Matematika 3 pro FST

2016

Obsah

1 Skalární funkce více reálných proměnných

1.1 Prostor $\mathbb{R}^n$

Symbolem $\mathbb{R}^n$ označujeme **množinu všech uspořádaných n-tic reálných čísel**, tj. $\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]\}$, $x_i \in \mathbb{R}$. Množinu $\mathbb{R}^n$ chápeme buď jako množinu bodů, nebo jako **vektorový prostor**, pokud v této

množině zavedeme algebraické operace splňující

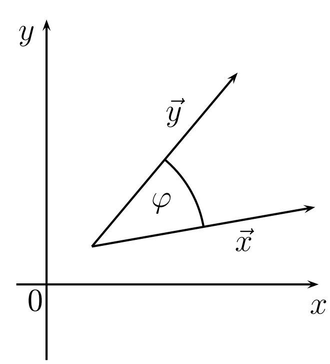
axiómy lineárního prostoru. Vektory značíme $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, čísla x_i, $i = 1, \ldots, n$ se nazývají **složky (souřadnice)** vektoru (bodu).

Definice 1.1 : Nechť $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$, potom pomocí následujících vztahů definujeme

1. **skalární součin** vektorů $\vec{x}, \vec{y}$
$$\vec{x} \cdot \vec{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \,,$$
2. **normu vektoru** $\vec{x}$
$$\|\vec{x}\,\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}\,,$$
3. **vzdálenost** bodů $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ ("délka vektoru $\vec{x} - \vec{y}$ ")
$$\rho(\vec{x}, \vec{y}\,) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}\,,$$
4. Pro nenulové $\vec{x}, \vec{y}$ existuje číslo $\varphi \in \langle 0, \pi \rangle$, které se nazývá **úhlem vektorů** $\vec{x}, \vec{y}$, takové, že
$$\varphi = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\,\| \cdot \|\vec{y}\,\|}\,.$$

Vektorový prostor, v němž je definován skalární součin se nazývá **eukleidovský prostor**. Pro skalární součin se také používá značení $(\vec{x}, \vec{y}\,)$.

Pro každé $\vec{x}, \vec{y}$ platí Cauchyova-Schwarzova nerovnost
$$|\vec{x} \cdot \vec{y}\,| \le \|\vec{x}\,\| \cdot \|\vec{y}\,\|$$



Definice 1.2 : (posloupnost v $\mathbb{R}^n$)
Zobrazení $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ přiřazující každému $k \in \mathbb{N}$ bod (vektor) $\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^n$ nazýváme **posloupnost (bodů, vektorů)** v $\mathbb{R}^n$. Značíme $f = \{\mathbf{x}_k\}$.

Protože máme eukleidovský vektorový prostor $\mathbb{R}^n$, hovoříme o konvergenci vzhledem k eukleidovské normě. Analogicky definujeme konvergenci vzhledem k jiné normě či jiné metrice.

Definice 1.3 : (konvergentní posloupnost)
Posloupnost $\{\mathbf{x}_k\} \subset \mathbb{R}^n$ je **konvergentní** v $\mathbb{R}^n$, jestliže

$$\exists\, \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N}\ \forall\, k \in \mathbb{N} : k > k_0 \ \Rightarrow\ \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| < \varepsilon\,.$$

Píšeme $\lim\limits_{k\to+\infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0$, resp. $\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0$ pro $k \to +\infty$.

Věta 1.1 : (konvergence po složkách)
Posloupnost $\{\mathbf{x}_k\}$ je konvergentní v $\mathbb{R}^n$ právě tehdy, když posloupnosti všech složek $\{x_{ki}\}$ jsou konvergentní v $\mathbb{R}$, tj.

$$\mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0 \quad \Leftrightarrow \quad x_{ki} \to x_{0i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,.$$

<u>Důkaz</u> : plyne ze vztahů

$$|x_{ki} - x_{0i}| \le \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_{ki} - x_{0i})^2}\,.$$

1.2 Základní vlastnosti funkcí v $\mathbb{R}^n$

Příklady

Definiční obor $D(f)$ funkce f je množina Ω.

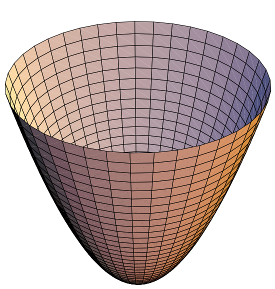
Definice 1.4 : (funkce n-proměnných)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Zobrazení $f : \Omega \to \mathbb{R}$ přiřazující každému **argumentu $\mathbf{x} \in \Omega$ funkční hodnotu** $f(\mathbf{x})$ se nazývá **reálná funkce n reálných proměnných** definovaná na Ω .
Značíme $f : \mathbf{x} \to f(\mathbf{x})$, $f = f(\mathbf{x})$. ,
Množina

$$G = \{[\mathbf{x}, f(\mathbf{x})] \in \mathbb{R}^{n+1} :\ \mathbf{x} \in \Omega\}$$

se nazývá **graf funkce** f .
Množina

$$H_C = \{\mathbf{x} \in \Omega :\ f(\mathbf{x}) = C\}\,,\ C \in \mathbb{R}\,,$$

se nazývá **hladina (vrstevnice) funkce** f. (Je to množina bodů definičního oboru, v nichž funkce f nabývá stejné funkční hodnoty).



<u>*Příklad 1.1*</u> : Grafem funkce $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dané předpisem $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ je *paraboloid* a její hladiny jsou kružnice o poloměru $\sqrt{C}$.

Příklady

Definice 1.5 : (limita funkce n-proměnných)
Nechť je dána funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ a nechť $\mathbf{x}_0$ je hromadný bod množiny Ω. Jestliže $\exists L \in \mathbb{R}$ takové, že $\forall \{\mathbf{x}_k\},\ \mathbf{x}_k \in \Omega,\ \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_0 :\quad \mathbf{x}_k \to \mathbf{x}_0 \ \Rightarrow\ f(\mathbf{x}_k) \to L\,,$ pak řekneme, že funkce f má v bodě $\mathbf{x}_0$ limitu L (vlastní) a píšeme

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L\,.$$

Příklad 1.2 :

Vypočítáme limitu funkce $f(x,y) = x^3 - y^3$ v bodě $[1,2]$.

Nechť $\{x_k\}$, $\{y_k\}$ jsou libovolné posloupnosti reálných čísel takové, že $x_k \to 1$ a $y_k \to 2$.

Pak $x_k^3 \to 1$, $y_k^3 \to 8 \Rightarrow f(x_k,y_k) = x_k^3 - y_k^3 \to 1 - 8 = -7$.
Tedy $\lim\limits_{[x,y]\to[1,2])} (x^3 - y^3) = -7$.

Využíváme větu 4.6 z MA1 o algebře limit funkcí jedné reálné proměnné.

Příklad 1.3 : Stanovme $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{y}{x}$.

Zvolíme posloupnost $\{x_k, y_k\} = \{\frac{1}{k}, \frac{c}{k}\}$, $c \in \mathbb{R}$, pak dostaneme $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{\frac{c}{k}}{\frac{1}{k}} = c$. Vidíme, že daná funkce nemá v bodě $[0,0]$ limitu. (Číslo c můžeme volit libovolně, tedy neexistuje číslo L, ke kterému se blíží funkční hodnoty funkce f.)

Položíme-li $y = c\,x$, pak v limitě dostaneme $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{y}{x} = c$.
K limitnímu bodu se blížíme po přímkách.
Pozor, tato metoda je vhodná pouze k důkazu neexistence limity, nikoli její existence.

Definice 1.6 : (částečné limity, vícenásobné limity v $\mathbb{R}^2$)
Mějme funkci $f = f(x,y)$ a $[x_0,y_0]$ je hromadný bod jejího definičního oboru. Existuje-li pro každé pevné y

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y),$$

nazývá se **částečná (parciální) limita** funkce f v proměnné x. Existuje-li

$$L_1 = \lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y),$$

nazývá se **dvojnásobnou limitou** funkce f v bodě $[x_0,y_0]$.
Analogicky definujeme pro pevné x

$$\psi(x) = \lim_{y\to y_0} f(x,y) \quad \text{a} \quad L_2 = \lim_{x\to x_0} \psi(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y).$$

Příklad 1.4 : Pro funkci $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ najdeme dvojnásobné limity v bodě $[0,0]$.

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} \frac{xy}{x^2+y^2} = 0\,.$$

Limitu funkce f budeme hledat "po přímkách" $y = kx$, potom

$$\lim_{\substack{[x,y]\to[0,0]\\ y=kx}} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{kx^2}{k^2x^2+x^2} = \frac{k}{k^2+1}\,,$$

tudíž hledaná limita neexistuje.

<u>*Příklad 1.5*</u> : Hledáme limity funkce f, kde

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x} & x \neq 0 \wedge y \neq 0,\\ 0 & x = 0 \vee y = 0\,, \end{cases}$$

v okolí bodu $[0,0]$.

Existence a rovnost dvojnásobných limit nezaručí existenci limity funkce v bodě a obráceně z existence limity nevyplývá existence dvojnásobných limit.
Přesto, jestliže existuje (dvojná) limita a "vnitřní limity", pak existují dvojnásobné limity.

Z odhadu $\left|x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x}\right| \le |x|+|y|$ plyne $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)=0$, ale limity $\lim\limits_{y\to 0} x\sin\frac{1}{y}$, $\lim\limits_{x\to 0} y\sin\frac{1}{x}$ neexistují, tudíž neexistují ani dvojnásobné limity.

Věta 1.2 : (vztah dvojné limity a dvojnásobných limit)
Nechť funkce $f = f(x,y)$ je definovaná (aspoň) v prstencovém okolí $P([x_0,y_0])$ bodu $[x_0,y_0]$ a existuje limita

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = L.$$

Nechť dále existují částečné limity

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y) = \varphi(y), \quad [x_0,y] \in P([x_0,y_0]),$$
$$\lim_{y\to y_0} f(x,y) = \psi(x), \quad [x,y_0] \in P([x_0,y_0]).$$

Potom existují dvojnásobné limity

$$L_1 = \lim_{y\to y_0} \varphi(y) = \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y),$$
$$L_2 = \lim_{x\to x_0} \psi(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

a platí $L_1 = L_2 = L$.

V izolovaném bodě $\mathbf{x}_0$ se funkce f považuje za spojitou, je-li v tomto bodě definována.
Jestliže v bodě nespojitosti existuje vlastní limita funkce f, pak říkáme, že nespojitost je odstranitelná.

Definice 1.7 : (Spojitost)
Funkce $f:\Omega\to\mathbb{R}$ je **spojitá** v hromadném bodě $\mathbf{x}_0$ množiny $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, jestliže

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Funkce f je **spojitá na množině** Ω, je-li spojitá v každém bodě $\mathbf{x}\in\Omega$. Bod $\mathbf{x}_0$ je **bodem nespojitosti** funkce, není-li v něm funkce f spojitá.

Příklad 1.6 :

1. Funkce $f(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ je spojitá v každém bodě $[x,y] \neq (0,0)$, ale v bodě $(0,0)$ spojitá není, a navíc nespojitost není odstranitelná.

2. Funkce $f(x,y) = \begin{cases} x\sin\frac{1}{y} + y\sin\frac{1}{x} & xy \neq 0\,, \\ 0 & xy = 0\,, \end{cases}$

   je spojitá v bodě $[0,0]$, avšak v každém okolí tohoto bodu existují body nespojitosti (body souřadnicových os).

3. Funkce $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2 \neq 0\,, \\ 0 & x^2+y^2 = 0\,, \end{cases}$

   je spojitá v bodě $[0,0]$, což dokážeme přechodem k polárním souřadnicím. Položíme $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, potom

   $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim\limits_{\substack{r\to 0+\\ \varphi\in\langle 0,2\pi)}} \frac{r^3\cos\varphi(\sin\varphi)^2}{r^2} = 0\,.$

Při přechodu k polárním souřadnicím platí následující ekvivalence $[x,y] \to [0,0] \Leftrightarrow \|[x,y]-[0,0]\| \to 0 \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} \to 0 \Leftrightarrow \sqrt{r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi} \to 0 \Leftrightarrow r \to 0+$. Pomocí tohoto přechodu lze tedy dokázat existenci limity funkce.

1.3 Derivace a diferenciál

Definice 1.8 : (derivace podle vektoru, parciální derivace)
Mějme funkci $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ a existuje okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$.
Je dán (pevný) vektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$. Jestliže existuje konečná limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} = \frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s})|_{t=0} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{s}}\,,$$

pak se nazývá **derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ podle vektoru $\vec{\mathbf{s}}$** (nebo také **variace funkce** f v bodě $\mathbf{x}_0$) ,
je-li $\vec{s}$ jednotkový vektor, tj. $\|\vec{s}\| = 1$, pak se tato limita nazývá **derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ ve směru $\vec{\mathbf{s}}$**.
Jestliže $\vec{s} = \vec{e}_i$ (jednotkový vektor ve směru osy x_i), potom

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{e}_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}$$

a hovoříme o **parciální derivaci funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ podle** x_i a o funkci f říkáme, že je **derivovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$ podle proměnné** x_i.

Příklad 1.7: Uvažujeme funkci $f(x,y)=xy^2$, vektor $\vec{s}=(s_1,s_2)=(1,2)$ a bod $[x_0,y_0]=[1,1]$. Potom dostaneme

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{s}} &= \lim_{t\to 0} \tfrac{f(x_0+ts_1,y_0+ts_2)-f(x_0,y_0)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{(1+t)(1+t\cdot 2)^2-1}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{1+4t+4t^2+t+4t^2+4t^3-1}{t} = 5\,, \\
\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{e}_1} = \tfrac{\partial f(1,1)}{\partial x} &= \lim_{t\to 0} \tfrac{f(1+t\cdot 1,1+t\cdot 0)-f(1,1)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{(1+t)(1+t\cdot 0)^2-1}{t} = 1\,, \\
\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial \vec{e}_2} = \tfrac{\partial f(1,1)}{\partial y} &= \lim_{t\to 0} \tfrac{f(1+t\cdot 0,1+t\cdot 1)-f(1,1)}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \tfrac{(1+t\cdot 0)(1+t\cdot 1)^2-1}{t} = 2\,.
\end{aligned}
$$

Z definice (1.8) pro funkci dvou proměnných plyne

$$\tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} = \lim_{t\to 0} \tfrac{f(x_0+t,y_0)-f(x_0,y_0)}{t}\,, \qquad \tfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} = \lim_{t\to 0} \tfrac{f(x_0,y_0+t)-f(x_0,y_0)}{t}\,.$$

Obecně platí

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_{01},\dots,x_{0i}+t\,,\ x_{0i+1},\dots,x_{0n})-f(x_{01},\dots,x_{0n})}{t}\,.$$

Z uvedených vztahů vyplývá, že parciální derivace počítáme derivováním podle příslušné proměnné (ostatní proměnné se chovají jako konstanty). Například

$$\frac{\partial(xy^2)}{\partial x} = y^2\,, \qquad \frac{\partial(xy^2)}{\partial y} = 2xy\,.$$

Geometrický význam derivace ve směru

Máme funkci $f:\Omega\to\mathbb{R}$, vnitřní bod $\mathbf{x}_0\in\Omega$, vektor $\vec{s}$ s jednotkovou normou $\|\vec{s}\|=1$ a úsečku $p:\mathbf{x}=\mathbf{x}_0+t\vec{s}$, $t\in I$, $I=(-\delta,\delta)$, $\delta>0$, $p\subset\Omega$.

Položíme $g(t)=f(\mathbf{x}_0+t\vec{s})$, potom graf funkce $g:I\to\mathbb{R}$ je dán průnikem grafu funkce f a roviny ϱ, která obsahuje úsečku p a je kolmá k rovině-xy.

Platí

$$g'(0)=\lim_{t\to 0}\frac{g(t)-g(0)}{t-0}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\mathbf{x}_0+t\vec{s})-f(\mathbf{x}_0)}{t}=\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial \vec{s}}\,.$$

Hodnota derivace funkce f ve směru $\vec{s}$ je tudíž rovna směrnici tečny $\tau\in\varrho$ ke grafu funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$. Tato směrnice se rovná tangens úhlu tečny τ a přímky p (prodloužení úsečky p).

Definice 1.9 : (diference, totální diferenciál)
Je dán vnitřní bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Pro libovolné $\mathbf{x} \in \Omega$ označíme $\vec{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Vektor $\vec{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_n)$ ($= \Delta\mathbf{x} = d\mathbf{x}$, $h_i = dx_i$) nazveme **diferencí argumentu**.

1. Funkci proměnné $\vec{h} \in \mathbb{R}^n$

$$\Delta f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$$

   nazveme **diferencí funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ vzhledem k $\vec{\mathbf{h}}$** (tzv. **totální diference**).

2. Funkce f se nazývá **diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$**, existuje-li okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$, vektor $\vec{A} = (A_1, A_2, \ldots A_n)$, a funkce $\omega(\vec{h})$ (proměnné $\vec{h}$) splňující podmínku

$$\lim_{\|\vec{h}\| \to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$$

   tak, že $\forall\, \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$ platí

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0 + \vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \vec{A} \cdot \vec{h} + \omega(\vec{h})\,.$$

   Funkce f je **diferencovatelná na Ω**, je-li diferencovatelná v každém bodě $\mathbf{x} \in \Omega$.

