

Matematika 3 pro FST

2016

Obsah

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Skalární funkce více reálných proměnných | 3 |
| 1.1 | Prostor \mathbb{R}^n | 3 |
| 1.2 | Základní vlastnosti funkcí v \mathbb{R}^n | 4 |
| 1.3 | Derivace a diferenciál | 7 |
| 1.4 | Vlastnosti diferencovatelných funkcí | 10 |
| 1.5 | Derivace a diferenciály vyšších řádů. Taylorova věta. | 15 |
| 2 | Základní pojmy optimalizace v \mathbb{R}^n | 18 |
| 2.1 | Lokální a globální extrémy | 18 |
| 2.2 | Extrémy vzhledem k podmnožině | 23 |
| 3 | Diferencovatelná zobrazení | 32 |
| 3.1 | Základní pojmy | 32 |
| 4 | Riemannův integrál v \mathbb{R}^n | 37 |
| 4.1 | Definice a základní vlastnosti Riemannova integrálu | 37 |
| 4.2 | Metody výpočtu dvojných a trojných integrálů . . | 43 |
| 4.3 | Užitečné vzorce | 48 |
| 5 | Parciální diferenciální rovnice | 51 |
| 5.1 | Základní modely | 51 |
| 5.1.1 | Transportní rovnice | 51 |
| 5.1.2 | Rovnice difuze, rovnice vedení tepla | 52 |
| 5.1.3 | Vlnová rovnice | 53 |
| 5.2 | Metody řešení | 53 |
| 5.3 | Počáteční úlohy | 53 |

1 Skalární funkce více reálných proměnných

1.1 Prostor \mathbb{R}^n

Symbolem \mathbb{R}^n označujeme **množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel**, tj. $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]\}$, $x_i \in \mathbb{R}$. Množinu \mathbb{R}^n chápeme buď jako množinu bodů, nebo jako **vektorový prostor**, pokud v této množině zavedeme algebraické operace splňující axiomy lineárního prostoru. Vektory značíme $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, čísla x_i , $i = 1, \dots, n$ se nazývají **složky (souřadnice)** vektoru (bodu).

Definice 1.1: Necht' $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, potom pomocí následujících vztahů definujeme

1. **skalární součin** vektorů \vec{x}, \vec{y}

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

2. **normu vektoru** \vec{x}

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}},$$

3. **vzdálenost** bodů \mathbf{x}, \mathbf{y} ("délka vektoru $\vec{x} - \vec{y}$ ")

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2},$$

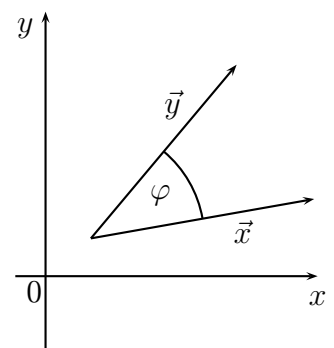
4. Pro nenulové \vec{x}, \vec{y} existuje číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, které se nazývá **úhlem vektorů** \vec{x}, \vec{y} , takové, že

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}.$$

Vektorový prostor, v němž je definován skalární součin se nazývá **eukleidovský prostor**. Pro skalární součin se také používá značení (\vec{x}, \vec{y}) .

Pro každé \vec{x}, \vec{y} platí Cauchyova-Schwarzova nerovnost

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$



Definice 1.2: (posloupnost v \mathbb{R}^n)

Zobrazení $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^n$ přiřazující každému $k \in \mathbb{N}$ bod (vektor) $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **posloupnost (bodů, vektorů)** v \mathbb{R}^n . Značíme $f = \{\mathbf{x}_k\}$.

Protože máme eukleidovský vektorový prostor \mathbb{R}^n , hovoříme o konvergenci vzhledem k eukleidovské normě. Analogicky definujeme konvergenci vzhledem k jiné normě či jiné metrice.

Definice 1.3: (konvergentní posloupnost)

Posloupnost $\{\mathbf{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ je **konvergentní** v \mathbb{R}^n , jestliže

$$\exists \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k \in \mathbb{N} : k > k_0 \Rightarrow \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon.$$

Píšeme $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$, resp. $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$ pro $k \rightarrow +\infty$.

Věta 1.1: (konvergence po složkách)

Posloupnost $\{\mathbf{x}_k\}$ je konvergentní v \mathbb{R}^n právě tehdy, když posloupnosti všech složek $\{x_{ki}\}$ jsou konvergentní v \mathbb{R} , tj.

$$\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}_0 \Leftrightarrow x_{ki} \rightarrow x_{0i}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Důkaz: plyne ze vztahů

$$|x_{ki} - x_{0i}| \leq \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_{ki} - x_{0i})^2}.$$

1.2 Základní vlastnosti funkcí v \mathbb{R}^n

Definičním oborem $D(f)$ funkce f je tedy množina Ω .

Definice 1.4: (funkce n -proměnných)

Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zobrazení $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ přiřazující každému argumentu $\mathbf{x} \in \Omega$ funkční hodnotu $f(\mathbf{x})$ se nazývá **reálná funkce n reálných proměnných** definovaná na Ω .

Značíme $f : \mathbf{x} \rightarrow f(\mathbf{x})$, $f = f(\mathbf{x})$.

Množina

$$G = \{[\mathbf{x}, f(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{x} \in \Omega\}$$

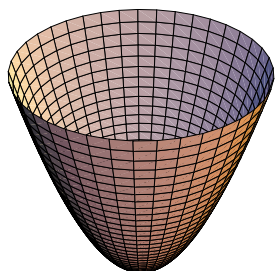
se nazývá **graf funkce f** .

Množina

$$H_C = \{\mathbf{x} \in \Omega : f(\mathbf{x}) = C\}, \quad C \in \mathbb{R},$$

se nazývá **hladina (vrstevnice) funkce f** . (Je to množina bodů definičního oboru, v nichž funkce f nabývá stejné funkční hodnoty).

Příklad 1.1: Grafem funkce $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ je *paraboloid* a její hladiny jsou kružnice o poloměru \sqrt{C} .



Definice 1.5: (limita funkce n -proměnných)

Nechť je dána funkce $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a nechť \mathbf{x}_0 je hromadný bod množiny Ω . Jestliže $\exists L \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall \{\mathbf{x}_k\}$, $\mathbf{x}_k \in \Omega$, $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0$: $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}_0 \Rightarrow f(\mathbf{x}_k) \rightarrow L$, pak řekneme, že funkce f má v bodě \mathbf{x}_0 limitu L (vlastní) a píšeme

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L.$$

Příklad 1.2:

Vypočítáme limitu funkce $f(x, y) = x^3 - y^3$ v bodě $[1, 2]$.

Nechť $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ jsou libovolné posloupnosti reálných čísel takové, že $x_k \rightarrow 1$ a $y_k \rightarrow 2$.

Pak $x_k^3 \rightarrow 1$, $y_k^3 \rightarrow 8 \Rightarrow f(x_k, y_k) = x_k^3 - y_k^3 \rightarrow 1 - 8 = -7$.

Tedy $\lim_{[x, y] \rightarrow [1, 2]} (x^3 - y^3) = -7$.

Příklad 1.3: Stanovme $\lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \frac{y}{x}$.

Zvolíme posloupnost $\{x_k, y_k\} = \{\frac{1}{k}, \frac{c}{k}\}$, $c \in \mathbb{R}$, pak dostaneme $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\frac{c}{k}}{\frac{1}{k}} = c$. Vidíme, že daná funkce nemá v bodě $[0, 0]$ limitu. (Číslo c můžeme volit libovolně, tedy neexistuje číslo L , ke kterému se blíží funkční hodnoty funkce f .)

Využíváme větu 4.6 z MA1 o algebře limit funkcí jedné reálné proměnné.

Položíme-li $y = cx$, pak v limitě dostaneme $\lim_{[x, y] \rightarrow [0, 0]} \frac{y}{x} = c$.

K limitnímu bodu se blížíme po přímkách. Pozor tato metoda je vhodná pouze k důkazu neexistence limity, nikoli její existence.

Definice 1.6: (částečné limity, vícenásobné limity v \mathbb{R}^2)

Mějme funkci $f = f(x, y)$ definovanou v okolí bodu $[x_0, y_0]$. Existuje-li pro každé pevné y

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y),$$

nazývá se **částečná (parciální) limita** funkce f v proměnné x . Existuje-li

$$L_1 = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y),$$

nazývá se **dvojnásobnou limitou** funkce f v bodě $[x_0, y_0]$. Analogicky definujeme pro pevné x

$$\psi(x) = \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \quad \text{a} \quad L_2 = \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y).$$

Příklad 1.4: Pro funkci $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ najdeme dvojnásobné limity v bodě $[0, 0]$.

$$\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2} = 0.$$

Limitu funkce f budeme hledat "po přímkách" $y = kx$, potom

$$\lim_{\substack{[x,y] \rightarrow [0,0] \\ y=kx}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{k^2x^2 + x^2} = \frac{k}{k^2 + 1},$$

tudíž hledaná limita neexistuje.

Příklad 1.5: Hledáme limity funkce f , kde

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} & x \neq 0, y \neq 0, \\ 0 & x = 0, y = 0, \end{cases}$$

v okolí bodu $[0, 0]$.

Z odhadu $\left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y|$ plyne $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y) = 0$,

ale limity $\lim_{y \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y}$, $\lim_{x \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x}$ neexistují, tudíž neexistují ani dvojnásobné limity.

Existence a rovnost dvojnásobných limit nezaručí existenci limity funkce v bodě a obráceně z existence limity nevyplývá existence dvojnásobných limit.

Přesto, jestliže existuje (dvojná) limita a "vnitřní limity", pak existují dvojnásobné limity.

Věta 1.2: (vztah dvojné limity a dvojnásobných limit)

Nechť funkce $f = f(x, y)$ je definovaná (aspoň) v prstencovém okolí $P([x_0, y_0])$ bodu $[x_0, y_0]$ a existuje limita

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [x_0,y_0]} f(x, y) = L.$$

Nechť dále existují částečné limity

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) &= \varphi(y), & [x_0, y] \in P([x_0, y_0]), \\ \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) &= \psi(x), & [x, y_0] \in P([x_0, y_0]). \end{aligned}$$

Potom existují dvojnásobné limity

$$\begin{aligned} L_1 &= \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y), \\ L_2 &= \lim_{x \rightarrow x_0} \psi(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y) \end{aligned}$$

a platí $L_1 = L_2 = L$.

V izolovaném bodě \mathbf{x}_0 se funkce f považuje za spojitou, je-li v tomto bodě definována.

Jestliže v bodě nespojitosti existuje vlastní limita funkce f , pak říkáme, že nespojitost je odstranitelná.

Definice 1.7: (Spojitost)

Funkce $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je **spojitá** v hromadném bodě \mathbf{x}_0 množiny $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, jestliže

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Funkce f je **spojitá na množině** Ω , je-li spojitá v každém bodě $\mathbf{x} \in \Omega$. Bod \mathbf{x}_0 je **bodem nespojitosti** funkce, není-li v něm funkce f spojitá.

Příklad 1.6 :

1. Funkce $f(x, y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ je spojitá v každém bodě $[x, y] \neq (0, 0)$, ale v bodě $(0, 0)$ spojitá není, a navíc nespojitost není odstranitelná.

2. Funkce $f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} & xy \neq 0, \\ 0 & xy = 0, \end{cases}$

je spojitá v bodě $[0, 0]$, avšak v každém okolí tohoto bodu existují body nespojitosti (body souřadnicových os).

3. Funkce $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$

je spojitá v bodě $[0, 0]$, což dokážeme přechodem k polárním souřadnicím. Položíme $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, potom

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi \in (0, 2\pi)}} \frac{r^3 \cos \varphi (\sin \varphi)^2}{r^2} = 0.$$

Při přechodu k polárním souřadnicím platí následující ekvivalence $[x, y] \rightarrow [0, 0] \Leftrightarrow \|[x, y] - [0, 0]\| \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \rightarrow 0 \Leftrightarrow \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} \rightarrow 0 \Leftrightarrow r \rightarrow 0_+$.

Pomocí tohoto přechodu lze tedy dokázat existenci limity funkce.

1.3 Derivace a diferenciál

Definice 1.8 : (derivace podle vektoru, parciální derivace)

Mějme funkci $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ a existuje okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$.

Je dán (pevný) vektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{s} = (s_1, s_2, \dots, s_n)$. Jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s})|_{t=0} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{s}},$$

pak se nazývá **derivace funkce f v bodě \mathbf{x}_0 podle vektoru \vec{s}** (nebo také **variace funkce f v bodě \mathbf{x}_0**),

je-li \vec{s} jednotkový vektor, tj. $\|\vec{s}\| = 1$, pak se tato limita nazývá **derivace funkce f v bodě \mathbf{x}_0 ve směru \vec{s}** .

Jestliže $\vec{s} = \vec{e}_i$ (jednotkový vektor ve směru osy x_i), potom

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{e}_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}$$

a hovoříme o **parciální derivaci funkce f v bodě \mathbf{x}_0 podle x_i** a o funkci f říkáme, že je **derivovatelná v bodě \mathbf{x}_0 podle proměnné x_i** .

Příklad 1.7: Uvažujeme funkci $f(x, y) = xy^2$, vektor $\vec{s} = (\vec{s}_1, \vec{s}_2) = (1, 2)$ a bod $[x_0, y_0] = [1, 1]$. Potom dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \vec{s}} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t\vec{s}_1, y_0 + t\vec{s}_2) - f(x_0, y_0)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)(1+t \cdot 2)^2 - 1}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 + 4t + 4t^2 + t + 4t^2 + 4t^3 - 1}{t} = 5, \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \vec{e}_1} &= \frac{\partial f(1, 1)}{\partial x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t \cdot 1, 1+t \cdot 0) - f(1, 1)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t)(1+t \cdot 0)^2 - 1}{t} = 1, \\ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \vec{e}_2} &= \frac{\partial f(1, 1)}{\partial y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t \cdot 0, 1+t \cdot 1) - f(1, 1)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1+t \cdot 0)(1+t \cdot 1)^2 - 1}{t} = 2. \end{aligned}$$

Z definice (1.8) pro funkci dvou proměnných plyne

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t}, \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

Obecně platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_{01}, \dots, x_{0i} + t, x_{0i+1}, \dots, x_{0n}) - f(x_{01}, \dots, x_{0n})}{t}.$$

Z uvedených vztahů vyplývá, že parciální derivace počítáme derivováním podle příslušné proměnné (ostatní proměnné se chovají jako konstanty). Například

$$\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial(xy^2)}{\partial y} = 2xy.$$

Geometrický význam derivace ve směru

Máme funkci $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, vnitřní bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, vektor \vec{s} s jednotkovou normou $\|\vec{s}\| = 1$ a úsečku $p : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\vec{s}$, $t \in I$, $I = (-\delta, \delta)$, $\delta > 0$, $p \subset \Omega$.

Položíme $g(t) = f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s})$, potom graf funkce $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ je dán průnikem grafu funkce f a roviny ϱ , která obsahuje úsečku p a je kolmá k rovině- xy .

Platí

$$g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t) - g(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{s}}.$$

Hodnota derivace funkce f ve směru \vec{s} je tudíž rovna směrnici tečny $\tau \in \varrho$ ke grafu funkce f v bodě \mathbf{x}_0 . Tato směrnice se rovná tangens úhlu tečny τ a přímky p (prodloužení úsečky p).

