrac{8}{3}\right) = -\tfrac{114}{9}\,.$$

Poznámka 2.2: Bod $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ je **sedlový bod** funkce $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, jestliže $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ a platí

$\exists\, \delta_1, \delta_2 > 0,\ \vec{h}_1, \vec{h}_2 \in \mathbb{R}^n\colon\ f(\mathbf{x}_0 + t_1\vec{h}_1) \leq f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}_0 + t_2\vec{h}_2),$ $\forall\, t_i \in (-\delta_i, \delta_i)\,,\ i = 1, 2\,.$

V prvním směru $\vec{h}_1$ nabývá funkce f maxima a v druhém směru $\vec{h}_2$ nabývá minima v bodě $\mathbf{x}_0$.

Příklad 2.4 : Vyšetříme stacionární body funkce

$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Vypočteme

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 6x\,, & -3 \\ -3\,, & 6y \end{pmatrix}.$$

Stac. bod	$\mathbb{H}$	Vlast. čísla	Typ $\mathbb{H}$	Typ bodu
$A = [0,0]$	$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3$ $\lambda_2 = -3$	indefinitní	sedlový
$B = [1,1]$	$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 9$ $\lambda_2 = 3$	pozitivně definitní	minimum

Všimneme si podrobněji druhého diferenciálu $d^2 f = \vec{h}\,\mathbb{H}\,\vec{h}^T = (h_1, h_2)\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = -6h_1h_2$ ve stacionárním bodě $A = [0,0]$. Zvolme $\vec{h} = (1,1)$ a uvažujeme danou funkci $f(x,y)$ na přímce $x = t,\ y = t$, tj. funkci $g(t) = f(t,t) = 2t^3 - 3t^2$. Protože $g''(0) = -6 < 0$, pak na dané přímce (tj. ve směru vektoru $\vec{h} = (1,1)$) nabývá funkce f maxima pro $t = 0$.
Zvolíme-li $\vec{h} = (1,-1)$, pak na přímce $x = t,\ y = -t$ nabývá funkce f svého minima ($g''(0) = 6 > 0$, kde $g(t) = f(t,-t) = 3t^2$) pro $t = 0$.

Příklad 2.5 : Vyšetříme stacionární body funkce f, kde $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$. Platí
$\operatorname{grad} f(x,y) = \big(4x^3 - 2(x+y)\,,\, 4y^3 - 2(x+y)\big)$,
$\mathbb{H}[x,y] = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$. Potom

Stac. bod	$\mathbb{H}$	Hlavní minory	Typ bodu
$[1,1]$	$\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$	$M_1 = 10 > 0$ $M_2 = 96 > 0$	bod minima
$[-1,-1]$	$\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$	$M_1 = 10 > 0$ $M_2 = 96 > 0$	bod minima
$[0,0]$	$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$	$M_1 = -2 < 0$ $M_2 = 0$	Podle věty (2.2) nelze rozhodnout

Vyšetříme funkci $f(x,y)$ v bodě $[0,0]$ na přímkách

a) $x = t,\ y = t : g(t) = f(t,t) = 2t^4 - 4t^2$; $g''(0) = -8 < 0$
maximum;

b) $x = -t,\ y = t : g(t) = f(-t,t) = 2t^4$; $g^{(4)}(0) = 48 > 0$
(první nenulová derivace v bodě $t = 0$ je sudá a kladná)
minimum.

Odtud je vidět, že bod $[0,0]$ je sedlovým bodem funkce f.

2.2 Extrémy vzhledem k podmnožině

Budeme vyšetřovat extrémy dané spojité funkce f v $\mathbb{R}^n$ na takových podmnožinách $V \subset \mathbb{R}^n$, které se dají charakterizovat systémem podmínek ve tvaru rovností nebo nerovností. Těmto podmínkám říkáme **vazbové podmínky** a množině V říkáme **množina přípustných bodů**.

Na fotbalové utkání prodáváme vstupenky na stání za cenu x a sezení za cenu y. Jejich prodejnost popisují funkce $p_1(x,y)$, $p_2(x,y)$, pro které platí z kapacitních důvodů omezení $0 \leq p_1(x,y) \leq S_1$, $0 \leq p_2(x,y) \leq S_2$. Našim úkolem je stanovit ceny x, y tak, abychom maximalizovali zisk, tedy vyřešit úlohu

$$\max_{[x,y]\in V} (p_{1(x,y)}x + p_{2(x,y)}y),$$

kde $V = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq p_1(x,y) \leq S_1, 0 \leq p_2(x,y) \leq S_2\}$.

Definice 2.3 : (Úlohy s vazbami)
Mějme funkci $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina.

(A) Mějme spojité funkce $h_j(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, $p < n$ a označme

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \cap \Omega : \; h_j(\mathbf{x}) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, p\}.$$

Úloha najít extrém funkce f na množině přípustných bodů V se nazývá **optimalizační úloha s vazbami typu rovnosti.**

(B) Mějme spojité funkce $g_i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ a označme

$$\widehat{V} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \; g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Úloha najít extrém funkce f na množině přípustných bodů $\widehat{V}$ se nazývá **optimalizační úloha s vazbami typu nerovnosti.**

Je-li přípustná množina V určena jak vazbami typu rovnosti, tak vazbami typu nerovnosti, hovoříme o **úloze se smíšenými vazbami** (**úloha optimálního řízení**).

Číslo $f(\mathbf{x}_0)$, ve kterém funkce f nabývá minima (maxima) vzhledem k množině V (viz definice (2.1)), se nazývá **lokální vázané minimum (maximum)** a $\mathbf{x}_0$ je **bodem lokálního vázaného minima (maxima)** (tedy extrému).

<u>*Příklad 2.6*</u> : Je dána funkce $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$. Určete extrém funkce f na jednorozměrné lineární varietě (přímce) $\mathbf{x} = t\vec{s}$, $\vec{s} = (1, 1)$.

řešení: Na přímce $x_1 = t$, $x_2 = t$ vyšetříme funkci $f(t,t) = g(t) = 2t^2 - 10t$. Pro $t = \frac{5}{2}$ je $g'\left(\frac{5}{2}\right) = 0$, $g''\left(\frac{5}{2}\right) = 4 > 0$. V bodě $\left[\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ nabývá funkce f tzv. **relativního minima** (minima vzhledem k dané varietě).

Poznámka 2.3: (řešitelnost optimalizační úlohy)
Jestliže množina $V \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní (omezená a uzavřená) a funkce f je spojitá na V, potom z věty (1.4) vyplývá, že úlohy na hledání extrému (optima) $\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V\}$, $\max\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V\}$ jsou řešitelné, tj. existuje jak $\min\limits_{\mathbf{x}\in V} f(\mathbf{x})$, tak $\max\limits_{\mathbf{x}\in V} f(\mathbf{x})$.

Příklad 2.7:

1) (optimalizační úloha s vazbami typu rovnosti)
Řešíme úlohu $\min\{f(x,y) : [x,y] \in V\}$, kde
$f(x,y) = x^2+y^2$ a přípustná množina V je dána předpisem
$V = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y + x - 1 = 0\}$.

"Geometrická metoda"

Řezem grafu funkce f rovinou rovnoběžnou s osou z procházející "přímkou V" je parabola.

V bodě $[x_0, y_0] = [0{,}5\,;\,0{,}5]$ je její minimum.

"Přechod k jedné proměnné"

Dosadíme $y = -x + 1$ do funkce f, dostaneme funkci jedné proměnné $f(x, y(x)) = x^2 + (-x+1)^2 = 2(x^2 - x + \frac{1}{2}) = 2((x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4})$. Tato funkce má minimum v bodě $x_0 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}$.

"Metoda gradientu"

"Přímka V" je nulovou hladinou funkce $h(x,y) = y + x - 1$. Gradient funkce h (pokud existuje), je "kolmý" k hladině V (přesněji k tečně hladiny V.)

Gradient funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ vázaného extrému vzhledem k množině V je také kolmý k V.

Oba gradienty jsou tedy lineárně závislé, nebo-li existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) + \lambda \operatorname{grad} h(x_0,y_0) = 0 \quad \wedge \quad h(x_0,y_0) = 0\,.$$

Konkrétně

$$\left.\begin{array}{l} 2\,x_0 + \lambda\cdot 1 = 0 \\ 2\,y_0 + \lambda\cdot 1 = 0 \\ y_0 + x_0 - 1 = 0 \end{array}\right\}\ x_0 = \frac{1}{2}\,,\ y_0 = \frac{1}{2}\,,\ \lambda = -1\,.$$

Tímto způsobem však získáme pouze bod, ve kterém může být extrém funkce f vzhledem k množině V.

2) (optimalizační úloha s vazbami typu nerovnosti)

Řešíme úlohu $\min\{f(x,y),\ [x,y] \in \widehat{V}\}$, kde $f(x,y) = x^2+y^2$; a přípustná množina $\widehat{V}$ je dána předpisem $\widehat{V} = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = y + x - 1 \le 0\}$.

Jestliže bod $[x_0, y_0]$ je vnitřní bod množiny $\widehat{V}$ a funkce f nabývá v tomto bodě extrému, pak podle věty (2.1) platí

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = 0$$

(pro diferencovatelnou funkci).

Jestliže bod $[x_0, y_0]$ je hraničním bodem množiny $\widehat{V}$ (neboli $g(x_0, y_0) = 0$) a funkce f nabývá v tomto bodě extrému vzhledem k její hranici $\partial\widehat{V}\,(= V)$, pak podle první části příkladu existuje $\widehat{\lambda} \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) + \widehat{\lambda}\operatorname{grad} g(x_0, y_0) = 0$$

(opět pro diferencovatelné funkce).

Obě předchozí podmínky můžeme najednou zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} \text{i)}\quad & \widehat{\lambda}\, g(x_0, y_0) = 0 \\ \text{ii)}\quad & \operatorname{grad} f(x_0, y_0) + \widehat{\lambda}\operatorname{grad} g(x_0, y_0) = 0\,. \end{aligned}$$

Konkrétně

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{\lambda}\cdot(x_0 + y_0 - 1) = 0 \\ &(2x_0, 2y_0) + \widehat{\lambda}\cdot(1,1) = (0,0) \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x_0 = \tfrac{1}{2}\,,\ y_0 = \tfrac{1}{2}\,,\ \widehat{\lambda} = -1 \\ &x_0 = 0\,,\ y_0 = 0\,,\ \widehat{\lambda} = 0\,. \end{aligned}$$

V bodě $[0,0]$ je zřejmě minimum funkce f vzhledem k množině $\widehat{V}$. V bodě $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ je minimum funkce f vzhledem k hranici množiny $\partial\widehat{V}$. Zbývá zjistit, zda je v tomto bodě extrém vzhledem k celé množině $\widehat{V}$.

Gradient funkce g směřuje ven z množiny $\widehat{V}$. Připomeňme, že gradient určuje směr největšího růstu funkce. Z rovnosti $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = -\widehat{\lambda}\, g(x_0, y_0)$ pak pro $\widehat{\lambda} < 0$ plyne, že funkce f "roste k hranici" množiny $\widehat{V}$ (na hranici může být maximum) a naopak pro $\widehat{\lambda} > 0$ klesá k hranici (může tam být minimum).

Konkrétně v našem příkladě je $\widehat{\lambda} = -1$, funkce f roste k hranici, ale na hranici $\partial\widehat{V}$ nabývá minima, tedy vzhledem k množině $\widehat{V}$ nemá funkce f v bodě $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ extrém.

Věta 2.3 : (Karushovy – Kuhnovy – Tuckerovy nutné podmínky vázaného extrému)

Nechť Ω je otevřená množina a funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je diferencovatelná na Ω.

i) Nechť $\mathbf{x}_0$ je bod vázaného lokálního extrému funkce f vzhledem k množině

$$V = \{\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : \ h_j(\mathbf{x}) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, p, \ \ p < n\},$$

kde $h_j(\mathbf{x})$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na Ω, a nechť vektory $\operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, jsou lineárně nezávislé. Potom $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$ je lineární kombinací vektorů $\operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, tj. **existují** reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ taková, že v bodě extrému platí

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0) = \vec{0}\,.$$

ii) Nechť $\mathbf{x}_0$ je bod lokálního vázaného extrému funkce f vzhledem k množině

$$\widehat{V} = \{\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, 2, \ldots, m\},$$

kde $g_i(\mathbf{x})$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na Ω.

Nechť $I = \{i : g_i(\mathbf{x}_0) = 0\}$ je množina indexů těch vazeb, ve kterých v bodě $\mathbf{x}_0$ nastává rovnost (tzv. **aktivní vazba**), a nechť vektory $\operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0)$, $i \in I$, jsou lineárně nezávislé. Potom existují čísla $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \ldots, \widehat{\lambda}_m$ taková, že v bodě extrému $\mathbf{x}_0$ platí:

a) $\widehat{\lambda}_i\, g_i(\mathbf{x}_0) = 0$, $\quad \widehat{\lambda}_i \geq 0$ pro minimum, $i = 1, 2, \ldots, m$

$\widehat{\lambda}_i \leq 0$ pro maximum, $i = 1, 2, \ldots, m$

b) $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \sum\limits_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i \operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0) = \vec{0}\,.$

Důkaz : i) Omezíme se na funkce $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$.

Nechť (x_0, y_0) je bod vázaného extrému funkce f s vazbou $h(x,y) = 0$. Z předpokladu $\operatorname{grad} h(x_0,y_0) \neq 0$ plyne $\frac{\partial h(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$ nebo $\frac{\partial h(x_0,y_0)}{\partial x} \neq 0$.

Předpokládejme, že $\frac{\partial h(x_0,y_0)}{\partial y} \neq 0$ (pro $\frac{\partial h(x_0,y_0)}{\partial x} \neq 0$ je důkaz podobný). Pak rovnice $h(x,y) = 0$ je podle věty (1.17) v okolí bodu $[x_0, y_0]$ jednoznačně řešitelná a existuje diferencovatelná funkce $y = y(x)$, pro kterou $h(x, y(x)) = 0$, $y_0 = y(x_0)$. Odtud plyne

$$\frac{dh(x,y(x))}{dx}(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial h(x_0,y_0)}{\partial x} + \frac{\partial h(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{dy(x_0)}{dx} = 0\,.$$

V bodě vázaného extrému x_0 funkce f musí platit (nutná podmínka extrému funkce jedné proměnné x)

$$\frac{df(x,y(x))}{dx}(x_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\frac{dy(x_0)}{dx} = 0\,.$$

Z posledních dvou vztahů dostaneme (pro $f_y = 0$ je $f_x = 0$ a $\widehat{\lambda} = 0$)

$$-\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)} = -\frac{h_x(x_0,y_0)}{h_y(x_0,y_0)}\,.$$

Odtud vyplývá, že existuje konstanta $\widehat{\lambda}$ taková, že platí $f_x + \widehat{\lambda}\, h_x = 0\,,\ \ f_y + \widehat{\lambda}\, h_y = 0\,,$ neboli

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) + \widehat{\lambda} \operatorname{grad} h(x_0,y_0) = 0\,.$$

ii) Pro bod $\mathbf{x}_0 \in \operatorname{int} \widehat{V}$ je nutná podmínka extrému funkce f $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = 0$ (věta 2.1), tudíž pro $\widehat{\lambda}_i = 0$ jsou podmínky a), b) splněny.

Pro $\mathbf{x}_0 \in \partial\widehat{V}$ dostaneme z první části důkazu této věty podmínku b) $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \sum\limits_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i \operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0) = \vec{0}\,.$

Pokud je v bodě $\mathbf{x}_0$ minimum (pro maximum je důkaz podobný) funkce f vzhledem k množině $\widehat{V}$, potom $\exists\, U(\mathbf{x}_0)\, \forall\, \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \cap \widehat{V} : f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$.

Odtud vyplývá pro derivaci podle vektoru $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ nerovnost $0 \leq \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0)} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$. Spolu s podmínkou b) dostaneme $\sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i \operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \le 0.$

Pro neaktivní vazby $(i \notin I, g_i(\mathbf{x}_0) \neq 0)$ položíme $\widehat{\lambda}_i = 0$.

Pro aktivní vazby volíme $\mathbf{x} \in \partial\widehat{V}$ tak, že $\exists\, k \in I : g_k(\mathbf{x}) < 0 \wedge g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i \in I, i \neq k,$ (jednu vazbu vynecháme). Protože hranice množiny $\widehat{V}$ je tvořena nulovými hladinami funkcí g_i, platí podle druhé části věty (1.9) rovnosti

$\operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = 0,\ i \neq k$. Odtud a z předchozí nerovnosti plyne $\widehat{\lambda}_k \operatorname{grad} g_k(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) \le 0$.

Protože $g_k(\mathbf{x}) < 0 \wedge g_k(\mathbf{x}_0) = 0$, tak $\operatorname{grad} g_k(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) < 0$, tedy $\widehat{\lambda}_k \ge 0$. (Pro $\operatorname{grad} g_k(\mathbf{x}_0)\,(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) = 0$, dostaneme lineární závislost vektorů $\operatorname{grad} g_k(\mathbf{x}_0), \operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0), i \neq k$, což je ve sporu s předpokladem.)

__Příklad 2.8__: Najděte extrém funkce $f(x,y) = x^2+y^2$ vzhledem k přípustné množině V, která je určená podmínkou $h(x,y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$.

"Geometricky"

Hladiny funkce f jsou kružnice se středem v počátku a přípustná množina V je elipsa se středem v počátku.

V bodech $[-2,0]$, $[2,0]$ má funkce f maximum vzhledem k množině V.

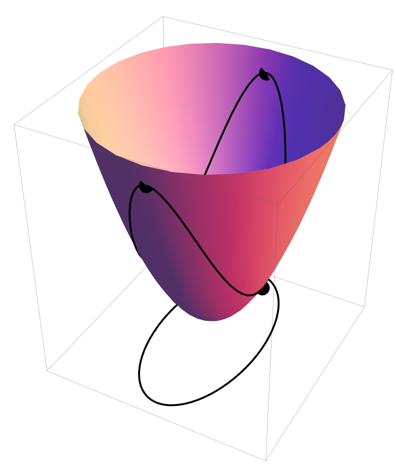
V bodech $[0,-1]$, $[0,1]$ má funkce f minimum vzhledem k množině V.

"Přechod k jedné proměnné"

Položíme $x = 2\cos t,\ y = \sin t,\ t \in \langle 0, 2\pi)$.

Potom $f(t) = 4\cos^2 t + \sin^2 t,\ f'(t) = -3\sin 2t,\ f'(t) = 0$ pro $t_1 = 0,\ t_2 = \frac{\pi}{2},\ t_3 = \pi,\ t_4 = \frac{3\pi}{2}$.

Zároveň $f''(0) = f''(\pi) = -12 < 0 \Rightarrow$ maximum a $f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2}) = 12 > 0 \Rightarrow$ minimum.



"Kuhnovy – Tuckerovy nutné podmínky"

V bodě $[x,y]$ vázaného extrému funkce f musí platit

$\operatorname{grad} f(x,y) + \lambda \operatorname{grad} h(x,y) = 0 \ \wedge\ h(x,y) = 0$. Tedy

$$\left.\begin{aligned} 2x + \lambda\,\tfrac{x}{2} &= 0 \\ 2y + \lambda\,2y &= 0 \\ \tfrac{x^2}{4} + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x = 0\,,\ y = \pm 1\,,\ \lambda = -1\,, \\ &y = 0\,,\ x = \pm 2\,,\ \lambda = -4\,. \end{aligned}$$

Poslední metodou jsme získali (ne vždy všechny) body, ve kterých může být extrém funkce f vzhledem k množině V. Pomocí následující metody se pokusíme rozhodnout, zda v daných bodech je vázané maximum nebo minimum funkce f .

Metoda Lagrangeovy funkce

Tato metoda je velmi univerzální a řada je- jích modifikací se využívá v mnoha numerických metodách. Samotná Lagrangeova funkce je základem tzv. teorie duality.

Základní myšlenka metody spočívá v tom, že se pro optimalizační úlohu sestrojí pomocná Lagrangeova funkce tak, že nutné podmínky minima pro úlohu s vazbami (věta (2.4) se stanou podmínkami stacionárního bodu Lagrangeovy funkce.