3. U diferencovatelné funkce se lineární forma $\vec{A} \cdot \vec{h}$ nazývá **(totálním) diferenciálem** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ a značí se

$$df = df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \vec{A} \cdot \vec{h}\,, \quad \vec{h} \in \mathbb{R}^n$$

   a vektor $\vec{A} = (A_1, A_2, \ldots, A_n)$ se nazývá **totální derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$** nebo také **gradient** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$. Užívá se označení

$$\vec{A} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) = f'(\mathbf{x}_0)\,.$$

   Diferenciál pak zapisujeme ve tvaru

$$df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{h} = \nabla f(\mathbf{x}_0)\,\vec{h} = f'(\mathbf{x}_0)\, d\mathbf{x}\,.$$

Příklady

Pro funkci $f(x, y) = x^2 + 3y$ je $\vec{h} = (x - x_0, y - y_0)$ a $\Delta f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = x^2 - x_0^2 + 3y - 3y_0 = (x + x_0)(x - x_0) + 3(y - y_0) = (2x_0 + x - x_0)(x - x_0) + 3(y - y_0) = (2x_0, 3)(x - x_0, y - y_0) + (x - x_0)^2$. Tedy $\vec{A} = \operatorname{grad} f = (2x_0, 3)$ a $\omega(\vec{h}) = (x - x_0)^2$, neboť $\lim\limits_{\|\vec{h}\| \to 0} \frac{(x-x_0)^2}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}} = 0$.

Diferenciál df se rovná skalárnímu součinu gradientu grad f a diference argumentu $\vec{h}$.

<u>*Příklad 1.8*</u>: Určíme diferenciál funkce $f(x, y) = xy^2$ v bodě $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]$. Platí

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) = f(x_0 + h_1, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0) =$$

$$(x_0 + h_1)(y_0 + h_2)^2 - x_0 y_0^2 = y_0^2 h_1 + 2x_0 y_0 h_2 + 2y_0 h_1 h_2 + x_0 h_2^2 + h_1 h_2^2.$$

Odtud $A_1=y_0^2$, $A_2=2x_0y_0$, $\omega(\vec{h}) = 2y_0h_1h_2+x_0h_2^2+h_1h_2^2$.
Zbývá dokázat $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|} = 0$, tedy $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0} \frac{2y_0h_1h_2+x_0h_2^2+h_1h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} =$
$\left[\begin{array}{l} h_1 = r\cos\varphi \\ h_2 = r\sin\varphi \end{array}\right] = \lim\limits_{\substack{r\to 0\\ \varphi\in\langle 0,2\pi)}} \frac{2y_0r^2\cos\varphi\sin\varphi+x_0r^2\sin^2\varphi+r^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{r} = 0.$
Diferenciál funkce $f = xy^2$ v bodě $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]$ má tvar $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = (y_0^2, 2x_0y_0)\cdot\vec{h} = y_0^2h_1+2x_0y_0h_2$.

1.4 Vlastnosti diferencovatelných funkcí

Věta 1.3 : (vlastnosti diferencovatelné funkce)
Je-li funkce f diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$, potom

1. je v bodě $\mathbf{x}_0$ spojitá,
2. existuje v bodě $\mathbf{x}_0$ derivace funkce f podle libovolného vektoru $\vec{s}$ (tedy existují i všechny parciální derivace) a platí
$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial\vec{s}} = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot\vec{s},$$
3. pokud v $\mathbb{R}^n$ uvažujeme kartézský souřadnicový systém a za bázi volíme jednotkové vektory ve směru os systému, pak
$$A_i = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i}, \quad \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_{\mathbf{x}_0}.$$

Pro funkci $f(x,y)=xy^2$, bod $[x_0,y_0] = [1,1]$ a směr $\vec{s} = (1,2)$ z příkladu (1.7) máme $\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial\vec{s}} = (y_0^2, 2x_0y_0)\cdot\vec{s} = (1,2)\cdot(1,2) = 5$.

Gradient výše uvedené funkce má v kartézském systému tvar $\operatorname{grad} f = (y^2, 2xy)$.

<u>*Důsledek 1.1*</u>: věty (1.3) Diferenciál funkce f v bodě $\mathbf{x}$ (v kartézském souřadnicovém vyjádření) můžeme psát ve tvaru
$$df(\mathbf{x},\vec{h}) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2}dx_2+\ldots+\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n}dx_n, \quad \vec{h} = d\mathbf{x}.$$
Například diferenciál funkce $f(x,y) = xy^2$ má tvar
$$df(\mathbf{x},(dx,dy)) = \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x}dx + \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial y}dy = y^2\,dx + 2xy\,dy.$$

<u>*Příklad 1.9*</u> : Uvedeme funkci, která má v bodě $[0,0]$ parciální derivace, ale není v tomto bodě spojitá:
$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & xy = 0, \\ 1 & xy \neq 0. \end{cases}$$

Potom $\lim\limits_{[x,y]\to(0,0)} f(x,y)$ neexistuje, avšak existují limity

$$\lim_{h_1\to 0}\frac{f(0+h_1,0)-f(0,0)}{h_1}=\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0\,,$$

$$\lim_{h_2\to 0}\frac{f(0,0+h_2)-f(0,0)}{h_2}=\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0\,.$$

<u>*Příklad 1.10*</u> : Funkce, která má parciální derivace v celém $\mathbb{R}^2$, ale je v bodě $[0,0]$ nespojitá:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & x^2+y^2>0\,,\\ 0 & x^2+y^2=0\,.\end{cases}$$

Podobně jako v předcházejícím příkladě z definice vypočteme $f_x(0,0)=\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0\,,\ f_y(0,0)=\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0\,;$ avšak $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} f(x,y)$ neexistuje, neboť $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=kx}}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{k}{1+k^2}\,.$

<u>*Příklad 1.11*</u> : Funkce, která má parciální derivace v celém $\mathbb{R}^2$, je spojitá v $\mathbb{R}^2$ (viz příklad (1.6),3.), ale není diferencovatelná v bodě $[0,0]$:

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & x^2+y^2>0\,,\\ 0 & x^2+y^2=0\,.\end{cases}$$

Na příkladech jsme ukázali, že existence parciálních derivací není v $\mathbb{R}^n$, $n\ge 2$ ekvivalentní diferencovatelnosti. Ekvivalence je platná pouze v $\mathbb{R}$ (věta 7.2, MA1).

Potom platí

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=\frac{y^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}\,,\qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}\,,$$

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}=f_x(0,0)=0\,,\qquad \frac{\partial f(0,0)}{\partial y}=f_y(0,0)=0$$

(na osách je funkce f nulová).
Pokud by funkce f byla diferencovatelná v počátku, pak pro vektor $\vec{h}$ s dostatečně malou normou musí platit $f([0,0]+(h_1,h_2))-f(0,0)=0\cdot h_1+0\cdot h_2+\frac{h_1h_2^2}{h_1^2+h_2^2}=\omega(\vec{h})$ a $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0}\frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}=0\,.$

Avšak limita $\lim\limits_{\|\vec{h}\|\to 0}\frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|}=\lim\limits_{[h_1,h_2]\to[0,0]}\frac{h_1h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}\,(h_1^2+h_2^2)}$ neexistuje, tedy funkce f není diferencovatelná v počátku.

Věta 1.4 : (diferenciál a derivace složené funkce)
Nechť funkce $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ jsou diferencovatelné v bodě $[x_0, y_0]$ a funkce $f(u,v)$ je diferencovatelná v bodě $[u_0, v_0]$, kde $u_0 = u(x_0,y_0)$, $v_0 = v(x_0,y_0)$. Potom složená funkce $f(u(x,y), v(x,y))$ je diferencovatelná v $[x_0, y_0]$ a platí (v bodě $[x_0, y_0]$)

$$\begin{aligned} df &= \tfrac{\partial f}{\partial u}\, du + \tfrac{\partial f}{\partial v}\, dv \\ &= \tfrac{\partial f}{\partial u}\left(\tfrac{\partial u}{\partial x}\, dx + \tfrac{\partial u}{\partial y}\, dy\right) + \tfrac{\partial f}{\partial v}\left(\tfrac{\partial v}{\partial x}\, dx + \tfrac{\partial v}{\partial y}\, dy\right) \\ &= \underbrace{\left(\tfrac{\partial f}{\partial u}\tfrac{\partial u}{\partial x} + \tfrac{\partial f}{\partial v}\tfrac{\partial v}{\partial x}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial x}} dx + \underbrace{\left(\tfrac{\partial f}{\partial u}\tfrac{\partial u}{\partial y} + \tfrac{\partial f}{\partial v}\tfrac{\partial v}{\partial y}\right)}_{\frac{\partial f}{\partial y}} dy\,. \end{aligned}$$

Celou větu (1.8) lze formulovat a dokázat pro složenou funkci $f(\vec{u}(\mathbf{x})) = f(u_1, \ldots, u_m)$. Potom $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \displaystyle\sum_{j=1}^{m} \dfrac{\partial f}{\partial u_j}\,\dfrac{\partial u_j}{\partial x_i}\,.$

Také hovoříme o "řetězovém pravidlu".

Při přechodu k polárním souřadnicím $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ má jednotkový vektor ve "směru r" tvar $\vec{\tilde{e}}_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ a pro jednotkový vektor ve "směru φ" platí $\vec{\tilde{e}}_2 = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$.

Matice přechodu M od báze $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ k bázi $\vec{\tilde{e}}_1, \vec{\tilde{e}}_2$ má tedy tvar $M = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Nyní vyjádříme gradient funkce $f = f(x,y)$ v novém souřadnicovém systému, tedy

$(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}) \cdot \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi,\ \frac{\partial f}{\partial x}(-\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\varphi\right)$.

Zároveň z diferenciálu složené funkce plyne $\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\varphi$ a $\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \varphi} = \frac{\partial f}{\partial x}(-r\sin\varphi) + \frac{\partial f}{\partial y} r\cos\varphi$.

Porovnáním dostaneme pro gradient funkce f v polárních souřadnicích

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right).$$

Příklad 1.12 : Funkce $u(x,y) = -2xy$, $v(x,y) = x + y$ jsou diferencovatelné na $\mathbb{R}^2$ a funkce $f(u,v) = u + v^2$ je také diferencovatelná na $\mathbb{R}^2$.

Pro diferenciál složené funkce $f(u(x,y), v(x,y))$ tedy na $\mathbb{R}^2$ platí

$$\begin{aligned} df &= 1\, du + 2v\, dv \\ &= 1\,[(-2y)\, dx - 2x\, dy] + 2(x+y)(dx + dy) \\ &= 2x\, dx + 2y\, dy\,. \end{aligned}$$

Zároveň $f(u(x,y), v(x,y)) = -2xy + (x+y)^2 = x^2 + y^2$, tedy $df = 2x\, dx + 2y\, dy$.

Příklad 1.13 : (derivace paraboloidu podél kružnice)
Nechť $f(x,y) = x^2 + y^2$ a $x(r,t) = r\cos t$, $y(r,t) = r\sin t$.
Potom $\dfrac{df}{dt} = \dfrac{df}{dx}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{df}{dy}\dfrac{dy}{dt} = 2x(-r\sin t) + 2y(r\cos t) = 2r^2(-\cos t\sin t + \sin t\cos t) = 0$.

Věta 1.5 : (vlastnosti gradientu)
Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}$.

i) Položíme-li $\vec{z} = \frac{\operatorname{grad} f(\mathbf{x})}{\|\operatorname{grad} f(\mathbf{x})\|}$, tedy $\|\vec{z}\| = 1$, potom platí $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec{z}} = \max\limits_{\|\vec{s}\|=1} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \vec{s}}$, $\vec{s}$ je libovolný vektor (změna funkce ve směru gradientu je největší).

ii) Vektor $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) (\neq \vec{o})$ je kolmý k tečné varietě (přímka, rovina, …) hladiny $H = \{\mathbf{x} : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$ v bodě $\mathbf{x}_0$.

Příklad 1.14 : Máme k funkci $f(x,y) = x^3 - y^2$, bodu $B = [1,2]$ a vektoru $\vec{v} = (3,4)$ určit směr největšího růstu v bodě B a derivaci podle vektoru $\vec{v}$.

Směr největšího růstu funkce f v bodě B je dán vektorem $\operatorname{grad} f(1,2) = (3x^2\,,\,-2y)_{[1,2]} = (3,-4)$.

Pro derivace podle vektoru $\vec{v}$ platí

$\frac{\partial f(1,2)}{\partial \vec{v}} = \operatorname{grad} f(1,2) \cdot \vec{v} = (3,-4)\cdot(3,4) = 0\,.$

Vidíme, že vektor $\vec{v} = (3,4)$ je tečný vektor k hladině

$H = \{[x,y] : x^3 - y^2 = -3\}$ v bodě $B = [1,2]\,.$

Definice 1.10 : (tečné lineární variety)
Graf lineární funkce $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dané předpisem

$$u(\mathbf{x}) = \vec{a}\cdot\mathbf{x} + d = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + d\,, \quad \text{kde } \vec{a} \in \mathbb{R}^n,\ d \in \mathbb{R}\,.$$

se nazývá **nadrovina** v $\mathbb{R}^{n+1}$ a prochází-li bodem $[\mathbf{x}_0, u_0]$, pak lze vyjádřit pomocí rovnice

$$u - u_0 = \vec{a}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = a_1(x_1 - x_{01}) + \cdots + a_n(x_n - x_{0n})\,.$$

Nechť funkce $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$, potom

1. **tečná nadrovina k hladině** $H = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n : f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)\}$ funkce f procházející bodem $\mathbf{x}_0$ ($\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \neq \vec{o}$) má rovnici
$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = 0\,.$$
2. **tečná nadrovina ke grafu funkce** $u = f(\mathbf{x})\,,\ \mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$ v bodě grafu $[\mathbf{x}_0, u_0] \in \mathbb{R}^{n+1}$, kde $u_0 = f(\mathbf{x}_0)$, je dána rovnicí
$$u - u_0 = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\,.$$

Příklady

Libovolný vektor $\mathbf{x}-\mathbf{x}_0$ tečné nadroviny k hladině je kolmý k vektoru $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$.

Pro $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ má tečná nadrovina k hladině (tj. přímka) tvar $f'_x(x-x_0) + f'_y(y-y_0) = 0$ a tečná nadrovina ke grafu funkce (tj. rovina) má tvar $u - u_0 = f'_x(x-x_0) + f'_y(y-y_0)$.

Poznámka 1.1 : Graf funkce $u = f(\mathbf{x})$ je vlastně nulovou hladinou funkce $g(\mathbf{x}, u) = f(\mathbf{x}) - u = 0$.
Tečná nadrovina k hladině funkce g v bodě $[\mathbf{x}_0, u_0]$ má tedy tvar $\operatorname{grad} g(\mathbf{x}_0)\cdot([\mathbf{x},u] - [\mathbf{x}_0,u_0]) = 0$ a odtud dostaneme $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{x}_0) - 1(u - u_0) = 0$.

Příklad 1.15 : Je dána funkce $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$. Hladiny této funkce jsou kulové plochy, které leží v $\mathbb{R}^3$; graf funkce f leží v $\mathbb{R}^4$. Hladina procházející bodem $[x_0, y_0, z_0]$ má rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = u_0\,,\quad u_0 = x_0^2 + y_0^2 + z_0^2\,.$

Tečná rovina k této hladině v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ má rovnici

$$a_1(x-x_0)+a_2(y-y_0)+a_3(z-z_0) = 0\,, \quad \vec{a} = \operatorname{grad} f(x_0, y_0, z_0)\,,$$

tj.

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0\,.$$

Tečná nadrovina ke grafu této funkce leží v $\mathbb{R}^4$ a má rovnici

$$u - u_0 = 2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0)\,.$$

Cvičení 1.1 : Ke grafu funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v $\mathbb{R}^2$ určete rovnici tečné roviny (v $\mathbb{R}^3$) v bodě $B = [1, 2, ?]$. $[\,B = [1, 2, f(1, 2)] = [1, 2, 5]$, $\operatorname{grad} f(1, 2) = (2x, 2y)_{[1,2]} = (2, 4) \Rightarrow$ tečná rovina je $u - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2)\,.]$

Definice 1.11 : (směr růstu, poklesu)
Vektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$, $(\|\vec{s}\| = 1)$ se nazývá **směrem růstu (poklesu)** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$, jestliže

$$\exists\, \delta > 0 : \; f(\mathbf{x}_0 + t\vec{s}) > (<) f(\mathbf{x}_0), \quad \forall\, t \in (0, \delta)\,,$$

tj. ve směru $\vec{s}$ se hodnota funkce f zvětšuje (zmenšuje).

Věta 1.6 : (směr růstu, poklesu diferencovatelné funkce)
Nechť funkce f je diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$. Vektor $\vec{s} \in \mathbb{R}^n$, je **směrem růstu (poklesu)** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$, jestliže

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{s} > 0 \qquad (\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{s} < 0)\,.$$

(Tedy vektory $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$ a $\vec{s}$ svírají ostrý (tupý) úhel.)