Definice 1.9: (diference, totální diferenciál)

Je dán vnitřní bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Pro libovolné $\mathbf{x} \in \Omega$ označíme $\vec{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Vektor $\vec{h} = (h_1, h_2, \dots, h_n)$ ($= \Delta \mathbf{x} = d\mathbf{x}$, $h_i = dx_i$) nazveme **diferencí argumentu**.

1. Funkci proměnné $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$

$$\Delta f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$

nazveme **diferencí funkce f v bodě \mathbf{x}_0 vzhledem k \vec{h}** (tzv. **totální diference**).

2. Funkce f se nazývá **diferencovatelná v bodě \mathbf{x}_0** , existuje-li okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$, vektor $\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$, a funkce $\omega(\vec{h})$ (proměnné \vec{h}) splňující podmínku

$$\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

tak, že $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$ platí

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \vec{A} \cdot \vec{h} + \omega(\vec{h}).$$

Funkce f je **diferencovatelná na Ω** , je-li diferencovatelná v každém bodě $\mathbf{x} \in \Omega$.

3. U diferencovatelné funkce se lineární forma $\vec{A} \cdot \vec{h}$ nazývá **(totálním) diferenciálem** funkce f v bodě \mathbf{x}_0 a značí se

$$df = df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \vec{A} \cdot \vec{h}, \quad \vec{h} \in \mathbb{R}^n$$

a vektor $\vec{A} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$ se nazývá **totální derivace funkce f v bodě \mathbf{x}_0** nebo také **gradient** funkce f v bodě \mathbf{x}_0 . Užívá se označení

$$\vec{A} = \text{grad } f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{x}_0).$$

Diferenciál pak zapisujeme ve tvaru

$$df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{h} = \nabla f(\mathbf{x}_0) \vec{h} = f'(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x}.$$

Příklad 1.8: Určíme diferenciál funkce $f(x, y) = xy^2$ v bodě $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]$. Platí

$$\begin{aligned} f(x, y) - f(x_0, y_0) &= f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) = \\ &= (x_0 + h_1)(y_0 + h_2)^2 - x_0 y_0^2 = y_0^2 h_1 + 2x_0 y_0 h_2 + 2y_0 h_1 h_2 + x_0 h_2^2 + h_1 h_2^2. \end{aligned}$$

Pro funkci

$$f(x, y) = x^2 + 3y \quad \text{je}$$

$$\vec{h} = (x - x_0, y - y_0)$$

$$\text{a } \Delta f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) =$$

$$x^2 - x_0^2 + 3y - 3y_0 =$$

$$(x + x_0)(x - x_0) +$$

$$+ 3(y - y_0) =$$

$$(2x_0 + x - x_0)(x - x_0) +$$

$$+ 3(y - y_0) =$$

$$(2x_0, 3)(x - x_0, y - y_0) +$$

$$+ (x - x_0)^2.$$

Tedy

$$\vec{A} = \text{grad } f = (2x_0, 3)$$

$$\text{a } \omega(\vec{h}) = (x - x_0)^2,$$

neboť

$$\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{(x - x_0)^2}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Diferenciál df se rovná skalárnímu součinu gradientu $\text{grad } f$ a diference argumentu \vec{h} .

Odtud $A_1 = y_0^2$, $A_2 = 2x_0y_0$, $\omega(\vec{h}) = 2y_0h_1h_2 + x_0h_2^2 + h_1h_2^2$.

Zbývá dokázat $\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$, tedy $\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{2y_0h_1h_2 + x_0h_2^2 + h_1h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} =$

$$\begin{bmatrix} h_1 = r \cos \varphi \\ h_2 = r \sin \varphi \end{bmatrix} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0 \\ \varphi \in (0, 2\pi)}} \frac{2y_0r^2 \cos \varphi \sin \varphi + x_0r^2 \sin^2 \varphi + r^3 \cos \varphi \sin^2 \varphi}{r} = 0.$$

Diferenciál funkce $f = xy^2$ v bodě $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]$ má tvar $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = (y_0^2, 2x_0y_0) \cdot \vec{h} = y_0^2h_1 + 2x_0y_0h_2$.

1.4 Vlastnosti diferencovatelných funkcí

Věta 1.3: (vlastnosti diferencovatelné funkce)

Je-li funkce f diferencovatelná v bodě \mathbf{x}_0 , potom

1. je v bodě \mathbf{x}_0 spojitá,
2. existuje v bodě \mathbf{x}_0 derivace funkce f podle libovolného vektoru \vec{s} (tedy existují i všechny parciální derivace) a platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{s}} = \text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{s},$$

3. pokud v \mathbb{R}^n uvažujeme kartézský souřadnicový systém a za bázi volíme jednotkové vektory ve směru os systému, pak

$$A_i = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}, \quad \text{grad } f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0}.$$

Důsledek 1.1: věty (1.3) Diferenciál funkce f v bodě \mathbf{x} (v kartézském souřadnicovém vyjádření) můžeme psát ve tvaru

$$df(\mathbf{x}, \vec{h}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} dx_n, \quad \vec{h} = d\mathbf{x}.$$

Například diferenciál funkce $f(x, y) = xy^2$ má tvar

$$df(\mathbf{x}, (dx, dy)) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x} dx + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y} dy = y^2 dx + 2xy dy.$$

Příklad 1.9: Uvedeme funkci, která má v bodě $[0, 0]$ parciální derivace, ale není v tomto bodě spojitá:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & xy = 0. \\ 1 & xy \neq 0. \end{cases}$$

Pro funkci $f(x, y) = xy^2$, bod $[x_0, y_0] = [1, 1]$ a směr $\vec{s} = (1, 2)$ z příkladu (1.7) máme $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{s}} = (y_0^2, 2x_0y_0) \cdot \vec{s} = (1, 2) \cdot (1, 2) = 5$.

Gradient výše uvedené funkce má v kartézském systému tvar $\text{grad } f = (y^2, 2xy)$.

Potom $\lim_{[x,y] \rightarrow (0,0)} f(x,y)$ neexistuje, avšak existují limity

$$\lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(0+h_1, 0) - f(0, 0)}{h_1} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = 0,$$

$$\lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(0, 0+h_2) - f(0, 0)}{h_2} = \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = 0.$$

Příklad 1.10: Funkce, která má parciální derivace v celém \mathbb{R}^2 , ale je v bodě $[0, 0]$ nespojitá:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Podobně jako v předcházejícím příkladě z definice vypočteme

$$f_x(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0, \quad f_y(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0; \quad \text{avšak}$$

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} f(x, y) \text{ neexistuje, neboť } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} \frac{kx^2}{x^2+k^2x^2} = \frac{k}{1+k^2}.$$

Příklad 1.11: Funkce, která má parciální derivace v celém \mathbb{R}^2 , je spojitá v \mathbb{R}^2 (viz příklad (1.6), 3.), ale není diferencovatelná v bodě $[0, 0]$:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & x^2 + y^2 > 0, \\ 0 & x^2 + y^2 = 0. \end{cases}$$

Potom platí

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \frac{2x^3y}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f(0, 0)}{\partial x} = f_x(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial f(0, 0)}{\partial y} = f_y(0, 0) = 0$$

(na osách je funkce f nulová).

Pokud by funkce f byla diferencovatelná v počátku, pak pro vektor \vec{h} s dostatečně malou normou musí platit

$$f([0, 0] + (h_1, h_2)) - f(0, 0) = 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + \frac{h_1 h_2^2}{h_1^2 + h_2^2} = \omega(\vec{h})$$

$$\text{a } \lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0.$$

Avšak limita $\lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = \lim_{[h_1, h_2] \rightarrow [0, 0]} \frac{h_1 h_2^2}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2} (h_1^2 + h_2^2)}$ neexistuje, tedy funkce f není diferencovatelná v počátku.

Na příkladech jsme ukázali, že existence parciálních derivací není v \mathbb{R}^n , $n \geq 2$ ekvivalentní diferencovatelnosti. Ekvivalence je platná pouze v \mathbb{R} (věta 7.2, MA1).

Celou větu (1.8) lze formulovat a dokázat pro složenou funkci

$$f(\vec{u}(\mathbf{x})) = f(u_1, \dots, u_m).$$

Potom

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}.$$

Také hovoříme o "řetězovém pravidlu".

Při přechodu k polárním souřadnicím

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi$$

má jednotkový vektor ve "směru r " tvar

$$\vec{e}_1 = (\cos \varphi, \sin \varphi)$$

a pro jednotkový vektor ve "směru φ " platí

$$\vec{e}_2 = (-\sin \varphi, \cos \varphi).$$

Matice přechodu M od báze \vec{e}_1, \vec{e}_2 k bázi \vec{e}_1, \vec{e}_2 má tedy tvar

$$M = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Nyní vyjádříme gradient funkce $f = f(x, y)$ v novém souřadnicovém systému, tedy

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi, \right.$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} (-\sin \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \varphi \right).$$

Zároveň z diferenciálu složené funkce plyne

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \varphi \quad \text{a}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \varphi} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} (-r \sin \varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} r \cos \varphi.$$

Porovnáním dostaneme pro gradient funkce f v polárních souřadnicích

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right).$$

Věta 1.4: (diferenciál a derivace složené funkce)

Nechť funkce $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ jsou **diferencovatelné** v bodě $[x_0, y_0]$ a funkce $f(u, v)$ je diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0]$, kde $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Potom složená funkce $f(u(x, y), v(x, y))$ je diferencovatelná v $[x_0, y_0]$ a platí (v bodě $[x_0, y_0]$)

$$\begin{aligned} df &= \frac{\partial f}{\partial u} du + \frac{\partial f}{\partial v} dv \\ &= \frac{\partial f}{\partial u} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) + \frac{\partial f}{\partial v} \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \right) \\ &= \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \right)}_{\frac{\partial f}{\partial x}} dx + \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{\frac{\partial f}{\partial y}} dy. \end{aligned}$$

Příklad 1.12: Funkce $u(x, y) = -2xy$, $v(x, y) = x + y$ jsou diferencovatelné na \mathbb{R}^2 a funkce $f(u, v) = u + v^2$ je také diferencovatelná na \mathbb{R}^2 .

Pro diferenciál složené funkce $f(u(x, y), v(x, y))$ tedy na \mathbb{R}^2 platí

$$\begin{aligned} df &= 1 du + 2v dv \\ &= 1 [(-2y) dx - 2x dy] + 2(x + y)(dx + dy) \\ &= 2x dx + 2y dy. \end{aligned}$$

Zároveň $f(u(x, y), v(x, y)) = -2xy + (x + y)^2 = x^2 + y^2$, tedy $df = 2x dx + 2y dy$.

Příklad 1.13: (derivace paraboloidu podél kružnice)

Nechť $f(x, y) = x^2 + y^2$ a $x(r, t) = r \cos t$, $y(r, t) = r \sin t$.

Potom $\frac{df}{dt} = \frac{df}{dx} \frac{dx}{dt} + \frac{df}{dy} \frac{dy}{dt} = 2x(-r \sin t) + 2y(r \cos t) = 2r^2(-\cos t \sin t + \sin t \cos t) = 0$.

Věta 1.5: (vlastnosti gradientu)

Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě \mathbf{x} .

- i) Položíme-li $\vec{z} = \frac{\text{grad } f(\mathbf{x})}{\|\text{grad } f(\mathbf{x})\|}$, tedy $\|\vec{z}\| = 1$, potom platí $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec{z}} = \max_{\|\vec{s}\|=1} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec{s}}$, \vec{s} je libovolný vektor (změna funkce ve směru gradientu je největší).
- ii) Vektor $\text{grad } f(\mathbf{x}_0) (\neq \vec{0})$ je kolmý k tečné varietě (přímka, rovina, ...) hladiny $H = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$ v bodě \mathbf{x}_0 .

Příklad 1.14: Máme k funkci $f(x, y) = x^3 - y^2$, bodu $B = [1, 2]$ a vektoru $\vec{v} = (3, 4)$ určit směr největšího růstu v bodě B a derivaci podle vektoru \vec{v} .

Směr největšího růstu funkce f v bodě B je dán vektorem $\text{grad } f(1, 2) = (3x^2, -2y)_{[1,2]} = (3, -4)$.

Pro derivace podle vektoru \vec{v} platí

$$\frac{\partial f(1,2)}{\partial \vec{v}} = \text{grad } f(1, 2) \cdot \vec{v} = (3, -4) \cdot (3, 4) = 0.$$

Vidíme, že vektor $\vec{v} = (3, 4)$ je tečný vektor k hladině

$$H = \{[x, y] : x^3 - y^2 = -3\} \text{ v bodě } B = [1, 2].$$

Definice 1.10: (tečné lineární variety)

Graf lineární funkce $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dané předpisem

$$u(\mathbf{x}) = \vec{a} \cdot \mathbf{x} + d = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n + d, \quad \text{kde } \vec{a} \in \mathbb{R}^n, d \in \mathbb{R}.$$

se nazývá **nadrovina** v \mathbb{R}^{n+1} a prochází-li bodem $[\mathbf{x}_0, u_0]$, pak lze vyjádřit pomocí rovnice

$$u - u_0 = \vec{a} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = a_1(x_1 - x_{01}) + \dots + a_n(x_n - x_{0n}).$$

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě \mathbf{x}_0 , $\text{grad } f(\mathbf{x}_0) \neq \vec{0}$, potom

1. **tečná nadrovina k hladině** $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$ funkce f procházející bodem \mathbf{x}_0 má rovnici

$$\text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0.$$

2. **tečná nadrovina ke grafu funkce** $u = f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ v bodě grafu $[\mathbf{x}_0, u_0] \in \mathbb{R}^{n+1}$, kde $u_0 = f(\mathbf{x}_0)$, je dána rovnicí

$$u - u_0 = \text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Libovolný vektor

$\mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ tečné nadroviny k hladině je kolmý k vektoru $\text{grad } f(\mathbf{x}_0)$.

Pro $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ má tečná nadrovina k hladině (tj. přímka) tvar $f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0) = 0$ a tečná nadrovina ke grafu funkce (tj. rovina) má tvar $u - u_0 = f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0)$.

Poznámka 1.1: Graf funkce $u = f(\mathbf{x})$ je vlastně nulovou hladinou funkce $g(\mathbf{x}, u) = f(\mathbf{x}) - u = 0$.

Tečná nadrovina k hladině funkce g v bodě $[\mathbf{x}_0, u_0]$ má tedy tvar $\text{grad } g(\mathbf{x}_0) \cdot ([\mathbf{x}, u] - [\mathbf{x}_0, u_0]) = 0$ a odtud dostaneme $\text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) - 1(u - u_0) = 0$.

Příklad 1.15: Je dána funkce $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Hladiny této funkce jsou kulové plochy, které leží v \mathbb{R}^3 ; graf funkce f leží v \mathbb{R}^4 . Hladina procházející bodem $[x_0, y_0, z_0]$ má rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = u_0$, $u_0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2$.

Tečná rovina k této hladině v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ má rovnici

$$a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0)=0, \quad \vec{a} = \text{grad } f(x_0, y_0, z_0),$$

tj.

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0.$$

Tečná nadrovina ke grafu této funkce leží v \mathbb{R}^4 a má rovnici

$$u-u_0=2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0).$$

Cvičení 1.1: Ke grafu funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v \mathbb{R}^2 určete rovnici tečné roviny (v \mathbb{R}^3) v bodě $B = [1, 2, ?]$.
 $[B = [1, 2, f(1, 2)] = [1, 2, 5], \text{ grad } f(1, 2) = (2x, 2y)_{[1, 2]} = (2, 4) \Rightarrow$
 tečná rovina je $u - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2).$]

Definice 1.11: (směr růstu, poklesu)

Vektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$, ($\|\vec{s}\| = 1$) se nazývá **směrem růstu (poklesu)** funkce f v bodě \mathbf{x}_0 , jestliže

$$\exists \delta > 0 : f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s}) > (<) f(\mathbf{x}_0), \quad \forall t \in (0, \delta),$$

tj. ve směru \vec{s} se hodnota funkce f zvětšuje (zmenšuje).