Pro úlohu z předchozího příkladu definujeme Lagrangeovu funkci vztahem

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\, h(x, y)\,.$$

Koeficient λ se nazývá **Langrangeův multiplikátor**. Pro body $[x, y] \in V$ platí $L(x, y, \lambda) = f(x, y)$, to znamená, že funkce L , f mají stejné extrémy vzhledem k množině V.

Pro stacionární bod $[x, y, \lambda]$ Lagrangeovy funkce L platí $\operatorname{grad} L(x, y, \lambda) = \vec{0}$, tedy

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda\,\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\,\frac{\partial h}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \operatorname{grad} f + \lambda \operatorname{grad} h = 0\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = h(x, y) = 0\,,$$

což odpovídá nutným podmínkám vázaného extrému.

Nyní budeme předpokládat, že funkce f, h jsou dvakrát diferencovatelná a odvodíme vztah pro druhý diferenciál Lagrangeovy funkce.

$$
\begin{aligned}
d^2L = \ & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\,dy^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}}_{=0}\,d\lambda^2 \\
& +2\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}\,dx\,d\lambda + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}\,dy\,d\lambda\right) \\
= \ & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2 \\
& +\lambda\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\,dy^2\right) \\
& +2\underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\,dx + \frac{\partial h}{\partial y}\,dy\right)}_{=dh=0 \text{ vazba}}\,d\lambda \\
= \ & d^2 f + \lambda\,d^2 h\,.
\end{aligned}
$$

Druhý diferenciál Lagrangeovy funkce můžeme vypočítat i postupně $d^2L = d(dL) = d(L_x dx + L_y dy + L_\lambda d\lambda) = d\,(\,f_x\,dx + f_y\,dy + \lambda\,(\,h_x\,dx + h_y\,dy\,) + h\,d\lambda) = d^2 f + \lambda\,d^2 h\,.$

<u>*Příklad 2.9*</u>: Vrátíme se k předchozímu příkladu (2.8), kde hledáme extrém funkce $f(x,y) = x^2 + y^2$ vzhledem k přípustné množině $V = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\,;\ \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0\}$.

Druhý diferenciál Lagrangeové funkce je dán vztahem

$d^2L = 2\,dx^2 + 2\,dy^2 + \lambda\,(\frac{1}{2}\,dx^2 + 2\,dy^2)$

a vazbová podmínka je $dh = \frac{x}{2}\,dx + 2y\,dy = 0$.

Ve stacionárních bodech Lagrangeové funkce platí

$[0,\pm 1]\,,\ \lambda = -1$	stac. body	$[\pm 2, 0]\,,\ \lambda = -4$
$dy = 0$	vazba	$dx = 0$
$d^2L = \frac{3}{2}\,dx^2 > 0$	$(dx,dy) \neq \vec{0}$	$d^2L = -6\,dy^2 < 0$
minimum	typ extrému	maximum

Poznamenejme, že v bodech $[\pm 2, 0]$ je maximum funkce f i vzhledem k množině $\widehat{V} = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2\,;\ \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \leq 0\}$, neboť funkce f směrem k hranici $\partial\widehat{V}$ roste ($\lambda = -4 < 0$).

Naopak v bodech $[0,\pm 1]$ není extrém funkce f vzhledem k množině $\widehat{V}$.

<u>*Poznámka 2.4*</u>: V úlohách s vazbami najdeme metodou Lagrangeovy funkce body, v nichž může nastat extrém (vycházíme z nutných podmínek). Na příkladu (2.9) jsme ukázali, že postačující podmínky lze získat z druhého diferenciálu Lagrangeovy funkce.

Věta 2.4 : (postačující podmínky vázaného extrému)

Nechť funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

i) Nechť funkce $h_j : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, $p < n$ mají spojité parciální derivace na Ω a jsou dvakrát diferencovatelné v bodě $\mathbf{x}_0 \in V$, kde

$$V = \{\mathbf{x} \in \Omega : \; h_j(\mathbf{x}) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, p, \;\; p < n\}.$$

Dále existují reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ taková, že v bodě $\mathbf{x}_0 \in V$ platí $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0) = \vec{0}$.

Nechť vektory $\operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0)$ jsou lineárně nezávislé a pro každý nenulový vektor $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ takový, že $\operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, p$, platí

$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \, d\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \, d^2 h_j(\mathbf{x}_0, \, d\mathbf{x}) > 0 \; (< 0).$$

Potom $\mathbf{x}_0$ je bod ostrého (lokálního) minima (maxima) funkce f vzhledem k množině V.

V bodě $\mathbf{x}_0$ jsou tedy splněny nutné podmínky vázaného lokálního extrému funkce f vzhledem k množině V, viz věta (2.3).

Je-li druhý diferenciál Lagrangeovy funkce $d^2L(\mathbf{x}_0, \lambda, d\mathbf{x})$ indefinitní v bodě $\mathbf{x}_0$, pak funkce f nemá v tomto bodě extrém vzhledem k přípustné množině V.

ii) Nechť funkce $g_i : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, mají spojité parciální derivace na Ω a jsou dvakrát diferencovatelné v bodě $\mathbf{x}_0 \in \widehat{V}$, kde

$$\widehat{V} = \{\mathbf{x} \in \Omega : g_i(\mathbf{x}) \le 0, \; i = 1, 2, \ldots, m\}$$

Nechť existují čísla $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \ldots, \widehat{\lambda}_m$ taková, že v bodě $\mathbf{x}_0$ platí:

$$\widehat{\lambda}_i \, g_i(\mathbf{x}_0) = 0 \qquad \wedge \quad \widehat{\lambda}_i \ge 0 \;\; (\widehat{\lambda}_i \le 0), \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i \operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0) = \vec{0}.$$

Dále nechť $I = \{i : g_i(\mathbf{x}_0) = 0\}$ a vektory $\operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0)$, $i \in I$ jsou lineárně nezávislé. Navíc nechť pro každý nenulový vektor $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ takový, že
$\operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} = 0$, pro $i \in I$, pro které $\widehat{\lambda}_i > 0 \;\; (\widehat{\lambda}_i < 0)$,
$\operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} \le 0$, pro ostatní indexy $i \in I$ (tj. $\widehat{\lambda}_i = 0$),
platí

$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \, d\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \widehat{\lambda}_i \, d^2 g_i(\mathbf{x}_0, \, d\mathbf{x}) > 0 \; (< 0).$$

Potom $\mathbf{x}_0$ je bod ostrého (lokálního) minima (maxima) funkce f vzhledem k množině $\widehat{V}$.

Pokud $\lambda_i > 0$, potom nás zajímá, zda je minimum funkce f na hranici $\partial\widehat{V}$, tj. $\operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0) \, d\mathbf{x} = 0$.

<u>Důkaz</u> : i) Pro jednoduchost předpokládáme $f, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a $V = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : h(x,y) = 0\}$. Z důkazu věty (2.3) víme, že množina V je v okolí bodu $[x_0, y_0]$ tvořena grafem funkce $y : U(x_0) \to \mathbb{R}$, pro kterou $h(x, y(x)) = 0$.

Označíme $F(x) = f(x, y(x))$, potom $\frac{dF}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}$ a $\frac{d^2F}{dx^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}\frac{dy^2}{dx^2} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{d^2y}{dx^2}$, odtud $d^2F = d^2f + \frac{\partial f}{\partial y}d^2y$.

Podobně označíme $H(x) = h(x, y(x))$ a na V dostaneme $H = dH = d^2H = 0$, tedy $d^2H = d^2h + \frac{\partial h}{\partial y}\, d^2y = 0$ a také

$d^2F = d^2F + \lambda d^2H = d^2f + \lambda d^2h + \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \lambda\frac{\partial h}{\partial y}\right)d^2y$.

Z nutné podmínky extrému plyne $f_x + \lambda h_x = 0$, $f_y + \lambda h_y = 0$ a odtud $d^2F = d^2f + \lambda d^2h$. Z postačující podmínky minima (maxima) pro funkci jedné proměnné $\frac{d^2F}{dx^2} > (<)\, 0$ dostaneme postačující podmínky vázaného minima (maxima)

$$d^2f([x_0, y_0], (dx, dy)) + \lambda d^2h([x_0, y_0], (dx, dy)) > (<)\, 0$$

pro vektory $(dx, dy) \neq \vec{0}$ splňující

$$dH([x_0, y_0], (dx, dy)) = \operatorname{grad} h(x_0, y_0)(dx, dy) = 0\,.$$

<u>*Příklad 2.10*</u> : Stanovte extrém funkce $f(x, y) = xy$ na přípustné množině V určené podmínkou $x + y - 1 = 0$.

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 1).$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda\,,\ \frac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda\,,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1\,.$$

Stacionární bod

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2}\,,\ \ \lambda = -\frac{1}{2}\,.$$

Máme $df = ydx + xdy$, $d^2f = 2dx\, dy$ a $dx + dy = 0$ na V. Proto

$$d^2f = 2dx\,(-dx) = -2dx^2 < 0\,.$$

Bod $\left[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ je bodem maxima funkce f na V; $\max f = \frac{1}{4}$.

Jde o úlohu najít mezi kvádry jednotkového objemu ten, který má minimální povrch (je to krychle!).

Příklad 2.11 : Stanovte extrém funkce $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ na množině $V = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 : \ xyz - 1 = 0\}$.

Lagrangeova funkce: $L(x,y,z,\lambda) = xy+yz+xz+\lambda(xyz-1)$.

Nutné podmínky:

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial x}: & y+z+\lambda yz=0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}: & x+z+\lambda xz=0 \\ \frac{\partial L}{\partial z}: & y+x+\lambda xy=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} xy+xz+\lambda xyz=0 \\ xy+yz+\lambda xyz=0 \\ yz+xz+\lambda xyz=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x=y,\ z\neq 0, \\ y=z,\ x\neq 0. \end{array}$$

Přípustným bodem je $S = [1,1,1]$; pak $\lambda = -2$. Prověříme splnění postačujících podmínek podle věty (2.4). Platí $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0\,,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 + \lambda z\,,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 1 + \lambda y\,,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0\,,$ $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 1 + \lambda x\,,\quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0\,.$ Tedy

$$d^2L(\mathbf{x}_0, \lambda, \vec{h}) =$$

$$= 2(1+\lambda z)h_1h_2 + 2(1+\lambda y)h_1h_3 + 2(1+\lambda x)h_2h_3\big|_{S,\lambda=-2}$$

$$= -2(h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3)\ ;$$

Vazba

$$\operatorname{grad} h(x,y,z) \cdot \vec{h} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}_S \cdot \vec{h} = h_1 + h_2 + h_3 = 0\,.$$

Dosazením $h_3 = -h_1 - h_2$ dostaneme $-2(h_1h_2 - h_1^2 - h_1h_2 - h_1h_2 - h_2^2) = 2(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2) = \frac{1}{2}(4h_1^2 + 4h_1h_2 + 4h_2^2)\,.$

Tato kvadratická forma má pozitivně definitní matici $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 6\,, \lambda_2 = 2$), proto bod $S = [1,1,1]$ je bodem minima.

3 Diferencovatelná zobrazení

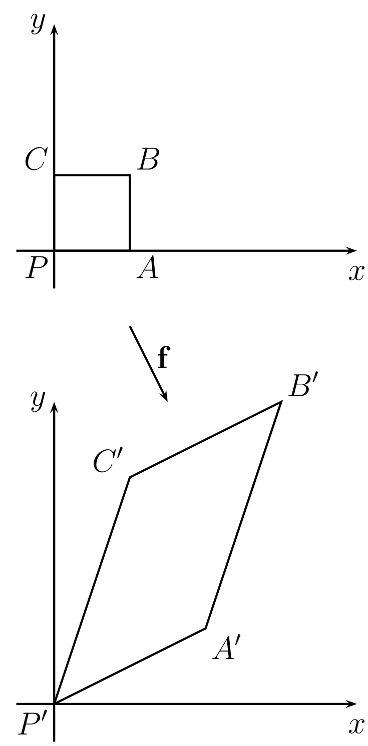
3.1 Základní pojmy

Definice 3.1 : (vektorová funkce)
Mějme m funkcí $f_i : \Omega \to \mathbb{R},\ \Omega \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \ldots, m$.
Zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$ se nazývá **vektorová funkce vektorového argumentu**. Funkce f_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ se nazývají **složky vektorové funkce**.

Příklad 3.1 : Máme vektorovou funkci $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$\mathbf{f} = (f_1, f_2) = (y_1, y_2)$, kde

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2\,, \\ y_2 &= x_1 + 3x_2\,, \end{aligned} \quad \text{maticově } \mathbf{y} = \mathbb{A} \cdot \mathbf{x}\,, \text{ kde } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$



Body $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ zobrazujeme v jednom kartézském systému a jejich obrazy $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ v jiném kartézském systému.

Uvedená vektorová funkce přiřazuje bodům čtverce $PABC$ body rovnoběžníka $P'A'B'C'$ tak, že $P \to P'$, $A \to A', \ldots$. Konkrétně čtverec $P(0,0)\,A(1,0)\,B(1,1)\,C(0,1)$ se zobrazí na rovnoběžník $P'(0,0)\,A'(2,1)\,B'(3,4)\,C'(1,3)$.

Poznamenejme, že obsah rovnoběžníka meas $(P'A'B'C')$ je roven 5 a hodnota determinantu matice $\det A$ je také 5, tedy platí

$$\operatorname{meas}(P'A'B'C') = |\det A| \cdot \operatorname{meas}(PABC)\,.$$

Zároveň platí

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} y_1 \\ \\ \operatorname{grad} y_2 \end{pmatrix}.$$

Uvedené vlastnosti zobecníme v následujícím textu.

Definice 3.2 : (spojitost vektorové funkce)
Bod $\mathbf{y}_0 \in \mathbb{R}^m$ se nazývá **limita vektorové funkce f** v hromadném bodě $\mathbf{x}_0$ množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, píšeme

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}_0 \,,$$

když pro každou posloupnost $\mathbf{x}_n \to \mathbf{x}_0$ platí $\mathbf{f}(\mathbf{x}_n) \to \mathbf{y}_0$.
Když $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$, pak říkáme, že **vektorová funkce** f **je spojitá v bodě** $\mathbf{x}_0$. Vektorová funkce $\mathbf{f}$ je spojitá na $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, je-li spojitá v každém bodě $\mathbf{x} \in \Omega$.

Věta 3.1 : (spojitost po složkách)

i) Funkce $\mathbf{f}$ má v bodě $\mathbf{x}_0$ limitu $\mathbf{y}_0 = (y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0m})$ právě tehdy, když $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f_i(\mathbf{x}) = y_{0i}\,,\ i = 1, 2, \ldots, m\,.$

ii) Vektorová funkce $\mathbf{f}$ je spojitá v bodě $\mathbf{x}_0$ právě tehdy, když funkce $f_i\,,\ \ i = 1, 2, \ldots, m$ jsou spojité v bodě $\mathbf{x}_0$.

<u>Důkaz</u> : plyne z nerovnosti $|f_i(\mathbf{x}) - y_{0i}| \leq \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} (f_i(\mathbf{x}) - y_{0i})^2}$.

Definice 3.3 : (diferencovatelnost vektorové funkce)
Vektorová funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o složkách $f_1, f_2, \ldots, f_m$ je **diferencovatelná** v bodě $\mathbf{x}_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, jestliže funkce $f_i\,,\ i = 1, 2, \ldots, m$ jsou diferencovatelné v bodě $\mathbf{x}_0$. **Diferenciálem vektorové funkce f** je potom vektor

$$d\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \begin{pmatrix} df_1(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \\ df_2(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \\ \vdots \\ df_m(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(\mathbf{x}_0)\, \vec{h} \\ \operatorname{grad} f_2(\mathbf{x}_0)\, \vec{h} \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\mathbf{x}_0)\, \vec{h} \end{pmatrix} = \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)\vec{h}\,.$$

Zde opět $\vec{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Matice $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$ (typu (m, n)), jejíž řádky jsou $\operatorname{grad} f_i(\mathbf{x}_0)$, se nazývá **derivace vektorové funkce f v bodě** $\mathbf{x}_0$ nebo **Jacobiova matice vektorové funkce f**. Tuto matici také označujeme

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{D(\mathbf{f})}{D(\mathbf{x})} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\,.$$

Pro $m = n$ se determinant Jacobiovy matice $\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ nazývá **jakobián**.

Definice 3.4 : (regulární vektorová funkce)
Vektorová funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ se nazývá **regulární ve vnitřním bodě** $\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, jestliže

1. prvky Jacobiovy matice jsou spojité funkce v bodě $\mathbf{x}$ (tj. $\mathbf{f}$ je spojitě diferencovatelná),
2. $\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$.

Vektorová funkce $\mathbf{f}$ je **regulární** v Ω, je-li regulární v každém vnitřním bodě $\mathbf{x} \in \Omega$.

Pokud $\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$, pak také říkáme, že matice $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ je regulární.

Věta 3.2 : (o lokálně inverzní vektorové funkci)
Nechť vektorová funkce $\mathbf{f} : X \mapsto Y$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^n$ je spojitá na X a regulární v bodě $\mathbf{x}_0 \in X$. Potom existují okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset X$ bodu $\mathbf{x}_0$ a okolí $U(\mathbf{y}_0) \subset Y$ bodu $\mathbf{y}_0 = \mathbf{f}(\mathbf{x}_0)$ taková, že $\mathbf{f}$ bijektivně (vzájemně jednoznačně) zobrazuje $U(\mathbf{x}_0)$ na $U(\mathbf{y}_0)$. K restrikci $\mathbf{f}$ na $U(\mathbf{x}_0)$ tak existuje inverzní vektorová funkce $\mathbf{f}^{-1} : U(\mathbf{y}_0) \mapsto U(\mathbf{x}_0)$, která je regulární, a platí

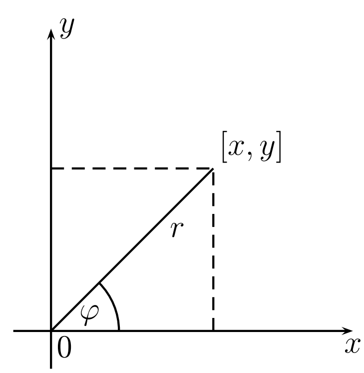
$$\frac{D(\mathbf{f}^{-1})}{D(\mathbf{y})}(\mathbf{y}_0) = \left(\frac{D(\mathbf{f})}{D(\mathbf{x})}\right)^{-1}(\mathbf{x}_0)\,,$$

tj. Jacobiova matice inverzní vektorové funkce je inverzní maticí k Jacobiově matici původní vektorové funkce.

Polární souřadnice

Vyšetříme vektorovou funkci $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $(r,\varphi) \mapsto (x,y)$ danou vztahy

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$



Pro libovolné $(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2$ je $\mathbf{f}$ diferencovatelná funkce a platí

$$\mathbf{f}' = \mathbb{J}_{\mathbf{f}} = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}; \quad \boxed{\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}} = r}\,.$$

Takže pro $r \neq 0$ je vektorová funkce $\mathbf{f}$ regulární. Není však na celém prostoru $\mathbb{R}^2$ bijektivní (obrazem různých bodů (r_1,φ_1), $(r_1,\varphi_1+2\pi)$ je tentýž bod). Proto označíme

$$\mathcal{P} = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < r < +\infty,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\}\,.$$

Potom vektorová funkce $\mathbf{f}$ zobrazuje množinu $\mathcal{P}$ na množinu $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ bijektivně a existuje inverzní vektorová funkce $\mathbf{f}^{-1} : X \mapsto \mathcal{P}$. Tato inverzní vektorová funkce je dána vztahy:

$$r = \sqrt{x^2+y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x>0,\ y \geq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x=0,\ y>0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x<0,\ y \in \mathbb{R}, \\ \frac{3\pi}{2}, & x=0,\ y<0 \\ 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x>0,\ y<0. \end{cases}$$

Geometricky má číslo r význam vzdálenosti bodu (x,y) od počátku a číslo φ význam úhlu mezi průvodičem bodu (x,y) a kladným směrem osy x.