Příklad 1.16 : Určete, zda vektor $\vec{s} = (1, 3)$ je směrem růstu(poklesu) funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ v bodě $B = [1, 1]$. Protože $\operatorname{grad} f(1, 1) \cdot \vec{s} = (2, 2) \cdot (1, 3) = 8 > 0$, tak vektor $\vec{s}$ je směrem růstu funkce f v bodě B.

1.5 Derivace a diferenciály vyšších řádů. Taylorova věta.

Definice 1.12 : (druhá parciální derivace)
Nechť funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ má parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ v okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$. Existuje-li, pak se následující limita

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \left(\frac{\partial f(\mathbf{x}_0 + t\vec{e}_j)}{\partial x_i} - \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} ,$$

nazývá **druhá parciální derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$**.
Značíme

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j \partial x_i} .$$

Podobně definujeme vyšší parciální derivace, např.

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) \Big|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial^3 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} .$$

Nechť funkce f je diferencovatelná na okolí $U(\mathbf{x}_0)$. Je-li každá z funkcí $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \dots, n$ diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$, říkáme, že funkce f je v bodě $\mathbf{x}_0$ **dvakrát diferencovatelná.**

Jestliže je funkce f dvakrát diferencovatelná, pak existují diferenciály jejich parciálních derivací, tedy existují i druhé parciální derivace funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$.

Věta 1.7 : (záměnnost parciálních derivací)
Je-li funkce f dvakrát diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$, potom

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j \partial x_i} , \qquad i, j = 1, 2, \dots, n ;$$

tj. druhé derivace jsou záměnné.

U funkcí, které nejsou dvakrát diferencovatelné, nemusí platit záměnnost smíšených parciálních derivací. Například pro funkci

$$f = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & [x,y] \neq [0,0] \\ 0 & [x,y] = [0,0] \end{cases}$$

neplatí věta 1.7 v počátku.

Příklad 1.17: Funkce $f(x, y) = x^2 y$ má parciální derivace

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy , \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2$$

a pro smíšené parciální derivace platí

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x .$$

Věta 1.8 : Nechť funkce f je diferencovatelná na okolí $U(\mathbf{x}_0)$. Jsou-li parciální derivace $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ spojité v bodě $\mathbf{x}_0$, pak funkce f je dvakrát diferencovatelná v bodě $\mathbf{x}_0$.

Příklady

Definice 1.13 : (druhý diferenciál)
Předpokládejme, že funkce f má v bodech $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$ diferenciál $df(\mathbf{x}, \vec{h}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \vec{h}$. Pro pevné $\vec{h}$ je $df(\mathbf{x}, \vec{h}) : U(\mathbf{x}_0) \to \mathbb{R}$ funkcí $\mathbf{x}$. Diferenciál funkce $df(\mathbf{x}, \vec{h})$ (proměnné $\mathbf{x}$) v bodě $\mathbf{x}_0$ opět vzhledem k $\vec{h}$ se nazývá **druhým diferenciálem funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$** a značí se

$$d(df(\mathbf{x}, \vec{h}))|_{\mathbf{x}_0} = d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \, ; \quad \vec{h} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n) \, .$$

Platí

$$df(\mathbf{x}, \vec{h}) - df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) + \omega(\vec{h}) \, , \qquad \lim_{\|\vec{h}\| \to 0} \frac{\omega(\vec{h})}{\|\vec{h}\|^2} \to 0 \, .$$

Diferenciál k-tého řádu definujeme rekurentně

$$d(d^{k-1} f(\mathbf{x}, \vec{h})) = d^k f(\mathbf{x}, \vec{h}) \, .$$

U dvakrát diferencovatelné funkce f existují diferenciály parciálních derivací, tedy i gradientu a proto i diferenciál diferenciálu.

Pro dvakrát diferencovatelnou funkci f dostaneme

$$\begin{aligned} d^2 f(\mathbf{x}, \vec{h}) &= d(df(\mathbf{x}, \vec{h})) = d(\operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \cdot \vec{h}) = \sum_{j=1}^{n} d\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right) h_j \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_j}\right) h_i h_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} h_i\right) h_j \, . \end{aligned}$$

V maticové symbolice je $\vec{h}^T = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{pmatrix}$.

Takže

$$d^2 f(\mathbf{x}, \vec{h}) = \vec{h} \cdot \mathbb{H}(\mathbf{x}) \cdot \vec{h}^T \, ,$$

kde $\mathbb{H}(\mathbf{x})$ je **Hessova matice** s prvky $\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Druhý diferenciál je kvadratická forma v proměnné $\vec{h}$.

Pro funkci dvou proměnných platí $d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$.

Při výpočtu Hessovy matice, si můžeme pomoci pravidlem "gradient na gradient", tedy $\mathbb{H} = \operatorname{grad}^T(\operatorname{grad} f) = \left(\operatorname{grad}^T(\frac{\partial f}{\partial x}) \ \operatorname{grad}^T(\frac{\partial f}{\partial y})\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x}) & \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial y}) \\ \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x}) & \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial y}) \end{pmatrix}$.

<u>*Příklad 1.18*</u>: Pro funkci $f(x, y) = x^2 + xy$ je

$$df = (y + 2x)\, dx + x\, dy = (y + 2x, x)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} d^2 f &= d(y{+}2x)\, dx + d(x)\, dy = (2\, dx + 1\, dy)\, dx + (1\, dx + 0\, dy)\, dy \\ &= \big(2\, dx + 1\, dy, 1\, dx + 0\, dy\big)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= \left((dx, dy)\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, (dx, dy)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\ &= (dx, dy)\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = 2\, dx^2 + 2\, dx dy + 0\, dy^2 \, . \end{aligned}$$

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .$$

Formální pravidlo pro výpočet diferenciálu vyššího řádu funkce $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

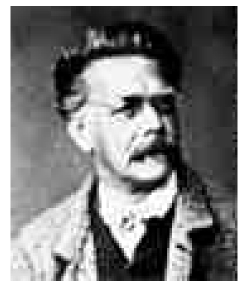
$$d^k f = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\, dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\, dx_2 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_n}\, dx_n \right)^k f \, .$$

Pro funkci dvou proměnných platí $d^3 f = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x \partial y} dx^2 dy +$ $+ 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial^2 y} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$.

Druhá derivace ve směrech $\vec{s}$, $\vec{r}$

$$\frac{\partial^2 f(\mathbf{x})}{\partial \vec{r}\, \partial \vec{s}} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t} \left[\operatorname{grad} f(\mathbf{x} + t\vec{r}) \vec{s}^{\,T} - \operatorname{grad} f(\mathbf{x}) \vec{s}^{\,T} \right] = \vec{r} \cdot \mathbb{H}(\mathbf{x}) \cdot \vec{s}^{\,T} \, .$$

Německý matematik Ludwig Otto Hesse (1811-1874).



se věnoval především studiu algebraických rovnic a teorii invariantů.

Věta 1.9 : (Taylorova věta)
Nechť funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ je v okolí $U(\mathbf{x}_0) \subset \Omega$ bodu $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ $(k+1)$-krát diferencovatelná. Potom pro každé $\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$ položíme $\vec{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ a **Taylorův rozvoj** funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$ je dán vztahem

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) = df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) + \frac{d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h})}{2!} + \cdots + \frac{d^k f(\mathbf{x}_0, \vec{h})}{k!} + R_{k+1}(\mathbf{x}_0, \vec{h}),$$

kde

$$R_{k+1}(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \frac{1}{(k+1)!} d^{k+1} f(\mathbf{x}_0 + \vartheta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0), \vec{h}), \quad 0 < \vartheta < 1 \, .$$

Příklad 1.19 : Taylorův rozvoj funkce $f(x,y) = x$ v bodě $\mathbf{x}_0 = [x_0, y_0]$ pro $k = 1$ je dán vztahy:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y - y_0) + R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}),$$

$$R_2(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) = \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f(\xi_0,\eta_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(\xi_0,\eta_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f(\xi_0,\eta_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2 \right), \quad \xi_0 \in (x_0, x)\, ;\ \eta_0 \in (y_0, y).$$

Tedy $\quad x - x_0 = 1 \cdot (x - x_0) + 0 \, .$

Taylorovu formuli používáme pro **aproximaci** diference $\Delta f = f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$ pomocí diferenciálů.

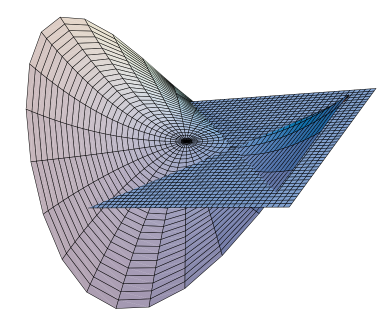
Příklad 1.20 : Pro funkci $f(x,y) = xy$ lze diferenci $\Delta f = xy - x_0 y_0$ psát ve tvaru

$$\Delta f = f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y} \Delta y \, ,$$

$$xy - x_0 y_0 \approx y_0 \, \Delta x + x_0 \, \Delta y$$

kde chyba aproximace je

$$R_2(x_0, y_0, x, y) = \Delta x \cdot \Delta y = (x - x_0) \cdot (y - y_0) \, .$$



Graf funkce $f(x,y) = xy$ s tečnou rovinou v bodě $[1, 0]$.

2 Základní pojmy optimalizace v $\mathbb{R}^n$

Příklady

2.1 Lokální a globální extrémy

Definice 2.1 : (Extrémy) Máme $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\mathbf{x}_0 \in \Omega$.
(A) Číslo $f(\mathbf{x}_0)$ se nazývá **lokální minimum (maximum)** funkce f, když existuje okolí $U(\mathbf{x}_0)$ bodu $\mathbf{x}_0$ takové, že platí

$$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \quad (f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})) \quad \forall\, \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \cap \Omega.$$

Bod $\mathbf{x}_0$ je pak **bod lokálního minima (maxima)** na množině Ω. Píšeme

$$f(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \cap \Omega} f(\mathbf{x}), \quad \big(f(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0) \cap \Omega} f(\mathbf{x})\big).$$

Pokud pro $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ platí **ostré** nerovnosti, potom hovoříme o **ostrém (lokálním) minimu (maximu)**.
(B) Číslo $f(\mathbf{x}_0)$ se nazývá **globální minimum (maximum)** funkce f na Ω, platí-li

$$f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}) \quad (f(\mathbf{x}_0) \geq f(\mathbf{x})) \quad \forall\, \mathbf{x} \in \Omega.$$

Píšeme

$$f(\mathbf{x}_0) = \min_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x}), \quad \big(f(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\mathbf{x})\big).$$

Bod $\mathbf{x}_0$ je pak **bod globálního minima (maxima)** na množině Ω. Extrémem funkce f rozumíme maximum nebo minimum této funkce.

Pozor nulové parciální derivace neznamenají nulový diferenciál, např. funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \neq y \\ x & x = y \end{cases}$$

má parciální derivace v bodě $[0,0]$ rovny nule, ale není zde diferencovatelná, ani nenabývá v bodě $[0,0]$ extrému.

Věta 2.1 : (Nutná podmínka existence lokálního extrému) Nechť funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je v bodě $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ diferencovatelná (definice (1.2)) a má v tomto bodě lokální extrém. Potom

$$df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 0 \quad \forall\, \vec{h} \in \mathbb{R}^n, \quad (\Rightarrow \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}).$$

Důkaz : (sporem)

Nechť $\exists\, \vec{h} \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ takové, že $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) > 0$.

(Pro $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) < 0$ je důkaz podobný).

Tedy $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) \cdot \vec{h} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0)}{t} > 0$.

Odtud vyplývá, že existuje $\delta > 0$ takové, že

$$f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) > 0 \quad \text{pro} \quad t \in (0, \delta),$$
$$f(\mathbf{x}_0 + t\vec{h}) - f(\mathbf{x}_0) < 0 \quad \text{pro} \quad t \in (-\delta, 0),$$

což je spor s definicí extrému funkce f v bodě $\mathbf{x}_0$.

Definice 2.2 : (Stacionární bod)
Nechť f je diferencovatelná funkce v bodě $\mathbf{x}_0$. Bod $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ se nazývá **stacionární bod** diferencovatelné funkce f, když

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0} \,.$$

Body, ve kterých diferenciál funkce neexistuje nebo je nulový, se nazývají **kritické** body funkce f (viz MA1 definice 7.4).

Příklad 2.1 :

Pro funkci $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$ máme $\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = (4x_1 - 2x_2 - 4\,,\ 4x_2 - 2x_1 - 6)\,.$

V bodě $[0, 0]$ určuje $\operatorname{grad} f(0, 0) = (-4, -6)$ směr největšího růstu funkce f a $-\operatorname{grad} f = (4, 6)$ určuje směr největšího poklesu. Například vektor $\vec{v} = (1, 0)$ určuje směr poklesu v bodě $[0, 0]$, neboť $\operatorname{grad} f \cdot \vec{v} = (-4, -6) \cdot (1, 0) = -4 < 0\,.$

Pro stacionární body platí

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 - 4 &= 0 \\ 4x_2 - 2x_1 - 6 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \tfrac{7}{3}, \\ x_2 &= \tfrac{8}{3}. \end{aligned}$$

Příklad 2.2 :

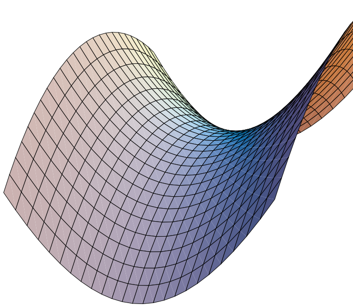
1. Pro funkci $f(x, y) = x^2 + y^2$ je $\operatorname{grad} f = (2x, 2y)$ a bod $A = [0, 0]$ je stacionární bod. Bod A je bodem minima funkce f a všechny směry jsou v tomto bodě směry růstu.

   Pro druhý diferenciál funkce f platí:
   $d^2(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 2\,dx^2 + 2\,dy^2 > 0 \quad \forall\, \vec{h} = (dx, dy) \neq (0, 0)\,.$

2. Pro funkci $f(x, y) = x^2 - y^2$ je $\operatorname{grad} f = (2x, -2y)$ a opět bod $A = [0, 0]$ je stacionární bod funkce f. Na přímce $y = 0$ má funkce $f(x, 0) = x^2$ minimum v bodě $x = 0$ a na přímce $x = 0$ má funkce $f(0, y) = -y^2$ maximum v bodě $y = 0\,.$

   Pro druhý diferenciál funkce f nyní platí:
   $d^2(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 2\,dx^2 - 2\,dy^2\,.$ Odtud dostaneme
   $d^2(\mathbf{x}_0, (1, 0)) = 2 > 0\,,\ \ d^2(\mathbf{x}_0, (0, 1)) = -2 < 0\,.$

   Závěr: Stacionární bod $[0, 0]$ je ve směru $\vec{s} = (1, 0)$ bodem minima funkce f a ve směru $\vec{s} = (0, 1)$ je bodem maxima funkce f (bod $[0, 0]$ je tzv. **sedlový bod**).


Graf funkce $x^2 - y^2$.

Věta 2.2 : (Postačující podmínky existence lokálního extrému)
Nechť funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je dvakrát diferencovatelná ve vnitřním bodě $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ a $df(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = 0 \;\; \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$. Jestliže

1. $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) > 0 \;\; \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n, \;\; \vec{h} \neq \vec{0}$,

   pak je v bodě $\mathbf{x}_0$ ostré lokální minimum ;

2. $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) < 0 \;\; \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n, \;\; \vec{h} \neq \vec{0}$,

   pak je v bodě $\mathbf{x}_0$ ostré lokální maximum ;

3. $\exists \vec{h}_1 \neq \vec{0} : d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_1) = 0$ a $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \geq 0$ nebo $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \leq 0 \;\; \forall \vec{h} \in \mathbb{R}^n$,

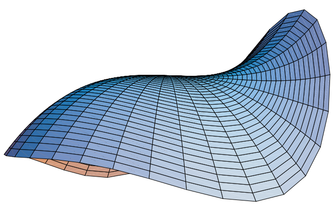
   pak (zatím) nemůžeme rozhodnout,

4. $\exists \vec{h}_1, \vec{h}_2 \in \mathbb{R}^n$:

   $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_2) < 0$, pak ve směru $\vec{h}_2$ je funkce konkávní (v $\mathbf{x}_0$ je maximum),

   $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_3) > 0$, pak ve směru $\vec{h}_3$ je funkce konvexní (v $\mathbf{x}_0$ je minimum),

   v bodě $\mathbf{x}_0$ nenastává extrém, ale $\mathbf{x}_0$ je **sedlový bod**.



Graf funkce $-x^2 + y^3$, která má stacionární bod $[0, 0]$ a $d^2 f = -2\,dx^2 + 6y\,dy^2$. V bodě $[0, 0]$ platí
$$d^2 f = -2\,dx^2 \leq 0\,.$$
Ve směru $\vec{h}_1 = (0, 1)$ je $d^2 f([0, 0], (0, 1)) = 0$ a neumíme tedy podle věty 2.2 rozhodnout o typu extrému v bodě $[0, 0]$.