Věta 1.6: (směr růstu, poklesu diferencovatelné funkce)

Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě \mathbf{x}_0 . Vektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$, je **směrem růstu (poklesu)** funkce f v bodě \mathbf{x}_0 , jestliže

$$\text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{s} > 0 \quad (\text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{s} < 0).$$

(Tedy vektory $\text{grad } f(\mathbf{x}_0)$ a \vec{s} svírají ostrý (tupý) úhel.)

Příklad 1.16: Určete, zda vektor $\vec{s} = (1, 3)$ je směrem růstu(poklesu) funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $B = [1, 1]$. Protože $\text{grad } f(1, 1) \cdot \vec{s} = (2, 2) \cdot (1, 3) = 8 > 0$, tak vektor \vec{s} je směrem růstu funkce f v bodě B .

1.5 Derivace a diferenciály vyšších řádů. Taylorova věta.

Definice 1.12: (druhá parciální derivace)

Nechť funkce $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ má parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ v okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$. Existuje-li, pak se následující limita

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0 + t\vec{e}_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0},$$

nazývá **druhá parciální derivace funkce f v bodě \mathbf{x}_0** .

Značíme

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Podobně definujeme vyšší parciální derivace, např.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}.$$

Nechť funkce f je diferencovatelná na okolí $U(\mathbf{x}_0)$. Je-li každá z funkcí $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ diferencovatelná v bodě \mathbf{x}_0 , říkáme, že funkce f je v bodě \mathbf{x}_0 **dvakrát diferencovatelná**.

Jestliže je funkce f dvakrát diferencovatelná, pak existují diferenciály jejich parciálních derivací, tedy existují i druhé parciální derivace funkce f v bodě \mathbf{x}_0 .

Věta 1.7: (záměnnost parciálních derivací)

Je-li funkce f **dvakrát diferencovatelná** v bodě \mathbf{x}_0 , potom

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n;$$

tj. druhé derivace jsou záměnné.

U funkcí, které nejsou dvakrát diferencovatelné, nemusí platit záměnnost smíšených parciálních derivací. Například pro funkci

$$f = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & [x, y] \neq [0, 0] \\ 0 & [x, y] = [0, 0] \end{cases}$$

neplatí věta 1.7 v počátku.

Příklad 1.17: Funkce $f(x, y) = x^2 y$ má parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

a pro smíšené parciální derivace platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x.$$

Věta 1.8: Nechť funkce f je diferencovatelná na okolí $U(\mathbf{x}_0)$. Jsou-li parciální derivace $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ spojité v bodě \mathbf{x}_0 , pak funkce f je **dvakrát diferencovatelná** v bodě \mathbf{x}_0 .

Definice 1.13: (druhý diferenciál)

Předpokládejme, že funkce f má v bodech $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$ diferenciál $df(\mathbf{x}, \vec{h}) = \text{grad } f(\mathbf{x}) \cdot \vec{h}$. Pro pevné \vec{h} je $df(\mathbf{x}, \vec{h}) : U(\mathbf{x}_0) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcí \mathbf{x} . Diferenciál funkce $df(\mathbf{x}, \vec{h})$ (proměnné \mathbf{x}) v bodě \mathbf{x}_0 opět vzhledem k \vec{h} se nazývá **druhým diferenciálem funkce f v bodě \mathbf{x}_0** a značí se

$$d(df(\mathbf{x}, \vec{h}))|_{\mathbf{x}_0} = d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) ; \quad \vec{h} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n) .$$

Platí

$$df(\mathbf{x}, \vec{h}) - df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) + \omega(\vec{h}) , \quad \lim_{\|\vec{h}\| \rightarrow 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} \rightarrow 0 .$$

Diferenciál k -tého řádu definujeme rekurentně

$$d(d^{k-1} f(\mathbf{x}, \vec{h})) = d^k f(\mathbf{x}, \vec{h}) .$$

U dvakrát diferencovatelné funkce f existují diferenciály parciálních derivací, tedy i gradientu a proto i diferenciál diferenciálu.

V maticové symbolice

$$\text{je } \vec{h}^T = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix} .$$

Pro funkci dvou proměnných platí

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 .$$

Při výpočtu Hessiany matice, si můžeme pomoci pravidlem "gradient na gradient", tedy

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \text{grad}^T(\text{grad } f) = \\ &= \left(\text{grad}^T \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \text{grad}^T \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Pro **dvakrát diferencovatelnou** funkci f dostaneme

$$\begin{aligned} d^2 f(\mathbf{x}, \vec{h}) &= d(df(\mathbf{x}, \vec{h})) = d(\text{grad } f(\mathbf{x}) \cdot \vec{h}) = \sum_{j=1}^n d \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) h_j \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j} \right) h_i h_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i \right) h_j . \end{aligned}$$

Takže

$$d^2 f(\mathbf{x}, \vec{h}) = \vec{h} \cdot \mathbb{H}(\mathbf{x}) \cdot \vec{h}^T ,$$

kde $\mathbb{H}(\mathbf{x})$ je **Hessova matice** s prvky $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Druhý diferenciál je kvadratická forma v proměnné \vec{h} .

Příklad 1.18: Pro funkci $f(x, y) = x^2 + xy$ je

$$df = (y + 2x) dx + x dy = (y + 2x, x) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} ,$$

$$d^2 f = d(y + 2x) dx + d(x) dy = (2 dx + 1 dy) dx + (1 dx + 0 dy) dy$$

$$= (2 dx + 1 dy, 1 dx + 0 dy) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$= \left((dx, dy) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, (dx, dy) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

$$= (dx, dy) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = 2 dx^2 + 2 dx dy + 0 dy^2 .$$

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Formální pravidlo pro výpočet diferenciálu vyššího řádu funkce

$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$:

$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^k f.$$

Druhá derivace ve směrech \vec{s}, \vec{r}

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \vec{r} \partial \vec{s}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\text{grad } f(\mathbf{x} + t\vec{r}) \vec{s}^T - \text{grad } f(\mathbf{x}) \vec{s}^T] = \vec{r} \cdot \mathbb{H}(\mathbf{x}) \cdot \vec{s}^T.$$

Věta 1.9: (Taylorova věta)

Nechť funkce $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je v okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ bodu $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ $(k+1)$ -krát diferencovatelná. Potom pro každé $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$ položíme $\vec{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ a **Taylorův rozvoj** funkce f v bodě \mathbf{x}_0 je dán vztahem

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) + \frac{d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h})}{2!} + \dots + \frac{d^k f(\mathbf{x}_0, \vec{h})}{k!} + R_{k+1}(\mathbf{x}_0, \vec{h}),$$

kde

$$R_{k+1}(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(\mathbf{x}_0 + \vartheta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \vec{h}), \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Příklad 1.19: Taylorův rozvoj funkce $f(x, y) = x$ v bodě $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]$ pro $k = 1$ je dán vztahy:

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} (y - y_0) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}),$$

$$R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f(\xi_0, \eta_0)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(\xi_0, \eta_0)}{\partial x \partial y} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f(\xi_0, \eta_0)}{\partial y^2} (y - y_0)^2 \right), \quad \xi_0 \in (x_0, x); \eta_0 \in (y_0, y).$$

$$\text{Tedy } x - x_0 = 1 \cdot (x - x_0) + 0.$$

Taylorovu formuli používáme pro **aproximaci** difference $\Delta f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$ pomocí diferenciálů.

Příklad 1.20: Pro funkci $f(x, y) = xy$ lze diferenci $\Delta f = xy - x_0 y_0$ psát ve tvaru

$$\Delta f = f(x, y) - f(x_0, y_0) \approx \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \Delta y,$$

$$xy - x_0 y_0 \approx y_0 \Delta x + x_0 \Delta y$$

kde chyba aproximace je

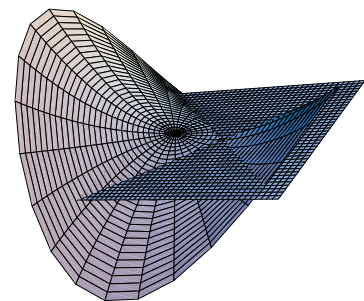
$$R_2(x_0, y_0, x, y) = \Delta x \cdot \Delta y = (x - x_0) \cdot (y - y_0).$$

Pro funkci dvou proměnných platí $d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial^2 y} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$.

Německý matematik
Ludwig Otto Hesse
(1811-1874).



se věnoval především studiu algebraických rovnic a teorii invariantů.



Graf funkce $f(x, y) = xy$ s tečnou rovinou v bodě $[1, 0]$.

2 Základní pojmy optimalizace v \mathbb{R}^n

2.1 Lokální a globální extrémy

Definice 2.1: (Extrémy) Máme $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$.

(A) Číslo $f(\mathbf{x}_0)$ se nazývá **lokální minimum (maximum)** funkce f , když existuje okolí $U(\mathbf{x}_0)$ bodu \mathbf{x}_0 takové, že platí

$$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \quad (f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \cap \Omega.$$

Bod \mathbf{x}_0 je pak **bod lokálního minima (maxima)** na množině Ω . Píšeme

$$f(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \cap \Omega} f(\mathbf{x}), \quad (f(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \cap \Omega} f(\mathbf{x})).$$

Pokud pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ platí **ostré** nerovnosti, potom hovoříme o **ostrém (lokálním) minimu (maximu)**.

(B) Číslo $f(\mathbf{x}_0)$ se nazývá **globální minimum (maximum)** funkce f na Ω , platí-li

$$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \quad (f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})) \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega.$$

Píšeme

$$f(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x}), \quad (f(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x})).$$

Bod \mathbf{x}_0 je pak **bod globálního minima (maxima)** na množině Ω . Extrémem funkce f rozumíme maximum nebo minimum této funkce.

Příklady

Pozor nulové parciální derivace neznamenaají nulový diferenciál, např. funkce

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ x & x = y \end{cases}$$

má parciální derivace v bodě $[0, 0]$ rovny nule, ale není zde diferencovatelná, ani nenabývá v bodě $[0, 0]$ extrému.

Věta 2.1: (Nutná podmínka existence lokálního extrému) Nechť funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je v bodě $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ diferencovatelná (definice (1.2)) a má v tomto bodě lokální extrém. Potom

$$df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 0 \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n, \quad (\Rightarrow \text{grad } f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}).$$

Důkaz: (sporem)

Nechť $\exists \vec{h} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ takové, že $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) > 0$.

(Pro $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) < 0$ je důkaz podobný).

Tedy $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \text{grad } f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{h} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} > 0$.

Odtud vyplývá, že existuje $\delta > 0$ takové, že

$$f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) > 0 \quad \text{pro } t \in (0, \delta),$$

$$f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) < 0 \quad \text{pro } t \in (-\delta, 0),$$

což je spor s definicí extrému funkce f v bodě \mathbf{x}_0 .

Definice 2.2: (Stacionární bod)

Nechť f je diferencovatelná funkce v bodě \mathbf{x}_0 . Bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ se nazývá **stacionární bod** diferencovatelné funkce f , když

$$\text{grad } f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Body, ve kterých diferenciál funkce neexistuje nebo je nulový, se nazývají **kritické body** funkce f (viz MA1 definice 7.4).

Příklad 2.1:

Pro funkci $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$ máme $\text{grad } f(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2 - 4, 4x_2 - 2x_1 - 6)$.

V bodě $[0, 0]$ určuje $\text{grad } f(0, 0) = (-4, -6)$ směr největšího růstu funkce f a $-\text{grad } f = (4, 6)$ určuje směr největšího poklesu. Například vektor $\vec{v} = (1, 0)$ určuje směr poklesu v bodě $[0, 0]$, neboť $\text{grad } f \cdot \vec{v} = (-4, -6) \cdot (1, 0) = -4 < 0$.

Pro stacionární body platí

$$\left. \begin{array}{l} 4x_1 - 2x_2 - 4 = 0 \\ 4x_2 - 2x_1 - 6 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \frac{7}{3}, \\ x_2 = \frac{8}{3}. \end{array}$$

Příklad 2.2:

1. Pro funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$ je $\text{grad } f = (2x, 2y)$ a bod $A = [0, 0]$ je stacionární bod. Bod A je bodem minima funkce f a všechny směry jsou v tomto bodě směry růstu.

Pro druhý diferenciál funkce f platí:

$$d^2(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 2dx^2 + 2dy^2 > 0 \quad \forall \vec{h} = (dx, dy) \neq (0, 0).$$

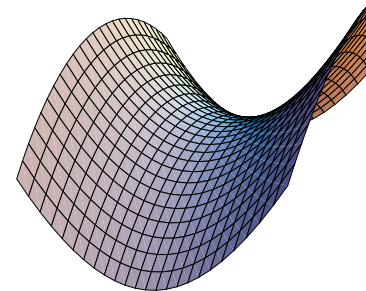
2. Pro funkci $f(x, y) = x^2 - y^2$ je $\text{grad } f = (2x, -2y)$ a opět bod $A = [0, 0]$ je stacionární bod funkce f . Na přímce $y = 0$ má funkce $f(x, 0) = x^2$ minimum v bodě $x = 0$ a na přímce $x = 0$ má funkce $f(0, y) = -y^2$ maximum v bodě $y = 0$.

Pro druhý diferenciál funkce f nyní platí:

$$d^2(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 2dx^2 - 2dy^2. \quad \text{Odtud dostaneme}$$

$$d^2(\mathbf{x}_0, (1, 0)) = 2 > 0, \quad d^2(\mathbf{x}_0, (0, 1)) = -2 < 0.$$

Závěr: Stacionární bod $[0, 0]$ je ve směru $\vec{s} = (1, 0)$ bodem minima funkce f a ve směru $\vec{s} = (0, 1)$ je bodem maxima funkce f (bod $[0, 0]$ je tzv. **sedlový bod**).



Graf funkce $x^2 - y^2$.

Věta 2.2: (Postačující podmínky existence lokálního extrému)

Nechť funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je **dvakrát diferencovatelná** ve vnitřním bodě $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ a $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 0 \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$. Jestliže

1. $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) > 0 \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n, \vec{h} \neq \vec{0}$,

pak je v bodě \mathbf{x}_0 ostré lokální minimum ;

2. $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) < 0 \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n, \vec{h} \neq \vec{0}$,

pak je v bodě \mathbf{x}_0 ostré lokální maximum ;

3. $\exists \vec{h}_1 \neq \vec{0} : d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_1) = 0$ a $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \geq 0$ nebo $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \leq 0 \quad \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$,

pak (zatím) nemůžeme rozhodnout,

4. $\exists \vec{h}_1, \vec{h}_2 \in \mathbb{R}^n :$

$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_2) < 0$, pak ve směru \vec{h}_2 je funkce konkávní (v \mathbf{x}_0 je maximum),

$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_3) > 0$, pak ve směru \vec{h}_3 je funkce konvexní (v \mathbf{x}_0 je minimum),

v bodě \mathbf{x}_0 nenastává extrém, ale \mathbf{x}_0 je **sedlový bod**.