Vektorová funkce $\mathbf{f}^{-1}$ $\quad ((r,\varphi) = \mathbf{f}^{-1}(x,y))$ se nazývá **soustava polárních souřadnic**. Pro jakobiovou matici funkce $\mathbf{f}^{-1}$ platí

$$\mathbb{J}_{\mathbf{f}^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \frac{-\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}.$$

Tedy $\qquad \mathbb{J}_{\mathbf{f}} \cdot \mathbb{J}_{\mathbf{f}^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Vektorová funkce $\mathbf{f}$ zobrazí počátek do počátku, přímku danou rovností $r = R$ zobrazí na kružnici vyjádřenou parametricky rovnicemi $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ \varphi \in \mathbb{R}$. Obrazem přímky $\varphi = \varphi_1$ je polopřímka vyjádřená parametrickými rovnicemi $x = r\cos\varphi_1,\ y = r\sin\varphi_1$ (parametr $r \geq 0$).

Obrazem vyplněného obdélníku $\Omega_{\Delta r \Delta\varphi}$ je vyplněná výseč mezikruží $\Omega_{\Delta x \Delta y}$ a platí $\operatorname{meas}(\Omega_{\Delta x\Delta y}) \approx r \operatorname{meas}(\Omega_{\Delta r\Delta\varphi}) = \det \mathbb{J}_{\mathbf{f}} \cdot \operatorname{meas}(\Omega_{\Delta r\Delta\varphi})$.

Všimněme si, že pro funkci $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (hladká monotónní) píšeme tvrzení věty ve tvaru

$$\lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{f}|}{|\Delta x|} = |\mathbf{f}'|.$$

Věta 3.3 : (geometrický význam jakobiánu)
Nechť prosté regulární zobrazení $\mathbf{f}$ zobrazuje oblast $\Omega_{r\varphi}$, která obsahuje bod (r_0,φ_0), na oblast Ω_{xy}, potom platí (při označení $d = \operatorname{diam}\Omega_{r\varphi}$ (délka největší možné úsečky ležící v $\Omega_{r\varphi}$), $\operatorname{meas}(\Omega)$ = míra oblasti Ω)

$$\lim_{d\to 0} \frac{\operatorname{meas}(\Omega_{xy})}{\operatorname{meas}(\Omega_{r\varphi})} = |\det J_{\mathbf{f}}(r_0,\varphi_0)|.$$

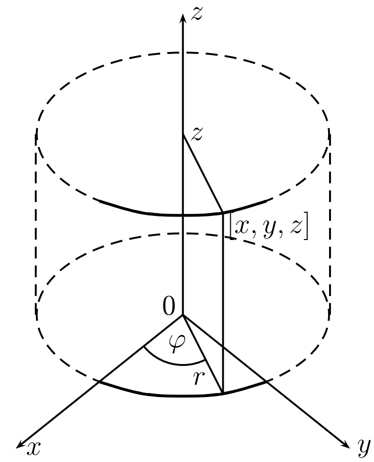
Pro malé d píšeme přibližnou rovnost

$$\operatorname{meas}(\Omega_{xy}) \approx |\det J_{\mathbf{f}}(r_0,\varphi_0)| \cdot \operatorname{meas}(\Omega_{r\varphi}).$$

Cylindrické souřadnice

Nechť vektorová funkce **f** je dána transformačními rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\,, \\ y &= r\sin\varphi\,, \\ z &= z\,. \end{aligned}$$



Protože $\boxed{\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}} = r}$, je na množině $V = \{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty\}$ tato vektorová funkce regulární a prostá a zobrazuje množinu V na množinu $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{osa } z\}$ vzájemně jednoznačně.
Inverzní vektorová funkce $\mathbf{f}^{-1} :\ (x,y,z) \mapsto (r,\varphi,z)$, kde

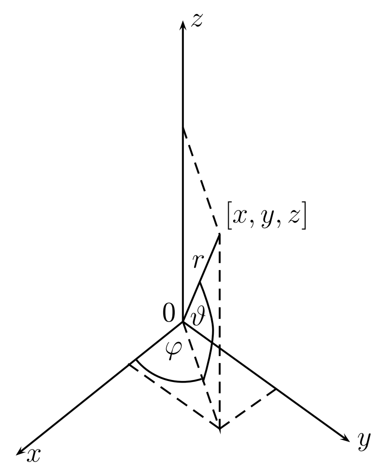
$$\begin{aligned} &r = \sqrt{x^2+y^2} \\ &\varphi = \text{jediný kořen rovnic } \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi\,,\ \ \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi\,, \\ &z = z \end{aligned}$$

se nazývá **soustava cylindrických souřadnic**.

Sférické souřadnice

Máme vektorovou funkci **f** danou transformačními rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z &= r\sin\vartheta. \end{aligned}$$



Potom $\boxed{\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}} = r^2\cos\vartheta}$ a jakobián je roven nule právě tehdy, když $r = 0$ nebo $\vartheta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vektorová funkce **f** je proto regulární a prostá na množině

$$V = \{(r,\varphi,\vartheta) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}\}.$$

Inverzní vektorová funkce $\mathbf{f}^{-1} :\ (x,y,z) \mapsto (r,\varphi,\vartheta)$

$$\begin{aligned} &\mathbf{f}^{-1}\ :\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \\ &\varphi = \text{jediný kořen rovnic } \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi\,,\ \ \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi\,, \\ &\vartheta = \text{jediný kořen rovnice } \sin\vartheta = \tfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}$$

se nazývá **soustava sférických souřadnic**.

Pro pevné $\varphi = \varphi_0$ vznikne **souřadnicová plocha**, která je popsaná parametrickými rovnicemi $x = r\cos\varphi_0\sin\vartheta$,

$y = r \sin \varphi_0 \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$; je to ("poledníková") rovina procházející osou z.

Pro pevné $r = r_0$ je souřadnicová plocha dána parametrickými rovnicemi $x = r_0 \cos \varphi \sin \vartheta$, $y = r_0 \sin \varphi \sin \vartheta$, $z = r_0 \cos \vartheta$; je to kulová plocha o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$.

Pro pevné $\vartheta = \vartheta_0$ je souřadnicovou plochou plocha kuželová.

4 Riemannův integrál v $\mathbb{R}^n$

4.1 Definice a základní vlastnosti Riemannova integrálu

Definice 4.1 : (Riemannův integrál v $\mathbb{R}$)
(i) Nechť $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Množina $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\,;\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b\}$ se nazývá **dělení intervalu** $\langle a, b\rangle$ a číslo $\nu(D) = \max\limits_{0\le i\le k-1}(x_{i+1} - x_i)$ se nazývá **krok (norma) dělení** D. Označíme

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_{i+1} - x_i\,; \\ M_i &= \sup f(x),\ x \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle,\ i = 0, 1, \ldots, k-1\,; \\ m_i &= \inf f(x),\ x \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle,\ i = 0, 1, \ldots, k-1\,. \end{aligned}$$

Každému dělení D a funkci f přiřadíme čísla:
horní součet

$$U(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} M_i \Delta x_i,$$

dolní součet

$$L(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \Delta x_i,$$

integrální součet

$$J(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \xi_i \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle \text{ je libovolný bod.}$$

(ii) Řekneme, že funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na $\langle a, b\rangle$ (píšeme $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$), když existuje reálné číslo $I = I(f)$ takové, že
$\forall\,\varepsilon > 0\ \exists\,\delta > 0\ \forall$ dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ s $\nu(D) < \delta$, $\forall\,\xi_i \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$: $\quad |J(f, D) - I| < \varepsilon\,.$
Říkáme, že existuje limita integrálních součtů, a píšeme

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i = I.$$

Číslo I se nazývá **určitý Riemannův integrál** z funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ a značí se

$$I = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Poznámka 4.1: Aby byla definice 4.1 korektní (tj. aby měla rozumný smysl), je nutný předpoklad omezenosti funkce f.

Definice 4.2 : (Riemannův integrál v $\mathbb{R}^2$)
(i) Nechť $Q = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle \subset \mathbb{R}^2$. Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalů $\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle$ ve smyslu definice 4.1, tj. množiny $\{x_0, x_1, \ldots, x_r\}$, $\{y_0, y_1, \ldots, y_s\}$. Množina D všech obdélníků

$$Q_{jk} = \langle x_j, x_{j+1}\rangle \times \langle y_k, y_{k+1}\rangle,$$

$j = 0, 1, \ldots, r-1$; $k = 0, 1, \ldots, s-1\,$, se nazývá **dělení obdélníku** Q a číslo

$$\nu(D) = \max_{\substack{0\le j\le r-1\\ 0\le k\le s-1}} \sqrt{(\Delta x_j)^2 + (\Delta y_k)^2}, \qquad \begin{aligned}\Delta x_j &= x_{j+1} - x_j,\\ \Delta y_k &= y_{k+1} - y_k,\end{aligned}$$

je **krok (norma) dělení** D
Nechť $f : Q \to \mathbb{R}$ je omezená funkce na $Q \subset \mathbb{R}^2$. Označíme

$$\begin{aligned} M_{jk} &= \sup f(x, y)\,, \quad (x, y) \in Q_{jk}\,;\\ m_{jk} &= \inf f(x, y)\,, \quad (x, y) \in Q_{jk}\,. \end{aligned}$$

Horní součet příslušný f a dělení D je definován vztahem

$$U(f, D) = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{s-1} M_{jk} \Delta x_j \Delta y_k\,.$$

Dolní součet příslušný f a dělení D je definován vztahem

$$L(f, D) = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{s-1} m_{jk} \Delta x_j \Delta y_k\,.$$

Integrální součet příslušný f a dělení D je definován vztahem

$$J(f,D)=\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_j,\eta_k)\Delta x_j \Delta y_k\,,$$

kde $(\xi_j,\eta_k)\in Q_{jk}$ je libovolný bod.

(ii) Funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na Q (píšeme $f\in\mathcal{R}(Q)$), když existuje reálné číslo $I=I(f)$ takové, že

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\,\delta>0\ \forall \text{ dělení } D \text{ obdélníku } Q \text{ takové, že}$$

$$\nu(D)<\delta\quad \forall\,(\xi_j,\eta_k)\in Q_{jk}:\ \ |J(f,D)-I|<\varepsilon\,.$$

Číslo

$$I=\lim_{\nu(D)\to 0} J(f,D)=\lim_{\nu(D)\to 0}\sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_j,\eta_k)\Delta x_j\Delta y_k$$

se nazývá **dvojný Riemannův integrál** funkce f přes obdélník Q a značí se

$$I=\iint\limits_Q f(x,y)\,dxdy=\int\limits_Q f(x,y)\,dQ\,.$$

(iii) Nechť $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ je omezená oblast a na ní je definovaná omezená funkce f. Vybereme takový obdélník Q, aby $\Omega\subset Q$, a sestrojíme funkci

$$F(x,y)=\begin{cases} f(x,y)\,, & (x,y)\in\Omega\,,\\ 0\,, & (x,y)\in Q\setminus\Omega\,.\end{cases}$$

Dvojný integrál z funkce f přes Ω definujeme vztahem

$$\int\limits_\Omega f\,d\Omega=\iint\limits_\Omega f(x,y)\,dxdy=\iint\limits_Q F(x,y)\,dxdy\,.$$

Řekneme, že f je **Riemannovsky integrovatelná na** Ω, píšeme $f\in\mathcal{R}(\Omega)$.

Definice 4.3 : (Riemannův integrál v $\mathbb{R}^3$)
(i) Nechť $Q = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \langle a_3, b_3\rangle$ je kvádr v $\mathbb{R}^3$. Nechť D_l jsou dělení intervalů $\langle a_l, b_l\rangle$, $l = 1, 2, 3$.
Množina kvádrů

$$Q_{ijk} = \langle x_i, x_{i+1}\rangle \times \langle y_j, y_{j+1}\rangle \times \langle z_k, z_{k+1}\rangle$$

se nazývá **dělení kvádru** Q. Číslo

$$\nu(D) = \max_{i,j,k} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2 + (\Delta z_k)^2}$$

je **krok (norma)** dělení D.
Nechť $f = f(x, y, z) : Q \to \mathbb{R}$ je omezená funkce na $Q \subset \mathbb{R}^3$. Analogicky jako v definicích 4.1, 4.2 se definují horní a dolní součty příslušné funkci f a dělení D. **Integrální součet** je číslo

$$J(f, D) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{p-1} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k \,,$$

kde $(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \in Q_{ijk}$ je libovolný bod.

(ii) Funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na Q, píšeme $f \in \mathcal{R}(Q)$, existuje-li číslo

$$I = \lim_{\nu(D)\to 0} J(f, D)$$

pro libovolné dělení D kvádru Q. Značí se

$$I = \iiint_Q f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int_Q f\, dQ \,, \quad Q \subset \mathbb{R}^3 \,.$$

Číslo I se nazývá **trojný Riemannův integrál**.

(iii) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast a na ní je definovaná omezená funkce f. Vybereme takový kvádr Q, aby $\Omega \subset Q$ a sestrojíme funkci

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z)\,, & (x, y, z) \in \Omega\,, \\ 0\,, & (x, y, z) \in Q \setminus \Omega\,. \end{cases}$$

Funkce f je **Riemannovsky integrovatelná na** Ω, jestliže F je integrovatelná na Q, a definujeme

$$\int\limits_{\Omega} f\,d\,\Omega = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{Q} F(x,y,z)\,dxdydz\,.$$

Definice 4.4 : (Riemannův integrál v $\mathbb{R}^n$)
(i) Nechť Q je kvádr v $\mathbb{R}^n$. Množina kvádrů

$$Q_{i_1,i_2,\ldots,i_n} = \langle x^1_{i_1}, x^1_{i_1+1}\rangle \times \langle x^2_{i_2}, x^2_{i_2+1}\rangle \times \ldots \times \langle x^n_{i_n}, x^n_{i_n+1}\rangle\,,$$

se nazývá **dělení kvádru** Q. Číslo

$$\nu(D) = \max_{i_1,\ldots,i_n} \sqrt{(\Delta x^1_{i_1})^2 + (\Delta x^2_{i_2})^2 + \cdots + (\Delta x^n_{i_n})^2}$$

se nazývá **krok (norma)** dělení D.
Nechť $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) : \quad Q \to \mathbb{R}$ je omezená funkce na $Q \subset \mathbb{R}^n$. Analogicky jako v definici 15.2 se definují horní a dolní součty příslušné funkci f a dělení D. **Integrální součet** je číslo

$$J(f,D) = \sum_{i_1=0}^{k_1-1} \ldots \sum_{i_n=0}^{k_n-1} f(\xi^1_{i_1}, \ldots, \xi^n_{i_n}) \Delta x^1_{i_1} \Delta x^2_{i_2} \ldots \Delta x^n_{i_n}\,,$$

kde $(\xi^1_{i_1}, \ldots, \xi^n_{i_n}) \in Q_{i_1,\ldots,i_n}$ je libovolný bod.

(ii) Funkce f se nazývá **Riemannovsky integrovatelná** na Q, existuje-li číslo

$$I = \lim_{\nu(D)\to 0} J(f,D)$$

pro libovolné dělení D kvádru Q. Značí se

$$\begin{aligned} I &= \int\ldots\int\limits_{Q} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 dx_2 \ldots dx_n = \\ &= \int\limits_{Q} f dQ = \int\limits_{Q} f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}\,, \quad Q \subset \mathbb{R}^n\,. \end{aligned}$$

Číslo I se nazývá **Riemannovým integrálem v** $\mathbb{R}^n$ přes Q.

(iii) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená oblast a na ní je definovaná omezená funkce f. Vybereme takový kvádr Q, aby $\Omega \subset Q$, a definujeme funkci

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x})\,, & \mathbf{x} \in \Omega\,, \\ 0\,, & \mathbf{x} \in Q \setminus \Omega\,. \end{cases}$$

Funkce f je **integrovatelná na** Ω, je-li F integrovatelná na množině Q, a definujeme

$$\int_\Omega f \, d\Omega = \int_\Omega f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_Q F(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}\,.$$

Věta 4.1 : (Kritérium integrovatelnosti)
Omezená funkce f je Riemannovsky integrovatelná na kvádru (n-rozměrném intervalu) $Q \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, právě tehdy, když pro každé $\varepsilon > 0$ existuje dělení D kvádru Q takové, že

$$0 \leq U(f, D) - L(f, D) < \varepsilon\,. \tag{1}$$

Důkaz : je budován na celé řadě tvrzení a představuje jádro teorie Riemannova integrálu. Součástí této teorie je mimo jiné též teorie měřitelnosti množin $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Věta 4.2 : (důsledek kritéria integrovatelnosti)
Funkce f je Riemannovsky integrovatelná právě tehdy, když

$$\inf_D U(f, D) = \sup_D L(f, D) = I\,.$$

Důkaz : Podmínka (1) z předchozí věty je splněna právě tehdy, když $\inf_D U(f, D) \leq \sup_D L(f, D)$. Zároveň pro každé dělení D platí

$$L(f, D) \leq J(f, D) \leq U(f, D)\,.$$

Odtud plyne $\lim_{\nu(D)\to 0} J(f, D) = I$ a funkce f je Riemannovsky integrovatelná.

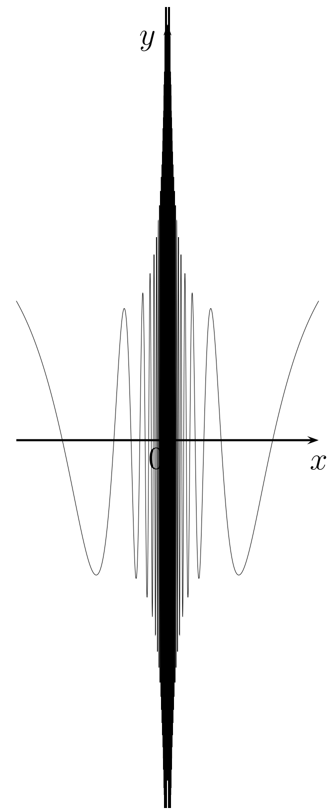
<u>*Příklad 4.1*</u>: Dirichletova funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ je racionální číslo,} \\ 0 & x \text{ je iracionální číslo,} \end{cases}$$

$x \in \langle a, b \rangle$, není Riemannovsky integrovatelná:

$U(f, D) = b - a$ pro každé dělení D, neboť $\sup f = 1$ na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$;

$L(f, D) = 0$, protože $\inf f = 0$ na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$.



Graf funkce
$f(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x}$

<u>*Příklad 4.2*</u>: Funkce $f(x) = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, není na žádném intervalu obsahujícím nulu Riemannovsky integrovatelná, neboť f je neomezená na libovolném okolí nuly. Existuje však Newtonův integrál z funkce f, neboť

$$F(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

je primitivní funkce k f. Proto

$$(\mathcal{N}) \int_0^1 f(x)\, dx = F(1) - F(0) = \sin 1 .$$

<u>*Příklad 4.3*</u>: Funkce $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0, & x \in \langle -1, 0) \end{cases}$

je omezená a Riemannovsky integrovatelná. Není však Newtonovsky integrovatelná. Kdyby totiž existovala primitivní funkce F k funkci f, pak funkce F musí být spojitá a muselo by platit $F(x) = \begin{cases} x + c, & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ c, & x \in \langle -1, 0), \end{cases}$ $c \in \mathbb{R}$. Funkce F však není diferencovatelná v bodě 0, tedy F není primitivní k f.

<u>*Poznámka 4.2*</u>: Integrovatelnost funkce (v Riemannově smyslu) je vlastnost, která se nemění při změně funkce v konečně mnoha bodech, tj.:
nechť f, g jsou definovány na $\langle a, b \rangle$, $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ a g se liší od f v konečně mnoha bodech intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom $g \in R(\langle a, b \rangle)$ a platí

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b g(x)\, dx .$$

Věta 4.3 : (výpočet Riemannova integrálu)
Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ a nechť existuje primitivní funkce F k funkci f na $\langle a, b\rangle$, tj. $F'(x) = f(x)\,, \ x \in \langle a, b\rangle$. Potom $f \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$ (f má Newtonův integrál na $\langle a, b\rangle$) a platí

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\, dx = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

<u>Důkaz</u> : Zvolme libovolné dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom

$$\begin{aligned}(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\, dx &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \sum_{i=0}^{n-1} (F(x_{i+1}) - F(x_i)) = \\ &= \text{(věta o střední hodnotě)} \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} F'(\xi_i)(x_{i+1} - x_i) = \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\,.\end{aligned}$$

Protože předpokládáme $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$, platí

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i = I = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Tím je důkaz proveden.

