Obsah

1 Afinní prostor

Svět bodů a vektorů, ve kterém se běžně v matematice pohybujeme, si pojmenujeme afinní prostor. Dříve než si uvedeme jeho definici, zopakujeme si základní pojmy z lineární algebry.

Norský matematik Niels Heinrich Abel (1802-1829).

dokázal neřešitelnost algebraických rovnic 5. a vyšších stupňů pomocí odmocnin. Při tomto důkazu uplatnil ideje teorie grup.

Grupa popisuje koncept symetrie, se kterou se můžeme setkat např. v částicové fyzice, zpracování obrazu nebo při popisu molekul.

Definice 1.1 : (grupa, těleso)
Množina V s operací $+$ (tj. se zobrazením z $V \times V$ do V), zkráceně $(V, +)$, se nazývá **grupa**, jestliže platí:

i) $\forall\, u, v, w \in V\colon (u+v)+w = u+(v+w)\,,$ (asociativita)

ii) $\exists\, o \in V\, \forall\, u \in V\colon u+o = o+u = u\,,$ (neutrální prvek)

iii) $\forall\, u \in V\, \exists\, \widehat{u} \in V : u+\widehat{u} = \widehat{u}+u = o\,.$ (inverzní prvek)

Pokud navíc platí

iv) $\forall\, u, v \in V : u+v = v+u\,,$ (komutativita)

pak hovoříme o **komutativní grupě** nebo **Abelově grupě**.

Množina T s dvěma operacemi $+, \cdot$, zkráceně $(T, +, \cdot)$, se nazývá **těleso**, jestliže platí:

i) $(T, +)$ je komutativní grupa s neutrálním (nulovým) prvkem značeným o,

ii) $(T \setminus \{o\}, \cdot)$ je grupa s neutrálním (jednotkovým) prvkem značeným 1,

iii) $\forall\, a, b, c \in T$: (distributivita)

$$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c, \quad c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b,$$

Jestliže $(T \setminus \{0\}, \cdot)$ je komutativní grupa, pak hovoříme o **komutativním tělese** .

Například násobení matic není komutativní. Také všechny transformace Rubikovy kostky tvoří nekomutativní grupu.

Příklad 1.1 :

1. Množina $(\mathbb{Z}, +)$ s neutrálním prvkem 0 je Abelova grupa.
2. Množina $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ s nulovým prvkem 0 a jednotkovým prvkem 1 tvoří těleso.

Cvičení 1.1 :

a) Dokažte, že množina $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ tvoří Abelovu grupu.

b) Dokažte, že množina $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ tvoří komutativní těleso.

Definice 1.2 : (lineární prostor)
Nechť $(V,+)$ je komutativní grupa a T je těleso. Nechť operace ”$\cdot$ ”z $T \times V$ do V : $(a,u) \to a \cdot u$ splňuje:

i) $\forall\, a,b \in T\, \forall\, u \in V\, :\, a \cdot (b \cdot u) = (a \cdot b) \cdot u$ (asociativita)

ii) $\forall\, a,b \in T\, \forall\, u \in V\, :\, (a+b) \cdot u = a \cdot u + b \cdot u,$
$\forall\, a \in T\, \forall\, u,v \in V\, :\, a \cdot (u+v) = a \cdot u + a \cdot v$
(distributivita)

iii) $\forall\, u \in V,\ 1 \in T : 1 \cdot u = u$ (absorpce jednotky).

Potom množina V s operacemi $+, \cdot$ se nazývá **lineární (vektorový) prostor** nad tělesem T. Prvky množiny V se nazývají **vektory**, (prvky tělesa T se nazývají **skaláry**). Vektory budeme značit $\vec{u}$.

Prostor všech spojitých funkcí je příkladem vektorového prostoru.

Příklady

Příklad 1.2 : Množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel tvoří vektorový prostor.

Množina všech polynomů tvoří vektorový prostor.