Poznámka 2.1: Uvedeme ekvivalentní podmínky či ekvivalentní názvy příslušných vlastností zahrnutých v předpokladech věty (2.2). Platí $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \vec{h} \mathbb{H}(\mathbf{x}_0) \vec{h}^T$

1.
 - kvadratická forma $\vec{h} \mathbb{H}(\mathbf{x}_0) \vec{h}^T$ je **pozitivně definitní**,
 - matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ je pozitivně definitní,
 - všechny hlavní minory matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou kladné, tj.

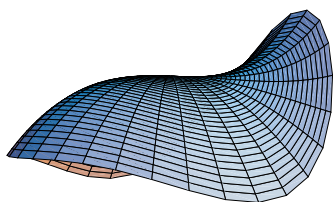
$$M_1 > 0, M_2 > 0, M_3 > 0, \dots,$$

- všechna vlastní čísla matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou kladná.

2.
 - kvadratická forma $\vec{h} \mathbb{H}(\mathbf{x}_0) \vec{h}^T$ je **negativně definitní**,
 - matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ je negativně definitní,
 - hlavní minory matice $\mathbb{H}(\mathbf{x})$ pravidelně střídají znaménka a první minor je záporný, tj.

$$M_1 < 0, M_2 > 0, M_3 < 0, \dots,$$

- všechna vlastní čísla matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou záporná.



Graf funkce $-x^2 + y^3$, která má stacionární bod $[0, 0]$ a

$$d^2 f = -2 dx^2 + 6y dy^2.$$

V bodě $[0, 0]$ platí

$$d^2 f = -2 dx^2 \leq 0.$$

Ve směru $\vec{h}_1 = (0, 1)$ je $d^2 f([0, 0], (0, 1)) = 0$ a neumíme tedy podle věty 2.2 rozhodnout o typu extrému v bodě $[0, 0]$.

Pro druhý diferenciál funkce f platí: $\forall \vec{h} \neq \vec{0}$ je

$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) > 0.$$

Hlavní minory matice \mathbb{H} jsou determinanty čtvercových submatic, obsahujících levý horní roh \mathbb{H} .

Pro druhý diferenciál funkce f platí: $\forall \vec{h} \neq \vec{0}$ je

$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) < 0.$$

3. • kvadratická forma $\vec{h} \mathbb{H}(\mathbf{x}_0) \vec{h}^T$ a matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou **pozitivně semidefinitní** nebo **negativně semidefinitní**,
 • alespoň jeden z hlavních minorů je nulový a platí
 $M_1 \geq 0, M_2 \geq 0, \dots$, nebo $M_1 \leq 0, M_2 \geq 0, M_3 \leq 0, \dots$,
 • vlastní čísla $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou nezáporná nebo nekladná, aspoň jedno je nulové.
4. • kvadratická forma $\vec{h} \mathbb{H}(\mathbf{x}_0) \vec{h}^T$ a matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou **indefinitní**,
 • pro znaménka minorů nenastává ani jeden z předchozích případů,
 • vlastní čísla matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou kladná i záporná.

Příklad 2.3: Vyšetříme lokální extrémy funkce

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2.$$

Stacionární bod \mathbf{x}_0 určíme ze soustavy

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= 4, \\ -2x_1 + 4x_2 &= 6. \end{aligned}$$

Odtud

$$\mathbf{x}_0 = \left[\frac{7}{3}, \frac{8}{3} \right], \quad \mathbb{H} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} M_1 &= 4 > 0, \\ M_2 &= 12 > 0. \end{aligned}$$

Hessova matice (a tedy i druhý diferenciál) je pozitivně definitní. Proto funkce f má v bodě \mathbf{x}_0 minimum:

$$\min f(x_1, x_2) = f\left(\frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right) = -\frac{114}{9}.$$

Příklad 2.4: Vyšetříme stacionární body funkce

$$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy. \text{ Vypočteme}$$

$$\text{grad } f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}, \quad \mathbb{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}.$$

| Stac. bod | \mathbb{H} | Vlast. čísla | Typ \mathbb{H} | Typ bodu |
|--------------|--|---|---------------------|----------|
| $A = [0, 0]$ | $\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$ | $\begin{aligned} \lambda_1 &= 3 \\ \lambda_2 &= -3 \end{aligned}$ | indefinitní | sedlový |
| $B = [1, 1]$ | $\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ | $\begin{aligned} \lambda_1 &= 9 \\ \lambda_2 &= 3 \end{aligned}$ | pozitivně definitní | minimum |

Pro druhý diferenciál funkce f platí: $\forall \vec{h} \neq \vec{0}$ je

$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \leq 0$$

nebo

$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \geq 0$$

a $\exists \vec{h}_1 \neq \vec{0}$:

$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_1) = 0.$$

$\exists \vec{h}_2 \neq \vec{0}$:

$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_2) > 0$$

a $\exists \vec{h}_3 \neq \vec{0}$:

$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_3) < 0.$$

Bod \mathbf{x}_0 je **sedlový bod** funkce f , jestliže $\text{grad } f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ a platí

$$\begin{aligned} \exists \delta_1, \delta_2 > 0, \vec{h}_1, \vec{h}_2 \in \mathbb{R}^n: f(\mathbf{x}_0 + t_1 \vec{h}_1) \leq f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}_0 + t_2 \vec{h}_2), \\ \forall t_i \in (-\delta_i, \delta_i), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

V prvním směru \vec{h}_1 nabývá funkce f maxima a v druhém směru \vec{h}_2 nabývá minima v bodě \mathbf{x}_0 .

Všimneme si podrobněji druhého diferenciálu $d^2f = \vec{h} \mathbb{H} \vec{h}^T$
 $= (h_1, h_2) \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = -6h_1h_2$ ve stacionárním
bodě $A = [0, 0]$. Zvolme $\vec{h} = (1, 1)$ a uvažujeme danou
funkci $f(x, y)$ na přímce $x = t, y = t$, tj. funkci $g(t) =$
 $f(t, t) = 2t^3 - 3t^2$. Protože $g''(0) = -6 < 0$, pak na dané
přímce (tj. ve směru vektoru $\vec{h} = (1, 1)$) nabývá funkce f
maxima pro $t = 0$.

Zvolíme-li $\vec{h} = (1, -1)$, pak na přímce $x = t, y = -t$
nabývá funkce f svého minima ($g''(0) = 6 > 0$, kde $g(t) =$
 $f(t, -t) = 3t^2$) pro $t = 0$.

Příklad 2.5: Vyšetříme stacionární body funkce f , kde
 $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$. Platí

$$\text{grad } f(x, y) = (4x^3 - 2(x + y), 4y^3 - 2(x + y)) ,$$

$$\mathbb{H}[x, y] = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix} . \text{ Potom}$$

| Stac. bod | \mathbb{H} | Hlavní minory | Typ bodu |
|------------|--|----------------------------------|---|
| $[1, 1]$ | $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ | $M_1 = 10 > 0$ $M_2 = 96 > 0$ | bod minima |
| $[-1, -1]$ | $\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$ | $M_1 = 10 > 0$ $M_2 = 96 > 0$ | bod minima |
| $[0, 0]$ | $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$ | $M_1 = -2 < 0$ $M_2 = 0$ | Podle věty (2.2) nelze rozhodnout |

Vyšetříme funkci $f(x, y)$ v bodě $[0, 0]$ na přímkách

- a) $x = t, y = t : g(t) = f(t, t) = 2t^4 - 4t^2; g''(0) = -8 < 0$
maximum;
- b) $x = -t, y = t : g(t) = f(-t, t) = 2t^4; g^{(4)}(0) = 48 > 0$
(první nenulová derivace v bodě $t = 0$ je sudá a kladná)
minimum.

Odtud je vidět, že bod $[0, 0]$ je sedlovým bodem funkce f .

2.2 Extrémy vzhledem k podmnožině

Budeme vyšetřovat extrémy dané spojité funkce f v \mathbb{R}^n na takových podmnožinách $V \subset \mathbb{R}^n$, které se dají charakterizovat systémem podmínek ve tvaru rovností nebo nerovností. Těmto podmínkám říkáme **vazbové podmínky** a množině V říkáme **množina přípustných bodů**.

Definice 2.3: (Úlohy s vazbami)

Mějme funkci $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina.

(A) Mějme spojité funkce $h_j(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, p$, $p < n$ a označme

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \cap \Omega : h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, 2, \dots, p\}.$$

Úloha najít extrém funkce f na množině přípustných bodů V se nazývá **optimalizační úloha s vazbami typu rovnosti**.

(B) Mějme spojité funkce $g_i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ a označme

$$\widehat{V} = \{\mathbf{x} \in \Omega : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\}.$$

Úloha najít extrém funkce f na množině přípustných bodů \widehat{V} se nazývá **optimalizační úloha s vazbami typu nerovnosti**.

Je-li přípustná množina V určena jak vazbami typu rovnosti, tak vazbami typu nerovnosti, hovoříme o **úloze se smíšenými vazbami (úloha optimálního řízení)**.

Číslo $f(\mathbf{x}_0)$, ve kterém funkce f nabývá minima (maxima) vzhledem k množině V (viz definice (2.1)), se nazývá **lokální vázané minimum (maximum)** a \mathbf{x}_0 je **bodem lokálního vázaného minima (maxima)** (tedy extrému).

Příklady

Na fotbalové utkání prodáváme vstupenky na stání za cenu x a sezení za cenu y . Jejich prodejnost popisují funkce $p_1(x, y)$, $p_2(x, y)$, pro které platí z kapacitních důvodů omezení

$$0 \leq p_1(x, y) \leq S_1,$$

$$0 \leq p_2(x, y) \leq S_2.$$

Naším úkolem je stanovit ceny x, y tak, abychom maximalizovali zisk, tedy vyřešit úlohu

$$\max_{[x, y] \in V} (p_1(x, y)x + p_2(x, y)y),$$

kde $V = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq p_1(x, y) \leq S_1, 0 \leq p_2(x, y) \leq S_2\}$.

Příklad 2.6: Je dána funkce $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$. Určete extrém funkce f na jednorozměrné lineární varietě (přímce) $\mathbf{x} = t\vec{s}$, $\vec{s} = (1, 1)$.

řešení: Na přímce $x_1 = t$, $x_2 = t$ vyšetříme funkci $f(t, t) = g(t) = 2t^2 - 10t$. Pro $t = \frac{5}{2}$ je $g'(\frac{5}{2}) = 0$, $g''(\frac{5}{2}) = 4 > 0$. V bodě $[\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$ nabývá funkce f tzv. **relativního minima** (minima vzhledem k dané varietě).

Příklad 2.7:

Řešitelnost optima-
lizační úlohy: Jestliže
množina $V \subset \mathbb{R}^n$ je
kompaktní (omezená
a uzavřená) a funkce
 f je spojitá na V , po-
tom z torie vyplývá,
že úlohy na hledání
extrému (optima)
 $\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V\}$,
 $\max\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V\}$
jsou řešitelné, tj.
existuje jak $\min_{\mathbf{x} \in V} f(\mathbf{x})$,
tak $\max_{\mathbf{x} \in V} f(\mathbf{x})$.

1) (optimalizační úloha s vazbami typu rovnosti)

Řešíme úlohu $\min\{f(x, y) : [x, y] \in V\}$, kde

$f(x, y) = x^2 + y^2$ a přípustná množina V je dána předpisem
 $V = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y + x - 1 = 0\}$.

”Geometrická metoda”

Řezem grafu funkce f rovinou rovnoběžnou s osou z procházející
”přímkou V ” je parabola.

V bodě $[x_0, y_0] = [0,5; 0,5]$ je její minimum.

”Přechod k jedné proměnné”

Dosadíme $y = -x + 1$ do funkce f , dostaneme funkci jedné
proměnné $f(x, y(x)) = x^2 + (-x + 1)^2 = 2(x^2 - x + \frac{1}{2}) =$
 $2((x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4})$. Tato funkce má minimum v bodě $x_0 = \frac{1}{2}$
 $\Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}$.

”Metoda gradientu”

”Přímka V ” je nulovou hladinou funkce $h(x, y) = y + x - 1$.
Gradient funkce h (pokud existuje), je ”kolmý” k hladině V
(přesněji k tečně hladiny V .)

Gradient funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ vázaného extrému vzhle-
dem k množině V je také kolmý k V .

Oba gradienty jsou tedy lineárně závislé, nebo-li existuje
 $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\text{grad } f(x_0, y_0) + \lambda \text{grad } h(x_0, y_0) = 0 \quad \wedge \quad h(x_0, y_0) = 0.$$

Konkrétně

$$\left. \begin{array}{l} 2x_0 + \lambda \cdot 1 = 0 \\ 2y_0 + \lambda \cdot 1 = 0 \\ y_0 + x_0 - 1 = 0 \end{array} \right\} x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{1}{2}, \lambda = -1.$$

Tímto způsobem však získáme pouze bod, ve kterém může
být extrém funkce f vzhledem k množině V .

2) (optimalizační úloha s vazbami typu nerovnosti)

Řešíme úlohu $\min\{f(x, y), [x, y] \in \widehat{V}\}$, kde

$f(x, y) = x^2 + y^2$; a přípustná množina \widehat{V} je dána předpisem
 $\widehat{V} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = y + x - 1 \leq 0\}$.

Jestliže bod $[x_0, y_0]$ je vnitřní bod množiny \widehat{V} a funkce f nabývá v tomto bodě extrému, pak podle věty (2.1) platí

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = 0$$

(pro diferencovatelnou funkci).

Jestliže bod $[x_0, y_0]$ je hraničním bodem množiny \widehat{V} (neboli $g(x_0, y_0) = 0$) a funkce f nabývá v tomto bodě extrému vzhledem k její hranici $\partial\widehat{V}$ ($= V$), pak podle první části příkladu existuje $\widehat{\lambda} \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$\text{grad } f(x_0, y_0) + \widehat{\lambda} \text{grad } g(x_0, y_0) = 0$$

(opět pro diferencovatelné funkce).

Obě předchozí podmínky můžeme najednou zapsat ve tvaru

- i) $\widehat{\lambda} g(x_0, y_0) = 0$
- ii) $\text{grad } f(x_0, y_0) + \widehat{\lambda} \text{grad } g(x_0, y_0) = 0$.

Konkrétně

$$\left. \begin{array}{l} \widehat{\lambda} \cdot (x_0 + y_0 - 1) = 0 \\ (2x_0, 2y_0) + \widehat{\lambda} \cdot (1, 1) = (0, 0) \end{array} \right\} \begin{array}{l} x_0 = \frac{1}{2}, y_0 = \frac{1}{2}, \widehat{\lambda} = -1 \\ x_0 = 0, y_0 = 0, \widehat{\lambda} = 0. \end{array}$$

V bodě $[0, 0]$ je zřejmě minimum funkce f vzhledem k množině \widehat{V} . V bodě $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ je minimum funkce f vzhledem k hranici množiny $\partial\widehat{V}$. Zbývá zjistit, zda je v tomto bodě extrém vzhledem k celé množině \widehat{V} .

Gradient funkce g směřuje ven z množiny \widehat{V} . Připomeňme, že gradient určuje směr největšího růstu funkce. Z rovnosti $\text{grad } f(x_0, y_0) = -\widehat{\lambda} \text{grad } g(x_0, y_0)$ pak pro $\widehat{\lambda} < 0$ plyne, že funkce f "roste k hranici" množiny \widehat{V} (na hranici může být maximum) a naopak pro $\widehat{\lambda} > 0$ klesá k hranici (může tam být minimum).