Věta 4.4 :
Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$. Potom funkce

$$F(x) = \int_a^x f(x)\, dt$$

je spojitá na $\langle a, b\rangle$. Je-li navíc f spojitá na $\langle a, b\rangle$, potom F je diferencovatelná a platí

$$F'(x) = f(x)\,, \quad x \in \langle a, b\rangle\,.$$

<u>Důkaz</u> : Když $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$, potom f je omezená a platí $|f(x)| \le M,\ x \in \langle a, b\rangle$; protože pro $x, x_0 \in \langle a, b\rangle$ platí

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(x)\, dt - \int_a^{x_0} f(x)\, dt = \int_{x_0}^x f(x)\, dt\,,$$

dostaneme odtud

$$|F(x)-F(x_0)| \leq M \int_{x_0}^{x} dt = M|x-x_0|, \quad \text{tj.} \quad F \text{ je spojitá}.$$

Nechť f je spojitá v bodě $x_0 \in \langle a, b\rangle$, tj. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ pro každé $x \in P(x_0, \delta)$. Pak také

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \leq \frac{\int_{x_0}^{x} |f(x) - f(x_0)|\, dt}{|x - x_0|} \leq \frac{\varepsilon|x - x_0|}{|x - x_0|} = \varepsilon$$

pro $x \in P(x_0, \delta)$, tj. $F'(x_0) = f(x_0)$.

Poznámka 4.3:

(i) Má-li omezená funkce f na $\langle a, b\rangle$ konečný počet bodů nespojitosti, potom existuje zobecněná primitivní funkce $F(x)$ (definice 6.8, MA1) a f má zobecněný Newtonův integrál.

(ii) Věty o per partes a substituci zůstávají v platnosti i pro Riemannův integrál.

(iii) Nevlastní Riemannovy integrály definujeme obdobným způsobem jako nevlastní Newtonovy integrály; pro funkci $f \in \mathcal{R}(\langle a, x\rangle),\ x > a$ definujeme

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dt = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(x)\, dt,$$
$$\int_a^b f(x)\, dt = \lim_{x \to b-} \int_a^x f(x)\, dt.$$

Definice 4.5 : (hlavní hodnota (value principle))
Nechť f je definovaná na množině všech reálných čísel $\mathbb{R}$ a $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ pro libovolná $a, b \in \mathbb{R}$. Existuje-li limita

$$\lim_{r \to \infty} \int_{-r}^{r} f(x)\, dx = \text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx,$$

nazýváme ji **hlavní hodnotou nevlastního integrálu** od $-\infty$ do ∞ z funkce f.

Poznámka 4.4 :

(i) Pozor! Existuje-li hlavní hodnota integrálu, pak

$$\lim_{r\to\infty} \int_a^r f(x)\,dx$$

existovat nemusí! Např.

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x\,dx = \lim_{r\to\infty} \int_{-r}^{r} \sin x\,dx = 0\,,$$

ale $\lim\limits_{r\to\infty} \int_a^r \sin x\,dx$ neexistuje pro žádné $a \in \mathbb{R}$!

(ii) Analogicky definujeme hlavní hodnotu nevlastního integrálu vlivem funkce:

$$\text{v.p.} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0+} \left(\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx \right) .$$

Například

$$\text{v.p.} \int_{-1}^{1} \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x} \right) = \lim_{\varepsilon\to 0} (\ln\varepsilon - \ln\varepsilon) = 0\,.$$

Definice 4.6 : (míra množiny)
Omezená množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **měřitelná**, je-li funkce $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ integrovatelná na Ω. Hodnota integrálu

$$\text{meas}\,(\Omega) = \int_\Omega 1\,d\mathbf{x}$$

se nazývá **míra množiny** Ω (**Jordanova míra**).
Množina Ω, pro níž platí $\text{meas}\,(\Omega) = 0$, se nazývá **množina míry nula**.

Příklad 4.4 :

1) Konečná množina a omezená spojitá křivka mají dvourozměrnou i trojrozměrnou míru nula. Regulární plocha má trojrozměrnou míru nula.

2) Nechť $\Omega = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, potom $\int\limits_{\Omega} 1 \, d\mathbf{x} = 0$.

Zde vidíme, že i míra nekonečné spočetné množiny může být nula. V příkladu (4.1) (Dirichletova funkce) jsme však ukázali nekonečnou spočetnou množinu, která je neměřitelná (v Jordanově smyslu). Tento problém řeší Lebesgueova míra.

Definice 4.7 : (nulová funkce) Jestliže se f liší od nulové funkce na množině míry nula, řekneme, že f je **skoro všude** (ve smyslu Jordanovy míry) nulová. Jinak řečeno

$$\int\limits_{\Omega} |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \quad \text{s.v.}$$

Věta 4.5 : (Vlastnosti integrovatelných funkcí)

1. Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega_1)$ a $f \in \mathcal{R}(\Omega_2)$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$. Potom $f \in \mathcal{R}(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ a platí

$$\int\limits_{\Omega_1 \cup \Omega_2} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int\limits_{\Omega_1} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} + \int\limits_{\Omega_2} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

2. Množina $\mathcal{R}(\Omega)$ je lineárním prostorem.
3. Je-li $f \in \mathcal{R}(\Omega)$ a $g \in \mathcal{R}(\Omega)$, potom $f \cdot g \in \mathcal{R}(\Omega)$.
4. Je-li $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, $g \in \mathcal{R}(\Omega)$ a $f(\mathbf{x}) \leq g(\mathbf{x}) \ \ \forall \mathbf{x} \in \Omega$, potom

$$\int\limits_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \leq \int\limits_{\Omega} g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

5. Je-li $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, potom $|f| \in \mathcal{R}(\Omega)$ a platí

$$\left| \int\limits_{\Omega} f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \right| \leq \int\limits_{\Omega} |f(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x}.$$

4.2 Metody výpočtu dvojných a trojných integrálů

Dvojné a trojné integrály počítáme analyticky tak, že je převedeme na tzv. **dvojnásobné a trojnásobné integrály**, jejichž výpočet provedeme pomocí známých metod užívaných pro integrály z funkcí jedné proměnné.

Věta 4.6 : (Fubiniova věta pro obdélník)
Nechť $f \in \mathcal{R}(Q)$, $Q = \langle a, b\rangle \times \langle c, d\rangle$. Když $f(x, y) \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ pro každé $y \in \langle c, d\rangle$, potom platí

$$\iint\limits_Q f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx \right) dy\,.$$

Když $f(x, y) \in \mathcal{R}(\langle c, d\rangle)$ pro každé $x \in \langle a, b\rangle$, pak platí

$$\iint\limits_Q f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy \right) dx\,.$$

Důkaz : Vyplývá z uzávorkování integrálního součtu

$$\begin{aligned} J(f,D) &= \sum_{k=0}^{s-1} \Big(\sum_{j=0}^{r-1} f(\xi_j, \eta_k)\Delta x_j \Big) \Delta y_k \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_j,\eta_k)\Delta x_j \Delta y_k = \sum_{j=0}^{r-1} \Big(\sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_j,\eta_k)\Delta y_k \Big) \Delta x_j \end{aligned}$$

a z předpokladů integrovatelnosti.

Dvojný integrál jsme převedli na dvojnásobný a podobně jako u vztahu dvojné a dvojnásobné limity (viz věta 1.3) musí "vnitřní limita"existovat, aby nastala rovnost.

Příklad 4.5 : $Q = \langle 0, 1\rangle \times \langle 1, 3\rangle$. Vypočtěte

$$I = \iint\limits_Q x^y \,dxdy\,.$$

Buď

$$I = \int\limits_1^3 \left(\int\limits_0^1 x^y\,dx \right) dy = \int\limits_1^3 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 dy = \int\limits_1^3 \frac{1}{y+1}\,dy = \ln 2$$

nebo

$$I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_1^3 x^y\,dy \right) dx = \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{\ln x} \mathrm{e}^{y \ln x} \right]_1^3 dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{\ln x} (\mathrm{e}^{3\ln x} - \mathrm{e}^{\ln x})\,dx.$$

V druhém případě nelze stanovit primitivní funkci pomocí konečného počtu elementárních funkcí.

Věta 4.7 : (Fubiniova věta pro elementární oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$)

(i) Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, kde

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

je tzv. **elementární oblast** určená grafy funkcí $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x \in \langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx,$$

pokud vnitřní integrál existuje pro každé $x \in \langle a, b\rangle$.

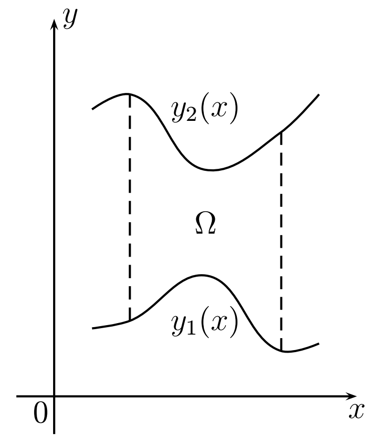
(ii) Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, kde elementární oblast

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

je určena grafy funkcí $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $y \in \langle c, d\rangle$. Potom platí

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\,dx \right) dy,$$

pokud vnitřní integrál existuje pro každé $y \in \langle c, d\rangle$.



Důkaz : spočívá v převodu integrace přes Ω na integraci přes obdélník Q (obsahující množinu Ω) ve smyslu definice (4.2), část (iii) a následném použití věty (4.6).

Příklad 4.6 : Množina Ω je zadána nerovnostmi $0 \le x \le 1$, $x \le y \le \sqrt{x}$ nebo $0 \le y \le 1$, $y^2 \le x \le y$. Vypočtěte integrál $I = \iint\limits_{\Omega} xy\,dxdy$.

Uvedeme obě fáze výpočtu při použití věty (4.7):

$$I = \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} xy \; dy \right) \; dx \qquad\qquad I = \int_0^1 \left(\int_{y^2}^{y} xy \; dx \right) \; dy$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_x^{\sqrt{x}} \; dx \qquad\qquad \int_0^1 \left[\frac{yx^2}{2} \right]_{y^2}^{y} \; dy$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right) \; dx \qquad\qquad \int_0^1 \left(\frac{y^3}{2} - \frac{y^5}{2} \right) \; dy$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} \right]_0^1 \qquad\qquad \left[\frac{y^4}{8} - \frac{y^6}{12} \right]_0^1$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\frac{1}{24} \qquad\qquad \frac{1}{24}$$

Poznámka 4.5: Řadu oblastí v rovině můžeme vyjádřit jako konečné sjednocení elementárních oblastí: např. pokud Ω rozdělíme na čtyři elementární oblasti: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$. Potom symbolicky

$$\int_\Omega = \int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2} + \int_{\Omega_3} + \int_{\Omega_4} .$$

Věta 4.8 : (Substituce v dvojném integrálu – transformace souřadnic ve dvojném integrálu)
Nechť $\Omega_{r\varphi} \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená měřitelná množina a nechť funkce $x = x(r,\varphi)$, $y = y(r,\varphi)$ určují prosté regulární zobrazení $\mathbf{f}$ množiny $\Omega_{r\varphi}$ na množinu $\Omega_{xy} \subset \mathbb{R}^2$. Nechť dále máme funkci $f : \Omega_{xy} \to \mathbb{R}$, která je spojitá na Ω_{xy}. Potom platí

$$\iint_{\Omega_{xy}} f(x,y) \; dxdy = \iint_{\Omega_{r\varphi}} f(x(r,\varphi), y(r,\varphi)) \; |\det J_{\mathbf{f}}| \; drd\varphi,$$

kde $J_{\mathbf{f}} = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}$ je Jacobiova matice zobrazení $\mathbf{f}$ (viz definice 3.3).

Princip důkazu Uvažujme integrální součet

$$J(f,D) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} f(\widehat{x}_i, \widehat{y}_j) \underbrace{\Delta x_i \; \Delta y_j}_{\text{meas}\,(\Omega_{ij}^{xy})}$$

Pro malé $\Delta x_i,\ \Delta y_j$ máme (viz věta (3.3))

$$\operatorname{meas}(\Omega_{ij}^{xy}) \approx |\det J_{\mathbf{f}}|\ \operatorname{meas}(\Omega_{ij}^{r\varphi}) = |\det J_{\mathbf{f}}|\ \Delta r_i\ \Delta\varphi_j\,.$$

Proto

$$J(f,D) \approx \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} f(x(\widehat{r}_i,\widehat{\varphi}_j), y(\widehat{r}_i,\widehat{\varphi}_j))\ |\det J_{\mathbf{f}}|_{\widehat{r}_i,\widehat{\varphi}_j}\ \Delta r_i\ \Delta\varphi_j\,.$$

Limitním přechodem pro $\nu(D) \to 0$ dostaneme tvrzení věty.

Příklad 4.7: Převod dvojného integrálu funkce $f(x,y)$ přes Ω_{xy} do polárních souřadnic

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi,\\ y &= r\sin\varphi, \quad r>0,\ \ 0\le\varphi<2\pi\,. \end{aligned}$$

Zde

$$J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}; \quad |\det J_{\mathbf{f}}| = |r| = r.$$

Množina Ω_{xy} je obrazem nějaké množiny $\Omega_{r\varphi}$ (kterou musíme určit). Takže

$$\iint\limits_{\Omega_{xy}} f(x,y)\ dxdy = \iint\limits_{\Omega_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\ drd\varphi\,.$$

Formálně $dxdy$ nahradíme výrazem $r\ drd\varphi$.

Příklad 4.8: Vypočtěte

$$I = \iint\limits_{\Omega} \sin\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy,$$

kde

$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \pi^2 < x^2+y^2 < 4\pi^2\}.$$

Vzhledem ke geometrii oblasti Ω (mezikruží) užijeme substituci do polárních souřadnic $\mathbf{f}:\ x = r\cos\varphi\,,\ y = r\sin\varphi\,.$ Zde snadno zjistíme, že Ω je obrazem množiny

$$\Omega_{r\varphi} = \{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 : \pi < r < 2\pi,\ 0\le\varphi<2\pi\}\,.$$

Máme tedy

$$I = \iint\limits_{\Omega_{r\varphi}} r\sin r\ drd\varphi = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\int_\pi^{2\pi} r\sin r\ dr\right)}_{\text{per partes}}\ d\varphi = -6\pi^2\,.$$

Věta 4.9 : (Fubiniova věta v $\mathbb{R}^3$)
Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; (x,y) \in S\,; \; z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$, je tzv. **elementární oblast** určená grafy funkcí $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$, $(x,y) \in S$, kde S je průmět množiny Ω do roviny xy. Potom platí

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz = \iint\limits_{S} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dxdy,$$

pokud vnitřní integrál existuje pro každé $(x,y) \in S$.

Poznámka 4.6: Ve větě 4.7 jsme uvedli dvě možnosti převodu dvojného integrálu na dvojnásobný. Tyto možnosti byly dány dvěma možnostmi promítání množiny Ω do souřadnicových os. U trojného integrálu máme tři možnosti promítání oblasti Ω do tří souřadnicových rovin, v tvrzení věty je uvedena pouze jedna z nich.

Příklad 4.9 : Vypočtěte $I = \iiint\limits_{\Omega} x\; dxdydz$, kde Ω je oblast nacházející se v 1. oktantu omezená paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a rovinou $z = 2$. Průmětem Ω do roviny xy je čtvrtkruh S.

Představíme si řezy oblasti Ω rovnoběžné s rovinou xz. Pro každé $(x,y) \in S$ se nejdříve integruje od $z = x^2 + y^2$ do $z = 2$ (vnitřní integrace). Získaný dvojný integrál přes S se převede na dvojnásobný, v němž se nejdříve integruje podle y od $y = 0$ do $y = \sqrt{2 - x^2}$, a nakonec se integruje podle x od $x = 0$ do $x = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} x\; dxdydz &= \iint\limits_{S} \left(\int\limits_{x^2+y^2}^{2} x\; dz \right) dxdy \\
&= \iint\limits_{S} x(2 - x^2 - y^2)\; dxdy \\
&= \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \left(\int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} (2x - x^3 - xy^2)\; dy \right) dx = \frac{8\sqrt{2}}{15}\,.
\end{aligned}$$

Výpočet integrálu přes S se opírá o větu (4.7).

Věta 4.10 : (O substituci v trojném integrálu – transformace souřadnic v trojném integrál)
Nechť $\Omega_r \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená měřitelná množina a nechť funkce $x = x(r, \varphi, \vartheta)$, $y = y(r, \varphi, \vartheta)$, $z = z(r, \varphi, \vartheta)$ určují prosté regulární zobrazení $\mathbf{f}$ zobrazující Ω_r na množinu $\Omega_x \subset \mathbb{R}^3$. Nechť dále máme funkci $f : \Omega_x \to \mathbb{R}$, která je spojitá na Ω_x. Potom platí

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{\Omega_x} f(x, y, z)\, dxdydz \\ &= \iiint\limits_{\Omega_r} f(x(r, \varphi, \vartheta), y(r, \varphi, \vartheta), z(r, \varphi, \vartheta))\, |\det J_{\mathbf{f}}|\, drd\varphi d\vartheta\,,\end{aligned}$$

kde $J_{\mathbf{f}} = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\vartheta)}$ je Jacobiova matice zobrazení $\mathbf{f}$.

Princip důkazu je stejný jako v případě věty (4.8) pro dvojný integrál.