<u>*Poznámka 2.1*</u>: Uvedeme ekvivalentní podmínky či ekvivalentní názvy příslušných vlastností zahrnutých v předpokladech věty (2.2). Platí $d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \vec{h}\,\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)\vec{h}^T$

1.
   - kvadratická forma $\vec{h}\,\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)\vec{h}^T$ je **pozitivně definitní**,
   - matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ je pozitivně definitní,
   - všechny hlavní minory matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou kladné, tj.
   $$M_1 > 0,\; M_2 > 0,\; M_3 > 0,\; \ldots,$$
   - všechna vlastní čísla matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou kladná.

Pro druhý diferenciál funkce f platí: $\forall \vec{h} \neq \vec{0}$ je
$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) > 0\,.$$

Hlavní minory matice $\mathbb{H}$ jsou determinanty čtvercových submatic, obsahujících levý horní roh $\mathbb{H}$.

2.
   - kvadratická forma $\vec{h}\,\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)\vec{h}^T$ je **negativně definitní**,
   - matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ je negativně definitní,
   - hlavní minory matice $\mathbb{H}(\mathbf{x})$ pravidelně střídají znaménka a první minor je záporný, tj.
   $$M_1 < 0,\; M_2 > 0,\; M_3 < 0,\; \ldots,$$
   - všechna vlastní čísla matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou záporná.

Pro druhý diferenciál funkce f platí: $\forall \vec{h} \neq \vec{0}$ je
$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) < 0\,.$$

3.
- kvadratická forma $\vec{h}\,\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)\vec{h}^T$ a matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou **pozitivně semidefinitní** nebo **negativně semidefinitní**,
- alespoň jeden z hlavních minorů je nulový a platí

  $$M_1 \geq 0,\ M_2 \geq 0,\ \ldots,\ \text{nebo } M_1 \leq 0,\ M_2 \geq 0,\ M_3 \leq 0,\ \ldots,$$

- vlastní čísla $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou nezáporná nebo nekladná, aspoň jedno je nulové.

Pro druhý diferenciál funkce f platí: $\forall \vec{h} \neq \vec{0}$ je
$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \leq 0$$
nebo
$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \geq 0$$
a $\exists\, \vec{h}_1 \neq \vec{0}$:
$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_1) = 0\,.$$

4.
- kvadratická forma $\vec{h}\,\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)\vec{h}^T$ a matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou **indefinitní**,
- pro znaménka minorů nenastává ani jeden z předchozích případů,
- vlastní čísla matice $\mathbb{H}(\mathbf{x}_0)$ jsou kladná i záporná.

$\exists\, \vec{h}_2 \neq \vec{0}$:
$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_2) > 0$$
a $\exists\, \vec{h}_3 \neq \vec{0}$:
$$d^2 f(\mathbf{x}_0, \vec{h}_3) < 0\,.$$

Příklad 2.3 : Vyšetříme lokální extrémy funkce
$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$.
Stacionární bod $\mathbf{x}_0$ určíme ze soustavy

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= 4\,, \\ -2x_1 + 4x_2 &= 6\,. \end{aligned}$$

Odtud

$$\mathbf{x}_0 = \left[\tfrac{7}{3}, \tfrac{8}{3}\right]\ ,\quad \mathbb{H} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} M_1 &= 4 > 0\,, \\ M_2 &= 12 > 0\,. \end{aligned}$$

Hessova matice (a tedy i druhý diferenciál) je pozitivně definitní. Proto funkce f má v bodě $\mathbf{x}_0$ minimum:

$$\min f(x_1, x_2) = f\left(\tfrac{7}{3}, \tfrac{8}{3}\right) = -\tfrac{114}{9}\,.$$

Příklad 2.4 : Vyšetříme stacionární body funkce
$f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Vypočteme

$$\operatorname{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 - 3y \\ 3y^2 - 3x \end{pmatrix}, \qquad \mathbb{H}(x, y) = \begin{pmatrix} 6x\,, & -3 \\ -3\,, & 6y \end{pmatrix}.$$

Stac. bod	$\mathbb{H}$	Vlast. čísla	Typ $\mathbb{H}$	Typ bodu
$A = [0, 0]$	$\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -3$	indefinitní	sedlový
$B = [1, 1]$	$\begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$	$\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = 3$	pozitivně definitní	minimum

Bod $\mathbf{x}_0$ je **sedlový bod** funkce f, jestliže $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ a platí $\exists\, \delta_1, \delta_2 > 0,\ \vec{h}_1, \vec{h}_2 \in \mathbb{R}^n$: $f(\mathbf{x}_0 + t_1\vec{h}_1) \leq f(\mathbf{x}_0) \leq f(\mathbf{x}_0 + t_2\vec{h}_2)$, $\forall\, t_i \in (-\delta_i, \delta_i)\,,\ i = 1, 2\,.$

V prvním směru $\vec{h}_1$ nabývá funkce f maxima a v druhém směru $\vec{h}_2$ nabývá minima v bodě $\mathbf{x}_0$.

Všimneme si podrobněji druhého diferenciálu $d^2 f = \vec{h}\,\mathbb{H}\,\vec{h}^T$ $= (h_1, h_2)\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = -6h_1h_2$ ve stacionárním bodě $A = [0,0]$. Zvolme $\vec{h} = (1,1)$ a uvažujeme danou funkci $f(x,y)$ na přímce $x = t,\ y = t$, tj. funkci $g(t) = f(t,t) = 2t^3 - 3t^2$. Protože $g''(0) = -6 < 0$, pak na dané přímce (tj. ve směru vektoru $\vec{h} = (1,1)$) nabývá funkce f maxima pro $t = 0$.
Zvolíme-li $\vec{h} = (1,-1)$, pak na přímce $x = t,\ y = -t$ nabývá funkce f svého minima ($g''(0) = 6 > 0$, kde $g(t) = f(t,-t) = 3t^2$) pro $t = 0$.

Příklad 2.5 : Vyšetříme stacionární body funkce f, kde $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2$. Platí

$\operatorname{grad} f(x,y) = \big(4x^3 - 2(x+y)\,,\ 4y^3 - 2(x+y)\big)$,

$\mathbb{H}[x,y] = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$. Potom

Stac. bod	$\mathbb{H}$	Hlavní minory	Typ bodu
$[1,1]$	$\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$	$M_1 = 10 > 0$ $M_2 = 96 > 0$	bod minima
$[-1,-1]$	$\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$	$M_1 = 10 > 0$ $M_2 = 96 > 0$	bod minima
$[0,0]$	$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$	$M_1 = -2 < 0$ $M_2 = 0$	Podle věty (2.2) nelze rozhodnout

Vyšetříme funkci $f(x,y)$ v bodě $[0,0]$ na přímkách

a) $x = t,\ y = t : g(t) = f(t,t) = 2t^4 - 4t^2;\ g''(0) = -8 < 0$ maximum;

b) $x = -t,\ y = t : g(t) = f(-t,t) = 2t^4;\ g^{(4)}(0) = 48 > 0$ (první nenulová derivace v bodě $t = 0$ je sudá a kladná) minimum.

Odtud je vidět, že bod $[0,0]$ je sedlovým bodem funkce f.

2.2 Extrémy vzhledem k podmnožině

Budeme vyšetřovat extrémy dané spojité funkce f v $\mathbb{R}^n$ na takových podmnožinách $V \subset \mathbb{R}^n$, které se dají charakterizovat systémem podmínek ve tvaru rovností nebo nerovností. Těmto podmínkám říkáme **vazbové podmínky** a množině V říkáme **množina přípustných bodů**.

Definice 2.3 : (Úlohy s vazbami)
Mějme funkci $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená množina.

(A) Mějme spojité funkce $h_j(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, $p < n$ a označme

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \cap \Omega : \; h_j(\mathbf{x}) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, p\}.$$

Úloha najít extrém funkce f na množině přípustných bodů V se nazývá **optimalizační úloha s vazbami typu rovnosti.**

(B) Mějme spojité funkce $g_i(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ a označme

$$\widehat{V} = \{\mathbf{x} \in \Omega : \; g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \; i = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Úloha najít extrém funkce f na množině přípustných bodů $\widehat{V}$ se nazývá **optimalizační úloha s vazbami typu nerovnosti.**

Je-li přípustná množina V určena jak vazbami typu rovnosti, tak vazbami typu nerovnosti, hovoříme o **úloze se smíšenými vazbami** (**úloha optimálního řízení**).

Číslo $f(\mathbf{x}_0)$, ve kterém funkce f nabývá minima (maxima) vzhledem k množině V (viz definice (2.1)), se nazývá **lokální vázané minimum (maximum)** a $\mathbf{x}_0$ je **bodem lokálního vázaného minima (maxima)** (tedy extrému).

Na fotbalové utkání prodáváme vstupenky na stání za cenu x a sezení za cenu y. Jejich prodejnost popisují funkce $p_1(x, y)$, $p_2(x, y)$, pro které platí z kapacitních důvodů omezení $0 \leq p_1(x, y) \leq S_1$, $0 \leq p_2(x, y) \leq S_2$. Našim úkolem je stanovit ceny x, y tak, abychom maximalizovali zisk, tedy vyřešit úlohu

$$\max_{[x,y]\in V} (p_{1(x,y)}x + p_{2(x,y)}y),$$

kde $V = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq p_1(x, y) \leq S_1, 0 \leq p_2(x, y) \leq S_2\}$.

Příklad 2.6 : Je dána funkce $f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$. Určete extrém funkce f na jednorozměrné lineární varietě (přímce) $\mathbf{x} = t\vec{s}$, $\vec{s} = (1, 1)$.

řešení: Na přímce $x_1 = t, \; x_2 = t$ vyšetříme funkci $f(t, t) = g(t) = 2t^2 - 10t$. Pro $t = \frac{5}{2}$ je $g'\left(\frac{5}{2}\right) = 0, \; g''\left(\frac{5}{2}\right) = 4 > 0$. V bodě $\left[\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right]$ nabývá funkce f tzv. **relativního minima** (minima vzhledem k dané varietě).

Příklad 2.7 :

Řešitelnost optimalizační úlohy: Jestliže množina $V \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní (omezená a uzavřená) a funkce f je spojitá na V, potom z torie vyplývá, že úlohy na hledání extrému (optima) $\min\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V\}$, $\max\{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in V\}$ jsou řešitelné, tj. existuje jak $\min\limits_{\mathbf{x}\in V} f(\mathbf{x})$, tak $\max\limits_{\mathbf{x}\in V} f(\mathbf{x})$.

1) (optimalizační úloha s vazbami typu rovnosti)

Řešíme úlohu $\min\{f(x,y) : [x,y] \in V\}$, kde

$f(x,y) = x^2+y^2$ a přípustná množina V je dána předpisem $V = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : y + x - 1 = 0\}$.

"Geometrická metoda"

Řezem grafu funkce f rovinou rovnoběžnou s osou z procházející "přímkou V"je parabola.

V bodě $[x_0, y_0] = [0{,}5\,;\,0{,}5]$ je její minimum.

"Přechod k jedné proměnné"

Dosadíme $y = -x + 1$ do funkce f, dostaneme funkci jedné proměnné $f(x, y(x)) = x^2 + (-x+1)^2 = 2(x^2 - x + \frac{1}{2}) = 2((x-\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4})$. Tato funkce má minimum v bodě $x_0 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow y_0 = \frac{1}{2}$.

"Metoda gradientu"

"Přímka V"je nulovou hladinou funkce $h(x,y) = y + x - 1$. Gradient funkce h (pokud existuje), je "kolmý"k hladině V (přesněji k tečně hladiny V.)

Gradient funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ vázaného extrému vzhledem k množině V je také kolmý k V.

Oba gradienty jsou tedy lineárně závislé, nebo-li existuje $\lambda \in \mathbb{R}$ takové, že

$$\operatorname{grad} f(x_0,y_0) + \lambda \operatorname{grad} h(x_0,y_0) = 0 \quad \wedge \quad h(x_0,y_0) = 0\,.$$

Konkrétně

$$\left.\begin{aligned} 2\,x_0 + \lambda\cdot 1 &= 0\\ 2\,y_0 + \lambda\cdot 1 &= 0\\ y_0 + x_0 - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} x_0 = \frac{1}{2}\,,\ y_0 = \frac{1}{2}\,,\ \lambda = -1\,.$$

Tímto způsobem však získáme pouze bod, ve kterém může být extrém funkce f vzhledem k množině V.

2) (optimalizační úloha s vazbami typu nerovnosti)

Řešíme úlohu $\min\{f(x,y),\ [x,y] \in \widehat{V}\}$, kde

$f(x,y) = x^2+y^2$; a přípustná množina $\widehat{V}$ je dána předpisem $\widehat{V} = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 : g(x,y) = y + x - 1 \le 0\}$.

Jestliže bod $[x_0, y_0]$ je vnitřní bod množiny $\widehat{V}$ a funkce f nabývá v tomto bodě extrému, pak podle věty (2.1) platí

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = 0$$

(pro diferencovatelnou funkci).

Jestliže bod $[x_0, y_0]$ je hraničním bodem množiny $\widehat{V}$ (neboli $g(x_0, y_0) = 0$) a funkce f nabývá v tomto bodě extrému vzhledem k její hranici $\partial\widehat{V}\,(= V)$, pak podle první části příkladu existuje $\widehat{\lambda} \in \mathbb{R}$ tak, že platí

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) + \widehat{\lambda}\operatorname{grad} g(x_0, y_0) = 0$$

(opět pro diferencovatelné funkce).

Obě předchozí podmínky můžeme najednou zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} &\text{i)}\ \ \widehat{\lambda}\, g(x_0, y_0) = 0 \\ &\text{ii)}\ \ \operatorname{grad} f(x_0, y_0) + \widehat{\lambda}\operatorname{grad} g(x_0, y_0) = 0\,. \end{aligned}$$

Konkrétně

$$\left.\begin{aligned} &\widehat{\lambda}\cdot(x_0 + y_0 - 1) = 0 \\ &(2x_0, 2y_0) + \widehat{\lambda}\cdot(1,1) = (0,0) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &x_0 = \tfrac{1}{2}\,,\ y_0 = \tfrac{1}{2}\,,\ \widehat{\lambda} = -1 \\ &x_0 = 0\,,\ y_0 = 0\,,\ \widehat{\lambda} = 0\,. \end{aligned}$$

V bodě $[0,0]$ je zřejmě minimum funkce f vzhledem k množině $\widehat{V}$. V bodě $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ je minimum funkce f vzhledem k hranici množiny $\partial\widehat{V}$. Zbývá zjistit, zda je v tomto bodě extrém vzhledem k celé množině $\widehat{V}$.

Gradient funkce g směřuje ven z množiny $\widehat{V}$. Připomeňme, že gradient určuje směr největšího růstu funkce. Z rovnosti $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = -\widehat{\lambda}\, g(x_0, y_0)$ pak pro $\widehat{\lambda} < 0$ plyne, že funkce f "roste k hranici"množiny $\widehat{V}$ (na hranici může být maximum) a naopak pro $\widehat{\lambda} > 0$ klesá k hranici (může tam být minimum).

Konkrétně v našem příkladě je $\widehat{\lambda} = -1$, funkce f roste k hranici, ale na hranici $\partial\widehat{V}$ nabývá minima, tedy vzhledem k množině $\widehat{V}$ nemá funkce f v bodě $[\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ extrém.

Věta 2.3 : (Karushovy – Kuhnovy – Tuckerovy nutné podmínky vázaného extrému)

Nechť Ω je otevřená množina a funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je diferencovatelná na Ω.

i) Nechť $\mathbf{x}_0$ je bod vázaného lokálního extrému funkce f vzhledem k množině

$$V = \{\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : \ h_j(\mathbf{x}) = 0, \ j = 1, 2, \ldots, p, \ \ p < n\},$$

kde $h_j(\mathbf{x})$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na Ω, a nechť vektory $\operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, jsou lineárně nezávislé. Potom $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0)$ je lineární kombinací vektorů $\operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0)$, $j = 1, 2, \ldots, p$, tj. **existují** reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ taková, že v bodě extrému platí

$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0) = \vec{0}.$$

ii) Nechť $\mathbf{x}_0$ je bod lokálního vázaného extrému funkce f vzhledem k množině

$$\widehat{V} = \{\mathbf{x} \in \Omega \subset \mathbb{R}^n : g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \ i = 1, 2, \ldots, m\},$$

kde $g_i(\mathbf{x})$ jsou spojitě diferencovatelné funkce na Ω.

Nechť $I = \{i : g_i(\mathbf{x}_0) = 0\}$ je množina indexů těch vazeb, ve kterých v bodě $\mathbf{x}_0$ nastává rovnost (tzv. **aktivní vazba**), a nechť vektory $\operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0)$, $i \in I$, jsou lineárně nezávislé. Potom existují čísla $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \ldots, \widehat{\lambda}_m$ taková, že v bodě extrému $\mathbf{x}_0$ platí:

a) $\widehat{\lambda}_i \, g_i(\mathbf{x}_0) = 0$, $\quad \widehat{\lambda}_i \geq 0$ pro minimum, $i = 1, 2, \ldots, m$

$\widehat{\lambda}_i \leq 0$ pro maximum, $i = 1, 2, \ldots, m$

b) $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \sum\limits_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i \operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0) = \vec{0}$.