Konkrétně v našem příkladě je $\widehat{\lambda} = -1$, funkce f roste k hranici, ale na hranici $\partial\widehat{V}$ nabývá minima, tedy vzhledem k množině \widehat{V} nemá funkce f v bodě $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ extrém.

Věta 2.3: (Karushovy – Kuhnovy – Tuckerovy nutné podmínky vázaného extrému)

Nechť Ω je otevřená množina a funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je diferencovatelná na Ω .

- i) Nechť \mathbf{x}_0 je bod vázaného lokálního extrému funkce f vzhledem k množině

$$V = \{\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, 2, \dots, p, p < n\},$$

kde $h_j(\mathbf{x})$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na Ω , a nechť vektory $\text{grad } h_j(\mathbf{x}_0)$, $j = 1, 2, \dots, p$, jsou lineárně nezávislé. Potom $\text{grad } f(\mathbf{x}_0)$ je lineární kombinací vektorů $\text{grad } h_j(\mathbf{x}_0)$, $j = 1, 2, \dots, p$, tj. **existují** reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ taková, že v bodě extrému platí

$$\text{grad } f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \text{grad } h_j(\mathbf{x}_0) = \vec{0}.$$

- ii) Nechť \mathbf{x}_0 je bod lokálního vázaného extrému funkce f vzhledem k množině

$$\widehat{V} = \{\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\},$$

kde $g_i(\mathbf{x})$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na Ω .

Nechť $I = \{i : g_i(\mathbf{x}_0) = 0\}$ je množina indexů těch vazeb, ve kterých v bodě \mathbf{x}_0 nastává rovnost (tzv. **aktivní vazba**), a nechť vektory $\text{grad } g_i(\mathbf{x}_0)$, $i \in I$, jsou lineárně nezávislé. Potom existují čísla $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \dots, \widehat{\lambda}_m$ taková, že v bodě extrému \mathbf{x}_0 platí:

- a) $\widehat{\lambda}_i g_i(\mathbf{x}_0) = 0, \quad \widehat{\lambda}_i \geq 0$ pro minimum, $i = 1, 2, \dots, m$
 $\widehat{\lambda}_i \leq 0$ pro maximum, $i = 1, 2, \dots, m$
- b) $\text{grad } f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^m \widehat{\lambda}_i \text{grad } g_i(\mathbf{x}_0) = \vec{0}.$

Příklad 2.8: Najděte extrém funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ vzhledem k přípustné množině V , která je určena podmínkou $h(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$.

”Geometricky”

Hladiny funkce f jsou kružnice se středem v počátku a přípustná množina V je elipsa se středem v počátku.

V bodech $[-2, 0]$, $[2, 0]$ má funkce f maximum vzhledem k množině V .

V bodech $[0, -1]$, $[0, 1]$ má funkce f minimum vzhledem k množině V .

”Přechod k jedné proměnné”

Položíme $x = 2 \cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Potom $f(t) = 4 \cos^2 t + \sin^2 t$, $f'(t) = -3 \sin 2t$, $f'(t) = 0$ pro $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$, $t_3 = \pi$, $t_4 = \frac{3\pi}{2}$.

Zároveň $f''(0) = f''(\pi) = -12 < 0 \Rightarrow$ maximum a $f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2}) = 12 > 0 \Rightarrow$ minimum.

”Kuhnovy – Tuckerovy nutné podmínky”

V bodě $[x, y]$ vázaného extrému funkce f musí platit $\text{grad } f(x, y) + \lambda \text{grad } h(x, y) = 0 \wedge h(x, y) = 0$. Tedy

$$\left. \begin{aligned} 2x + \lambda \frac{x}{2} &= 0 \\ 2y + \lambda 2y &= 0 \\ \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 0, y = \pm 1, \lambda = -1, \\ y &= 0, x = \pm 2, \lambda = -4. \end{aligned}$$

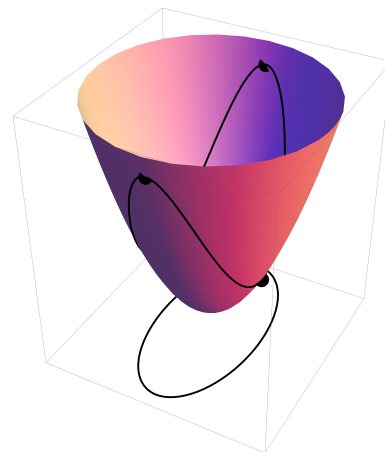
Poslední metodou jsme získali (ne vždy všechny) body, ve kterých může být extrém funkce f vzhledem k množině V . Pomocí následující metody se pokusíme rozhodnout, zda v daných bodech je vázané maximum nebo minimum funkce f .

Metoda Lagrangeovy funkce

Základní myšlenka metody spočívá v tom, že se pro optimalizační úlohu sestaví pomocná Lagrangeova funkce tak, že nutné podmínky minima pro úlohu s vazbami (věta (2.4)) se stanou podmínkami stacionárního bodu Lagrangeovy funkce.

Pro úlohu z předchozího příkladu definujeme Lagrangeovu funkci vztahem

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda h(x, y).$$



Tato metoda je velice univerzální a řada jejích modifikací se využívá v mnoha numerických metodách. Samotná Lagrangeova funkce je základem tzv. teorie duality.

Koeficient λ se nazývá **Langrangeův multiplikátor**. Pro body $[x, y] \in V$ platí $L(x, y, \lambda) = f(x, y)$, to znamená, že funkce L , f mají stejné extrémy vzhledem k množině V .

Pro stacionární bod $[x, y, \lambda]$ Lagrangeovy funkce L platí $\text{grad } L(x, y, \lambda) = \vec{0}$, tedy

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= h(x, y) = 0, \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow \text{grad } f + \lambda \text{grad } h = 0,$$

což odpovídá nutným podmínkám vázaného extrému.

Nyní budeme předpokládat, že funkce f , h jsou **dvakrát diferencovatelná** a odvodíme vztah pro druhý diferenciál Lagrangeovy funkce.

$$\begin{aligned} d^2 L &= \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} dy^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}}_{=0} d\lambda^2 \\ &\quad + 2 \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda} dx d\lambda + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} dy d\lambda \right) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \\ &\quad + \lambda \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} dy^2 \right) \\ &\quad + 2 \underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial x} dx + \frac{\partial h}{\partial y} dy \right)}_{=dh=0 \text{ vazba}} d\lambda \\ &= d^2 f + \lambda d^2 h. \end{aligned}$$

Druhý diferenciál Lagrangeovy funkce můžeme vypočítat i postupně $d^2 L = d(dL) = d(L_x dx + L_y dy + L_\lambda d\lambda) = d(f_x dx + f_y dy + \lambda(h_x dx + h_y dy) + h d\lambda) = d^2 f + \lambda d^2 h$.

Příklad 2.9: Vrátime se k předchozímu příkladu (2.8), kde hledáme extrém funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ vzhledem k přípustné množině $V = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0\}$.

Druhý diferenciál Lagrangeové funkce je dán vztahem

$$d^2 L = 2 dx^2 + 2 dy^2 + \lambda \left(\frac{1}{2} dx^2 + 2 dy^2 \right)$$

a vazbová podmínka je $dh = \frac{x}{2} dx + 2y dy = 0$.

Ve stacionárních bodech Lagrangeové funkce platí

$$\begin{array}{lll} [0, \pm 1], \lambda = -1 & \text{stac. body} & [\pm 2, 0], \lambda = -4 \\ dy = 0 & \text{vazba} & dx = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} d^2 L = \frac{3}{2} dx^2 > 0 & (dx, dy) \neq \vec{0} & d^2 L = -6 dy^2 < 0 \\ \text{minimum} & \text{typ extrému} & \text{maximum} \end{array}$$

Poznamenejme, že v bodech $[\pm 2, 0]$ je maximum funkce f i vzhledem k množině $\hat{V} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \leq 0\}$, neboť funkce f směrem k hranici $\partial \hat{V}$ roste ($\lambda = -4 < 0$).

Naopak v bodech $[0, \pm 1]$ není extrém funkce f vzhledem k množině \hat{V} .

Věta 2.4: (postačující podmínky vázaného extrému)

Nechť funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je **dvakrát diferencovatelná** na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

i) Nechť funkce $h_j : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, p$, $p < n$ mají spojitě parciální derivace na Ω a jsou **dvakrát diferencovatelné** v bodě $\mathbf{x}_0 \in V$, kde

$$V = \{\mathbf{x} \in \Omega : h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1, 2, \dots, p, p < n\}.$$

Dále existují reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ taková, že v bodě $\mathbf{x}_0 \in V$ platí $\text{grad } f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^p \lambda_j \text{grad } h_j(\mathbf{x}_0) = \vec{0}$.

Nechť vektory $\text{grad } h_j(\mathbf{x}_0)$ jsou lineárně nezávislé a pro každý nenulový vektor $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ takový, že $\text{grad } h_j(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} = 0$, $j = 1, 2, \dots, p$, platí

$$d^2 f(\mathbf{x}_0, d\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^p \lambda_j d^2 h_j(\mathbf{x}_0, d\mathbf{x}) > 0 (< 0).$$

Potom \mathbf{x}_0 je bod ostrého (lokálního) minima (maxima) funkce f vzhledem k množině V .

ii) Nechť funkce $g_i : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, mají spojitě parciální derivace na Ω a jsou **dvakrát diferencovatelné** v bodě $\mathbf{x}_0 \in \widehat{V}$, kde

$$\widehat{V} = \{\mathbf{x} \in \Omega : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i = 1, 2, \dots, m\}$$

Nechť existují čísla $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \dots, \widehat{\lambda}_m$ taková, že v bodě \mathbf{x}_0 platí:

$$\begin{aligned} \widehat{\lambda}_i g_i(\mathbf{x}_0) = 0 \quad \wedge \quad \widehat{\lambda}_i \geq 0 \quad (\widehat{\lambda}_i \leq 0), \quad i = 1, 2, \dots, m, \\ \text{grad } f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^m \widehat{\lambda}_i \text{grad } g_i(\mathbf{x}_0) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Dále nechť $I = \{i : g_i(\mathbf{x}_0) = 0\}$ a vektory $\text{grad } g_i(\mathbf{x}_0)$, $i \in I$ jsou lineárně nezávislé. Navíc nechť pro každý nenulový vektor $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$ takový, že $\text{grad } g_i(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} = 0$, pro $i \in I$, pro které $\widehat{\lambda}_i > 0$ ($\widehat{\lambda}_i < 0$), $\text{grad } g_i(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} \leq 0$, pro ostatní indexy $i \in I$ (tj. $\widehat{\lambda}_i = 0$), platí

$$d^2 f(\mathbf{x}_0, d\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^p \widehat{\lambda}_i d^2 g_i(\mathbf{x}_0, d\mathbf{x}) > 0 (< 0).$$

Potom \mathbf{x}_0 je bod ostrého (lokálního) minima (maxima) funkce f vzhledem k množině \widehat{V} .

V bodě \mathbf{x}_0 jsou tedy splněny nutné podmínky vázaného lokálního extrému funkce f vzhledem k množině V , viz věta (2.3).

Je-li druhý diferenciál Lagrangeovy funkce $d^2 L(\mathbf{x}_0, \lambda, d\mathbf{x})$ indefinitní v bodě \mathbf{x}_0 , pak funkce f nemá v tomto bodě extrém vzhledem k přípustné množině V .

Pokud $\lambda_i > 0$, potom nás zajímá, zda je minimum funkce f na hranici $\partial \widehat{V}$, tj. $\text{grad } g_i(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} = 0$.

Příklad 2.10: Stanovte extrém funkce $f(x, y) = xy$ na přípustné množině V určené podmínkou $x + y - 1 = 0$.

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x + y - 1).$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x + \lambda, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x + y - 1.$$

Stacionární bod

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2}, \quad \lambda = -\frac{1}{2}.$$

Máme $df = ydx + xdy$, $d^2f = 2dx dy$ a $dx + dy = 0$ na V . Proto

$$d^2f = 2dx(-dx) = -2dx^2 < 0.$$

Bod $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ je bodem maxima funkce f na V ; $\max f = \frac{1}{4}$.

Příklad 2.11: Stanovte extrém funkce $f(x, y, z) = xy + yz + xz$ na množině $V = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 : xyz - 1 = 0\}$.

Lagrangeova funkce: $L(x, y, z, \lambda) = xy + yz + xz + \lambda(xyz - 1)$.

Nutné podmínky:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x} : y + z + \lambda yz = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} : x + z + \lambda xz = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} : y + x + \lambda xy = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} xy + xz + \lambda xyz = 0 \\ xy + yz + \lambda xyz = 0 \\ yz + xz + \lambda xyz = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x = y, z \neq 0, \\ y = z, x \neq 0. \end{array}$$

Přípustným bodem je $S = [1, 1, 1]$; pak $\lambda = -2$. Prověříme splnění postačujících podmínek podle věty (2.4). Platí

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1 + \lambda z, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 1 + \lambda y, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0, \\ \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 1 + \lambda x, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0. \text{ Tedy}$$

$$\begin{aligned} d^2L(\mathbf{x}_0, \lambda, \vec{h}) &= \\ &= 2(1 + \lambda z)h_1h_2 + 2(1 + \lambda y)h_1h_3 + 2(1 + \lambda x)h_2h_3|_{S, \lambda=-2} \\ &= -2(h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3); \end{aligned}$$

Vazba

$$\text{grad } h(x, y, z) \cdot \vec{h} = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix}_S \cdot \vec{h} = h_1 + h_2 + h_3 = 0.$$

Jde o úlohu najít mezi kvádry jednotkového objemu ten, který má minimální povrch (je to krychle!).

Dosazením $h_3 = -h_1 - h_2$ dostaneme $-2(h_1h_2 - h_1^2 - h_1h_2 - h_1h_2 - h_2^2) = 2(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2) = \frac{1}{2}(4h_1^2 + 4h_1h_2 + 4h_2^2)$.

Tato kvadratická forma má pozitivně definitní matici $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

(vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 2$), proto bod $S = [1, 1, 1]$ je bodem minima.

3 Diferencovatelná zobrazení

3.1 Základní pojmy

Definice 3.1 : (vektorová funkce)

Mějme m funkcí $f_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $i = 1, 2, \dots, m$. Zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m$, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x}))$ se nazývá **vektorová funkce vektorového argumentu**. Funkce f_i , $i = 1, 2, \dots, m$ se nazývají **složky vektorové funkce**.

Příklad 3.1 : Máme vektorovou funkci $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$,

$\mathbf{f} = (f_1, f_2) = (y_1, y_2)$, kde

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2, \\ y_2 &= x_1 + 3x_2, \end{aligned} \text{ maticově } \mathbf{y} = \mathbb{A} \cdot \mathbf{x}, \text{ kde } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Body $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ zobrazujeme v jednom kartézském systému a jejich obrazy $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ v jiném kartézském systému.

Uvedená vektorová funkce přiřazuje bodům čtverce $PABC$ body rovnoběžníka $P'A'B'C'$ tak, že $P \rightarrow P'$, $A \rightarrow A'$, \dots . Konkrétně čtverec $P(0, 0) A(1, 0) B(1, 1) C(0, 1)$ se zobrazí na rovnoběžník $P'(0, 0) A'(2, 1) B'(3, 4) C'(1, 3)$.