Příklad 4.10 : Trojný integrál v cylindrických souřadnicích.
Mějme zobrazení $\mathbf{f} : \Omega_r \to \Omega_x$ dané transformačními rovnicemi

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z\,; \quad r > 0, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi\,.$$

Zde $|\det J_{\mathbf{f}}| = r$. Takže

$$\iiint\limits_{\Omega_x} g(x, y, z)\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_r} g(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\; r\; drd\varphi dz\,.$$

Příklad 4.11 : Vypočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$, kde $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 2\,;\; 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2}\,;\; 0 \le z \le a\}$. Vzhledem k tvaru oblasti Ω (část válce o výšce a) provedeme substituci do cylindrických souřadnic. Válcová plocha $x^2 + y^2 = 2x$ má v cylindrických souřadnicích rovnici $r = 2\cos\varphi$, neboť po dosazení do rovnice válcové plochy dostáváme

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2r\cos\varphi\,.$$

Průmět Ω do roviny xy je čtvrtkružnice. Takže $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$r \in (0, 2\cos\varphi)$, $z \in (0, a)$. Tedy

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{\Omega_x} z\sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz &= \iiint\limits_{\Omega_r} z\cdot r\cdot r\; dr d\varphi dz = \\ &= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\cos\varphi} \int\limits_0^{a} z\cdot r^2\; dzdrd\varphi = \tfrac{1}{2}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2\; dr\; d\varphi = \\ &= \tfrac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\; d\varphi = \tfrac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\; d\varphi = \\ &= \tfrac{4}{3}a^2 \left(\sin\varphi - \tfrac{1}{3}\sin^3\varphi\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{8}{9}a^2\,.\end{aligned}$$

Příklad 4.12: (Trojný integrál ve sférických souřadnicích.)
Mějme zobrazení $\mathbf{f} : \Omega_r \to \Omega_x$ dané transformačními rovnicemi $x = r\cos\varphi\cos\vartheta\,,\; y = r\sin\varphi\cos\vartheta\,,\; z = r\sin\vartheta\,,$

$r > 0\,,\; 0 \le \varphi < 2\pi\,,\; -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$. Zde $|\det J_{\mathbf{f}}| = r^2\cos\vartheta$. Takže

$$\begin{aligned}&\iiint\limits_{\Omega_x} f(x,y,z)\; dxdydz = \\ &= \iiint\limits_{\Omega_r} f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta\,, r\cos\vartheta)\, r^2\cos\vartheta\; drd\varphi d\vartheta\,.\end{aligned}$$

Příklad 4.13: Vypočtěte $I = \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\; dxdydz$, kde Ω je "horní"polovina koule $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} r^2\cdot\cos^2\vartheta\cdot r^2\cos\vartheta\; d\varphi\; d\vartheta\; dr \\ &= 2\pi \int\limits_0^R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^4(1-\sin^2\vartheta)\cos\vartheta\; d\vartheta\; dr \\ &= 2\pi \int\limits_0^R r^4 \left(\sin\vartheta - \tfrac{1}{3}\sin^3\vartheta\right)_0^{\frac{\pi}{2}}\; dr = \tfrac{4}{15}\pi\; R^5\,.\end{aligned}$$

4.3 Užitečné vzorce

Na základě integrálních součtů lze doplnit vzorce z odst. 8.5, MA1:

Míra oblasti Ω (integrál z charakteristické funkce)

$$\begin{aligned}\mathrm{meas}\,(\Omega) &= \iint\limits_{\Omega} 1\; dxdy\;; \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{(obsah)},\\ \mathrm{meas}\,(\Omega) &= \iiint\limits_{\Omega} 1\; dxdydz\;; \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{(objem)}.\end{aligned}$$

Celková hmotnost tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:
Nechť $\varrho = \varrho(x,y,z)$ je funkce hustoty tělesa Ω, potom hmotnost tělesa je dána vzorcem

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \varrho(x,y,z)\; dxdydz\,.$$

Celkový náboj tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:
Nechť funkce $\varrho = \varrho(x,y,z)$ popisuje hustotu rozložení náboje v Ω, potom celkový náboj tělesa je dán vzorcem

$$Q = \iiint\limits_{\Omega} \varrho(x,y,z)\; dxdydz\,.$$

Statické momenty rovinné oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vzhledem k souřadnicovým osám:

$$M_x = \iint\limits_{\Omega} y\;\varrho(x,y)\; dxdy\,, \quad M_y = \iint\limits_{\Omega} x\;\varrho(x,y)\; dxdy\,.$$

Statické momenty tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vzhledem k souřadnicovým rovinám:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint\limits_{\Omega} z\;\varrho(x,y,z)\; dxdydz\,,\\ M_{yz} &= \iiint\limits_{\Omega} x\;\varrho(x,y,z)\; dxdydz\,,\\ M_{xz} &= \iiint\limits_{\Omega} y\;\varrho(x,y,z)\; dxdydz\,, \end{aligned}$$

kde $\varrho = \varrho(x,y)$, resp. $\varrho = \varrho(x,y,z)$ je hustota tělesa v bodě $(x,y) \in \Omega$, resp. $(x,y,z) \in \Omega$.

Moment setrvačnosti tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vzhledem k souřadnicovým osám:

$$\begin{aligned} J_x &= \iiint\limits_{\Omega} (y^2+z^2)\;\varrho(x,y,z)\; dxdydz\,,\\ J_y &= \iiint\limits_{\Omega} (x^2+z^2)\;\varrho(x,y,z)\; dxdydz\,,\\ J_z &= \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\;\varrho(x,y,z)\; dxdydz\,, \end{aligned}$$

kde $\varrho = \varrho(x,y,z)$ je hustota tělesa v bodě $(x,y,z) \in \Omega$.

Souřadnice těžiště $T = (x_T, y_T, z_T)$ tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$x_T = \frac{M_{yz}}{m}\,, \quad y_T = \frac{M_{xz}}{m}\,, \quad z_T = \frac{M_{xy}}{m}\,.$$

Příklad 4.14 : Vypočtěte souřadnice těžiště tělesa omezeného plochami $x = 0,\ z = 0,\ y = 1,\ y = 3,\ x + 2z = 3$, jestliže hustota tělesa se v každém bodě rovná 1.

$$m = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \int_0^3 \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} dzdydx = \int_0^3 \int_1^3 \frac{3-x}{2}\, dydx =$$
$$= \int_0^3 (3-x)\, dx = \left[3x - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^3 = \tfrac{9}{2}\,.$$

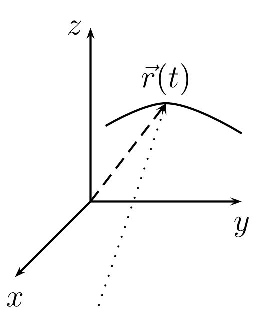
$$x_T = \tfrac{2}{9} \iiint\limits_{\Omega} x\ dxdydz = \tfrac{2}{9} \int_0^3 \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} x\ dzdydx =$$
$$= \tfrac{2}{9} \int_0^3 \int_1^3 x\frac{3-x}{2}\, dydx = \tfrac{2}{9} \int_0^3 x(3-x)\, dx = \tfrac{2}{9}\left[\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 1\,.$$

$$y_T = \tfrac{2}{9} \iiint\limits_{\Omega} y\ dxdydz = \tfrac{2}{9} \int_0^3 \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} y\ dzdydx =$$
$$= \tfrac{1}{9} \int_0^3 \int_1^3 y(3-x)\, dydx = \tfrac{4}{9} \int_0^3 (3-x)\, dx = \tfrac{4}{9}\left[3x - \tfrac{x^2}{2}\right]_0^3 = 2\,.$$

$$z_T = \tfrac{2}{9} \iiint\limits_{\Omega} z\ dxdydz = \tfrac{2}{9} \int_0^3 \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} z\ dzdydx =$$
$$= \tfrac{2}{9} \int_0^3 \int_1^3 \tfrac{(3-x)^2}{8}\, dydx = \tfrac{1}{18}\left[\tfrac{-(3-x)^3}{3}\right]_0^3 = \tfrac{1}{2}\,.$$

5 Křivky

Definice 5.1 : (vektorové funkce)
Nechť $I \subset \mathbb{R}$. Zobrazení $\vec{r}$ z množiny I do $\mathbb{E}_3$, $t \to \vec{r}(t)$, nazýváme **vektorovou funkcí jedné reálné proměnné**. Píšeme $\vec{r}(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$. Funkce r_i, $i = 1,2,3$ nazýváme **souřadnice (složky) vektorové funkce** $\vec{r}$.
[Také píšeme $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.]

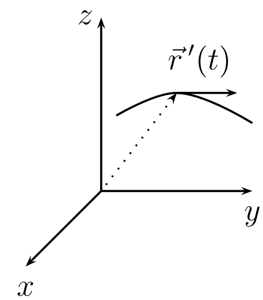


Poznámka 5.1 : V případě, že parametr t je čas, pak množinu koncových bodů polohových vektorů $\vec{r}(t)$ nazýváme **trajektorie** pohybujícího se bodu.

Definice 5.2 : (spojitost a derivace vektorové funkce)
Řekneme, že vektor $\vec{r}_0 \in \mathbb{E}_3$ je **limitou vektorové funkce** $\vec{r} : I \mapsto \mathbb{E}_3$ v bodě t_0, jestliže $\lim\limits_{t\to t_0} \|\vec{r}\,(t) - \vec{r}_0\| = 0$.
Řekneme, že vektorová funkce $\vec{r}$ je **spojitá v bodě** t_0, jestliže $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}\,(t) = \vec{r}\,(t_0)$.
Vektor $\vec{r}\,'(t_0)$ se nazývá **derivace funkce** $\vec{r}$ v bodě t_0 ($\vec{r}$ je derivovatelná (diferencovatelná) v bodě t_0), jestliže

$$\lim_{t\to t_0} \frac{\vec{r}\,(t) - \vec{r}\,(t_0)}{t - t_0} = \vec{r}\,'(t_0) \quad \Big(= \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = (r_1'(t_0), r_2'(t_0), r_3'(t_0))\Big).$$

Funkce $\vec{r}$ je spojitá, derivovatelná na I, jestliže je spojitá, derivovatelná v každém bodě množiny I.



Cvičení 5.1 :

1. Dokažte, že funkce $\vec{r}$ je spojitá (derivovatelná) právě tehdy, když je spojitá (derivovatelná) každá její složka.

2. Analogicky k diferenciálu funkce jedné proměnné nadefinujte diferenciál vektorové funkce a n-tou derivaci funkce $\vec{r}$.

$\vec{r}$ je spojitá v bodě t_0, jestliže $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}\,(t) = \vec{r}(t_0)$
$\Leftrightarrow \quad \lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_i\,(t) = \vec{r}\,(t_0)$, $i = 1, 2, 3$.

Důsledek 5.1 : Z předchozího cvičení vyplývá, že vlastnosti spojitých a derivovatelných funkcí jedné proměnné mají i vektorové funkce.
Například $(\vec{r}\,(t), \vec{s}(t))' = (\vec{r}\,'(t), \vec{s}(t)) + (\vec{s}\,'(t), \vec{r}\,(t))$ nebo $(\vec{r}\,(t) \times \vec{s}(t))' = \vec{r}\,'(t) \times \vec{s}(t) + \vec{s}\,'(t) \times \vec{r}\,(t)$.

Definice 5.3 : (křivka)
Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Množina $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}_3$ se nazývá **jednoduchá křivka**, jestliže je obrazem vektorové funkce $\vec{r}$ zobrazující interval I na množinu $\mathcal{K}$ a platí

i) $\vec{r}$ je spojitá funkce na I,

ii) $\vec{r}$ je prostá na vnitřku I.

Jestliže $I = [\alpha\,,\beta]$ a platí $\vec{r}\,(\alpha) = \vec{r}\,(\beta)$, pak se $\mathcal{K}$ nazývá **uzavřená jednoduchá křivka**.
Jestliže platí $\vec{r} \in C^n(I)$ (tzn. $\vec{r}^{\,(n)}$ (n-tá derivace) je spojitá na I), pak se $\mathcal{K}$ nazývá **jednoduchá křivka třídy** C^n (n-té třídy).
Jestliže $\forall\, t \in I$ platí $\|\vec{r}\,'(t)\| \neq 0$, pak se $\mathcal{K}$ nazývá **regulární jednoduchá křivka**.

Křivka je po částech regulární jednoduchá křivka třídy C^1. (tzn. až na konečně mnoho bodů je $\vec{r}$ spojitě diferencovatelná funkce a $\|\vec{r}\,'(t)\| \neq 0$.)

Proměnná $t \in I$ se nazývá **parametr**, vektor $\vec{r}\,(t) \in \mathbb{E}_3$ se nazývá **průvodič bodu** křivky $\mathcal{K}$ a funkce $\vec{r}$ je její **parametrická reprezentace**.

Příklad 5.1 : Množina $\mathcal{K}$ obrazů funkce $\vec{r}\,(t)$, kde

1. $\vec{r}\,(t) = (t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ je regulární jednoduchá křivka třídy $\mathcal{C}^\infty$.
2. $\vec{r}\,(t) = (t^3, t^3, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ je jednoduchá křivka, která není regulární v bodě $t_0 = 0$, (i když se jedná o stejnou přímku jako v příkladu 1).
3. $\vec{r}\,(t) = (t\,,\,|t|\,,\,0)$, $t \in [-1;1]$ je křivka (až na bod $t_0 = 0$ je regulární a spojitě diferencovatelná).
4. $\vec{r}\,(t) = (a\cos(t)\,,\,b\sin(t)\,,\,0)$, $t \in [0\,,2\pi]$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ je uzavřená, regulární jednoduchá křivka třídy $\mathcal{C}^\infty$ (elipsa).
5. $\vec{r}\,(t) = (c\cos(t),\,c\sin(t),\,bt)\,,\; c > 0\,,\; b > 0\,,\; t \in [0\,,4\pi]$ je regulární jednoduchá křivka třídy $\mathcal{C}^\infty$ (dva závity šroubovice).

Poznámka 5.2: Křivka může být také zadána pomocí explicitních nebo implicitních rovnic.

	Explicitně	Implicitně
v $\mathbb{E}_2$	$y = \sqrt{1-x^2}\,,\ x \in [-1,1]$	$x^2 + y^2 = 1$
v $\mathbb{E}_3$	$y = x, z = x^2\,,\ x \in [0,2]$	$y - x = 0, z - x^2 = 0$

K přechodům mezi jednotlivými popisy křivky se využívá věta o implicitní funkci z MA2.

Cvičení 5.2: Najděte parametrické vyjádření křivky dané rovnicemi $x^2 + y^2 - 1 = 0,\ x + y + z - 1 = 0$, popište její vlastnosti a nakreslete ji.

Definice 5.4: (tečna křivky)
Nechť křivka $\mathcal{K}$ je parametrizovaná funkcí $\vec{r}$. Vektor derivace $\vec{r}\,'(t_0)$ nazýváme **tečný vektor křivky** $\mathcal{K}$ v bodě t_0.
Tečnou křivky $\mathcal{K}$ v bodě $\vec{r}\,(t_0)$ rozumíme přímku
$\vec{y}(\tau) = \vec{r}\,(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)\,\tau\,,\ \tau \in \mathbb{R}$.

Jestliže existuje $\vec{r}\,''(t_0)$ a $\vec{r}\,'(t_0)$, $\vec{r}\,''(t_0)$ jsou lineárně závislé, pak se bod $\vec{r}(t_0)$ nazývá **inflexní bod křivky**.

Příklad 5.2: Najdeme tečnu k hyperbole dané implicitně rovnicí $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ v bodě $B = [1,0]$.

Použijeme parametrickou reprezentaci (jedné větve) hyperboly: $\vec{r}\,(t) = (\cosh t\,,\ \sqrt{2}\sinh t)\,,\ t \in \mathbb{R}$.

V bodě B je $t_0 = 0$ a $\vec{r}\,'(0) = (0, \sqrt{2})$. Rovnice tečny má tedy tvar $\vec{y}(\tau) = [1,0] + (0,\sqrt{2})\,\tau\,,\ \tau \in \mathbb{R}$.

Cvičení 5.3:

Ověřte, zda funkce $F(x,y) = x^2 - \frac{y^2}{2} - 1$ splňuje předpoklady věty o implicitní funkci (z MA2) při řešení funkcionální rovnice $F(x,y) = 0$ v bodě B. Co víte o derivaci případného řešení v bodě $B = [1,0]$?

[Platí $F(B) = 0$, funkce F je spojitá i spojitě diferencovatelná na okolí bodu B a platí $\frac{\partial F}{\partial x}(B) = 2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(B) = 0$. Předpoklad $\frac{\partial F}{\partial y}(B) \neq 0$ tedy není splněn.
Můžeme však využít předpokladu $\frac{\partial F}{\partial x}(B) \neq 0$ a tvrdit, že na okolí $U(0)$ existuje funkce $x = x(y)$, $x : U(0) \to \mathbb{R}$, která řeší funkcionální rovnici $F(x, x(y)) = 0$ a pro derivaci $\frac{\partial x}{\partial y}(B)$ platí: $\frac{\partial x}{\partial y}(B) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(B)}{\frac{\partial F}{\partial x}(B)} = 0$.
Explicitně máme $x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{2}}$ a $\frac{dx}{dy}\Big|_0 = \frac{y}{2\sqrt{1+\frac{y^2}{2}}}\Big|_0 = 0$.]

Půlkružnici ležící pod osou x se středem v počátku a poloměrem $\varrho = 1$ lze parametrizovat vztahy $x = t\,,\ y = -\sqrt{1-t^2}\,,$ $t \in [-1\,,\,1]$ nebo také $x = \cos s\,,\ y = \sin s\,,$ $s \in [\pi\,,\,2\pi]\,,$ nebo-li $t = \varphi(s) = \cos s\,.$

Věta 5.1 : (transformace parametru)
Nechť $\varphi : I^* \to I$ je spojitě diferencovatelná funkce z intervalu I^* na interval I taková, že $\forall\, s \in I^* : \varphi'(s) \neq 0$. Potom funkce $\vec{r}\,(\varphi(s))\colon I^* \to \mathcal{K}$ je opět parametrickou reprezentací křivky $\mathcal{K}$.

Důkaz : Složením funkcí $\vec{r}$ a φ vznikne po částech regulární spojitě diferencovatelná vektorová funkce. Zbývá ukázat, že je prostá. Z předpokladu $\varphi'(s) \neq 0$ na I^* plyne, že buď $\varphi'(s) > 0$ nebo $\varphi'(s) < 0$ na I^*. Odtud plyne, že funkce φ je ostře monotónní, tedy prostá a složením dvou prostých funkcí vznikne opět prostá funkce.

Cvičení 5.4 : Dokažte, že za předpokladů věty 5.1 existuje k funkci $\varphi : I^* \to I$ inverzní funkce $\varphi^{-1} : I \to I^*$, pro kterou platí $(\varphi^{-1})'(t) \neq 0$, $\forall\, t \in I$. Můžeme tedy provést i zpětnou transformaci parametru $s = \varphi^{-1}(t)\,.$

V literatuře se také uvádí, že křivka $\mathcal{K}$, která má délku d, je **rektifikovatelná** křivka.

Definice 5.5 : (délka křivky)
Máme křivku $\mathcal{K} = \{\vec{r}\,(t) :\ t \in [\alpha, \beta]\}$. Číslo **d** se nazývá **délka křivky** $\mathcal{K}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $\mathcal{D} = \{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta\}$ intervalu $[\alpha, \beta]$ s normou dělení $\nu(\mathcal{D}) = \max\limits_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} (t_k - t_{k-1}) < \delta$, $n \in \mathbb{N}$, platí:

$$\left|\ \sum_{k=1}^{n} \|\vec{r}\,(t_k) - \vec{r}\,(t_{k-1})\| - d\ \right| < \varepsilon\,.$$

Pro délku d křivky $\mathcal{K}$ platí:

$$d = \int_{\alpha}^{\beta} \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r_1'(t))^2 + (r_2'(t))^2 + (r_3'(t))^2}\, dt\,. \qquad (1)$$

Položíme-li

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} \|\vec{r}\,'(\tau)\|\, d\tau\,, \qquad (2)$$

potom funkce $s\colon [\alpha, \beta] \to I^*$ je rostoucí, spojitá a existuje k ní inverzní funkce $\varphi\colon I^* \to [\alpha, \beta]$. Položíme $t = \varphi(s)$ a dostaneme novou parametrizaci křivky $\mathcal{K}$.

Také hovoříme o parametrizaci obloukem.

Hovoříme o **přirozené parametrizaci** křivky. Parametr **s** se nazývá **oblouková délka**.

<u>*Cvičení 5.5*</u> :

a) Ověřte, že funkce $s = s(t)$ ze vztahu (2) je rostoucí a spojitě diferencovatelná. $[\, \frac{ds}{dt} = \|\vec{r}\,'\| \geq 0 \,]$

b) Ukažte, že pro derivaci vektorové funkce $\vec{r}$ podle obloukové délky s platí

$$\|\dot{\vec{r}}(s)\| = \left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\| = 1\,.$$

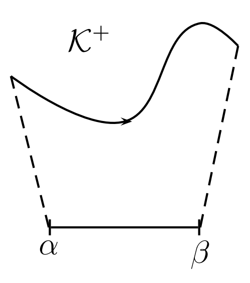
$[\, \left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|\frac{1}{\|\vec{r}\,'\|} = 1 \,]$

Derivace podle obloukové délky (oblouku) se obvykle značí tečkou. Vektor $\dot{\vec{r}}(s)$ je jednotkový tečný vektor křivky $\mathcal{K}$.

6 Křivkové integrály, Greenova věta

6.1 Křivkové integrály

Orientace indukovaná parametrizací



Kladně orientovaná uzavřená křivka

Definice 6.1 : (orientace křivky)
Řekneme, že křivka $\mathcal{K} = \{\vec{r}(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ má **orientaci**, jestliže má počáteční a koncový bod.
Jestliže $\vec{r}(\alpha)$ je počáteční a $\vec{r}(\beta)$ je koncový bod, pak má křivka $\mathcal{K}$ **kladnou orientaci**, značíme $\mathcal{K}^+$. Hovoříme o orientaci, která je **indukovaná parametrizací**. V opačném případě hovoříme o **záporné orientaci**, značíme $\mathcal{K}^-$.

U uzavřené křivky $\mathcal{K}$, která je hranicí množiny $\Omega \subset \mathbb{E}_2$ ($\partial\Omega = \mathcal{K}$) hovoříme o **kladné orientaci**, pokud při obíhání křivky ve směru orientace zůstává množina Ω po levé straně (oběh proti směru hodinových ručiček).