<u>*Příklad 2.8*</u> : Najděte extrém funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ vzhledem k přípustné množině V, která je určená podmínkou $h(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0$.

"Geometricky"

Hladiny funkce f jsou kružnice se středem v počátku a přípustná množina V je elipsa se středem v počátku.

V bodech $[-2,0]$, $[2,0]$ má funkce f maximum vzhledem k množině V.

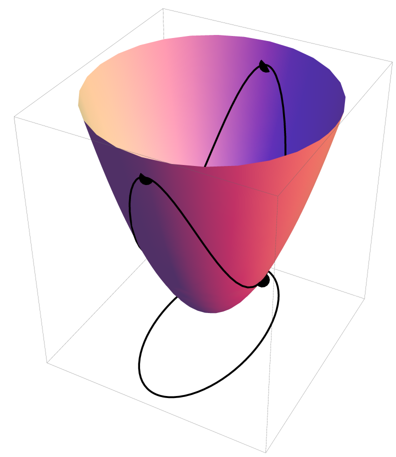
V bodech $[0,-1]$, $[0,1]$ má funkce f minimum vzhledem k množině V.

"Přechod k jedné proměnné"

Položíme $x = 2\cos t$, $y = \sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi)$.

Potom $f(t) = 4\cos^2 t + \sin^2 t$, $f'(t) = -3\sin 2t$, $f'(t) = 0$ pro $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{\pi}{2}$, $t_3 = \pi$, $t_4 = \frac{3\pi}{2}$.

Zároveň $f''(0) = f''(\pi) = -12 < 0 \Rightarrow$ maximum a $f''(\frac{\pi}{2}) = f''(\frac{3\pi}{2}) = 12 > 0 \Rightarrow$ minimum.



"Kuhnovy – Tuckerovy nutné podmínky"

V bodě $[x,y]$ vázaného extrému funkce f musí platit

$\operatorname{grad} f(x,y) + \lambda \operatorname{grad} h(x,y) = 0 \ \wedge\ h(x,y) = 0$. Tedy

$$\left.\begin{aligned} 2x + \lambda\tfrac{x}{2} &= 0 \\ 2y + \lambda\, 2y &= 0 \\ \tfrac{x^2}{4} + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} &x = 0\,,\ y = \pm 1\,,\ \lambda = -1\,, \\ &y = 0\,,\ x = \pm 2\,,\ \lambda = -4\,. \end{aligned}$$

Poslední metodou jsme získali (ne vždy všechny) body, ve kterých může být extrém funkce f vzhledem k množině V. Pomocí následující metody se pokusíme rozhodnout, zda v daných bodech je vázané maximum nebo minimum funkce f.

Metoda Lagrangeovy funkce

Základní myšlenka metody spočívá v tom, že se pro optimalizační úlohu sestrojí pomocná Lagrangeova funkce tak, že nutné podmínky minima pro úlohu s vazbami (věta (2.4) se stanou podmínkami stacionárního bodu Lagrangeovy funkce.

Tato metoda je velice univerzální a řada jejích modifikací se využívá v mnoha numerických metodách. Samotná Lagrangeova funkce je základem tzv. teorie duality.

Pro úlohu z předchozího příkladu definujeme Lagrangeovu funkci vztahem

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, h(x,y)\,.$$

Koeficient λ se nazývá **Langrangeův multiplikátor**. Pro body $[x, y] \in V$ platí $L(x, y, \lambda) = f(x, y)$, to znamená, že funkce L, f mají stejné extrémy vzhledem k množině V.

Pro stacionární bod $[x, y, \lambda]$ Lagrangeovy funkce L platí $\operatorname{grad} L(x, y, \lambda) = \vec{0}$, tedy

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial h}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial h}{\partial y} = 0 \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow \operatorname{grad} f + \lambda \operatorname{grad} h = 0\,,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = h(x, y) = 0\,,$$

což odpovídá nutným podmínkám vázaného extrému.

Nyní budeme předpokládat, že funkce f, h jsou dvakrát diferencovatelná a odvodíme vztah pro druhý diferenciál Lagrangeovy funkce.

$$\begin{aligned} d^2L = {} & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\,dx^2 + \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\,dy^2 + \underbrace{\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}}_{=0}\,d\lambda^2 \\ & +2\left(\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda}\,dx\,d\lambda + \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda}\,dy\,d\lambda\right) \\ = {} & \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,dy^2 \\ & +\lambda\left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\,dy^2\right) \\ & +2\,\underbrace{\left(\frac{\partial h}{\partial x}\,dx + \frac{\partial h}{\partial y}\,dy\right)}_{=dh=0 \text{ vazba}}\,d\lambda \\ = {} & d^2 f + \lambda\,d^2 h\,. \end{aligned}$$

Druhý diferenciál Lagrangeovy funkce můžeme vypočítat i postupně $d^2L = d(dL) = d(L_x dx + L_y dy + L_\lambda d\lambda) = d\,(\,f_x\,dx + f_y\,dy + \lambda\,(\,h_x\,dx + h_y\,dy\,) + h\,d\lambda) = d^2 f + \lambda\,d^2 h$.

<u>*Příklad 2.9*</u>: Vrátíme se k předchozímu příkladu (2.8), kde hledáme extrém funkce $f(x, y) = x^2 + y^2$ vzhledem k přípustné množině $V = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\,;\ \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 = 0\}$.
Druhý diferenciál Lagrangeové funkce je dán vztahem
$d^2L = 2\,dx^2 + 2\,dy^2 + \lambda\,(\frac{1}{2}\,dx^2 + 2\,dy^2)$
a vazbová podmínka je $dh = \frac{x}{2}\,dx + 2y\,dy = 0$.
Ve stacionárních bodech Lagrangeové funkce platí

$[0, \pm 1]\,,\ \lambda = -1$	stac. body	$[\pm 2, 0]\,,\ \lambda = -4$
$dy = 0$	vazba	$dx = 0$
$d^2L = \frac{3}{2}\,dx^2 > 0$	$(dx, dy) \neq \vec{0}$	$d^2L = -6\,dy^2 < 0$
minimum	typ extrému	maximum

Poznamenejme, že v bodech $[\pm 2, 0]$ je maximum funkce f i vzhledem k množině $\widehat{V} = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2\,;\ \frac{x^2}{4} + y^2 - 1 \leq 0\}$, neboť funkce f směrem k hranici $\partial \widehat{V}$ roste ($\lambda = -4 < 0$).
Naopak v bodech $[0, \pm 1]$ není extrém funkce f vzhledem k množině $\widehat{V}$.

Věta 2.4 : (postačující podmínky vázaného extrému)

Nechť funkce $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$ je dvakrát diferencovatelná na otevřené množině $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

i) Nechť funkce $h_j : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, p$, $p < n$ mají spojité parciální derivace na Ω a jsou dvakrát diferencovatelné v bodě $\mathbf{x}_0 \in V$, kde

$$V = \{\mathbf{x} \in \Omega : \; h_j(\mathbf{x}) = 0, \; j = 1, 2, \ldots, p, \; p < n\}\,.$$

Dále existují reálná čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ taková, že v bodě $\mathbf{x}_0 \in V$ platí $\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \sum\limits_{j=1}^{p} \lambda_j \operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0) = \vec{0}$.

Nechť vektory $\operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0)$ jsou lineárně nezávislé a pro každý nenulový vektor $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ takový, že $\operatorname{grad} h_j(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} = 0$, $j = 1, 2, \ldots, p$, platí

$$d^2 f(\mathbf{x}_0,\, d\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \, d^2 h_j(\mathbf{x}_0,\, d\mathbf{x}) > 0 \; (< 0)\,.$$

Potom $\mathbf{x}_0$ je bod ostrého (lokálního) minima (maxima) funkce f vzhledem k množině V .

V bodě $\mathbf{x}_0$ jsou tedy splněny nutné podmínky vázaného lokálního extrému funkce f vzhledem k množině V, viz věta (2.3).

Je-li druhý diferenciál Lagrangeovy funkce $d^2L(\mathbf{x}_0, \lambda, d\mathbf{x})$ indefinitní v bodě $\mathbf{x}_0$, pak funkce f nemá v tomto bodě extrém vzhledem k přípustné množině V.

ii) Nechť funkce $g_i : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, mají spojité parciální derivace na Ω a jsou dvakrát diferencovatelné v bodě $\mathbf{x}_0 \in \widehat{V}$, kde

$$\widehat{V} = \{\mathbf{x} \in \Omega : g_i(\mathbf{x}) \le 0, \; i = 1, 2, \ldots, m\}$$

Nechť existují čísla $\widehat{\lambda}_1, \widehat{\lambda}_2, \ldots, \widehat{\lambda}_m$ taková, že v bodě $\mathbf{x}_0$ platí:

$$\widehat{\lambda}_i \, g_i(\mathbf{x}_0) = 0 \qquad \wedge \quad \widehat{\lambda}_i \ge 0 \;\; (\widehat{\lambda}_i \le 0), \;\; i = 1, 2, \ldots, m\,,$$
$$\operatorname{grad} f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^{m} \widehat{\lambda}_i \operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0) = \vec{0}\,.$$

Dále nechť $I = \{i : g_i(\mathbf{x}_0) = 0\}$ a vektory $\operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0)$, $i \in I$ jsou lineárně nezávislé. Navíc nechť pro každý nenulový vektor $d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2, \ldots, dx_n)$ takový, že
$\operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} = 0$, pro $i \in I$, pro které $\widehat{\lambda}_i > 0 \;\; (\widehat{\lambda}_i < 0)$,
$\operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0) \cdot d\mathbf{x} \le 0$, pro ostatní indexy $i \in I$ (tj. $\widehat{\lambda}_i = 0$),
platí

$$d^2 f(\mathbf{x}_0,\, d\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{p} \widehat{\lambda}_i \, d^2 g_i(\mathbf{x}_0,\, d\mathbf{x}) > 0 \; (< 0)\,.$$

Potom $\mathbf{x}_0$ je bod ostrého (lokálního) minima (maxima) funkce f vzhledem k množině $\widehat{V}$.

Pokud $\lambda_i > 0$, potom nás zajímá, zda je minimum funkce f na hranici $\partial\widehat{V}$, tj. $\operatorname{grad} g_i(\mathbf{x}_0)\, d\mathbf{x} = 0$.

Jde o úlohu najít mezi kvádry jednotkového objemu ten, který má minimální povrch (je to krychle!).

<u>*Příklad 2.10*</u>: Stanovte extrém funkce $f(x,y) = xy$ na přípustné množině V určené podmínkou $x+y-1=0$.

$$L(x,y,\lambda) = xy + \lambda(x+y-1).$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = y+\lambda\,,\ \frac{\partial L}{\partial y} = x+\lambda\,,\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x+y-1\,.$$

Stacionární bod

$$x_0 = y_0 = \frac{1}{2}\,,\quad \lambda = -\frac{1}{2}\,.$$

Máme $df = ydx + xdy$, $d^2f = 2dx\,dy$ a $dx+dy=0$ na V. Proto

$$d^2f = 2dx\,(-dx) = -2dx^2 < 0\,.$$

Bod $\left[\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ je bodem maxima funkce f na V; $\max f = \frac{1}{4}$.

<u>*Příklad 2.11*</u>: Stanovte extrém funkce $f(x,y,z) = xy + yz + xz$ na množině $V = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 :\ xyz - 1 = 0\}$.

Lagrangeova funkce: $L(x,y,z,\lambda) = xy+yz+xz+\lambda(xyz-1)$.

Nutné podmínky:

$$\left.\begin{aligned} \tfrac{\partial L}{\partial x}&:\ y+z+\lambda yz=0\\ \tfrac{\partial L}{\partial y}&:\ x+z+\lambda xz=0\\ \tfrac{\partial L}{\partial z}&:\ y+x+\lambda xy=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} xy+xz+\lambda xyz=0\\ xy+yz+\lambda xyz=0\\ yz+xz+\lambda xyz=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x=y,\ z\neq 0,\\ y=z,\ x\neq 0. \end{aligned}$$

Přípustným bodem je $S = [1,1,1]$; pak $\lambda = -2$. Prověříme splnění postačujících podmínek podle věty (2.4). Platí $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 1+\lambda z$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial z} = 1+\lambda y$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y \partial z} = 1+\lambda x$, $\frac{\partial^2 L}{\partial z^2} = 0$. Tedy

$$\begin{aligned} d^2L(\mathbf{x}_0,\lambda,\vec{h}) &= \\ &= 2(1+\lambda z)h_1h_2 + 2(1+\lambda y)h_1h_3 + 2(1+\lambda x)h_2h_3\big|_{S,\lambda=-2}\\ &= -2(h_1h_2 + h_1h_3 + h_2h_3)\,; \end{aligned}$$

Vazba

$$\operatorname{grad} h(x,y,z)\cdot\vec{h} = \begin{pmatrix} yz\\ xz\\ xy \end{pmatrix}_S \cdot\vec{h} = h_1+h_2+h_3 = 0\,.$$

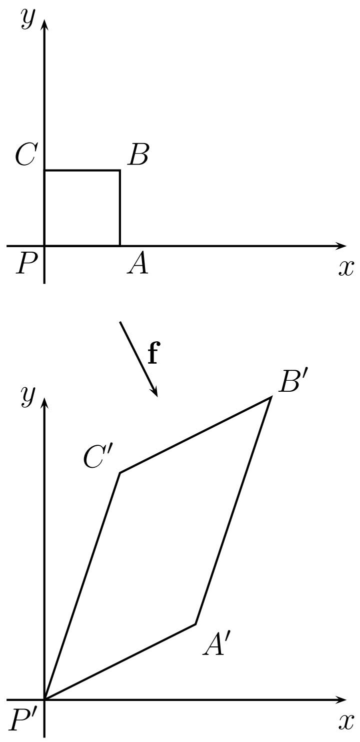
Dosazením $h_3 = -h_1 - h_2$ dostaneme $-2(h_1h_2 - h_1^2 - h_1h_2 - h_1h_2 - h_2^2) = 2(h_1^2 + h_1h_2 + h_2^2) = \frac{1}{2}(4h_1^2 + 4h_1h_2 + 4h_2^2)\,.$

Tato kvadratická forma má pozitivně definitní matici $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ (vlastní čísla jsou $\lambda_1 = 6\,, \lambda_2 \;=\; 2$), proto bod $S = [1, 1, 1]$ je bodem minima.

3 Diferencovatelná zobrazení

3.1 Základní pojmy

Definice 3.1 : (vektorová funkce)
Mějme m funkcí $f_i : \Omega \to \mathbb{R},\ \Omega \subset \mathbb{R}^n,\ \ i = 1, 2, \ldots, m$. Zobrazení $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \Omega \mapsto \mathbb{R}^m,\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \ldots, f_m(\mathbf{x}))$ se nazývá **vektorová funkce vektorového argumentu**. Funkce $f_i,\ i = 1, 2, \ldots, m$ se nazývají **složky vektorové funkce**.



<u>Příklad 3.1</u> : Máme vektorovou funkci $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$,

$\mathbf{f} = (f_1, f_2) = (y_1, y_2)$, kde

$$\begin{aligned} y_1 &= 2x_1 + x_2\,, \\ y_2 &= x_1 + 3x_2\,, \end{aligned} \quad \text{maticově } \mathbf{y} = \mathbb{A} \cdot \mathbf{x}\,, \text{ kde } \mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Body $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ zobrazujeme v jednom kartézském systému a jejich obrazy $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ v jiném kartézském systému.

Uvedená vektorová funkce přiřazuje bodům čtverce $PABC$ body rovnoběžníka $P'A'B'C'$ tak, že $P \to P',\ A \to A', \ldots$. Konkrétně čtverec $P(0,0)\,A(1,0)\,B(1,1)\,C(0,1)$ se zobrazí na rovnoběžník $P'(0,0)\,A'(2,1)\,B'(3,4)\,C'(1,3)$.

Poznamenejme, že obsah rovnoběžníka $\operatorname{meas}(P'A'B'C')$ je roven 5 a hodnota determinantu matice $\det A$ je také 5, tedy platí

$$\operatorname{meas}(P'A'B'C') = |\det A| \cdot \operatorname{meas}(PABC)\,.$$

Zároveň platí

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\[2ex] \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} y_1 \\[2ex] \operatorname{grad} y_2 \end{pmatrix}.$$

Uvedené vlastnosti zobecníme v následujícím textu.