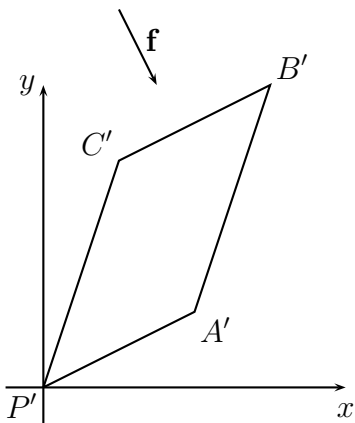
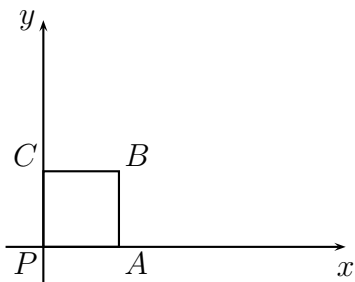
Poznamenejme, že obsah rovnoběžníka $\text{meas}(P'A'B'C')$ je roven 5 a hodnota determinantu matice $\det A$ je také 5, tedy platí

$$\text{meas}(P'A'B'C') = |\det A| \cdot \text{meas}(PABC).$$

Zároveň platí

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } y_1 \\ \text{grad } y_2 \end{pmatrix}.$$

Uvedené vlastnosti zobecníme v následujícím textu.



Definice 3.2: (diferencovatelnost vektorové funkce)

Vektorová funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ o složkách f_1, f_2, \dots, f_m je **diferencovatelná** v bodě $\mathbf{x}_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, jestliže funkce $f_i, i = 1, 2, \dots, m$ jsou diferencovatelné v bodě \mathbf{x}_0 . **Diferenciálem vektorové funkce \mathbf{f}** je potom vektor

$$d\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \begin{pmatrix} df_1(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \\ df_2(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \\ \vdots \\ df_m(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(\mathbf{x}_0) \vec{h} \\ \text{grad } f_2(\mathbf{x}_0) \vec{h} \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(\mathbf{x}_0) \vec{h} \end{pmatrix} = \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0) \vec{h}.$$

Zde opět $\vec{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Matice $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$ (typu (m, n)), jejíž řádky jsou $\text{grad } f_i(\mathbf{x}_0)$, se nazývá **derivace vektorové funkce \mathbf{f} v bodě \mathbf{x}_0** nebo **Jacobiova matice vektorové funkce \mathbf{f}** . Tuto matici také označujeme

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \text{grad } \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{D(\mathbf{f})}{D(\mathbf{x})} = \frac{D(f_1, f_2, \dots, f_m)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)}.$$

Pro $m = n$ se determinant Jacobiovy matice $\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ nazývá **jakobián**.

Pokud $\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$, pak také říkáme, že matice $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ je regulární.

Polární souřadnice

Vyšetříme vektorovou funkci $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2, (r, \varphi) \mapsto (x, y)$ danou vztahy

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, \\ y &= r \sin \varphi. \end{aligned}$$

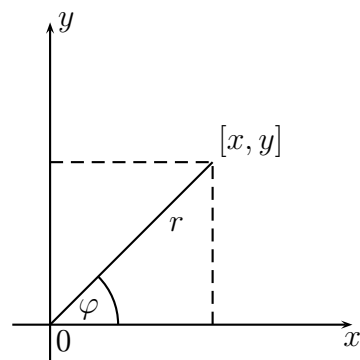
Pro libovolné $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ je \mathbf{f} diferencovatelná funkce a platí

$$\mathbf{f}' = \mathbb{J}_{\mathbf{f}} = \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad \boxed{\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}} = r}.$$

Takže pro $r \neq 0$ je vektorová funkce \mathbf{f} regulární. Není však na celém prostoru \mathbb{R}^2 bijektivní (obrazem různých bodů (r_1, φ_1) , $(r_1, \varphi_1 + 2\pi)$ je tentýž bod). Proto označíme

$$\mathcal{P} = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : 0 < r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi\}.$$

Potom vektorová funkce \mathbf{f} zobrazuje množinu \mathcal{P} na množinu $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ bijektivně a existuje inverzní vektorová funkce



$\mathbf{f}^{-1} : X \mapsto \mathcal{P}$. Tato inverzní vektorová funkce je dána vztahy:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x}, & x > 0, y \geq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ \pi + \arctg \frac{y}{x}, & x < 0, y \in \mathbb{R}, \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0, y < 0 \\ 2\pi + \arctg \frac{y}{x}, & x > 0, y < 0. \end{cases}$$

Vektorová funkce $\mathbf{f}^{-1} \ ((r, \varphi) = \mathbf{f}^{-1}(x, y))$ se nazývá **soustava polárních souřadnic**. Pro jakobiovou matici funkce \mathbf{f}^{-1} platí

$$\mathbb{J}_{\mathbf{f}^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\frac{\sin \varphi}{r} & \frac{\cos \varphi}{r} \end{pmatrix}.$$

Geometricky má číslo r význam vzdálenosti bodu (x, y) od počátku a číslo φ význam úhlu mezi průvodičem bodu (x, y) a kladným směrem osy x .

Tedy
$$\mathbb{J}_{\mathbf{f}} \cdot \mathbb{J}_{\mathbf{f}^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vektorová funkce \mathbf{f} zobrazí počátek do počátku, přímku danou rovností $r = R$ zobrazí na kružnici vyjádřenou parametricky rovnicemi $x = R \cos \varphi$, $y = R \sin \varphi$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Obrazem přímky $\varphi = \varphi_1$ je polopřímka vyjádřená parametrickými rovnicemi $x = r \cos \varphi_1$, $y = r \sin \varphi_1$ (parametr $r \geq 0$).

Obrazem vyplněného obdélníku $\Omega_{\Delta r \Delta \varphi}$ je vyplněná výseč mezikruží $\Omega_{\Delta x \Delta y}$ a platí $\text{meas}(\Omega_{\Delta x \Delta y}) \approx r \text{meas}(\Omega_{\Delta r \Delta \varphi}) = \det \mathbb{J}_{\mathbf{f}} \cdot \text{meas}(\Omega_{\Delta r \Delta \varphi})$.

Věta 3.1: (geometrický význam jakobiánu)

Nechť prosté regulární zobrazení \mathbf{f} zobrazuje oblast $\Omega_{r\varphi}$, která obsahuje bod (r_0, φ_0) , na oblast Ω_{xy} , potom platí (při označení $d = \text{diam } \Omega_{r\varphi}$ (délka největší možné úsečky ležící v $\Omega_{r\varphi}$), $\text{meas}(\Omega) = \text{míra oblasti } \Omega$)

$$\lim_{d \rightarrow 0} \frac{\text{meas}(\Omega_{xy})}{\text{meas}(\Omega_{r\varphi})} = |\det J_{\mathbf{f}}(r_0, \varphi_0)|.$$

Pro malé d píšeme přibližnou rovnost

$$\text{meas}(\Omega_{xy}) \approx |\det J_{\mathbf{f}}(r_0, \varphi_0)| \cdot \text{meas}(\Omega_{r\varphi}).$$

Všimněme si, že pro funkci $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ (hladká monotónní) píšeme tvrzení věty ve tvaru

$$\lim_{|\Delta x| \rightarrow 0} \frac{|\Delta \mathbf{f}|}{|\Delta x|} = |\mathbf{f}'|.$$

Cylindrické souřadnice

Nechť vektorová funkce \mathbf{f} je dána transformačními rovnicemi

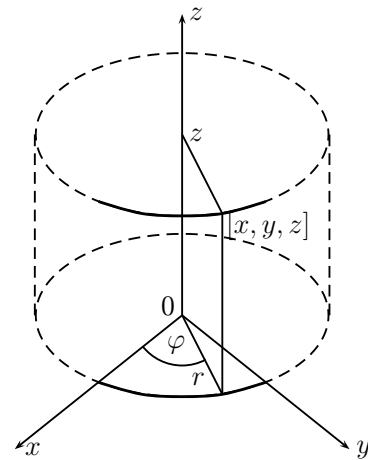
$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi, \\y &= r \sin \varphi, \\z &= z.\end{aligned}$$

Protože $\boxed{\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}} = r}$, je na množině $V = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\infty < z < +\infty\}$ tato vektorová funkce regulární a prostá a zobrazuje množinu V na množinu $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{osa } z\}$ vzájemně jednoznačně.

Inverzní vektorová funkce $\mathbf{f}^{-1} : (x, y, z) \mapsto (r, \varphi, z)$, kde

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \text{jediný kořen rovnic } \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi, \\ z &= z\end{aligned}$$

se nazývá **soustava cylindrických souřadnic**.



Sférické souřadnice

Máme vektorovou funkci \mathbf{f} danou transformačními rovnicemi

$$\begin{aligned}x &= r \cos \varphi \cos \vartheta, \\y &= r \sin \varphi \cos \vartheta, \\z &= r \sin \vartheta.\end{aligned}$$

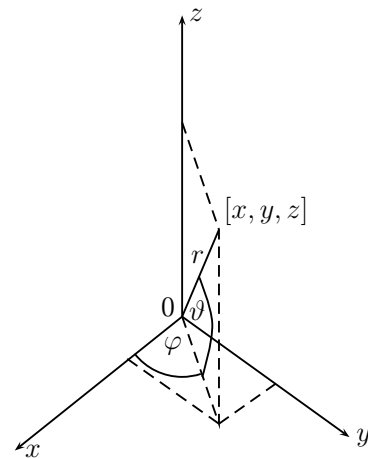
Potom $\boxed{\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}} = r^2 \cos \vartheta}$ a jakobián je roven nule právě tehdy, když $r = 0$ nebo $\vartheta = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Vektorová funkce \mathbf{f} je proto regulární a prostá na množině

$$V = \{(r, \varphi, \vartheta) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r < +\infty, 0 \leq \varphi < 2\pi, -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}\}.$$

Inverzní vektorová funkce $\mathbf{f}^{-1} : (x, y, z) \mapsto (r, \varphi, \vartheta)$

$$\begin{aligned}\mathbf{f}^{-1} : \quad r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \\ \varphi &= \text{jediný kořen rovnic } \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \varphi, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi, \\ \vartheta &= \text{jediný kořen rovnice } \sin \vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\end{aligned}$$

se nazývá **soustava sférických souřadnic**.



Pro pevné $\varphi = \varphi_0$ vznikne **souřadnicová plocha**, která je popsána parametrickými rovnicemi $x = r \cos \varphi_0 \sin \vartheta$,

$y = r \sin \varphi_0 \sin \vartheta$, $z = r \cos \vartheta$; je to ("poledníková") rovina procházející osou z .

Pro pevné $r = r_0$ je souřadnicová plocha dána parametrickými rovnicemi $x = r_0 \cos \varphi \sin \vartheta$, $y = r_0 \sin \varphi \sin \vartheta$, $z = r_0 \cos \vartheta$; je to kulová plocha o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$.

Pro pevné $\vartheta = \vartheta_0$ je souřadnicovou plochou plocha kuželová.

4 Riemannův integrál v \mathbb{R}^n

4.1 Definice a základní vlastnosti Riemannova integrálu

Definice 4.1 : (Riemannův integrál v \mathbb{R})

(i) Necht' $f : \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená funkce. Množina $D = \{x_0, x_1, \dots, x_k; a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b\}$ se nazývá **dělení intervalu** $\langle a, b \rangle$ a číslo $\nu(D) = \max_{0 \leq i \leq k-1} (x_{i+1} - x_i)$ se nazývá **krok (norma) dělení** D . Označíme

$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i;$$

$$M_i = \sup f(x), \quad x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle, \quad i = 0, 1, \dots, k-1;$$

$$m_i = \inf f(x), \quad x \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle, \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

Každému dělení D a funkci f přiřadíme čísla:

horní součet

$$U(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} M_i \Delta x_i,$$

dolní součet

$$L(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \Delta x_i,$$

integrální součet

$$J(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i) \Delta x_i, \quad \xi_i \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle \text{ je libovolný bod.}$$

(ii) Řekneme, že funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na $\langle a, b \rangle$ (píšeme $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$), když existuje reálné číslo $I = I(f)$ takové, že

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ dělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ s $\nu(D) < \delta, \forall \xi_i \in \langle x_i, x_{i+1} \rangle, i = 0, 1, \dots, k-1 : |J(f, D) - I| < \varepsilon$.

Říkáme, že existuje limita integrálních součtů, a píšeme

$$\lim_{\nu(D) \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i) \Delta x_i = I.$$

Číslo I se nazývá **určitý Riemannův integrál** z funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$ a značí se

$$I = \int_a^b f(x) dx.$$

Definice 4.2: (Riemannův integrál v \mathbb{R}^2)

(i) Nechť $Q = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle \subset \mathbb{R}^2$. Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalů $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle$ ve smyslu definice 4.1, tj. množiny $\{x_0, x_1, \dots, x_r\}, \{y_0, y_1, \dots, y_s\}$. Množina D všech obdélníků

$$Q_{jk} = \langle x_j, x_{j+1} \rangle \times \langle y_k, y_{k+1} \rangle,$$

$j = 0, 1, \dots, r-1; k = 0, 1, \dots, s-1$, se nazývá **dělení obdélníku** Q a číslo

$$\nu(D) = \max_{\substack{0 \leq j \leq r-1 \\ 0 \leq k \leq s-1}} \sqrt{(\Delta x_j)^2 + (\Delta y_k)^2}, \quad \begin{array}{l} \Delta x_j = x_{j+1} - x_j, \\ \Delta y_k = y_{k+1} - y_k, \end{array}$$

je **krok (norma) dělení** D

Nechť $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená funkce na $Q \subset \mathbb{R}^2$. Označíme

$$\begin{aligned} M_{jk} &= \sup f(x, y), \quad (x, y) \in Q_{jk}; \\ m_{jk} &= \inf f(x, y), \quad (x, y) \in Q_{jk}. \end{aligned}$$

Horní součet příslušný f a dělení D je definován vztahem

$$U(f, D) = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{s-1} M_{jk} \Delta x_j \Delta y_k.$$

Dolní součet příslušný f a dělení D je definován vztahem

$$L(f, D) = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{s-1} m_{jk} \Delta x_j \Delta y_k.$$

Integrální součet příslušný f a dělení D je definován vztahem

$$J(f, D) = \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_j, \eta_k) \Delta x_j \Delta y_k,$$

kde $(\xi_j, \eta_k) \in Q_{jk}$ je libovolný bod.

(ii) Funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na Q (píšeme $f \in \mathcal{R}(Q)$), když existuje reálné číslo $I = I(f)$ takové, že

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall$ dělení D obdélníku Q takové, že

$$\nu(D) < \delta \quad \forall (\xi_j, \eta_k) \in Q_{jk} : |J(f, D) - I| < \varepsilon.$$

Číslo

$$I = \lim_{\nu(D) \rightarrow 0} J(f, D) = \lim_{\nu(D) \rightarrow 0} \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_j, \eta_k) \Delta x_j \Delta y_k$$

se nazývá **dvojný Riemannův integrál** funkce f přes obdélník Q a značí se

$$I = \iint_Q f(x, y) \, dx dy = \int_Q f(x, y) \, dQ.$$

(iii) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast a na ní je definovaná omezená funkce f . Vybereme takový obdélník Q , aby $\Omega \subset Q$, a sestrojíme funkci

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ 0, & (x, y) \in Q \setminus \Omega. \end{cases}$$

Dvojný integrál z funkce f přes Ω definujeme vztahem

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega = \iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \iint_Q F(x, y) \, dx dy.$$

Řekneme, že f je **Riemannovsky integrovatelná** na Ω , píšeme $f \in \mathcal{R}(\Omega)$.