Definice 6.2 : (křivkové integrály)
Mějme křivku $\mathcal{K} = \{\vec{r}\,(t) \ : \ t \in [\alpha, \beta]\}$ s orientací indukovanou parametrizací. Nechť $\mathcal{D} = \{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta\}$ je dělení intervalu $[\alpha, \beta]$, potom body $\vec{r}\,(t_k)\,,\ k = 0, 1, \ldots, n$ tvoří dělení $\mathcal{D}(\mathcal{K})$ křivky $\mathcal{K}$.
Označíme $\triangle\vec{r}_k = \vec{r}\,(t_k) - \vec{r}\,(t_{k-1})\,,\ \triangle r_{ki} = r_i(t_k) - r_i(t_{k-1})\,,$ $\triangle s_k = \|\triangle\vec{r}_k\|\,,\ i = 1, 2, 3,\ k = 1, \ldots, n\,.$ K funkci $f\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ definujeme **integrální součty** rovnostmi

$$J(f, \mathcal{D}(\mathcal{K})) = \sum_{k=1}^{n} f(\vec{r}\,(\xi_k))\,\triangle s_k\,,$$

$$J_i(f, \mathcal{D}(\mathcal{K}^+)) = \sum_{k=1}^{n} f(\vec{r}\,(\tau_k))\,\triangle r_{ki}\,, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

kde $t_{k-1} \le \tau_k, \xi_k \le t_k\,,\ k = 1, 2, \ldots, n\,.$
Jestliže níže uvedené limity existují, pak **křivkový integrál 1. druhu** definujeme vztahem

$$\int\limits_{\mathcal{K}} f(\vec{r}\,)\,ds = \lim_{\max\limits_k \triangle s_k \to 0} J(f, \mathcal{D}(\mathcal{K}))\,, \tag{1}$$

a **křivkový integrál 2. druhu** definujeme vztahem:

$$\int\limits_{\mathcal{K}^+} f(\vec{r}\,)\,dr_i = \lim_{\max\limits_k \triangle s_k \to 0} J_i(f, \mathcal{D}(\mathcal{K}^+))\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{2}$$

Poznámka 6.1 :
Integrál přes uzavřenou křivku se značí $\oint\limits_{\mathcal{K}} f(\vec{r}\,)\,ds\,.$
Použijeme-li značení $\vec{r} = (x, y, z)$, pak pro $i = 1$ dostaneme pro křivkový integrál druhého druhu zápis $\int\limits_{\mathcal{K}^+} f(x, y, z)\,dx$ a křivkový integrál prvního druhu má tvar $\int\limits_{\mathcal{K}} f(x, y, z)\,ds\,.$

Podobně jako integrál funkce jedné reálné proměnné vyjadřuje "plochu pod grafem funkce", pomocí křivkového integrálu prv-

Křivkové integrály 1.druhu

Věta 6.1 : (výpočet křivkových integrálů)
Nechť $\mathcal{K} = \{\vec{r}\,(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ je orientovaná křivka a funkce $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ je spojitá, potom níže uvedené křivkové integrály existují a platí

$$\int\limits_{\mathcal{K}} f(\vec{r}\,)\, ds = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\vec{r}\,(t)) \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt\,, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\mathcal{K}^+} f(\vec{r}\,)\, dr_i = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\vec{r}\,(t))\, r_i'(t)\, dt\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{4}$$

Křivkové integrály 2.druhu

Poznámka 6.2:

1. Z definice křivkového integrálu vyplývá, že splňuje následující vztahy

   i) $\int\limits_{\mathcal{K}} (af + bg)\, ds = a \int\limits_{\mathcal{K}} f\, ds + b \int\limits_{\mathcal{K}} g\, ds\,, \quad a, b \in \mathbb{R}$

   ii) $\int\limits_{\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2} f\, ds = \int\limits_{\mathcal{K}_1} f\, ds + \int\limits_{\mathcal{K}_2} f\, ds\,.$

2. Pro křivkový integrál 2. druhu platí

   $\int\limits_{\mathcal{K}^+} f(\vec{r}\,)\, dr_i = - \int\limits_{\mathcal{K}^-} f(\vec{r}\,)\, dr_i\,.$

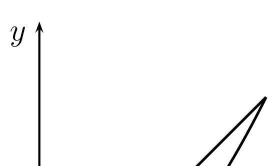
3. Jestliže křivka $\mathcal{K}^+$ leží na ploše dané grafem funkce $z = z(x, y)$ a $\mathcal{K}^+_{xy}$ je ortogonální průmět křivky $\mathcal{K}^+$ do roviny-xy, potom platí

   $\int\limits_{\mathcal{K}^+} f(\vec{r}\,)\, dx = \int\limits_{\mathcal{K}^+} f(x, y, z)\, dx = \int\limits_{\mathcal{K}^+_{xy}} f(x, y, z(x, y))\, dx\,.$

4. Křivkový integrál 2. druhu se často používá ve tvaru

   $\int\limits_{\mathcal{K}^+} \vec{v}\, d\vec{r} = \int\limits_{\mathcal{K}^+} v_1\, dr_1 + v_2\, dr_2 + v_3\, dr_3 = \int\limits_{\mathcal{K}^+} v_1\, dx + v_2\, dy + v_3\, dz = \int\limits_{\mathcal{K}^+} \vec{v}\, d\vec{s}$, kde $\vec{v} : \mathcal{K} \to \mathbb{E}_3$ je vektorová funkce.

Například pro výpočet práce, kterou vykoná síla $\vec{F}$ po dráze $\vec{s}$.



Příklad 6.1 : Nechť $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, kde $\mathcal{K}_1$ je část paraboly $y = x^2$, $x \in [0, 1]$, $\mathcal{K}_2$ je úsečka $y = x$, $x \in [0, 1]$. Vypočítáme statický moment S_y křivky $\mathcal{K}$ vzhledem k ose y, tj. $S_y = \int\limits_{\mathcal{K}} x\, ds\,.$

Zřejmě $\int\limits_{\mathcal{K}} x\, ds = \int\limits_{\mathcal{K}_1} x\, ds + \int\limits_{\mathcal{K}_2} x\, ds.$

Parametrizujeme-li křivky: $\mathcal{K}_1$ pomocí funkce $\vec{r}_1(t) = (t, t^2)$;

$\mathcal{K}_2$ pomocí funkce $\vec{r}_2(t) = (t,t)$, $t \in [0,1]$, potom

$$\int_{\mathcal{K}_1} x\,ds = \int_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\,dt = \left[\begin{array}{ccc} u & = & 1+4t^2 \\ du & = & 8t\,dt \end{array}\right] = \tfrac{1}{8}\int_1^5 \sqrt{u}\,du$$

$$= \tfrac{1}{8}\Big[\tfrac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big] = \tfrac{1}{12}(5^{\frac{3}{2}}-1) = \tfrac{5\sqrt{5}-1}{12}\,; \quad \int_{\mathcal{K}_2} x\,ds = \int_0^1 t\sqrt{2}\,dt = \tfrac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Odtud vyplývá, že statický moment $S_y = \frac{5\sqrt{5}-1}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Poznamenejme, že pokud křivku lze popsat pomocí grafu funkce $y = y(x)$, pak $ds = \sqrt{(\,dx)^2 + (\,dy)^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\,dx$.

Odtud plyne $\int_{\mathcal{K}} f(x,y)\,ds = \int_{x_0}^{x_1} f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x)^2)}\,dx$.
Tedy pro $\mathcal{K}_1 : y = x^2$ a $\mathcal{K}_2 : y = x$, $x \in [0,1]$ dostaneme

$$S_y = \int_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\;dx + \int_0^1 x\sqrt{1+(1)^2}\;dx\,.$$

<u>*Cvičení 6.1*</u>:

1. Vypočítejte $\int_{\mathcal{K}} \vec{v}\,d\vec{s} = \int_{\mathcal{K}} x^2y\,dx + (x-2)\,dy + xy^2\,dz$, kde $\mathcal{K} = (x,x^2,2)$ s počátečním bodem $A = [0,0,2]$ a koncovým bodem $B = [1,1,2]$.

   $[\int_0^1 x^2x^2\,dx + (x-2)\cdot 2x\,dx = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 2 = -\frac{17}{15}\,]$

2. Vypočítejte stejný integrál jako v předchozím příkladě pro $\mathcal{K} = (x,x,2)$ opět od $A = [0,0,2]$ do $B = [1,1,2]$.

   $[\int_0^1 x^3\,dx + (x-2)\,dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{4}\,]$

Výše uvedené příklady ukazují, že křivkový integrál závisí na cestě $\mathcal{K}$, po které jdeme z bodu A do bodu B. Nezávislost na cestě budeme diskutovat v kapitole 7.

<u>*Cvičení 6.2*</u>:

V rovině $\mathbb{E}_2$ stanovte délku d jednoho oblouku cykloidy $\mathcal{K}$ daného rovnicemi:

$x = \varrho(t - \sin t)$, $\varrho \in \mathbb{R}$

$y = \varrho(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$$[d = \int_{\mathcal{K}} ds = \int_0^{2\pi} \varrho\sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}\,dt = \varrho\int_0^{2\pi}\sqrt{2-2\cos t}\,dt =$$

$$2\varrho\int_0^{2\pi} \sin\tfrac{t}{2}\,dt = -4\varrho\big[\cos\tfrac{t}{2}\big]_0^{2\pi} = 8\varrho.\,]$$

Definice 6.3 : (cirkulace vektorového pole)
Mějme kladně orientovanou uzavřenou křivku $\mathcal{K}$ a vektorové pole $\vec{v} : \mathcal{K} \to \mathbb{E}_3$, potom píšeme $\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{v}(\vec{r}\,)\, d\vec{r} = \oint\limits_{\mathcal{K}} \vec{v}\, d\vec{r}$ a hovoříme o **cirkulaci vektorového pole** $\vec{v}$ po uzavřené křivce $\mathcal{K}$.

<u>*Příklad 6.2*</u> :

Uvažujeme hmotný bod, na který působí síla $\vec{F}$ po dráze (křivce) $\mathcal{K}$ určené vektorovou funkcí $\vec{r}\,(t)$, kde t je nyní čas. Potom vykonaná práce W je dána vztahem:

$W = \int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F}\, d\vec{r} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}\,(t)) \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$, kde t_0, t_1 jsou počáteční a konečný čas pokusu. Položíme $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, pak $\vec{v}$ je rychlost hmotného bodu. Z druhého Newtonova zákona vyplývá, že $\vec{F} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{v}\,'$ a můžeme psát

$W = \int\limits_{t_0}^{t_1} m\vec{v}\,'\vec{v}\; dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} m \frac{d}{dt}\frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\; dt = \frac{1}{2}\, m \big[\|\vec{v}(t)\|^2\big]_{t_0}^{t_1} =$

$\frac{1}{2}\, m \Big(\|\vec{v}(t_1)\|^2 - \|\vec{v}(t_0)\|^2 \Big).$

6.2 Greenova věta

Definice 6.4 : (křivkově souvislá a jednoduše souvislá množina)
Množina $\Omega \subset \mathbb{E}_2$ se nazývá **křivkově souvislá**, jestliže každé dva její body lze spojit křivkou ležící v Ω.
Množina $\Omega \subset \mathbb{E}_2$ se nazývá **jednoduše souvislá**, jestliže její hranice $\partial\Omega$ je tvořena jednou uzavřenou křivkou.

Věta 6.2 : (Greenova věta v rovině)
Nechť $\mathcal{K}^+$ je kladně orientovaná uzavřená křivka, která tvoří hranici jednoduše souvislé množiny $\Omega \subset \mathbb{E}_2$, $(\partial\Omega^+ = \mathcal{K}^+)$. Nechť funkce f_1, f_2 mají spojité parciální derivace na $\overline{\Omega}$, píšeme $f_1,\ f_2 \in C^1(\overline{\Omega})$, $(\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega)$, potom platí

$$\iint\limits_{\Omega} \left(-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x} \right) dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega^+} f_1\, dx + f_2\, dy\,. \qquad (5)$$

<u>Důkaz</u> : Nejdříve uvažujeme množinu Ω **popsatelnou funkcemi**, tedy existují funkce $y_1(x)$, $y_2(x) : [a, b] \to \mathbb{R}$

Množina popsatelná funkcemi

a funkce $x_1(y), x_2(y) : [c,d] \to \mathbb{R}$ takové, že $\forall\,[x,y] \in \Omega$ platí: Jestliže $a \le x \le b$, pak $y_1(x) \le y \le y_2(x)$ a zároveň, jestliže $c \le y \le d$, pak $x_1(y) \le x \le x_2(y)$. Potom z Fubiniovy věty pro dvojný integrál vyplývá

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\Omega} -\frac{\partial f_1}{\partial y}\,dxdy &= \int\limits_a^b \Bigg(-\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial f_1}{\partial y}\,dy\Bigg)\,dx \\
&= \int\limits_a^b \big[f_1(x,y_1(x)) - f_1(x,y_2(x))\big]\,dx \\
&= \int\limits_a^b f_1(x,y_1(x))\,dx + \int\limits_b^a f_1(x,y_2(x))\,dx\,.
\end{aligned}$$

Protože grafy funkcí y_1, y_2 tvoří hranici $\partial\Omega^+$ (u funkce y_2 jdeme po grafu z bodu $[b, y_2(b)]$ do bodu $[a, y_2(a)]$), můžeme poslední dva integrály brát jako křivkové integrály po hranici $\partial\Omega^+$. Tedy

$$\iint\limits_{\Omega} -\frac{\partial f_1}{\partial y}\,dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega^+} f_1\,dx\,. \tag{6}$$

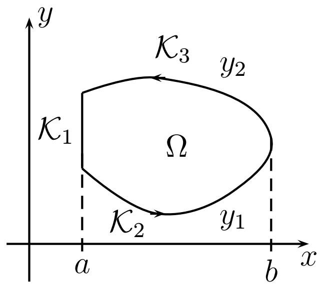
Podobně odvodíme

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x}\,dxdy = \int\limits_c^d \Bigg(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f_2}{\partial x}\,dx\Bigg)\,dy \tag{7}$$

$$= \int\limits_c^d f_2(x_2(y),y)\,dy + \int\limits_d^c f_2(x_1(y),y)\,dy = \oint\limits_{\partial\Omega^+} f_2\,dy\,.$$

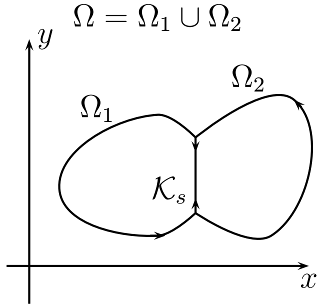
Sečtením vztahů (6) a (7) dostaneme tvrzení věty.

Část hranice rovnoběžná s osou



obr. 2

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$



obr. 3

V případě, že část $\mathcal{K}_1$ hranice $\partial\Omega^+$ je rovnoběžná s osou y jako na obrázku 2, pak zřejmě $\int\limits_{\mathcal{K}_1} f(x,y)\,dx = 0$.

Greenova věta tedy platí i pro oblast Ω z obrázku 2, neboť $\int\limits_{\partial\Omega^+} f(x,y)\,dx = \int\limits_{\mathcal{K}_1} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\mathcal{K}_2} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\mathcal{K}_3} f(x,y)\,dx =$

$\int\limits_a^b f(x, y_1(x))\,dx + \int\limits_b^a f(x, y_2(x))\,dx.$

V případě, že množinu Ω nelze rovnou popsat funkcemi, pak Greenova věta platí, pokud se Ω podaří rozdělit na konečný počet množin omezených funkcemi, viz obrázek 3.

Díky opačné orientaci se hodnoty křivkových integrálů přes společnou hranici $\mathcal{K}_s$ odečtou a platí $\oint\limits_{\partial\Omega} = \oint\limits_{\partial\Omega_1} + \oint\limits_{\partial\Omega_2}$.

6.3 Důsledky Greenovy věty

Jakobián $|\det \mathbf{J}_\Phi|$ popisuje deformaci plochy při zobrazení Φ. Například funkce $\Phi\colon x = u+v,\ y = u+v$ má $|\det \mathbf{J}_\Phi| = 0$ a zobrazí celou rovinu na přímku $y = x$.

Důsledek 6.1: 1. (Výpočet plochy)
Nechť množina Ω splňuje předpoklady Greenovy věty, pak velikost její plochy meas (Ω) můžeme spočítat ze vztahu:

$$\operatorname{meas}(\Omega) = \frac{1}{2} \oint\limits_{\partial\Omega^+} x\,dy - y\,dx\,. \tag{8}$$

Důsledek 6.2: 2. (Jakobián)
Nechť $\Phi : x = r_1(u,v), y = r_2(u,v)$ je regulární transformace z oblasti Ω_{uv} do oblasti Ω_{xy}, (tzn. $\det \mathbf{J}_\Phi \neq 0$).
Nechť $\Omega_1 \subset \Omega_{uv}$ a $\Phi(\Omega_1) = \Omega \subset \Omega_{xy}$, pak platí:

$$\operatorname{meas}\Omega = \oint\limits_{\partial\Omega^+} x\,dy = \pm \oint\limits_{\partial\Omega_1^+} r_1 \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial u}\,du + \frac{\partial r_2}{\partial v}\,dv \right) =$$

$$= \pm \iint\limits_{\Omega_1} \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(r_1 \cdot \frac{\partial r_2}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(r_1 \cdot \frac{\partial r_2}{\partial u} \right) \right) du\,dv =$$

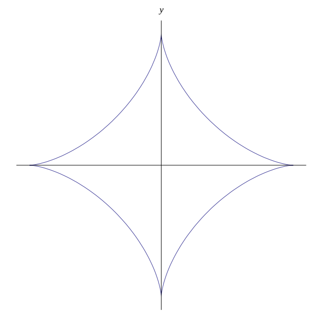
$$= \pm \iint\limits_{\Omega_1} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial u} \right) du\,dv =$$

$$\pm \iint\limits_{\Omega_1} \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial v} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv \Rightarrow \frac{\operatorname{meas}\Omega}{\operatorname{meas}\Omega_1} \approx |\det \mathbf{J}_\Phi|\,.$$

<u>*Příklad 6.3*</u> :

Využijeme vztah 8 k výpočtu vnitřku asteroidy, která je dána implicitně rovnicí $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, kde $a > 0$, nebo parametricky $\vec{r}(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t, 0), t \in (0, 2\pi)$. Vzhledem k symetrii asteroidy stačí uvažovat $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ a výsledek vynásobit čtyřmi. Tedy pro plochu S platí

Asteroida



$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\, a\cos^3 t\, 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t\, 3a\cos^2 t\sin t\,]\, dt =$$

$$6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\, \sin^2 t\cos^2 t\,]\, dt = \frac{3}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\, dt = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

<u>*Cvičení 6.3*</u> :

a) Pomocí vztahu (8) spočítejte plochu elipsy.

[πab .]

b) Převeďte vztah (8) do polárních souřadnic.

[$\operatorname{meas}\Omega = \frac{1}{2}\oint\limits_{\partial\Omega^+} r^2(\varphi)\, d\varphi$.]

7 Operátory skalárních a vektorových polí

Podrobnější informace o gradientu naleznete ve skriptech MA2.

Definice 7.1 : (gradient)
Nechť $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{E}_3$, $f = f(x,y,z)$, $A \in D$, je diferencovatelné skalární pole (neboli diferencovatelná funkce tří reálných proměnných), potom vektor

$$\operatorname{grad} f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), \frac{\partial f}{\partial z}(A) \right)$$

se nazývá **gradient** skalární funkce f v bodě A.

Poznámka 7.1 :

1. Pro derivaci funkce f podle vektoru $\vec{s}$ v bodě A platí $\lim\limits_{t \to 0} \frac{f(A+t\vec{s})-f(A)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A)$ ($= \operatorname{grad} f(A) \cdot \vec{s}$, jestliže f je diferencovatelná).

2. Zavedeme-li (vektorový) diferenciální operátor **nabla**
$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$
pak píšeme $\operatorname{grad} f = \nabla f$.