Definice 3.2 : (diferencovatelnost vektorové funkce)
Vektorová funkce $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ o složkách $f_1, f_2, \ldots, f_m$ je **diferencovatelná** v bodě $\mathbf{x}_0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$, jestliže funkce f_i , $i = 1, 2, \ldots, m$ jsou diferencovatelné v bodě $\mathbf{x}_0$. **Diferenciálem vektorové funkce f** je potom vektor

$$d\mathbf{f}^T(\mathbf{x}_0, \vec{h}) = \begin{pmatrix} df_1(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \\ df_2(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \\ \vdots \\ df_m(\mathbf{x}_0, \vec{h}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \operatorname{grad} f_1(\mathbf{x}_0)\, \vec{h} \\ \operatorname{grad} f_2(\mathbf{x}_0)\, \vec{h} \\ \vdots \\ \operatorname{grad} f_m(\mathbf{x}_0)\, \vec{h} \end{pmatrix} = \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)\vec{h}\,.$$

Zde opět $\vec{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$. Matice $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}_0)$ (typu (m, n)), jejíž řádky jsou $\operatorname{grad} f_i(\mathbf{x}_0)$, se nazývá **derivace vektorové funkce f v bodě** $\mathbf{x}_0$ nebo **Jacobiova matice vektorové funkce f**. Tuto matici také označujeme

$$\mathbf{f}'(\mathbf{x}) = \operatorname{grad} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) = \frac{D(\mathbf{f})}{D(\mathbf{x})} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_m)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}\,.$$

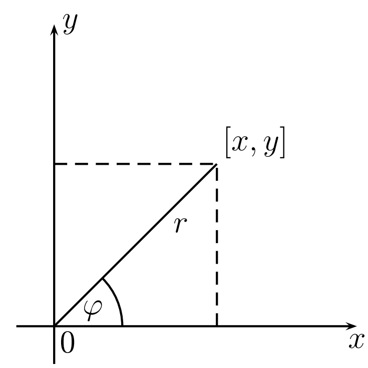
Pro $m = n$ se determinant Jacobiovy matice $\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ nazývá **jakobián**.

Pokud $\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x}) \neq 0$, pak také říkáme, že matice $\mathbb{J}_{\mathbf{f}}(\mathbf{x})$ je regulární.

Polární souřadnice

Vyšetříme vektorovou funkci $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $(r, \varphi) \mapsto (x, y)$ danou vztahy

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi.$$



Pro libovolné $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ je $\mathbf{f}$ diferencovatelná funkce a platí

$$\mathbf{f}' = \mathbb{J}_{\mathbf{f}} = \frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}; \quad \boxed{\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}} = r}\,.$$

Takže pro $r \neq 0$ je vektorová funkce $\mathbf{f}$ regulární. Není však na celém prostoru $\mathbb{R}^2$ bijektivní (obrazem různých bodů (r_1, φ_1), $(r_1, \varphi_1 + 2\pi)$ je tentýž bod). Proto označíme

$$\mathcal{P} = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 :\ 0 < r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi\}\,.$$

Potom vektorová funkce $\mathbf{f}$ zobrazuje množinu $\mathcal{P}$ na množinu $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ bijektivně a existuje inverzní vektorová funkce

$\mathbf{f}^{-1} : X \mapsto \mathcal{P}$. Tato inverzní vektorová funkce je dána vztahy:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0,\ y \geq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0,\ y > 0, \\ \pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x < 0,\ y \in \mathbb{R}, \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0,\ y < 0 \\ 2\pi + \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, & x > 0,\ y < 0. \end{cases}$$

Geometricky má číslo r význam vzdálenosti bodu (x, y) od počátku a číslo φ význam úhlu mezi průvodičem bodu (x, y) a kladným směrem osy x.

Vektorová funkce $\mathbf{f}^{-1}$ $((r, \varphi) = \mathbf{f}^{-1}(x, y))$ se nazývá **soustava polárních souřadnic**. Pro jakobiovou matici funkce $\mathbf{f}^{-1}$ platí

$$\mathbb{J}_{\mathbf{f}^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \frac{-\sin\varphi}{r} & \frac{\cos\varphi}{r} \end{pmatrix}.$$

Tedy $$\mathbb{J}_{\mathbf{f}} \cdot \mathbb{J}_{\mathbf{f}^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vektorová funkce $\mathbf{f}$ zobrazí počátek do počátku, přímku danou rovností $r = R$ zobrazí na kružnici vyjádřenou parametricky rovnicemi $x = R\cos\varphi,\ y = R\sin\varphi,\ \varphi \in \mathbb{R}$. Obrazem přímky $\varphi = \varphi_1$ je polopřímka vyjádřená parametrickými rovnicemi $x = r\cos\varphi_1,\ y = r\sin\varphi_1$ (parametr $r \geq 0$).

Obrazem vyplněného obdélníku $\Omega_{\Delta r \Delta\varphi}$ je vyplněná výseč mezikruží $\Omega_{\Delta x \Delta y}$ a platí $\operatorname{meas}(\Omega_{\Delta x \Delta y}) \approx r \operatorname{meas}(\Omega_{\Delta r \Delta\varphi}) = \det \mathbb{J}_{\mathbf{f}} \cdot \operatorname{meas}(\Omega_{\Delta r \Delta\varphi})$.

Věta 3.1 : (geometrický význam jakobiánu)
Nechť prosté regulární zobrazení $\mathbf{f}$ zobrazuje oblast $\Omega_{r\varphi}$, která obsahuje bod (r_0, φ_0), na oblast Ω_{xy}, potom platí (při označení $d = \operatorname{diam} \Omega_{r\varphi}$ (délka největší možné úsečky ležící v $\Omega_{r\varphi}$), $\operatorname{meas}(\Omega) =$ míra oblasti Ω)

$$\lim_{d \to 0} \frac{\operatorname{meas}(\Omega_{xy})}{\operatorname{meas}(\Omega_{r\varphi})} = |\det J_{\mathbf{f}}(r_0, \varphi_0)|.$$

Pro malé d píšeme přibližnou rovnost

$$\operatorname{meas}(\Omega_{xy}) \approx |\det J_{\mathbf{f}}(r_0, \varphi_0)| \cdot \operatorname{meas}(\Omega_{r\varphi}).$$

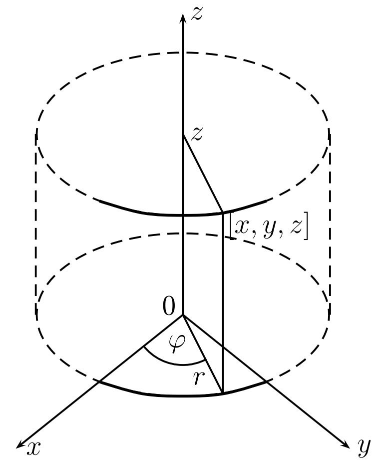
Všimněme si, že pro funkci $\mathbf{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (hladká monotónní) píšeme tvrzení věty ve tvaru

$$\lim_{|\Delta x| \to 0} \frac{|\Delta \mathbf{f}|}{|\Delta x|} = |\mathbf{f}'|.$$

Cylindrické souřadnice

Nechť vektorová funkce $\mathbf{f}$ je dána transformačními rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\,, \\ y &= r\sin\varphi\,, \\ z &= z\,. \end{aligned}$$



Protože $\boxed{\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}} = r}$, je na množině $V = \{(r,\varphi,z) \in \mathbb{R}^3 :\ 0 < r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\infty < z < +\infty\}$ tato vektorová funkce regulární a prostá a zobrazuje množinu V na množinu $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{osa } z\}$ vzájemně jednoznačně.
Inverzní vektorová funkce $\mathbf{f}^{-1} :\ (x,y,z) \mapsto (r,\varphi,z)$, kde

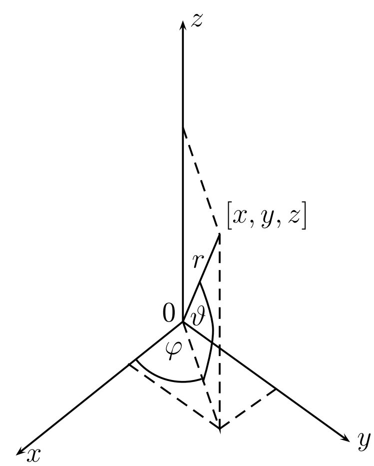
$$r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$\varphi = \text{jediný kořen rovnic } \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi\,,\quad \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi\,,$$
$$z = z$$

se nazývá **soustava cylindrických souřadnic**.

Sférické souřadnice

Máme vektorovou funkci $\mathbf{f}$ danou transformačními rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\vartheta, \\ y &= r\sin\varphi\cos\vartheta, \\ z &= r\sin\vartheta. \end{aligned}$$



Potom $\boxed{\det \mathbb{J}_{\mathbf{f}} = r^2\cos\vartheta}$ a jakobián je roven nule právě tehdy, když $r = 0$ nebo $\vartheta = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Vektorová funkce $\mathbf{f}$ je proto regulární a prostá na množině

$$V = \{(r,\varphi,\vartheta) \in \mathbb{R}^3 : 0 < r < +\infty,\ 0 \le \varphi < 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}\}.$$

Inverzní vektorová funkce $\mathbf{f}^{-1} :\ (x,y,z) \mapsto (r,\varphi,\vartheta)$

$$\mathbf{f}^{-1} :\quad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2},$$
$$\varphi = \text{jediný kořen rovnic } \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos\varphi\,,\quad \tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin\varphi\,,$$
$$\vartheta = \text{jediný kořen rovnice } \sin\vartheta = \tfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

se nazývá **soustava sférických souřadnic**.

Pro pevné $\varphi = \varphi_0$ vznikne **souřadnicová plocha**, která je popsaná parametrickými rovnicemi $x = r\cos\varphi_0\sin\vartheta$,

$y = r\sin\varphi_0 \sin\vartheta$, $z = r\cos\vartheta$; je to ("poledníková") rovina procházející osou z.

Pro pevné $r = r_0$ je souřadnicová plocha dána parametrickými rovnicemi $x = r_0 \cos\varphi \sin\vartheta$, $y = r_0 \sin\varphi \sin\vartheta$, $z = r_0 \cos\vartheta$; je to kulová plocha o rovnici $x^2 + y^2 + z^2 = r_0^2$.

Pro pevné $\vartheta = \vartheta_0$ je souřadnicovou plochou plocha kuželová.

4 Riemannův integrál v $\mathbb{R}^n$

Příklady

4.1 Definice a základní vlastnosti Riemannova integrálu

Definice 4.1 : (Riemannův integrál v $\mathbb{R}$)
(i) Nechť $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je omezená funkce. Množina $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_k\,;\ a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b\}$ se nazývá **dělení intervalu** $\langle a, b\rangle$ a číslo $\nu(D) = \max\limits_{0\le i\le k-1}(x_{i+1} - x_i)$ se nazývá **krok (norma) dělení** D. Označíme

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= x_{i+1} - x_i\,;\\ M_i &= \sup f(x),\ x \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle,\ i = 0, 1, \ldots, k-1\,;\\ m_i &= \inf f(x),\ x \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle,\ i = 0, 1, \ldots, k-1\,. \end{aligned}$$

Každému dělení D a funkci f přiřadíme čísla:
horní součet

$$U(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} M_i \Delta x_i,$$

dolní součet

$$L(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} m_i \Delta x_i,$$

integrální součet

$$J(f, D) = \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \xi_i \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle \text{ je libovolný bod.}$$

(ii) Řekneme, že funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na $\langle a, b\rangle$ (píšeme $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$), když existuje reálné číslo $I = I(f)$ takové, že
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall$ dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ s $\nu(D) < \delta$, $\forall \xi_i \in \langle x_i, x_{i+1}\rangle$, $i = 0, 1, \ldots, k-1$: $\quad |J(f, D) - I| < \varepsilon$.
Říkáme, že existuje limita integrálních součtů, a píšeme

$$\lim_{\nu(D)\to 0} \sum_{i=0}^{k-1} f(\xi_i)\Delta x_i = I.$$

Číslo I se nazývá **určitý Riemannův integrál** z funkce f na intervalu $\langle a, b\rangle$ a značí se

$$I = \int_a^b f(x)\, dx\,.$$

Definice 4.2 : (Riemannův integrál v $\mathbb{R}^2$)
(i) Nechť $Q = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle \subset \mathbb{R}^2$. Nechť D_1, D_2 jsou dělení intervalů $\langle a,b\rangle, \langle c,d\rangle$ ve smyslu definice 4.1, tj. množiny $\{x_0, x_1, \ldots, x_r\}$, $\{y_0, y_1, \ldots, y_s\}$. Množina D všech obdélníků

$$Q_{jk} = \langle x_j, x_{j+1}\rangle \times \langle y_k, y_{k+1}\rangle,$$

$j = 0, 1, \ldots, r-1$; $k = 0, 1, \ldots, s-1$, se nazývá **dělení obdélníku** Q a číslo

$$\nu(D) = \max_{\substack{0\le j\le r-1\\ 0\le k\le s-1}} \sqrt{(\Delta x_j)^2 + (\Delta y_k)^2}, \quad \begin{array}{l}\Delta x_j = x_{j+1} - x_j,\\ \Delta y_k = y_{k+1} - y_k,\end{array}$$

je **krok (norma) dělení** D
Nechť $f : Q \to \mathbb{R}$ je omezená funkce na $Q \subset \mathbb{R}^2$. Označíme

$$\begin{array}{ll} M_{jk} = \sup f(x,y)\,, & (x,y) \in Q_{jk}\,;\\ m_{jk} = \inf f(x,y)\,, & (x,y) \in Q_{jk}\,.\end{array}$$

Horní součet příslušný f a dělení D je definován vztahem

$$U(f,D) = \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-1} M_{jk}\Delta x_j \Delta y_k\,.$$

Dolní součet příslušný f a dělení D je definován vztahem

$$L(f,D) = \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-1} m_{jk}\Delta x_j \Delta y_k\,.$$

Integrální součet příslušný f a dělení D je definován vztahem

$$J(f,D) = \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_j, \eta_k)\Delta x_j \Delta y_k\,,$$

kde $(\xi_j, \eta_k) \in Q_{jk}$ je libovolný bod.

(ii) Funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na Q (píšeme $f \in \mathcal{R}(Q)$), když existuje reálné číslo $I = I(f)$ takové, že

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;\forall \text{ dělení } D \text{ obdélníku } Q \text{ takové, že}$$

$$\nu(D) < \delta \quad \forall\, (\xi_j, \eta_k) \in Q_{jk} : \;\; |J(f, D) - I| < \varepsilon\,.$$

Číslo

$$I = \lim_{\nu(D) \to 0} J(f, D) = \lim_{\nu(D) \to 0} \sum_{j=0}^{r-1} \sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_j, \eta_k) \Delta x_j \Delta y_k$$

se nazývá **dvojný Riemannův integrál** funkce f přes obdélník Q a značí se

$$I = \iint\limits_{Q} f(x, y)\; dxdy = \int\limits_{Q} f(x, y)\; dQ\,.$$

(iii) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ je omezená oblast a na ní je definovaná omezená funkce f. Vybereme takový obdélník Q, aby $\Omega \subset Q$, a sestrojíme funkci

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y)\,, & (x, y) \in \Omega\,, \\ 0\,, & (x, y) \in Q \setminus \Omega\,. \end{cases}$$

Dvojný integrál z funkce f přes Ω definujeme vztahem

$$\int\limits_{\Omega} f\; d\Omega = \iint\limits_{\Omega} f(x, y)\; dxdy = \iint\limits_{Q} F(x, y)\; dxdy\,.$$

Řekneme, že f je **Riemannovsky integrovatelná na Ω**, píšeme $f \in \mathcal{R}(\Omega)$.

Definice 4.3 : (Riemannův integrál v $\mathbb{R}^3$)
(i) Nechť $Q = \langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times \langle a_3, b_3\rangle$ je kvádr v $\mathbb{R}^3$. Nechť D_l jsou dělení intervalů $\langle a_l, b_l\rangle$, $l = 1, 2, 3$.
Množina kvádrů

$$Q_{ijk} = \langle x_i, x_{i+1}\rangle \times \langle y_j, y_{j+1}\rangle \times \langle z_k, z_{k+1}\rangle$$

se nazývá **dělení kvádru** Q. Číslo

$$\nu(D) = \max_{i,j,k} \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_j)^2 + (\Delta z_k)^2}$$

je **krok (norma)** dělení D.
Nechť $f = f(x, y, z) : Q \to \mathbb{R}$ je omezená funkce na $Q \subset \mathbb{R}^3$. Analogicky jako v definicích 4.1, 4.2 se definují horní a dolní součty příslušné funkci f a dělení D. **Integrální součet** je číslo

$$J(f, D) = \sum_{i=0}^{r-1} \sum_{j=0}^{s-1} \sum_{k=0}^{p-1} f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)\Delta x_i \Delta y_j \Delta z_k\,,$$

kde $(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) \in Q_{ijk}$ je libovolný bod.

(ii) Funkce f je **Riemannovsky integrovatelná** na Q, píšeme $f \in \mathcal{R}(Q)$, existuje-li číslo

$$I = \lim_{\nu(D)\to 0} J(f, D)$$

pro libovolné dělení D kvádru Q. Značí se

$$I = \iiint\limits_{Q} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{Q} f\; dQ\,, \quad Q \subset \mathbb{R}^3\,.$$

Číslo I se nazývá **trojný Riemannův integrál**.