Definice 4.3: (Riemannův integrál v \mathbb{R}^3)

(i) Necht' $Q = \langle a_1, b_1 \rangle \times \langle a_2, b_2 \rangle \times \langle a_3, b_3 \rangle$ je kvádr v \mathbb{R}^3 . Necht' D_l jsou dělení intervalů $\langle a_l, b_l \rangle$, $l = 1, 2, 3$.

Množina kvádrů

$$Q_{ijk} = \langle x_i, x_{i+1} \rangle \times \langle y_j, y_{j+1} \rangle \times \langle z_k, z_{k+1} \rangle$$

se nazývá **dělení kvádru** Q . Číslo

$$\nu(D) = \max_{i,j,k} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2 + (\Delta z_k)^2}$$

je **krok (norma)** dělení D .

Necht' $f = f(x, y, z) : Q \rightarrow \mathbb{R}$ je omezená funkce na $Q \subset \mathbb{R}^3$. Analogicky jako v definicích 4.1, 4.2 se definují horní a dolní součty příslušné funkci f a dělení D . **Integrální součet** je číslo

$$J(f, D) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{p-1} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k,$$

kde $(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \in Q_{ijk}$ je libovolný bod.

(ii) Funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na Q , píšeme $f \in \mathcal{R}(Q)$, existuje-li číslo

$$I = \lim_{\nu(D) \rightarrow 0} J(f, D)$$

pro libovolné dělení D kvádru Q . Značí se

$$I = \iiint_Q f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_Q f \, dQ, \quad Q \subset \mathbb{R}^3.$$

Číslo I se nazývá **trojný Riemannův integrál**.

(iii) Necht' $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast a na ní je definovaná omezená funkce f . Vybereme takový kvádr Q , aby $\Omega \subset Q$ a sestrojíme funkci

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in \Omega, \\ 0, & (x, y, z) \in Q \setminus \Omega. \end{cases}$$

Funkce f je **Riemannovsky integrovatelná na Ω** , jestliže F je integrovatelná na Q , a definujeme

$$\int_{\Omega} f \, d\Omega = \iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_Q F(x, y, z) \, dx dy dz.$$

Příklad 4.1: Dirichletova funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \text{ je racionální číslo,} \\ 0 & x \text{ je iracionální číslo,} \end{cases}$$

$x \in \langle a, b \rangle$, není Riemannovsky integrovatelná:

$U(f, D) = b - a$ pro každé dělení D , neboť $\sup f = 1$ na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$;

$L(f, D) = 0$, protože $\inf f = 0$ na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$.

Příklad 4.2: Funkce $f(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, není na žádném intervalu obsahujícím nulu Riemannovsky integrovatelná, neboť f je neomezená na libovolném okolí nuly. Existuje však Newtonův integrál z funkce f , neboť

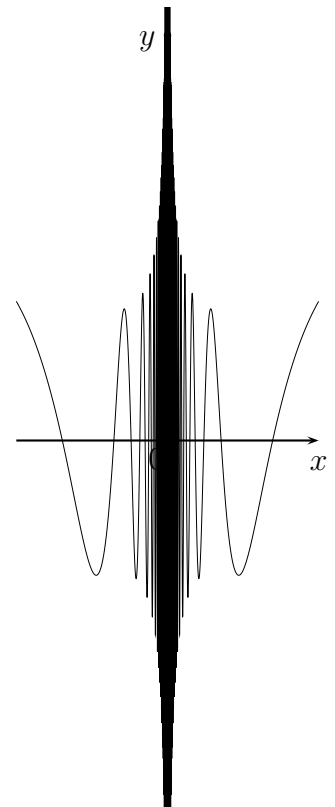
$$F(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

je primitivní funkce k f . Proto

$$(\mathcal{N}) \int_0^1 f(x) \, dx = F(1) - F(0) = \sin 1.$$

Příklad 4.3: Funkce $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ 0, & x \in \langle -1, 0 \rangle \end{cases}$

je omezená a Riemannovsky integrovatelná. Není však Newtonovsky integrovatelná. Kdyby totiž existovala primitivní funkce F k funkci f , pak funkce F musí být spojitá a muselo by platit $F(x) = \begin{cases} x + c, & x \in \langle 0, 1 \rangle, \\ c, & x \in \langle -1, 0 \rangle, \end{cases} \quad c \in \mathbb{R}$. Funkce F však není diferencovatelná v bodě 0, tedy F není primitivní k f .



Graf funkce
 $f(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \cos \frac{1}{x}$

Integrovatelnost funkce (v Riemannově smyslu) je vlastnost, která se nemění při změně funkce v konečně mnoha bodech, tj.:

necht' f, g jsou definovány na $\langle a, b \rangle$, $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ a g se liší od f v konečně mnoha bodech intervalu $\langle a, b \rangle$. Potom $g \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ a platí

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx.$$

Věta 4.1: (výpočet Riemannova integrálu)

Necht' $f \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ a necht' existuje primitivní funkce F k funkci f na $\langle a, b \rangle$, tj. $F'(x) = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$. Potom $f \in \mathcal{N}(\langle a, b \rangle)$ (f má Newtonův integrál na $\langle a, b \rangle$) a platí

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x) dx = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x) dx.$$

Definice 4.4: (míra množiny)

Omezená množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **měřitelná**, je-li funkce $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ integrovatelná na Ω . Hodnota integrálu

$$\text{meas}(\Omega) = \int_{\Omega} 1 d\mathbf{x}$$

se nazývá **míra množiny Ω (Jordanova míra)**.

Množina Ω , pro níž platí $\text{meas}(\Omega) = 0$, se nazývá **množina míry nula**.

Příklad 4.4:

1) Konečná množina a omezená spojitá křivka mají dvou- a trojrozměrnou míru nula. Regulární plocha má trojrozměrnou míru nula.

2) Necht' $\Omega = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, potom $\int_{\Omega} 1 d\mathbf{x} = 0$.

Zde vidíme, že i míra nekonečné spočetné množiny může být nula. V příkladu (4.1) (Dirichletova funkce) jsme však ukázali nekonečnou spočetnou množinu, která je neměřitelná (v Jordanově smyslu). Tento problém řeší Lebesgueova míra.

Definice 4.5: (nulová funkce) Jestliže se f liší od nulové funkce na množině míry nula, řekneme, že f je **skoro všude** (ve smyslu Jordanovy míry) nulová. Jinak řečeno

$$\int_{\Omega} |f(\mathbf{x})| d\mathbf{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \quad \text{s.v.}$$

4.2 Metody výpočtu dvojných a trojných integrálů

Dvojné a trojné integrály počítáme analyticky tak, že je převedeme na tzv. **dvojnásobné a trojnásobné integrály**, jejichž výpočet provedeme pomocí známých metod užívaných pro integrály z funkcí jedné proměnné.

Příklady

Věta 4.2: (Fubiniova věta pro obdélník)

Nechť $f \in \mathcal{R}(Q)$, $Q = \langle a, b \rangle \times \langle c, d \rangle$. Když $f(x, y) \in \mathcal{R}(\langle a, b \rangle)$ pro každé $y \in \langle c, d \rangle$, potom platí

$$\iint_Q f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Když $f(x, y) \in \mathcal{R}(\langle c, d \rangle)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$, pak platí

$$\iint_Q f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) \, dy \right) dx.$$

Důkaz: Vyplývá z uzávorkování integrálního součtu

$$\begin{aligned} J(f, D) &= \sum_{k=0}^{s-1} \left(\sum_{j=0}^{r-1} f(\xi_j, \eta_k) \Delta x_j \right) \Delta y_k \\ &= \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_j, \eta_k) \Delta x_j \Delta y_k = \sum_{j=0}^{r-1} \left(\sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_j, \eta_k) \Delta y_k \right) \Delta x_j \end{aligned}$$

a z předpokladů integrovatelnosti.

Příklad 4.5: $Q = \langle 0, 1 \rangle \times \langle 1, 3 \rangle$. Vypočtěte

$$I = \iint_Q x^y \, dx dy.$$

Bud'

$$I = \int_1^3 \left(\int_0^1 x^y \, dx \right) dy = \int_1^3 \left[\frac{x^{y+1}}{y+1} \right]_0^1 dy = \int_1^3 \frac{1}{y+1} dy = \ln 2$$

nebo

$$I = \int_0^1 \left(\int_1^3 x^y \, dy \right) dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{\ln x} e^{y \ln x} \right]_1^3 dx = \int_0^1 \frac{1}{\ln x} (e^{3 \ln x} - e^{\ln x}) dx.$$

Dvojný integrál jsme převedli na dvojnásobný a podobně jako u vztahu dvojné a dvojnásobné limity (viz věta 1.2) musí "vnitřní limita" existovat, aby nastala rovnost.

V druhém případě nelze stanovit primitivní funkci pomocí konečného počtu elementárních funkcí.

Věta 4.3: (Fubiniova věta pro elementární oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$)

(i) Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, kde

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$$

je tzv. **elementární oblast** určená grafy funkcí $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$. Potom platí

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy \right) dx,$$

pokud vnitřní integrál existuje pro každé $x \in \langle a, b \rangle$.

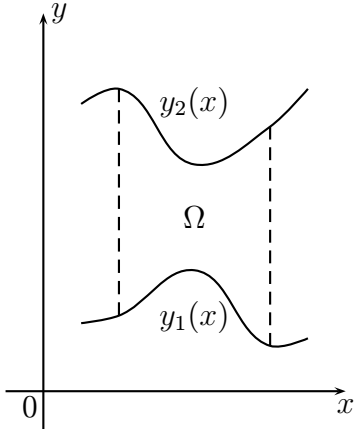
(ii) Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, kde elementární oblast

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}$$

je určena grafy funkcí $x = x_1(y)$, $x = x_2(y)$, $y \in \langle c, d \rangle$. Potom platí

$$\iint_{\Omega} f(x, y) \, dx dy = \int_c^d \left(\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \, dx \right) dy,$$

pokud vnitřní integrál existuje pro každé $y \in \langle c, d \rangle$.



Důkaz spočívá v převodu integrace přes Ω na integraci přes obdélník Q (obsahující množinu Ω) ve smyslu definice (4.2), část (iii) a následném použití věty (4.2).

Příklad 4.6: Množina Ω je zadána nerovnostmi $0 \leq x \leq 1$, $x \leq y \leq \sqrt{x}$ nebo $0 \leq y \leq 1$, $y^2 \leq x \leq y$. Vypočtete integrál $I = \iint_{\Omega} xy \, dx dy$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_x^{\sqrt{x}} xy \, dy \right) dx \\ &\Downarrow \\ &= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_x^{\sqrt{x}} dx \\ &\Downarrow \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2} \right) dx \\ &\Downarrow \\ &= \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8} \right]_0^1 = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_{y^2}^y xy \, dx \right) dy \\ &\Downarrow \\ &= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2} \right]_{y^2}^y dy \\ &\Downarrow \\ &= \int_0^1 \left(\frac{y^3}{2} - \frac{y^5}{2} \right) dy \\ &\Downarrow \\ &= \left[\frac{y^4}{8} - \frac{y^6}{12} \right]_0^1 = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

Věta 4.4: (Substituce v dvojném integrálu – transformace souřadnic ve dvojném integrálu)

Nechť $\Omega_{r\varphi} \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená měřitelná množina a nechť funkce $x = x(r, \varphi)$, $y = y(r, \varphi)$ určují prosté regulární zobrazení \mathbf{f} množiny $\Omega_{r\varphi}$ na množinu $\Omega_{xy} \subset \mathbb{R}^2$. Nechť dále máme funkci $f : \Omega_{xy} \rightarrow \mathbb{R}$, která je spojitá na Ω_{xy} . Potom platí

$$\iint_{\Omega_{xy}} f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Omega_{r\varphi}} f(x(r, \varphi), y(r, \varphi)) |\det J_{\mathbf{f}}| \, dr d\varphi,$$

kde $J_{\mathbf{f}} = \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)}$ je Jacobiova matice zobrazení \mathbf{f} (viz definice 3.2).

Příklad 4.7: Převod dvojného integrálu funkce $f(x, y)$ přes Ω_{xy} do polárních souřadnic

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Zde

$$J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad |\det J_{\mathbf{f}}| = |r| = r.$$

Množina Ω_{xy} je obrazem nějaké množiny $\Omega_{r\varphi}$ (kterou musíme určit). Takže

$$\iint_{\Omega_{xy}} f(x, y) \, dx dy = \iint_{\Omega_{r\varphi}} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r \, dr d\varphi.$$

Příklad 4.8: Vypočtěte

$$I = \iint_{\Omega} \sin \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy,$$

kde $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \pi^2 < x^2 + y^2 < 4\pi^2\}$.

Vzhledem ke geometrii oblasti Ω (mezikruží) uijeme substituci do polárních souřadnic $\mathbf{f} : x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$. Zde snadno zjistíme, že Ω je obrazem množiny

$$\Omega_{r\varphi} = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 : \pi < r < 2\pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi\}, \quad \text{potom}$$

$$I = \iint_{\Omega_{r\varphi}} r \sin r \, dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \underbrace{\left(\int_{\pi}^{2\pi} r \sin r \, dr \right)}_{\text{per partes}} d\varphi = -6\pi^2.$$

Řadu oblastí v rovině můžeme vyjádřit jako konečné sjednocení elementárních oblastí: např. pokud Ω rozdělíme na čtyři elementární oblasti: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$. Potom symbolicky

$$\int_{\Omega} = \int_{\Omega_1} + \int_{\Omega_2} + \int_{\Omega_3} + \int_{\Omega_4}.$$

Formálně $dx dy$ nahradíme výrazem $r \, dr d\varphi$.

Věta 4.5: (Fubiniova věta v \mathbb{R}^3)

Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, kde $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in S; z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$, je tzv. **elementární oblast** určená grafy funkcí $z = z_1(x, y)$, $z = z_2(x, y)$, $(x, y) \in S$, kde S je průmět množiny Ω do roviny xy . Potom platí

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz = \iint_S \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right) dx dy,$$

pokud vnitřní integrál existuje pro každé $(x, y) \in S$.

Ve větě 4.3 jsme uvedli dvě možnosti převodu dvojnásobného integrálu na dvojnásobný. Tyto možnosti byly dány dvěma možnostmi promítání množiny Ω do souřadnicových os. U trojnásobného integrálu máme tři možnosti promítání oblasti Ω do tří souřadnicových rovin, v tvrzení věty je uvedena pouze jedna z nich.

Příklad 4.9: Vypočtěte

$$I = \iiint_{\Omega} x \, dx dy dz,$$

kde Ω je oblast nacházející se v 1. oktantu omezená paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a rovinou $z = 2$. Průmětem Ω do roviny xy je čtvrtkruh S .

Představíme si řezy oblasti Ω rovnoběžné s rovinou xz . Pro každé $(x, y) \in S$ se nejdříve integruje od $z = x^2 + y^2$ do $z = 2$ (vnitřní integrace). Získaný dvojnásobný integrál přes S se převede na dvojnásobný, v němž se nejdříve integruje podle y od $y = 0$ do $y = \sqrt{2 - x^2}$, a nakonec se integruje podle x od $x = 0$ do $x = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega} x \, dx dy dz &= \iint_S \left(\int_{x^2+y^2}^2 x \, dz \right) dx dy \\ &= \iint_S x(2 - x^2 - y^2) \, dx dy \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_0^{\sqrt{2-x^2}} (2x - x^3 - xy^2) \, dy \right) dx = \frac{8\sqrt{2}}{15}. \end{aligned}$$

Výpočet integrálu přes S se opírá o větu (4.3).