   Operátor ∇ se také nazývá **Hamiltonův operátor** .

3. Směr největšího růstu funkce f z bodu $A = [x_0, y_0, z_0]$ popisuje vektor $\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} f(A)}{\|\operatorname{grad} f(A)\|}$. Vektor $\vec{n}$ je kolmý k hladině $S = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 \, : \, f(x,y,z) = f(A)\}$.

   Zároveň je $\vec{n}$ jednotkový normálový vektor tečné nadroviny ϱ k hladině S v bodě A . Rovina ϱ je určena rovností
   $\frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(A)(z - z_0) = 0$.

Cvičení 7.1 :

Najděte v bodě $A = [1,1,3]$ tečnou rovinu ke kuželu, který je zadán rovnicí $z^2 = \frac{9}{2}(x^2 + y^2)$.

[Kužel je nulovou hladinou funkce $f = \frac{9}{2}(x^2 + y^2) - z^2$. Platí $\operatorname{grad} f = (9x, 9y, -2z)$ a normálový vektor v bodě A je $\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} f(A)}{\|\operatorname{grad} f(A)\|} = \frac{(9,9,-6)}{\sqrt{9^2+9^2+6^2}} = \frac{(3,3,-2)}{\sqrt{22}}$. Tečná rovina má tedy tvar $\varrho :\ 3(x-1) + 3(y-1) - 2(z-3) = 0$.]

Příklad 7.1: (Příklad 5.2 jinak) Uvažujeme funkci $f(x,y) = x^2 - 2y^2 - 1$, potom hladina $S = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : f(x,y) = 0\}$ je křivka z příkladu 5.2. Najdeme tečný a normálový vektor k hladině S v bodě $B = [1,0]$.

Gradientem funkce f v bodě B je vektor $\operatorname{grad} f(B) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(B), \frac{\partial f}{\partial y}(B)\right) = (2x, -4y)|_B = (2,0)$. Jednotkový normálový vektor k hladině S v bodě B je $\vec{n} = (1,0) = \frac{\nabla f(B)}{\|\nabla f(B)\|}$. Tečný vektor v bodě B je podle příkladu 5.2 vektor $\vec{r}\,'(0) = (0, \sqrt{2})$. Platí $\vec{r}\,'(0) \cdot \vec{n} = 0$.

Poznámka 7.2: Obecně každá přímka $p : B + t \cdot \vec{v}$, pro kterou $\vec{v} \cdot \vec{r}\,' = 0$ a $\vec{r}\,'$ je tečný vektor ke křivce v bodě B, se nazývá **normálová přímka křivky**.

Definice 7.2 : (vnější normálový vektor)
Nechť uzavřená křivka $\mathcal{K}^+ = \{\vec{r}(t) : t \in I\}$ je hranicí množiny $\Omega \subset \mathbb{E}_2$. Potom $\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ je tečný vektor ke hranici $\partial\Omega$ v bodě $\vec{r}(t_0)$ a vektor

$$\vec{n} = \frac{(y'(t_0), -x'(t_0))}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}}$$

se nazývá **vnější normálový vektor** množiny Ω.

Vnější normálový vektor množiny Ω směřuje ven z množiny Ω.

Definice 7.3 : (divergence)
Nechť vektorová funkce $\vec{v} \colon \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ je diferencovatelná, potom funkce

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

se nazývá **divergence** funkce $\vec{v}$ (nebo divergence vektorového pole definovaného funkcí $\vec{v}$).

Použijeme-li Hamiltonův operátor, pak

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}.$$

Operátor $\nabla \cdot \nabla f = \triangle f$ se nazývá Laplasián, platí

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Také se používá značení $\triangle f = \nabla^2 f$.

Poznámka 7.3: Pokud funkce $\vec{v}$ popisuje rychlost tekutiny, potom $\operatorname{div} \vec{v}$ představuje objem tekutiny, která vyteče z jednotky objemu tekutiny za jednotku času.

Cvičení 7.2: Položte $\vec{v} = (f_2, -f_1)$ a dokažte, že Greenova věta má tvar $\iint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v}\; dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega^+} \vec{v}\,\vec{n}\, ds$, kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor vnější normály a s je oblouková délka.
$[\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ a $\vec{v}\,\vec{n}\, ds = (f_2, -f_1) \cdot \frac{\left(\frac{dy}{dt}, -\frac{dx}{dt}\right)}{\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}\, ds = (f_2, -f_1) \cdot \left(\frac{dy}{dt}, -\frac{dx}{dt}\right) \frac{dt}{ds}\, ds = f_1 dx + f_2 dy\,]$

Poznámka 7.4: (nezřídlové pole)
Pro nestlačitelné tekutiny je div $\vec{v} = 0$ (tzv. nezřídlové pole) a z předchozího cvičení plyne, že platí vztah

$$\oint\limits_{\partial\Omega^+} \vec{v}\,\vec{n}\, ds = 0\,,$$

který tvrdí, že "co vteče, to vyteče".

V literatuře se často setkáme se značením $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$, potom $\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$.

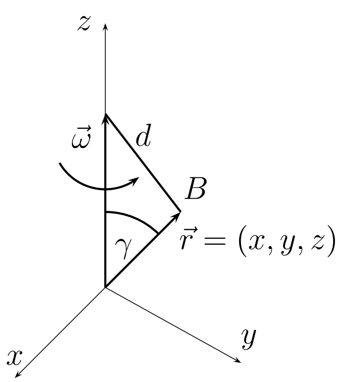
Definice 7.4 : (rotace)
Nechť vektorová funkce $\vec{v}\colon \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ je diferencovatelná funkce, potom vektorová funkce

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \left(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$$

se nazývá **rotace** funkce $\vec{v}$ (nebo rotace vektorového pole $\vec{v}$).
Pro lepší zapamatování píšeme rotaci ve tvaru

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Poznámka 7.5: (fyzikální význam rotace)
Máme tuhé těleso, které se otáčí kolem osy otáčení o (je totožná se souřadnou osou z) konstantní úhlovou rychlostí ω .
Zvolíme vektor $\vec{\omega}$ takový, že $\|\vec{\omega}\| = \omega$, $\vec{\omega} = (0,0,\omega)$ a při pohledu ve směru vektoru $\vec{\omega}$ se těleso otáčí proti směru hodinových ručiček (pravotočivý systém).
Označíme d vzdálenost bodu B otáčejícího se tělesa od osy otáčení o, potom rychlost $\vec{v}$ otáčení bodu B má velikost $\omega\, d$.
Jestliže vektor $\vec{r} = (x,y,z)$ je průvodič bodu B, potom $d = \|\vec{r}\| \sin\gamma$, kde γ je úhel vektorů $\vec{r}$ a $\vec{\omega}$. Odtud plyne $\omega\, d = \|\vec{\omega}\|\,\|\vec{r}\| \sin\gamma = \|\vec{\omega} \times \vec{r}\|$.
Zároveň $\vec{v} \perp \vec{\omega}$, $\vec{v} \perp \vec{r}$ a vektory $\vec{\omega}, \vec{r}, \vec{v}$ tvoří pravotočivý systém. Tedy $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{v} = (0,0,\omega) \times (x,y,z) = (-\omega y, \omega x, 0)$ a $\operatorname{rot}\vec{v} = (0,0,2\,\omega)$.
Odtud vyplývá, že pro vektorové pole $\vec{\omega}$ popisující rychlost bodů otáčejícího se tělesa platí



$$\operatorname{rot}\vec{v} = 2\,\vec{\omega}\,.$$

<u>*Cvičení 7.3*</u> :

a) Dokažte, že platí $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$.

b) Dokažte, že platí $\operatorname{div}(f\,\vec{v}\,) = \operatorname{grad} f \cdot \vec{v} + f \cdot \operatorname{div} \vec{v}$.

c) Dokažte, že platí $\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v}\,) = \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v} - \vec{u} \cdot \operatorname{rot} \vec{v}$.

d) Dokažte, že Greenovu větu lze psát ve tvaru

$$\iint\limits_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{v} \cdot \vec{e}_3 \; dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega^+} \vec{v} \cdot \vec{\tau} \; ds \,,$$

kde $\vec{\tau}$ je jednotkový tečný vektor ke hranici $\partial\Omega$, s je oblouková délka a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

$[\operatorname{rot} \vec{v}\, \vec{e}_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$ a $\vec{\tau} = \frac{\vec{r}\,'}{\|\vec{r}\,'\|} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, 0\right)}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} = \frac{(dx, dy, 0)}{ds} \Rightarrow$ $(v_1, v_2, v_3)\, \frac{(dx, dy, 0)}{ds}\, ds = v_1\, dx + v_2\, dy\,]$

8 Plochy

Definice 8.1 : (plocha v $\mathbb{E}_3$)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{E}_2$ je jednoduše souvislá množina jejíž hranice $\partial\Omega$ je tvořena křivkou konečné délky.
Množina $S \subset \mathbb{E}_3$ se nazývá **jednoduchá plocha**, jestliže je obrazem vektorové funkce $\vec{r}$ zobrazující množinu Ω na množinu S ($S = \{\vec{r}\,(u,v) = (r_1(u,v), r_2(u,v), r_3(u,v)) : [u,v] \in \Omega\}$) a platí

i) $\vec{r}$ je spojitá funkce na Ω,

ii) $\vec{r}$ je prostá na vnitřku Ω.

Jestliže $\Omega = \overline{\Omega}$ (tj. Ω je uzavřená) a kromě konečně mnoha bodů platí $\forall\, [u_0, v_0] \in \partial\Omega\ \exists\, [u_1, v_1] \in \partial\Omega$, $[u_1, v_1] \neq [u_0, v_0]$ takové, že $\vec{r}\,([u_0, v_0]) = \vec{r}\,([u_1, v_1])$, pak se S nazývá **uzavřená jednoduchá plocha**.
Jestliže platí $\vec{r} \in C^n(\Omega)$ (tzn. $\vec{r}^{\,(n)}$ (n-tá derivace) je spojitá na Ω), pak se S nazývá **jednoduchá plocha třídy** C^n (n-té třídy).
Jestliže $\forall\, [u,v] \in \Omega$ platí

Vektory $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$ jsou tedy lineárně nezávislé.

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u,v) \neq \vec{o}\,,$$

pak se S nazývá **regulární jednoduchá plocha**.

Například povrch kužele je plocha.

Jestliže S je křivkově souvislá množina, kterou můžeme rozdělit na konečný počet regulárních jednoduchých ploch třídy C^1, pak se S nazývá **po částech hladká plocha**, zkráceně **plocha**.

Proměnné u, v se nazývají **parametry**, vektor $\vec{r}\,(u_0, v_0)$ se nazývá **průvodič bodu** plochy S a funkce $\vec{r}$ je její **parametrická reprezentace**.
Obraz hranice $\partial\Omega$, tedy množina

$$\partial S = \{\vec{r}\,(u,v) : [u,v] \in \partial\Omega\}$$

se nazývá **okraj plochy** S.

<u>*Příklad 8.1*</u> : Povrch koule je uzavřená (hladká plocha), povrch krychle je uzavřená po částech hladká plocha.

Definice 8.2 : (parametrické křivky)
Nechť $S = \{\vec{r}\,(u,v) : [u,v] \in \Omega\}$ je plocha.
Křivka $\mathcal{K}_u = \{\vec{r}\,(u,v_0) : [u,v_0] \in \Omega\,,\ v_0$ je konstantní$\}$ se nazývá **u-křivka** na ploše S.
Křivka $\mathcal{K}_v = \{\vec{r}\,(u_0,v) : [u_0,v] \in \Omega\,,\ u_0$ je konstantní$\}$ se nazývá **v-křivka** na ploše S.

Příklad 8.2 : (parametrická reprezentace sféry)

Povrch koule, tedy sféra má parametrickou reprezentaci

$\vec{r}\,(u,v) = (\varrho\cos u\cos v, \varrho\sin u\cos v, \varrho\sin v)$, kde $\varrho \in \mathbb{R}^+$ je konstantní a $\Omega = \{[u,v] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}\}$.

Parametrické křivky mají tvar

$\mathcal{K}_u = (\varrho\cos u\cos v_0, \varrho\sin u\cos v_0, \varrho\sin v_0)$ - u-křivka ("rovnoběžka")

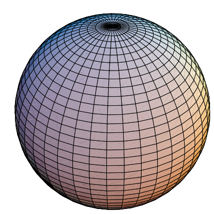
$\mathcal{K}_v = (\varrho\cos u_0\cos v, \varrho\sin u_0\cos v, \varrho\sin v)$ - v-křivka ("poledník")

a jejich tečné vektory jsou

$\vec{r}_u = \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = (-\varrho\sin u\cos v_0, \varrho\cos u\cos v_0, 0)$ (ke $\mathcal{K}_u$),

$\vec{r}_v = \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = (-\varrho\cos u_0\sin v, -\varrho\sin u_0\sin v, \varrho\cos v)$ (ke $\mathcal{K}_v$).

Koule s parametrickými křivkami



Vektorový součin těchto vektorů má tvar

$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (\varrho^2\cos u\cos^2 v, \varrho^2\sin u\cos^2 v, \varrho^2\sin v\cos v)$.

Označíme $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|}$, pak trojice vektorů $(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n})$ tvoří pravotočivý systém a vektor $\vec{n}$ je jednotkový vektor vnější normály k ploše S (směřuje ven).

Cvičení 8.1 :

1. Nechť $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - \varrho^2$. Čím je tvořena nulová hladina $f(x,y,z) = 0$ a jaký je vztah $\operatorname{grad} f$ a vektoru $\vec{n}$ z předchozího příkladu (8.2)?

2. Popište plochy tvořené funkcemi:

   $S_1 : \vec{r} = (u\cos v, u\sin v, 2u)\,,\ u \in [0,4],\ v \in [0,2\pi]\,,$

   $S_2 : \vec{r} = ((a+b\cos v)\cos u, (a+b\cos v)\sin u, b\sin v)\,,$
   $u \in [0,2\pi],\ v \in [0,2\pi]\,,\ a,b > 0\,.$

   [Plochu S_1 tvoří kužel s vrcholem v počátku. Plochou S_2 je duše v pneumatice - anuloid.]

Definice 8.3 : (tečná rovina)
Nechť $S = \{\vec{r}\,(u,v) : [u,v] \in \Omega\}$ je hladká plocha. Položíme $A = \vec{r}(u_0,v_0)$, $[u_0,v_0] \in \Omega$, pak **tečná rovina** k ploše S v bodě A je tvořena body:

$$A + t\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0) + s\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0)\,,\quad t,s \in \mathbb{R}.$$

Jednotkový normálový vektor $\vec{n}$ k ploše S v bodě A je dán vztahem

$$\vec{n} = \pm\frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0)}{\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0)\|}\,. \tag{1}$$

Pro parciální derivaci se velmi často používá značení $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \vec{r}_u$, potom

$$\vec{n} = \pm\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}\,.$$

Poznámka 8.1: Transformací $(u,v) = \Phi(\tilde{u},\tilde{v})$, pro kterou $u = -\tilde{u}$, $v = \tilde{v}$ změníme orientaci normálového vektoru $\vec{n}$ v opačnou. Tatáž změna orientace nastane, pokud použijeme transformaci $\Phi = (f_1, f_2)$, jejíž jakobián $\det J_\Phi = \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix}$ je záporný.

Uvažujeme malou část tečné roviny, rovnoběžník o stranách $|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0)\,\triangle u|$, $|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0)\,\triangle v|$, $(\triangle u = u - u_0,\ \triangle v = v - v_0)$, potom jeho velikost $\triangle S$ (plocha) je dána vztahem:

$$\triangle S = \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\,\triangle u \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\,\triangle v\right\|. \tag{2}$$

Z cvičení (**??**) vyplývá, že $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2 = \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right\|^2 \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\|^2 - \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2$. Odtud dostaneme následující definici velikosti plochy:

Definice 8.4 : (velikost plochy)
Nechť $S = \{\vec{r}\,(u,v) : [u,v] \in \Omega\}$ je hladká plocha, potom její **velikost** P je dána vztahem:

$$P = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right\|^2 \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\|^2 - \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2}\,dudv = \iint\limits_{\Omega} \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\,dudv. \tag{3}$$

Cvičení 8.2 : Určete velikost povrchu pneumatiky, která je dána funkcí $\vec{r}\,(u,v) = ((a+\cos v)\cos u, (a+\cos v)\sin u, \sin v)$, $u \in [0,2\pi]$, $v \in [0,2\pi]$, $a > 0$. $[4\pi^2 a]$

Poznámka 8.2: Jestliže plocha S je popsána explicitně jako graf funkce $z = f(x,y)$, $[x,y] \in S_{xy}$, (S_{xy} je ortogonální projekce plochy S do roviny xy), potom její velikost P je dána vztahem:

$$P = \iint\limits_{S_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy\,. \qquad (4)$$

Cvičení 8.3: Dokažte vztah (4) pomocí vztahu (3). [Položíme $u = x$, $v = y$, $\vec{r}\,(u,v) = (x, y, f(x,y))$, potom $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y})$ a $\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\|^2\, \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|^2 - (\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v})^2 = (1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2)\,(1 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2) - (\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y})^2 = 1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2$]

Příklad 8.3: (povrch koule)

Vypočítáme velikost povrchu koule o poloměru ϱ.

Využijeme-li parametrizaci sféry z příkladu 8.2, dostaneme $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (\varrho^2 \cos u \cos^2 v, \varrho^2 \sin u \cos^2 v, \varrho^2 \sin v \cos v)$. Tedy $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \varrho^2 \cos v$ a $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pro velikost P povrchu koule plyne ze vztahu 3

$$P = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varrho^2 \cos v \; dv\, du = 2\pi \varrho^2 [\sin v]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi \varrho^2\,.$$

9 Plošné integrály, Gaussova věta, Stokesova věta

9.1 Orientovaná plocha

Definice 9.1 : (orientovaná plocha)
O ploše $S = \{\vec{r}\,(u,v) : (u,v) \in \Omega\}$ řekneme, že je **orientovaná**, jestliže u ní rozlišujeme dvě strany, obvykle **vnější** a **vnitřní** (také horní a dolní).
V každém bodě plochy zvolíme jednotkový normálový vektor $\vec{n}$ (pokud existuje) tak, že směřuje stále na stejnou stranu plochy S. Jestliže $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ $(-\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|})$, pak říkáme, že plocha S je **orientovaná souhlasně (nesouhlasně)** se svou parametrizací. Značíme $S = S^+$, $(S = S^-)$.
U uzavřených ploch, tj. u povrchů těles, hovoříme o vnější (vnitřní) straně a **vnější (vnitřní) normále** $\vec{n}$, pokud vektor $\vec{n}$ směřuje ven z (dovnitř) tělesa.
O ploše S říkáme, že je orientovaná souhlasně (nesouhlasně) se svým okrajem, jestliže při obíhání po tomto okraji ve směru orientace okraje je vnější strana plochy S, po levé (pravé) ruce.

Vnější normálový vektor a obíhání "tvoří" pravotočivý systém.

Příklad 9.1 :

1. Sféra z příkladu 8.2 je orientovaná souhlasně se svou parametrizací.
2. Möbiův list se nedá orientovat, má pouze jednu stranu. Jeho parametrizace je dána následující funkcí
$\vec{r}\,(u,v) = ((1+u\sin(v/2))\cos v, (1+u\sin(v/2))\sin v, u\cos(v/2)), \quad (u,v) \in [-1/2, 1/2] \times [0, 2\pi]$.

Definice 9.2 : (vnitřní průměr plochy)
Máme plochu S, body $A, B \in S$ a množinu K_{AB} všech křivek $\mathcal{K} \subset S$ spojujících body A, B. Označíme $d(\mathcal{K})$ délku křivky $\mathcal{K}$. Potom číslo

$$d(S) = \sup_{A,B \in S} \inf_{\mathcal{K} \in K_{AB}} d(\mathcal{K}) \qquad (1)$$

nazveme **vnitřním průměrem plochy** S.

Vzdálenost dvou bodů na ploše je dána délkou nejkratší křivky, která je spojuje. Pak najdeme dva nejvíce vzdálené body a jejich vzdálenost je vnitřní průměr plochy.