(iii) Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ je omezená oblast a na ní je definovaná omezená funkce f. Vybereme takový kvádr Q, aby $\Omega \subset Q$ a sestrojíme funkci

$$F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z)\,, & (x, y, z) \in \Omega\,, \\ 0\,, & (x, y, z) \in Q \setminus \Omega\,. \end{cases}$$

Funkce f je **Riemannovsky integrovatelná na** Ω, jestliže F je integrovatelná na Q, a definujeme

$$\int\limits_{\Omega} f\,d\,\Omega = \iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_{Q} F(x,y,z)\,dxdydz\,.$$

<u>*Příklad 4.1*</u>: Dirichletova funkce

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \ \text{je racionální číslo,} \\ 0 & x \ \text{je iracionální číslo,} \end{cases}$$

$x \in \langle a, b\rangle$, není Riemannovsky integrovatelná:

$U(f, D) = b - a$ pro každé dělení D, neboť $\sup f = 1$ na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$;

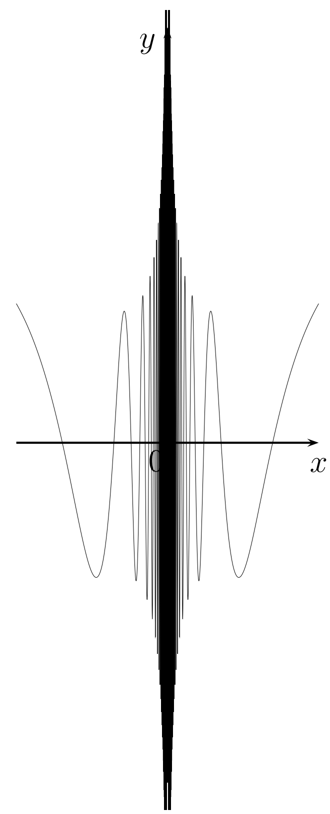
$L(f, D) = 0$, protože $\inf f = 0$ na každém intervalu $\langle x_i, x_{i+1}\rangle$.

<u>*Příklad 4.2*</u>: Funkce $f(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}\,,\ \ x \neq 0$, není na žádném intervalu obsahujícím nulu Riemannovsky integrovatelná, neboť f je neomezená na libovolném okolí nuly. Existuje však Newtonův integrál z funkce f, neboť

$$F(x) = \begin{cases} x^{\frac{3}{2}} \sin\frac{1}{x}\,, & x \neq 0\,, \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

je primitivní funkce k f. Proto

$$(\mathcal{N}) \int\limits_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = \sin 1\,.$$



Graf funkce
$f(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{1}{x}$

<u>*Příklad 4.3*</u>: Funkce $f(x) = \begin{cases} 1\,, & x \in \langle 0, 1\rangle, \\ 0\,, & x \in \langle -1, 0) \end{cases}$

je omezená a Riemannovsky integrovatelná. Není však Newtonovsky integrovatelná. Kdyby totiž existovala primitivní funkce F k funkci f, pak funkce F musí být spojitá a muselo by platit $F(x) = \begin{cases} x + c\,, & x \in \langle 0, 1\rangle, \\ c\,, & x \in \langle -1, 0), \end{cases}$ $c \in \mathbb{R}$. Funkce F však není diferencovatelná v bodě 0, tedy F není primitivní k f.

Integrovatelnost funkce (v Riemannově smyslu) je vlastnost, která se nemění při změně funkce v konečně mnoha bodech, tj.: nechť f, g jsou definovány na $\langle a, b\rangle$, $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ a g se liší od f v konečně mnoha bodech intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom $g \in R(\langle a, b\rangle)$ a platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx.$$

Věta 4.1 : (výpočet Riemannova integrálu)
Nechť $f \in \mathcal{R}(\langle a, b\rangle)$ a nechť existuje primitivní funkce F k funkci f na $\langle a, b\rangle$, tj. $F'(x) = f(x)\,,\ x \in \langle a, b\rangle$. Potom $f \in \mathcal{N}(\langle a, b\rangle)$ (f má Newtonův integrál na $\langle a, b\rangle$) a platí

$$(\mathcal{N}) \int_a^b f(x)\,dx = (\mathcal{R}) \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Definice 4.4 : (míra množiny)
Omezená množina $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ se nazývá **měřitelná**, je-li funkce $f(\mathbf{x}) \equiv 1$ integrovatelná na Ω. Hodnota integrálu

$$\operatorname{meas}(\Omega) = \int_\Omega 1\,d\mathbf{x}$$

se nazývá **míra množiny** Ω (**Jordanova míra**).
Množina Ω, pro níž platí $\operatorname{meas}(\Omega) = 0$, se nazývá **množina míry nula**.

Příklad 4.4 :

1) Konečná množina a omezená spojitá křivka mají dvourozměrnou i trojrozměrnou míru nula. Regulární plocha má trojrozměrnou míru nula.

2) Nechť $\Omega = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, potom $\int_\Omega 1\,d\mathbf{x} = 0\,.$

Zde vidíme, že i míra nekonečné spočetné množiny může být nula. V příkladu (4.1) (Dirichletova funkce) jsme však ukázali nekonečnou spočetnou množinu, která je neměřitelná (v Jordanově smyslu). Tento problém řeší Lebesgueova míra.

Definice 4.5 : (nulová funkce) Jestliže se f liší od nulové funkce na množině míry nula, řekneme, že f je **skoro všude** (ve smyslu Jordanovy míry) nulová. Jinak řečeno

$$\int_\Omega |f(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad f = 0 \quad \text{s.v.}$$

4.2 Metody výpočtu dvojných a trojných integrálů

Dvojné a trojné integrály počítáme analyticky tak, že je převedeme na tzv. **dvojnásobné a trojnásobné integrály**, jejichž výpočet provedeme pomocí známých metod užívaných pro integrály z funkcí jedné proměnné.

Příklady

Věta 4.2 : (Fubiniova věta pro obdélník)
Nechť $f \in \mathcal{R}(Q),\ Q = \langle a,b\rangle \times \langle c,d\rangle$. Když $f(x,y) \in \mathcal{R}(\langle a,b\rangle)$ pro každé $y \in \langle c,d\rangle$, potom platí

$$\iint\limits_Q f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_a^b f(x,y)\,dx\right) dy\,.$$

Když $f(x,y) \in \mathcal{R}(\langle c,d\rangle)$ pro každé $x \in \langle a,b\rangle$, pak platí

$$\iint\limits_Q f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,dy\right) dx\,.$$

<u>Důkaz</u> : Vyplývá z uzávorkování integrálního součtu

$$\begin{aligned}J(f,D) &= \sum_{k=0}^{s-1}\Big(\sum_{j=0}^{r-1} f(\xi_j,\eta_k)\Delta x_j\Big)\Delta y_k \\ &= \sum_{j=0}^{r-1}\sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_j,\eta_k)\Delta x_j\Delta y_k = \sum_{j=0}^{r-1}\Big(\sum_{k=0}^{s-1} f(\xi_j,\eta_k)\Delta y_k\Big)\Delta x_j\end{aligned}$$

a z předpokladů integrovatelnosti.

Dvojný integrál jsme převedli na dvojnásobný a podobně jako u vztahu dvojné a dvojnásobné limity (viz věta 1.2) musí "vnitřní limita" existovat, aby nastala rovnost.

<u>*Příklad 4.5*</u> : $Q = \langle 0,1\rangle \times \langle 1,3\rangle$. Vypočtěte

$$I = \iint\limits_Q x^y\,dxdy\,.$$

Buď

$$I = \int\limits_1^3\left(\int\limits_0^1 x^y\,dx\right)dy = \int\limits_1^3\left[\frac{x^{y+1}}{y+1}\right]_0^1 dy = \int\limits_1^3 \frac{1}{y+1}\,dy = \ln 2$$

nebo

$$I = \int\limits_0^1\left(\int\limits_1^3 x^y\,dy\right)dx = \int\limits_0^1\left[\frac{1}{\ln x}\mathrm{e}^{y\ln x}\right]_1^3 dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{\ln x}(\mathrm{e}^{3\ln x} - \mathrm{e}^{\ln x})\,dx.$$

V druhém případě nelze stanovit primitivní funkci pomocí konečného počtu elementárních funkcí.

Věta 4.3 : (Fubiniova věta pro elementární oblast $\Omega \subset \mathbb{R}^2$)
(i) Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, kde

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$$

je tzv. **elementární oblast** určená grafy funkcí $y = y_1(x)$, $y = y_2(x),\ x \in \langle a, b\rangle$. Potom platí

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_a^b \left(\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\, dy \right) dx,$$

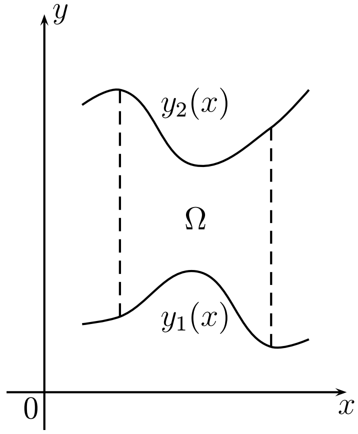
pokud vnitřní integrál existuje pro každé $x \in \langle a, b\rangle$.
(ii) Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, kde elementární oblast

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$$

je určena grafy funkcí $x = x_1(y)$, $x = x_2(y),\ y \in \langle c, d\rangle$. Potom platí

$$\iint\limits_{\Omega} f(x, y)\, dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\, dx \right) dy,$$

pokud vnitřní integrál existuje pro každé $y \in \langle c, d\rangle$.



Důkaz spočívá v převodu integrace přes Ω na integraci přes obdélník Q (obsahující množinu Ω) ve smyslu definice (4.2), část (iii) a následném použití věty (4.2).

Příklad 4.6 : Množina Ω je zadána nerovnostmi $0 \le x \le 1$, $x \le y \le \sqrt{x}$ nebo $0 \le y \le 1$, $y^2 \le x \le y$. Vypočtěte integrál $I = \iint\limits_{\Omega} xy\, dxdy$.

$$I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_x^{\sqrt{x}} xy\, dy \right) dx \quad\Downarrow\quad \int\limits_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_x^{\sqrt{x}} dx \quad\Downarrow\quad \int\limits_0^1 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{2}\right) dx \quad\Downarrow\quad \left[\frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

$$I = \int\limits_0^1 \left(\int\limits_{y^2}^{y} xy\, dx \right) dy \quad\Downarrow\quad \int\limits_0^1 \left[\frac{yx^2}{2}\right]_{y^2}^{y} dy \quad\Downarrow\quad \int\limits_0^1 \left(\frac{y^3}{2} - \frac{y^5}{2}\right) dy \quad\Downarrow\quad \left[\frac{y^4}{8} - \frac{y^6}{12}\right]_0^1 = \frac{1}{24}$$

Věta 4.4 : (Substituce v dvojném integrálu – transformace souřadnic ve dvojném integrálu)
Nechť $\Omega_{r\varphi} \subset \mathbb{R}^2$ je otevřená měřitelná množina a nechť funkce $x = x(r,\varphi)$, $y = y(r,\varphi)$ určují prosté regulární zobrazení $\mathbf{f}$ množiny $\Omega_{r\varphi}$ na množinu $\Omega_{xy} \subset \mathbb{R}^2$. Nechť dále máme funkci $f : \Omega_{xy} \to \mathbb{R}$, která je spojitá na Ω_{xy}. Potom platí

$$\iint\limits_{\Omega_{xy}} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{\Omega_{r\varphi}} f(x(r,\varphi), y(r,\varphi))\, |\det J_{\mathbf{f}}|\, drd\varphi,$$

kde $J_{\mathbf{f}} = \frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}$ je Jacobiova matice zobrazení $\mathbf{f}$ (viz definice 3.2).

Řadu oblastí v rovině můžeme vyjádřit jako konečné sjednocení elementárních oblastí: např. pokud Ω rozdělíme na čtyři elementární oblasti: $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Omega_4$. Potom symbolicky

$$\int\limits_{\Omega} = \int\limits_{\Omega_1} + \int\limits_{\Omega_2} + \int\limits_{\Omega_3} + \int\limits_{\Omega_4} .$$

Formálně $dxdy$ nahradíme výrazem $r\, drd\varphi$.

Příklad 4.7 : Převod dvojného integrálu funkce $f(x,y)$ přes Ω_{xy} do polárních souřadnic

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad r > 0, \;\; 0 \le \varphi < 2\pi\,.$$

Zde

$$J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}; \quad |\det J_{\mathbf{f}}| = |r| = r.$$

Množina Ω_{xy} je obrazem nějaké množiny $\Omega_{r\varphi}$ (kterou musíme určit). Takže

$$\iint\limits_{\Omega_{xy}} f(x,y)\, dxdy = \iint\limits_{\Omega_{r\varphi}} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\, drd\varphi\,.$$

Příklad 4.8 : Vypočtěte

$$I = \iint\limits_{\Omega} \sin\sqrt{x^2+y^2}\, dxdy,$$

kde $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; \pi^2 < x^2+y^2 < 4\pi^2\}$.

Vzhledem ke geometrii oblasti Ω (mezikruží) užijeme substituci do polárních souřadnic $\mathbf{f} :\; x = r\cos\varphi\,,\; y = r\sin\varphi\,.$ Zde snadno zjistíme, že Ω je obrazem množiny

$$\Omega_{r\varphi} = \{(r,\varphi) \in \mathbb{R}^2 : \pi < r < 2\pi,\; 0 \le \varphi < 2\pi\}\,, \quad \text{potom}$$

$$I = \iint\limits_{\Omega_{r\varphi}} r\sin r\, drd\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \underbrace{\left(\int\limits_{\pi}^{2\pi} r\sin r\, dr \right)}_{\text{per partes}} d\varphi = -6\pi^2\,.$$

Věta 4.5 : (Fubiniova věta v $\mathbb{R}^3$)
Nechť $f \in \mathcal{R}(\Omega)$, kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ (x,y) \in S\,;\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$, je tzv. **elementární oblast** určená grafy funkcí $z = z_1(x,y)$, $z = z_2(x,y)$, $(x,y) \in S$, kde S je průmět množiny Ω do roviny xy. Potom platí

$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\, dxdydz = \iint\limits_{S} \left(\int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dxdy,$$

pokud vnitřní integrál existuje pro každé $(x,y) \in S$.

Ve větě 4.3 jsme uvedli dvě možnosti převodu dvojného integrálu na dvojnásobný. Tyto možnosti byly dány dvěma možnostmi promítání množiny Ω do souřadnicových os. U trojného integrálu máme tři možnosti promítání oblasti Ω do tří souřadnicových rovin, v tvrzení věty je uvedena pouze jedna z nich.

Příklad 4.9 : Vypočtěte

$$I = \iiint\limits_{\Omega} x\, dxdydz,$$

kde Ω je oblast nacházející se v 1. oktantu omezená paraboloidem $z = x^2 + y^2$ a rovinou $z = 2$. Průmětem Ω do roviny xy je čtvrtkruh S.

Představíme si řezy oblasti Ω rovnoběžné s rovinou xz. Pro každé $(x,y) \in S$ se nejdříve integruje od $z = x^2 + y^2$ do $z = 2$ (vnitřní integrace). Získaný dvojný integrál přes S se převede na dvojnásobný, v němž se nejdříve integruje podle y od $y = 0$ do $y = \sqrt{2 - x^2}$, a nakonec se integruje podle x od $x = 0$ do $x = \sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\Omega} x\, dxdydz &= \iint\limits_{S} \left(\int\limits_{x^2+y^2}^{2} x\, dz \right) dxdy \\
&= \iint\limits_{S} x(2 - x^2 - y^2)\, dxdy \\
&= \int\limits_{0}^{\sqrt{2}} \left(\int\limits_{0}^{\sqrt{2-x^2}} (2x - x^3 - xy^2)\, dy \right) dx = \frac{8\sqrt{2}}{15}\,.
\end{aligned}$$

Výpočet integrálu přes S se opírá o větu (4.3).

Věta 4.6 : (O substituci v trojném integrálu – transformace souřadnic v trojném integrál)
Nechť $\Omega_r \subset \mathbb{R}^3$ je otevřená měřitelná množina a nechť funkce $x = x(r,\varphi,\vartheta)$, $y = y(r,\varphi,\vartheta)$, $z = z(r,\varphi,\vartheta)$ určují prosté regulární zobrazení $\mathbf{f}$ zobrazující Ω_r na množinu $\Omega_x \subset \mathbb{R}^3$. Nechť dále máme funkci $f : \Omega_x \to \mathbb{R}$, která je spojitá na Ω_x. Potom platí

$$\iiint\limits_{\Omega_x} f(x,y,z)\, dxdydz$$
$$= \iiint\limits_{\Omega_r} f(x(r,\varphi,\vartheta), y(r,\varphi,\vartheta), z(r,\varphi,\vartheta))\, |\det J_{\mathbf{f}}|\, drd\varphi d\vartheta\,,$$

kde $J_{\mathbf{f}} = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\varphi,\vartheta)}$ je Jacobiova matice zobrazení $\mathbf{f}$.

Princip důkazu je stejný jako v případě věty (4.4) pro dvojný integrál.