Věta 4.6: (O substituci v trojném integrálu – transformace souřadnic v trojném integrálu)

Nechť $\Omega_r \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená měřitelná množina a nechť funkce $x = x(r, \varphi, \vartheta)$, $y = y(r, \varphi, \vartheta)$, $z = z(r, \varphi, \vartheta)$ určují prosté regulární zobrazení \mathbf{f} zobrazující Ω_r na množinu $\Omega_x \subset \mathbb{R}^3$. Nechť dále máme funkci $f : \Omega_x \rightarrow \mathbb{R}$, která je spojitá na Ω_x . Potom platí

$$\begin{aligned} & \iiint_{\Omega_x} f(x, y, z) \, dx dy dz \\ &= \iiint_{\Omega_r} f(x(r, \varphi, \vartheta), y(r, \varphi, \vartheta), z(r, \varphi, \vartheta)) \, |\det J_{\mathbf{f}}| \, dr d\varphi d\vartheta, \end{aligned}$$

kde $J_{\mathbf{f}} = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, \vartheta)}$ je Jacobiova matice zobrazení \mathbf{f} .

Princip důkazu je stejný jako v případě věty (4.4) pro dvojný integrál.

Příklad 4.10: Trojný integrál v cylindrických souřadnicích. Mějme zobrazení $\mathbf{f} : \Omega_r \rightarrow \Omega_x$ dané transformačními rovnicemi

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z; \quad r > 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Zde $|\det J_{\mathbf{f}}| = r$. Takže

$$\iiint_{\Omega_x} g(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{\Omega_r} g(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) \, r \, dr d\varphi dz.$$

Příklad 4.11: Vypočtěte $\iiint_{\Omega} z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz$, kde $\Omega =$

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 2; 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}; 0 \leq z \leq a\}$. Vzhledem k tvaru oblasti Ω (část válce o výšce a) provedeme substituci do cylindrických souřadnic. Válcová plocha $x^2 + y^2 = 2x$ má v cylindrických souřadnicích rovnici $r = 2 \cos \varphi$, neboť po dosazení do rovnice válcové plochy dostáváme

$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 2r \cos \varphi.$$

Průmět Ω do roviny xy je čtvrtkružnice. Takže $\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$,

$r \in (0, 2 \cos \varphi)$, $z \in (0, a)$. Tedy

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_x} z \sqrt{x^2 + y^2} \, dx dy dz &= \iiint_{\Omega_r} z \cdot r \cdot r \, dr d\varphi dz = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \varphi} \int_0^a z \cdot r^2 \, dz dr d\varphi = \frac{1}{2} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2 \cos \varphi} r^2 \, dr d\varphi = \\ &= \frac{4}{3} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \varphi \, d\varphi = \frac{4}{3} a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{4}{3} a^2 \left(\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{8}{9} a^2. \end{aligned}$$

Příklad 4.12: (Trojný integrál ve sférických souřadnicích.)

Mějme zobrazení $\mathbf{f} : \Omega_r \rightarrow \Omega_x$ dané transformačními rovnicemi $x = r \cos \varphi \cos \vartheta$, $y = r \sin \varphi \cos \vartheta$, $z = r \sin \vartheta$,

$r > 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$. Zde $|\det J_{\mathbf{f}}| = r^2 \cos \vartheta$. Takže

$$\begin{aligned} \iiint_{\Omega_x} f(x, y, z) \, dx dy dz &= \\ &= \iiint_{\Omega_r} f(r \cos \varphi \sin \vartheta, r \sin \varphi \sin \vartheta, r \cos \vartheta) r^2 \cos \vartheta \, dr d\varphi d\vartheta. \end{aligned}$$

Příklad 4.13: Vypočtěte $I = \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, dx dy dz$, kde Ω je "horní" polovina koule $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} r^2 \cdot \cos^2 \vartheta \cdot r^2 \cos \vartheta \, d\varphi d\vartheta dr \\ &= 2\pi \int_0^R \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^4 (1 - \sin^2 \vartheta) \cos \vartheta \, d\vartheta dr \\ &= 2\pi \int_0^R r^4 \left(\sin \vartheta - \frac{1}{3} \sin^3 \vartheta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \frac{4}{15} \pi R^5. \end{aligned}$$

4.3 Užitečné vzorce

Na základě integrálních součtů lze doplnit vzorce z odst. 8.5, MA1:

Míra oblasti Ω (integrál z charakteristické funkce)

$$\begin{aligned} \text{meas}(\Omega) &= \iint_{\Omega} 1 \, dx dy; \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad (\text{obsah}), \\ \text{meas}(\Omega) &= \iiint_{\Omega} 1 \, dx dy dz; \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad (\text{objem}). \end{aligned}$$

Celková hmotnost tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

Nechť $\varrho = \varrho(x, y, z)$ je funkce hustoty tělesa Ω , potom hmotnost tělesa je dána vzorcem

$$m = \iiint_{\Omega} \varrho(x, y, z) \, dx dy dz .$$

Celkový náboj tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

Nechť funkce $\varrho = \varrho(x, y, z)$ popisuje hustotu rozložení náboje v Ω , potom celkový náboj tělesa je dán vzorcem

$$Q = \iiint_{\Omega} \varrho(x, y, z) \, dx dy dz .$$

Statické momenty rovinné oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vzhledem k souřadnicovým osám:

$$M_x = \iint_{\Omega} y \, \varrho(x, y) \, dx dy , \quad M_y = \iint_{\Omega} x \, \varrho(x, y) \, dx dy .$$

Statické momenty tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vzhledem k souřadnicovým rovinám:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint_{\Omega} z \, \varrho(x, y, z) \, dx dy dz , \\ M_{yz} &= \iiint_{\Omega} x \, \varrho(x, y, z) \, dx dy dz , \\ M_{xz} &= \iiint_{\Omega} y \, \varrho(x, y, z) \, dx dy dz , \end{aligned}$$

kde $\varrho = \varrho(x, y)$, resp. $\varrho = \varrho(x, y, z)$ je hustota tělesa v bodě $(x, y) \in \Omega$, resp. $(x, y, z) \in \Omega$.

Moment setrvačnosti tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vzhledem k souřadnicovým osám:

$$\begin{aligned} J_x &= \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2) \, \varrho(x, y, z) \, dx dy dz , \\ J_y &= \iiint_{\Omega} (x^2 + z^2) \, \varrho(x, y, z) \, dx dy dz , \\ J_z &= \iiint_{\Omega} (x^2 + y^2) \, \varrho(x, y, z) \, dx dy dz , \end{aligned}$$

kde $\varrho = \varrho(x, y, z)$ je hustota tělesa v bodě $(x, y, z) \in \Omega$.

Souřadnice těžiště $T = (x_T, y_T, z_T)$ tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$x_T = \frac{M_{yz}}{m} , \quad y_T = \frac{M_{xz}}{m} , \quad z_T = \frac{M_{xy}}{m} .$$

Příklad 4.14: Vypočtete souřadnice těžiště tělesa omezeného plochami $x = 0$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 3$, $x + 2z = 3$, jestliže hustota tělesa se v každém bodě rovná 1.

$$\begin{aligned} m &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^3 \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} dz dy dx = \int_0^3 \int_1^3 \frac{3-x}{2} dy dx = \\ &= \int_0^3 (3-x) dx = \left[3x - \frac{1}{2}x^2 \right]_0^3 = \frac{9}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_T &= \frac{2}{9} \iiint_{\Omega} x dx dy dz = \frac{2}{9} \int_0^3 \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} x dz dy dx = \\ &= \frac{2}{9} \int_0^3 \int_1^3 x \frac{3-x}{2} dy dx = \frac{2}{9} \int_0^3 x(3-x) dx = \frac{2}{9} \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^3 = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_T &= \frac{2}{9} \iiint_{\Omega} y dx dy dz = \frac{2}{9} \int_0^3 \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} y dz dy dx = \\ &= \frac{1}{9} \int_0^3 \int_1^3 y(3-x) dy dx = \frac{4}{9} \int_0^3 (3-x) dx = \frac{4}{9} \left[3x - \frac{x^2}{2} \right]_0^3 = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_T &= \frac{2}{9} \iiint_{\Omega} z dx dy dz = \frac{2}{9} \int_0^3 \int_1^3 \int_0^{\frac{3-x}{2}} z dz dy dx = \\ &= \frac{2}{9} \int_0^3 \int_1^3 \frac{(3-x)^2}{8} dy dx = \frac{1}{18} \left[\frac{-(3-x)^3}{3} \right]_0^3 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

5 Parciální diferenciální rovnice

Při popisu reálných dějů vyvíjejících se v čase t a bodě prostoru $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$ budeme uvažovat funkci $u = u(x, y, z, t)$ (například teplotu materiálu), která tento děj popisuje. Pro rychlost změny děje v čase a prostoru potřebujeme znát parciální derivace funkce u : $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t$, $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$, podobně (u_y, u_z) , i parciální derivace vyšších řádů $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = u_{tx}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = u_{xxxx}$. Rovnice, ve kterých se vyskytují parciální derivace se nazývají **parciální diferenciální rovnice**, např. $u_t + u_{xx} = 0$.

5.1 Základní modely

5.1.1 Transportní rovnice

Budeme uvažovat tekutinu pohybující se rychlostí v v tenké rovné trubičce (ztotožníme ji s osou x), jejíž kolmý průřez má plochu velikosti S . Funkce $u = u(x, t)$ bude nyní popisovat hustotu znečištění v bodě x a v čase t . Potom množství nečistot mezi body x_1 a x_2 v čase t je dáno integrálem $\int_{x_1}^{x_2} u(x, t) S dx$ a podobně množství nečistot, které proteče plochou S v bodě x během časového intervalu (t_1, t_2) je popsáno integrálem $\int_{t_1}^{t_2} u(x, t) v S dt$.

Potom množství nečistot v intervalu (x_1, x_2) v čase t_2 se rovná množství nečistot v intervalu (x_1, x_2) v čase t_1 plus množství nečistot, které proteče plochou S v bodě x_1 během časového intervalu (t_1, t_2) minus množství nečistot, které proteče plochou S v bodě x_2 během časového intervalu (t_1, t_2) , neboli

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) S dx = \int_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) S dx + \int_{t_1}^{t_2} u(x_1, t) v S dt - \int_{t_1}^{t_2} u(x_2, t) v S dt.$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat, že velikost řezu S je všude konstantní a zároveň je konstantní i rychlost v tekutiny. Potom platí

$$\int_{x_1}^{x_2} [u(x, t_2) - u(x, t_1)] dx = v \int_{t_1}^{t_2} [u(x_1, t) - u(x_2, t)] dt.$$

Nyní budeme předpokládat, že funkce u má spojitě první parciální derivace (změna rychlosti znečištění není skoková), pak ze základní

Předpokládáme, že v trubičce žádné nečistoty nevznikají ani nezánikají.

Co vteče má znaménko plus, co vyteče minus.

Bilanční rovnice.

věty matematické analýzy plyne

$$\int_{x_1}^{x_2} \int_{t_1}^{t_2} u_t(x, t) dt dx = v \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} u_x(x, t) dx dt.$$

Jestliže budeme předpokládat, že tato rovnice platí pro každý segment (x_1, x_2) a každý časový interval (t_1, t_2) , pak v každém bodě $[x, t]$ dostaneme rovnost

$$\boxed{u_t(x, t) - v u_x(x, t) = 0},$$

která se nazývá **transportní rovnice** v jedné dimenzi.

5.1.2 Rovnice difuze, rovnice vedení tepla

Máme tenkou tyč (ztožníme s osou x), která má teplotu $T(x, t)$ a předpokládáme, že teplota roste ve směru osy x . Tepelná vodivost materiálu tyče je κ a průřez tyče je S . Teplo $Q(x, t)$ procházející řezem tyče v bodě x a čase t během krátkého časového intervalu dt je dáno vztahem $Q(x, t) = \kappa S \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) dt$, podobně $Q(x + \Delta x, t) = \kappa S \frac{\partial T}{\partial x}(x + \Delta x, t) dt$, Δx reprezentuje malý kousek tyče. Použijeme Taylorův rozvoj, pak pro tepelnou energii, která je absorbována v kousku tyče Δx platí

$$\Delta Q = \kappa S \left(\frac{\partial T}{\partial x}(x + \Delta x, t) - \frac{\partial T}{\partial x}(x, t) \right) dt \approx \kappa S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \Delta x dt.$$

Pro tuto změnu tepla však zároveň platí

$$\Delta Q = c \Delta m dT = c \varrho \Delta x \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) dt,$$

kde c měrná tepelná kapacita tyče, Δm je hmotnost kousku tyče délky Δx , ϱ je hustota materiálu tyče a dT je malý časový úsek, po který se mění hodnota tepla v tyči. Porovnáním obou výrazů pro změnu tepla v kousku tyče dostaneme

$$\kappa S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) \Delta x dt = c \varrho \Delta x \frac{\partial T}{\partial t}(x, t) dt,$$

tedy

$$\kappa S \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = c \varrho \frac{\partial T}{\partial t}(x, t).$$

Označíme $k = \frac{\kappa S}{c \varrho}$ tzv. součinitel teplotní vodivosti, pak **rovnice pro vedení tepla** má tvar

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x, t) - k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x, t) = 0.$$

Nechť nyní funkce $u = u(x, t)$ popisuje difuzi látky, potom pro ní platí stejná rovnice jako pro vedení tepla, neboli

$$u_t - u_{xx} = 0.$$

5.1.3 Vlnová rovnice

Nyní funkce $u = u(x, t)$ bude popisovat strunu, na kterou působí v bodě x_1 síla \vec{F}_1 kolmo k ose x . Tato síla vyvolá působení silou \vec{F} v tečném směru ke struně a podle zákona akce a reakce stejně velká opačně orientovaná síla působí na strunu i v bodě x_2 (viz obrázek). Podle druhého Newtonova zákona platí pro element struny Δx pohybová rovnice

$$\Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_2 - F_1,$$

kde $\Delta m = \rho \Delta x$ a ρ je délková hustota struny. Pro velmi malé výchylky bude platit

$$F_2 - F_1 \approx F(\tan \varphi_2 - \tan \varphi_1) = F \left(\frac{\partial u}{\partial x}(x_2) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1) \right).$$

Pomocí Taylorova rozvoje dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_2) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x,$$

tudíž

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_2 - F_1 = F \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x.$$

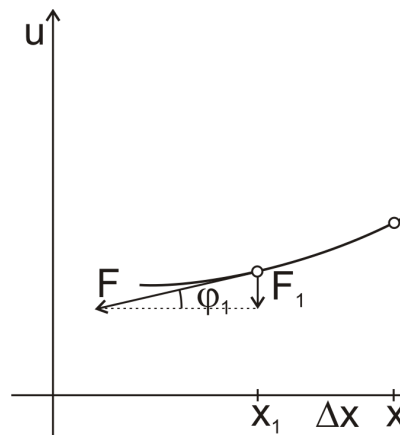
Odtud dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\rho}{F} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Označíme $v = \sqrt{\frac{F}{\rho}}$, pak v je fázová rychlost vlny šířící se po struně a platí **vlnová rovnice**

$$u_{tt}(x, t) - v^2 u_{xx}(x, t) = 0.$$

Difuze je proces samovolného rozptylování částic v prostoru.



5.2 Metody řešení

5.3 Počáteční úlohy

Reference

- [1] Jirásek, Čipera, Vacek: Sbírka řešených příkladů z matematiky II, SNTL, Praha 1989
- [2] Drábek, Míka: Matematická analýza II, skriptu ZČU Plzeň 1996