Cvičení 9.1 : Určete vnitřní průměr $d(S)$ sféry S z příkladu (8.2)
$[\, d(S) = \pi\varrho \,]$

9.2 Plošné integrály

Definice 9.3 : (plošné integrály)
Mějme orientovanou plochu $S = \{\vec{r}\,(u,v) : (u,v) \in \Omega\}$. Nechť $\mathcal{D}(\Omega) = \{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n\}$ je dělení množiny Ω, potom plochy $S_k = \{\vec{r}\,(u,v) : (u,v) \in \Omega_k\}$ tvoří dělení $\mathcal{D}(S)$ plochy S. Zvolíme bod $[u_k, v_k] \in \Omega_k$, potom obraz $\vec{r}\,(u_k, v_k) \in S_k$ a $\vec{n}(u_k, v_k) = (n_{k1}, n_{k2}, n_{k3})$ je jednotkový normálový vektor k ploše S_k v bodě $\vec{r}\,(u_k, v_k)$. Označíme $\triangle S_k$ velikost plochy S_k.
K funkci $f\colon S \to \mathbb{R}$ definujeme **integrální součty** rovnostmi:

$$J(f, \mathcal{D}(S)) = \sum_{k=1}^{n} f(\vec{r}\,(u_k, v_k))\, \triangle S_k \,,$$

a

$$J_i(f, \mathcal{D}(S^+)) = \sum_{k=1}^{n} f(\vec{r}\,(u_k, v_k))\, n_{ki}\, \triangle S_k \,, \quad i = 1, 2, 3\,.$$

Jestliže níže uvedené limity existují, potom **plošný integrál 1. druhu** definujeme vztahem:

$$\iint\limits_{S} f(\vec{r}\,)\, dS = \lim_{\max\limits_{k} d(S_k) \to 0} J(f, \mathcal{D}(S))\,, \tag{2}$$

plošný integrál 2. druhu definujeme vztahem:

$$\iint\limits_{S^+} f(\vec{r}\,)\, n_i\, dS = \lim_{\max\limits_{k} d(S_k) \to 0} J_i(f, \mathcal{D}(S^+))\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{3}$$

<u>Poznámka 9.1</u> :

1. Plošný integrál 2. druhu závisí na orientaci jednotkového normálového vektoru $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ a často se používá pro vektorovou funkci $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve tvaru

$$\iint\limits_{S^+} \vec{v}\,\vec{n}\, dS = \iint\limits_{S^+} v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3\, dS\,.$$

   Hovoříme o plošném integrálu z vektorového pole nebo **o toku vektorového pole** plochou S.

2. Označíme-li α, β, γ úhly, které svírá jednotkový normálový vektor $\vec{n}$ s osami x, y, z (v kladném směru), potom platí $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ a pro plošný integrál druhého druhu dostaneme

$$\iint\limits_{S^+} f(\vec{r}\,)\, n_1\, dS = \iint\limits_{S^+} f(\vec{r}\,)\, \cos\alpha\, dS = \iint\limits_{S_{yz}} f(\vec{r}\,)\frac{n_1}{|n_1|}\, dydz\,,$$

$$\iint\limits_{S^+} f(\vec{r}\,)\, n_2\, dS = \iint\limits_{S^+} f(\vec{r}\,)\, \cos\beta\, dS = \iint\limits_{S_{xz}} f(\vec{r}\,)\frac{n_2}{|n_2|}\, dxdz\,,$$

$$\iint\limits_{S^+} f(\vec{r}\,)\, n_3\, dS = \iint\limits_{S^+} f(\vec{r}\,)\, \cos\gamma\, dS = \iint\limits_{S_{xy}} f(\vec{r}\,)\frac{n_3}{|n_3|}\, dxdy\,,$$

kde S_{xy} je průmět plochy S^+ do roviny-xy ap.

3. Pokud S je uzavřená plocha a $\vec{n}$ je jednotkový vektor vnější normály, potom píšeme

$$\iint\limits_{S^+} f(\vec{r}\,)\, n_i\, dS = \oiint\limits_{S^+} f(\vec{r}\,)\, n_i\, dS\,.$$

Věta 9.1 : (výpočet plošných integrálů)
Nechť $S = \{\vec{r}\,(u,v) : (u,v) \in \Omega\}$ je plocha a $f\colon S \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, potom níže uvedené plošné integrály existují a platí

$$\iint\limits_{S} f(\vec{r}\,)\, dS = \iint\limits_{\Omega} f(\vec{r}\,(u,v))\, \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\, du\, dv\,. \qquad (4)$$

Jestliže $S = S^+$ (plocha je orientovaná souhlasně se svou parametrizací), pak

$$\iint\limits_{S^+} f(\vec{r}\,)\, n_3\, dS = \iint\limits_{\Omega} f(\vec{r}\,(u,v))\, \frac{\partial(r_1, r_2)}{\partial(u,v)}\, du\, dv\,. \qquad (5)$$

Pro spojitou vektorovou funkci $\vec{v}\colon S \to \mathbb{E}_3$ dostaneme

$$\iint\limits_{S^+} \vec{v}\,\vec{n}\, dS = \iint\limits_{\Omega} \vec{v}\cdot(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, du\, dv\,. \qquad (6)$$

Pro smíšený součin tří vektorů platí

$$\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Důkaz : Rovnost (4) plyne ze vztahu (2) pro velikost plochy, kde $dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du \, dv$.

Ze vztahu (1) pro jednotkový normálový vektor $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ vyplývá $\vec{n} \, dS = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| \, du \, dv = \vec{r}_u \times \vec{r}_v \, du \, dv$ a odtud dostaneme rovnost (6).

Rovnost (5) plyne z následujících úprav

$$n_3 \; dS = \big((0,0,1) \, , \, \vec{n} \big) \; dS = (0,0,1) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \; du \, dv =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_3}{\partial u} \\ \frac{\partial r_1}{\partial v} & \frac{\partial r_2}{\partial v} & \frac{\partial r_3}{\partial v} \end{vmatrix} du \, dv = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial u} \\ \frac{\partial r_1}{\partial v} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix} du \, dv = \frac{\partial(r_1,r_2)}{\partial(u,v)} \, du \, dv \, .$$

(Podobně lze upravit i $n_1 \, dS = \frac{\partial(r_2,r_3)}{\partial(u,v)}$ a $n_2 \, dS = -\frac{\partial(r_1,r_3)}{\partial(u,v)}$.)

$\frac{\partial(r_1,r_2)}{\partial(u,v)}$ je Jakobián zobrazení množiny Ω do průmětu S_{xy} množiny S do roviny xy . Platí

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial u} \\ \frac{\partial r_1}{\partial v} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial v} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix} .$$

Poznámka 9.2: Jestliže plocha S je tvořena grafem funkce $z = z(x,y)$ a S_{xy} je ortogonální průmět plochy S do roviny xy, pak platí

$$\iint\limits_{S^+} f(\vec{r}\,) \, n_3 \, dS = \iint\limits_{S_{xy}} f(x,y,z(x,y)) \, \frac{n_3}{|n_3|} \, dx \, dy \, . \qquad (7)$$

Cvičení 9.2 : Jestliže plocha S je tvořena grafem funkce $z = z(x,y)$ a S_{xy} je ortogonální průmět plochy S do roviny-xy, pak dokažte, že platí

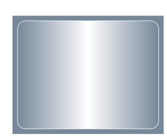
$$\iint\limits_{S} f(\vec{r}\,) \; dS = \iint\limits_{S_{xy}} f(x,y,z(x,y)) \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} \; dx \, dy \, . \qquad (8)$$

9.3 Gaussova věta

Věta 9.2 : (Gaussova věta)
Nechť V je omezené těleso, jehož hranice je tvořena orientovanou uzavřenou plochou S a vektorová funkce $\vec{v} \in C^1(\overline{V})$, potom platí

$$\iiint\limits_{V} \operatorname{div} \vec{v} \; dV = \oint\!\!\!\oint\limits_{S} \vec{v} \, \vec{n} \; dS \, , \qquad (9)$$

kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor vnější normály k ploše S.



"Co vznikne v tělese V, to proteče povrchem S."

<u>Důkaz</u> : Přepíšeme rovnost (9) do tvaru

$$\iiint\limits_V \Big(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}\Big)\, dxdydz = \iint\limits_{S^+}(v_1n_1+v_2n_2+v_3n_3)\, dS.$$

Vidíme, že stačí postupně pro $i = 1, 2, 3$ dokázat rovnosti

$$\iiint\limits_V \frac{\partial v_i}{\partial r_i}\, dV = \iint\limits_{S^+} v_i n_i\, dS\,, \quad \text{kde} \quad r_1 = x, r_2 = y, r_3 = z\,. \tag{10}$$

Budeme předpokládat, že těleso V lze "popsat funkcemi", to znamená, že existují funkce $z_1(x, y), z_2(x, y)$ a platí

$V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : z_1(x, y) \le z \le z_2(x, y)\,,\ [x, y] \in V_{xy}\}\,,$
kde V_{xy} je ortogonální průmět tělesa V do roviny-xy.

Dokážeme vztah (10) pro $i = 3$. Z Fubiniovy věty vyplývá

$$\iiint\limits_V \frac{\partial v_3}{\partial z}\, dxdydz = \iint\limits_{V_{xy}} \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial v_3}{\partial z}\, dz\, dxdy = \tag{11}$$

$$\iint\limits_{V_{xy}} [v_3(x, y, z_2(x, y)) - v_3(x, y, z_1(x, y))]\, dxdy\,.$$

Povrch tělesa V značíme S, podobně $V_{xy} = S_{xy}$. Položíme $S = S_1 \cup S_2 \cup S_z$ tak, že povrch S_1 je tvořen grafem funkce z_1, povrch S_2 je tvořen grafem funkce z_2 a povrch S_z je rovnoběžný s osou z. Na ploše S_1 je $n_3 < 0$ (tedy $S_1 = S_1^-$), na ploše S_2 je $n_3 > 0$ ($S_2 = S_2^+$) a na S_z je $n_3 = 0$. Odtud a ze vztahu (7) vyplývá

$$\iint\limits_{V_{xy}} [v_3(x, y, z_2(x, y)) - v_3(x, y, z_1(x, y))]\, dxdy =$$

$$\iint\limits_{S_{xy}} v_3(x, y, z_2(x, y))\, dxdy - \iint\limits_{S_{xy}} v_3(x, y, z_1(x, y))\, dxdy =$$

$$\iint\limits_{S_2} v_3n_3\, dS + \iint\limits_{S_1} v_3n_3\, dS + \iint\limits_{S_z} v_3\, 0\, dS = \iint\limits_{S^+} v_3n_3\, dS.$$

Dokázali jsme platnost rovnosti (10) pro $i=3$. Pro $i=1, 2$ je důkaz podobný.

Pro těleso V, které vznikne sjednocením konečného počtu těles "popsatelných funkcemi", dostaneme tvrzení věty součtem přes všechna tělesa. Plošné integrály na společných hranicích mají opačná znaménka a odečtou se.

Příklad 9.2 : (nezávislost divergence na souřadném systému)

Z věty o střední hodnotě vyplývá, že existuje bod $A \in V$ takový, že

$$\iiint\limits_V \operatorname{div} \vec{v}\, dV = \operatorname{div} \vec{v}(A) \cdot \operatorname{meas}(V)\,,$$

kde $\operatorname{meas}(V)$ je míra (objem) tělesa V. Nechť bod B je pevný, V je koule se středem v bodě B a S je její povrch, potom z Gaussovy věty plyne

$$\iint\limits_S \vec{v}\,\vec{n}\, dS = \operatorname{div} \vec{v}(A) \cdot \operatorname{meas}(V)\,.$$

Nyní předpokládáme, že funkce $\vec{v}$ má spojité parciální derivace. Pro $\operatorname{meas}(V) \to 0$ dostaneme $A \to B$ a platí

$$\operatorname{div} \vec{v}(B) = \lim_{\operatorname{meas}(V)\to 0} \frac{\iint\limits_S \vec{v}\,\vec{n}\, dS}{\operatorname{meas}(V)}\,.$$

Odtud již plyne nezávislost hodnoty divergence na souřadném systému. (Plošný integrál a objem tělesa se nemění se změnou souřadného systému).

Příklad 9.3 : (objem tělesa)

Položíme-li $\vec{v} = \frac{1}{3}(x, y, z)$, pak z Gaussovy věty dostaneme pro objem tělesa V vztah

$$\operatorname{meas}(V) = \iiint\limits_V 1\, dV = \frac{1}{3} \iint\limits_{S^+} (x, y, z) \cdot \vec{n}\, dS\,.$$

Cvičení 9.3 : Pomocí předchozí rovnosti spočítejte objem koule.

[Podle příkladu (8.2) je vnější jednotkový normálový vektor k povrchu koule $\vec{n} = \frac{(\varrho^2 \cos u \cos^2 v, \varrho^2 \sin u \cos^2 v, \varrho^2 \sin v \cos v)}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$, tedy $(x, y, z) \cdot \vec{n} = \frac{\varrho^3 \cos v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ a $\operatorname{meas}(V) = \frac{1}{3} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \int\limits_0^{2\pi} \varrho^3 \cos v\, du\, dv = \frac{4}{3}\pi\varrho^3$.]

Pro kouli o objemu V, povrchu S a poloměru ϱ dostaneme rovnost $V = \frac{1}{3}\,\varrho\, S$.

9.4 Stokesova věta

Věta 9.3 : (Stokesova věta)
Nechť vektorová funkce $\vec{v} \in C^1(V)$, $V \subset \mathbb{E}_3$. Nechť plocha S, $\overline{S} \subset V$ má okraj tvořený křivkou ∂S a je orientovaná souhlasně se svým okrajem, potom platí

$$\iint_{S^+} \operatorname{rot} \vec{v}\, \vec{n}\; dS = \oint_{\partial S^+} \vec{v}\, \vec{\tau}\; ds\,, \tag{12}$$

kde $\vec{n}$ je jednotkový normálový vektor k ploše S^+ a $\vec{\tau}$ je jednotkový tečný vektor ke křivce ∂S^+.

Důkaz : Přepíšeme rovnost (12) pomocí souřadnic vektorů $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3) = (x, y, z)$ do tvaru

$$\iint_{S^+} \Big[\big(\tfrac{\partial v_3}{\partial y} - \tfrac{\partial v_2}{\partial z}\big) n_1 + \big(\tfrac{\partial v_1}{\partial z} - \tfrac{\partial v_3}{\partial x}\big) n_2 + \big(\tfrac{\partial v_2}{\partial x} - \tfrac{\partial v_1}{\partial y}\big) n_3\Big]\; dS =$$
$$\oint \vec{v}\, \tfrac{1}{\|\vec{r}\,'\|} \big(\tfrac{dr_1}{dt}, \tfrac{dr_2}{dt}, \tfrac{dr_3}{dt}\big)\, \|\vec{r}\,'\|\; dt = \oint_{\partial S^+} v_1\, dx + v_2\, dy + v_3\, dz\,.$$

Budeme předpokládat, že plocha S se dá "popsat funkcemi", to znamená, že pro body $[x, y, z] \in S$ platí : $z = z(x, y)$, $y = y(x, z)$, $x = x(y, z)$ a funkce x, y, z jsou spojitě diferencovatelné. Nejdříve dokážeme

$$\iint_{S^+} \Big[\frac{\partial v_1}{\partial z} n_2 - \frac{\partial v_1}{\partial y} n_3\Big]\; dS = \oint_{\partial S^+} v_1\; dx\,. \tag{13}$$

Označíme S^+_{xy}, ∂S^+_{xy} projekci plochy S^+ a jejího okraje ∂S^+ do roviny-xy. Podle bodu 3 z poznámky (6.2) pak platí $\oint_{\partial S^+} v_1\, dx = \oint_{\partial S^+_{xy}} v_1(x, y, z(x, y))\; dx$. Nyní v Greenově větě (vztah (4)) položíme $f_1 = v_1$, $f_2 = 0$ a dostaneme

$$\oint_{\partial S^+_{xy}} v_1(x, y, z(x, y))\; dx = -\iint_{S^+_{xy}} \frac{\partial v_1(x, y, z(x, y))}{\partial y}\; dxdy =$$
$$-\iint_{S^+_{xy}} \Big[\frac{\partial v_1(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial v_1(x, y, z)}{\partial z}\, \frac{\partial z}{\partial y}\Big]\; dxdy\,. \tag{14}$$

Zbývá dokázat, že pravá strana v rovnosti (14) se rovná levé straně v rovnosti (13). Tečné vektory k ploše S jsou

$\vec{r}_x = (1, 0, \frac{\partial z}{\partial x})$, $\vec{r}_y = (0, 1, \frac{\partial z}{\partial y})$ a jednotkový normálový vektor má tvar $\vec{n} = (-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)/\|(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)\|$.

Tedy $n_2 = -\frac{1}{\|(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)\|}\frac{\partial z}{\partial y}$, $n_3 = \frac{1}{\|(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)\|}$. Dále podle (2) je $dS = \|(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)\|\, dxdy$. Odtud pro levou stranu rovnosti (13) dostaneme

$$\iint\limits_{S^+} \left[\frac{\partial v_1}{\partial z} n_2 - \frac{\partial v_1}{\partial y} n_3\right] dS = -\iint\limits_{S^+_{xy}} \left(\frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\right) dxdy\,,$$

což jsme měli dokázat.
Podobně jako rovnost (13) lze dokázat i rovnosti obsahující funkce v_2, v_3 a sečtením těchto rovností dostaneme tvrzení věty.

<u>*Příklad 9.4*</u>: (nezávislost rotace na souřadném systému)
Z věty o střední hodnotě vyplývá, že existuje bod $A \in S$ takový, že

$$\iint\limits_S \operatorname{rot} \vec{v}\, \vec{n}\, dS = \operatorname{rot} \vec{v}(A)\, \vec{n}(A)\, \operatorname{meas}(S) \qquad (15)$$

Nechť B je střed kruhu S, potom z (15) a (12) vyplývá $\oint_{\partial S} \vec{v}\, d\vec{s} = \operatorname{rot} \vec{v}(A)\, \vec{n}\, \operatorname{meas}(S)$ (u kruhu je jednotkový normálový vektor všude stejný).

Jestliže funkce $\vec{v}$ je spojitě diferencovatelná, pak pro zmenšující se kruh (tzn. $\operatorname{meas} S \to 0$) je $\operatorname{rot} \vec{u}(A) \to \operatorname{rot} \vec{v}(B)$ a platí

$$\operatorname{rot} \vec{v}(B)\, \vec{n} = \lim_{\operatorname{meas}(S) \to 0} \frac{\oint_{\partial S} \vec{v}\, d\vec{s}}{\operatorname{meas}(S)} \quad (= \operatorname{rot} \vec{v}_n(B))\,.$$

Rotace $\operatorname{rot} \vec{v}(B)$ je vektor, jehož projekce do vektoru $\vec{n}$ kolmého k plošce S se rovná plošné hustotě cirkulace vektorového pole $\vec{v}$ po hranici plošky S. Nenulová rotace určuje body vírů vektorového pole $\vec{v}$.

<u>*Cvičení 9.4*</u>:

a) Nechť $\vec{v} = \operatorname{grad} f$, pak $\oint\limits_{\mathcal{K}} \vec{v}\, d\vec{s} = 0$. Dokažte.

b) Vypočítejte $\oint_{\mathcal{K}} \vec{v}\, d\vec{s}$, $\vec{v} = (-y, x) \cdot \frac{1}{x^2+y^2}$, kde křivka $\mathcal{K} : x^2 + y^2 = 1; z = 0$ je orientovaná ve směru hodinových ručiček. Proč nemůžeme použít Stokesovu větu? Spočítejte $\iint\limits_S \operatorname{rot} \vec{v}\, \vec{n}\ dS$, pokud $\vec{v} = (z, x, y)$ a S je čtverec s vrcholy (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (0,1,0). [±1]

Reference

[1] Jirásek, Čipera, Vacek: Sbírka řešených příkladů z matematiky II, SNTL, Praha 1989

[2] Drábek, Míka: Matematická analýza II, skripta ZČU Plzeň 1996