<u>*Příklad 4.10*</u> : Trojný integrál v cylindrických souřadnicích. Mějme zobrazení $\mathbf{f} : \Omega_r \to \Omega_x$ dané transformačními rovnicemi

$$x = r\cos\varphi\,, \quad y = r\sin\varphi\,, \quad z = z\,; \quad r > 0,\ \ 0 \le \varphi < 2\pi\,.$$

Zde $|\det J_{\mathbf{f}}| = r$. Takže

$$\iiint\limits_{\Omega_x} g(x,y,z)\, dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_r} g(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)\; r\; drd\varphi dz\,.$$

<u>*Příklad 4.11*</u> : Vypočtěte $\iiint\limits_{\Omega} z\sqrt{x^2+y^2}\, dxdydz$, kde $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \le x \le 2\,;\ 0 \le y \le \sqrt{2x - x^2}\,;\ 0 \le z \le a\}$. Vzhledem k tvaru oblasti Ω (část válce o výšce a) provedeme substituci do cylindrických souřadnic. Válcová plocha $x^2+y^2 = 2x$ má v cylindrických souřadnicích rovnici $r = 2\cos\varphi$, neboť po dosazení do rovnice válcové plochy dostáváme

$$r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = 2r\cos\varphi\,.$$

Průmět Ω do roviny xy je čtvrtkružnice. Takže $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,

$r \in (0, 2\cos\varphi)$, $z \in (0, a)$. Tedy

$$\iiint\limits_{\Omega_x} z\sqrt{x^2+y^2}\ dxdydz = \iiint\limits_{\Omega_r} z \cdot r \cdot r\ drd\varphi dz =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\cos\varphi} \int\limits_0^{a} z \cdot r^2\ dzdrd\varphi = \tfrac{1}{2}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\cos\varphi} r^2\ dr\ d\varphi =$$

$$= \tfrac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\varphi\ d\varphi = \tfrac{4}{3}a^2 \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\ d\varphi =$$

$$= \tfrac{4}{3}a^2 \left(\sin\varphi - \tfrac{1}{3}\sin^3\varphi\right)_0^{\frac{\pi}{2}} = \tfrac{8}{9}a^2\,.$$

Příklad 4.12: (Trojný integrál ve sférických souřadnicích.) Mějme zobrazení $\mathbf{f} : \Omega_r \to \Omega_x$ dané transformačními rovnicemi $x = r\cos\varphi\cos\vartheta\,,\ y = r\sin\varphi\cos\vartheta\,,\ z = r\sin\vartheta\,,$

$r > 0\,,\ 0 \le \varphi < 2\pi\,,\ -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}\,.$ Zde $|\det J_{\mathbf{f}}| = r^2\cos\vartheta\,.$ Takže

$$\iiint\limits_{\Omega_x} f(x,y,z)\ dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_{\Omega_r} f(r\cos\varphi\sin\vartheta, r\sin\varphi\sin\vartheta\,, r\cos\vartheta)\, r^2\cos\vartheta\ drd\varphi d\vartheta\,.$$

Příklad 4.13: Vypočtěte $I = \iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\ dxdydz$, kde Ω je "horní" polovina koule $x^2+y^2+z^2 \le R^2$.

$$\begin{aligned} I &= \int\limits_0^{R} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{2\pi} r^2 \cdot \cos^2\vartheta \cdot r^2\cos\vartheta\ d\varphi\ d\vartheta\ dr \\ &= 2\pi \int\limits_0^{R} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} r^4(1-\sin^2\vartheta)\cos\vartheta\ d\vartheta\ dr \\ &= 2\pi \int\limits_0^{R} r^4 \left(\sin\vartheta - \tfrac{1}{3}\sin^3\vartheta\right)_0^{\frac{\pi}{2}}\ dr = \tfrac{4}{15}\pi\ R^5\,. \end{aligned}$$

4.3 Užitečné vzorce

Na základě integrálních součtů lze doplnit vzorce z odst. 8.5, MA1:

Míra oblasti Ω (integrál z charakteristické funkce)

$$\begin{aligned} \operatorname{meas}(\Omega) &= \iint\limits_{\Omega} 1\ dxdy\ ; \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2 \quad \text{(obsah)}, \\ \operatorname{meas}(\Omega) &= \iiint\limits_{\Omega} 1\ dxdydz\ ; \quad \Omega \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{(objem)}. \end{aligned}$$

Celková hmotnost tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:
Nechť $\varrho = \varrho(x,y,z)$ je funkce hustoty tělesa Ω, potom hmotnost tělesa je dána vzorcem

$$m = \iiint\limits_{\Omega} \varrho(x,y,z)\; dxdydz\,.$$

Celkový náboj tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:
Nechť funkce $\varrho = \varrho(x,y,z)$ popisuje hustotu rozložení náboje v Ω, potom celkový náboj tělesa je dán vzorcem

$$Q = \iiint\limits_{\Omega} \varrho(x,y,z)\; dxdydz\,.$$

Statické momenty rovinné oblasti $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ vzhledem k souřadnicovým osám:

$$M_x = \iint\limits_{\Omega} y\;\, \varrho(x,y)\; dxdy\,, \quad M_y = \iint\limits_{\Omega} x\;\, \varrho(x,y)\; dxdy\,.$$

Statické momenty tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vzhledem k souřadnicovým rovinám:

$$\begin{aligned} M_{xy} &= \iiint\limits_{\Omega} z\;\, \varrho(x,y,z)\; dxdydz\,,\\ M_{yz} &= \iiint\limits_{\Omega} x\;\, \varrho(x,y,z)\; dxdydz\,,\\ M_{xz} &= \iiint\limits_{\Omega} y\;\, \varrho(x,y,z)\; dxdydz\,, \end{aligned}$$

kde $\varrho = \varrho(x,y)$, resp. $\varrho = \varrho(x,y,z)$ je hustota tělesa v bodě $(x,y) \in \Omega$, resp. $(x,y,z) \in \Omega$.

Moment setrvačnosti tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ vzhledem k souřadnicovým osám:

$$\begin{aligned} J_x &= \iiint\limits_{\Omega} (y^2+z^2)\;\, \varrho(x,y,z)\; dxdydz\,,\\ J_y &= \iiint\limits_{\Omega} (x^2+z^2)\;\, \varrho(x,y,z)\; dxdydz\,,\\ J_z &= \iiint\limits_{\Omega} (x^2+y^2)\;\, \varrho(x,y,z)\; dxdydz\,, \end{aligned}$$

kde $\varrho = \varrho(x,y,z)$ je hustota tělesa v bodě $(x,y,z) \in \Omega$.

Souřadnice těžiště $T = (x_T, y_T, z_T)$ tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$:

$$x_T = \frac{M_{yz}}{m}\,, \quad y_T = \frac{M_{xz}}{m}\,, \quad z_T = \frac{M_{xy}}{m}\,.$$

<u>*Příklad 4.14*</u>: Vypočtěte souřadnice těžiště tělesa omezeného plochami $x = 0,\ z = 0,\ y = 1,\ y = 3,\ x + 2z = 3$, jestliže hustota tělesa se v každém bodě rovná 1.

$$m = \iiint\limits_{\Omega} dxdydz = \int\limits_0^3 \int\limits_1^3 \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} dzdydx = \int\limits_0^3 \int\limits_1^3 \tfrac{3-x}{2}\, dydx =$$
$$= \int\limits_0^3 (3-x)\, dx = \left[3x - \tfrac{1}{2}x^2\right]_0^3 = \tfrac{9}{2}\,.$$

$$x_T = \tfrac{2}{9} \iiint\limits_{\Omega} x\ dxdydz = \tfrac{2}{9} \int\limits_0^3 \int\limits_1^3 \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} x\ dzdydx =$$
$$= \tfrac{2}{9} \int\limits_0^3 \int\limits_1^3 x\tfrac{3-x}{2}\, dydx = \tfrac{2}{9} \int\limits_0^3 x(3-x)\, dx = \tfrac{2}{9}\left[\tfrac{3}{2}x^2 - \tfrac{1}{3}x^3\right]_0^3 = 1\,.$$

$$y_T = \tfrac{2}{9} \iiint\limits_{\Omega} y\ dxdydz = \tfrac{2}{9} \int\limits_0^3 \int\limits_1^3 \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} y\ dzdydx =$$
$$= \tfrac{1}{9} \int\limits_0^3 \int\limits_1^3 y(3-x)\, dydx = \tfrac{4}{9} \int\limits_0^3 (3-x)\, dx = \tfrac{4}{9}\left[3x - \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = 2\,.$$

$$z_T = \tfrac{2}{9} \iiint\limits_{\Omega} z\ dxdydz = \tfrac{2}{9} \int\limits_0^3 \int\limits_1^3 \int\limits_0^{\frac{3-x}{2}} z\ dzdydx =$$
$$= \tfrac{2}{9} \int\limits_0^3 \int\limits_1^3 \tfrac{(3-x)^2}{8}\, dydx = \tfrac{1}{18}\left[\frac{-(3-x)^3}{3}\right]_0^3 = \tfrac{1}{2}\,.$$

Příklady

5 Parciální diferenciální rovnice

Při popisu reálných dějů vyvíjejících se v čase t a bodě prostoru $[x, y, z] \in \mathbb{R}^3$ budeme uvažovat funkci $u = u(x, y, z, t)$ (například teplotu materiálu), která tento děj popisuje. Pro rychlost změny děje v čase a prostoru potřebujeme znát parciální derivace funkce u: $\frac{\partial u}{\partial t} = u_t$, $\frac{\partial u}{\partial x} = u_x$, podobně (u_y, u_z), i parciální derivace vyšších řádů $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = u_{tx}$, $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = u_{xxxx}$. Rovnice, ve kterých se vyskytují parciální derivace se nazývají **parciální diferenciální rovnice**, např. $u_t + u_{xx} = 0$.

5.1 Základní modely

5.1.1 Transportní rovnice

Budeme uvažovat tekutinu pohybující se rychlostí v v tenké rovné trubičce (ztotožníme ji s osou x), jejíž kolmý průřez má plochu velikosti S. Funkce $u = u(x, t)$ bude nyní popisovat hustotu znečištění v bodě x a v čase t. Potom množství nečistot mezi body x_1 a x_2 v čase t je dáno integrálem $\int\limits_{x_1}^{x_2} u(x, t)\, S\, dx$ a podobně množství nečistot, které proteče plochou S v bodě x během časového intervalu (t_1, t_2) je popsáno integrálem $\int\limits_{t_1}^{t_2} u(x, t)\, v\, S\, dt$.

Předpokládáme, že v trubičce žádné nečistoty nevznikají ani nezanikají.

Potom množství nečistot v intervalu (x_1, x_2) v čase t_2 se rovná množství nečistot v intervalu (x_1, x_2) v čase t_1 plus množství nečistot, které proteče plochou S v bodě x_1 během časového intervalu (t_1, t_2) minus množství nečistot, které proteče plochou S v bodě x_2 během časového intervalu (t_1, t_2), neboli

Co vteče má znaménko plus, co vyteče minus.

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} u(x, t_2) S\, dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} u(x, t_1) S\, dx + \int\limits_{t_1}^{t_2} u(x_1, t) v S\, dt - \int\limits_{t_1}^{t_2} u(x_2, t) v S\, dt.$$

Bilanční rovnice.

Pro jednoduchost budeme uvažovat, že velikost řezu S je všude konstantní a zároveň je konstantní i rychlost v tekutiny. Potom platí

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} [u(x, t_2) - u(x, t_1)]\, dx = v \int\limits_{t_1}^{t_2} [u(x_1, t) - u(x_2, t)]\, dt.$$

Nyní budeme předpokládat, že funkce u má spojité první parciální derivace (změna rychlosti znečištění není skoková), pak ze základní věty matematické analýzy plyne

$$\int_{x_1}^{x_2}\int_{t_1}^{t_2} u_t(x,t)\,dtdx = v\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2} u_x(x,t)\,dxdt.$$

Jestliže budeme předpokládat, že tato rovnice platí pro každý segment (x_1, x_2) a každý časový interval (t_1, t_2), pak v každém bodě $[x,t]$ dostaneme rovnost

$$\boxed{u_t(x,t) - v\,u_x(x,t) = 0},$$

která se nazývá **transportní rovnice** v jedné dimenzi.

5.1.2 Rovnice difuze, rovnice vedení tepla

Máme tenkou tyč (ztožníme s osou x), která má teplotu $T(x,t)$ a předpokládáme, že teplota roste ve směru osy x. Tepelná vodivost materiálu tyče je κ a průřez tyče je S. Teplo $Q(x,t)$ procházející řezem tyče v bodě x a čase t během krátkého časového intervalu dt je dáno vztahem $Q(x,t) = \kappa S\frac{\partial T}{\partial x}(x,t)dt$, podobně $Q(x+\Delta x,t) = \kappa S\frac{\partial T}{\partial x}(x+\Delta x,t)dt$, Δx reprezentuje malý kousek tyče. Použijeme Taylorův rozvoj, pak pro tepelnou energie, která je absorpována v kousku tyče Δx platí

$$\Delta Q = \kappa\,S\left(\frac{\partial T}{\partial x}(x+\Delta x,t) - \frac{\partial T}{\partial x}(x,t)\right)dt \approx \kappa\,S\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t)\Delta x\,dt.$$

Pro tuto změnu tepla však zároveň platí

$$\Delta Q = c\,\Delta m\,dT = c\,\varrho\,\Delta x\,\frac{\partial T}{\partial t}(x,t)\,dt,$$

kde c měrná tepelná kapacita tyče, Δm je hmotnost kousku tyče délky Δx, ϱ je hustota materiálu tyče a dT je malý časový úsek, po který se mění hodnota tepla v tyči. Porovnáním obou výrazů pro změnu tepla v kousku tyče dostaneme

$$\kappa\,S\,\frac{\partial^2 T}{\partial x}(x,t)\Delta x\,dt = c\,\varrho\,\Delta x\,\frac{\partial T}{\partial t}(x,t)\,dt,$$

tedy

$$\kappa\,S\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = c\,\varrho\,\frac{\partial T}{\partial t}(x,t).$$

Označíme $k = \frac{\kappa S}{c\varrho}$ tzv. součinitel teplotní vodivosti, pak **rovnice pro vedení tepla** má tvar

$$\frac{\partial T}{\partial t}(x,t) - k\,\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(x,t) = 0.$$

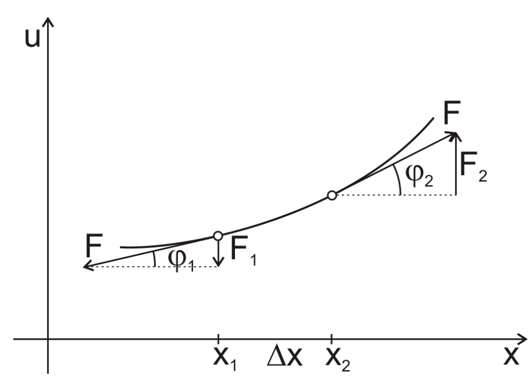
Nechť nyní funkce $u = u(x,t)$ popisuje difuzi látky, potom pro ní platí stejná rovnice jako pro vedení tepla, neboli

$$u_t - u_{xx} = 0.$$

Difuze je proces samovolného rozptylování částic v prostoru.

5.1.3 Vlnová rovnice

Nyní funkce $u = u(x,t)$ bude popisovat strunu, na kterou působí v bodě x_1 síla $\vec{F}_1$ kolmo k ose x. Tato síla vyvolá působení silou $\vec{F}$ v tečném směru ke struně a podle zákona akce a reakce stejně velká opačně orientovaná síla působí na strunu i v bodě x_2 (viz obrázek). Podle druhého Newtova zákona platí pro element struny Δx pohybová rovnice



$$\Delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_2 - F_1,$$

kde $\Delta m = \varrho\,\Delta x$ a ϱ je délková hustota struny. Pro velmi malé výchylky bude platit

$$F_2 - F_1 \approx F(\tan\varphi_2 - \tan\varphi_1) = F\Big(\frac{\partial u}{\partial x}(x_2) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1)\Big).$$

Pomocí Taylorova rozvoje dostaneme

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_2) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_1) \approx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x,$$

tudíž

$$\varrho\Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_2 - F_1 = F\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Delta x.$$

Odtud dostaneme

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\varrho}{F}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Označíme $c = \sqrt{\frac{\varrho}{F}}$, pak c je fázová rychlost vlny šířící se po struně a platí **vlnová rovnice**

$$\boxed{u_{tt}(x,t) - c^2\, u_{xx}(x,t) = 0.}$$

5.2 Metody řešení

Uvažujeme počáteční úlohu s rovnicí vedení tepla

$$u_t(x,t) - k\,u_{xx}(x,t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x)\,,$$

pak řešením této úlohy je funkce

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y)\,\frac{1}{\sqrt{4\pi kt}}\,e^{-\frac{(x-y)^2}{4kt}}\,dy\,.$$

Uvažujeme počáteční úlohu s vlnovou rovnicí

$$u_{tt}(x,t) - c^2\,u_{xx}(x,t) = 0, \quad u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x)\,,$$

pak řešením této úlohy je funkce

$$u(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x+ct) + \varphi(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} \psi(y)\,dy\,.$$

Reference

[1] Jirásek, Čipera, Vacek: Sbírka řešených příkladů z matematiky II, SNTL, Praha 1989

[2] Drábek, Míka: Matematická analýza II, skripta ZČU Plzeň 1996