K nejznámějším příkladům vektorů patří vektory síly, rychlosti, zrychlení nebo hybnosti.

Definice 1.3 : (lineární závislost a nezávislost)
Nechť V je lineární prostor nad tělesem T. Nechť vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \in V$, konstanty $a_1, a_2, \ldots, a_n \in T$, $n \in \mathbb{N}$, pak **lineární kombinací** vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ nazýváme vektor

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_n\vec{u}_n\,.$$

Jestliže

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \cdots + a_n\vec{u}_n = \vec{o} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0\,,$$

($\vec{o}$ je nulový vektor) pak říkáme, že vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ jsou **lineárně nezávislé**, v opačném případě jsou **lineárně závislé**.

Funkce 1, $\sin x$, $\cos x$ jsou lineárně nezávislé, funkce 1, x, $3+x$ jsou lineárně závislé.

Příklad 1.3 :
Vektory $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{v} = (2,1)$ z prostoru všech uspořádaných dvojic jsou lineárně nezávislé.

Tři vektory ležící v rovině jsou již nutně lineárně závislé.

Cvičení 1.2 :
Dokažte, že vektory $\vec{u} = (1,0)$, $\vec{v} = (2,3)$, $\vec{w} = (1,-1)$ jsou lineárně závislé.

Existence báze vektorového prostoru je důsledkem **axiomu výběru**:
Jestliže $\mathcal{M}$ je množina neprázdných množin, potom existuje zobrazení f s definičním oborem $\mathcal{M}$, které každé množině $A \in \mathcal{M}$ přiřadí prvek množiny A, tedy $f(A) \in A$.
Axiom výběru zformuloval v roce 1904 německý matematik Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1871-1953).

Definice 1.4 : (báze a dimenze prostoru)
Vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n \in V$, $n \in \mathbb{N}$, tvoří **bázi** lineárního prostoru V nad tělesem T, jestliže

i) vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ jsou lineárně nezávislé,

ii) $\forall\, u \in V$ jsou vektory $\vec{u}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ lineárně závislé,

tj. existují $a_1, a_2, \ldots, a_n \in T$: $\vec{u} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \cdots + a_n\vec{e}_n$.
Čísla $a_1, a_2, \ldots, a_n$ nazýváme **souřadnice** vektoru $\vec{u}$ vzhledem k bázi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$. Píšeme $\vec{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$.
Číslo $n \in \mathbb{N}$, neboli počet prvků báze, nazýváme **dimenze** prostoru V. Píšeme $\dim V = n$. Pokud neexistuje konečná báze prostoru V, pak píšeme $\dim V = \infty$.

Příklad 1.4 :

Prostor $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ všech uspořádaných trojic reálných čísel je vektorový prostor dimenze 3.

Cvičení 1.3 :

Prostor $(\mathbb{C}([0,1]), +, \cdot)$ všech spojitých funkcí na intervalu $[0,1]$ s operacemi sčítání funkcí a násobení funkcí reálným číslem je vektorový prostor s nekonečnou dimenzí.

Definice 1.5 : (norma, skalární součin)
Nechť V je vektorový prostor dimenze n nad tělesem reálných čísel $\mathbb{R}$ a $\vec{u} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V$, potom číslo

$$\|\vec{u}\,\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$$

nazveme **normou** vektoru $\vec{u}$.
Nechť $\vec{v} = (b_1, b_2, \ldots, b_n) \in V$, potom číslo

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

nazveme **skalární součin** vektorů $\vec{u}$, $\vec{v}$.

Pro $n = 2$ je
$\|\vec{u}\,\| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \geq 0$,
$\|\vec{u}\,\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = (0,0)$.
Platí $\|a\vec{u}\,\| = |a|\|\vec{u}\,\|$,
$\|\vec{u} + \vec{v}\,\| = \sqrt{(a_1+b_1)^2 + (a_2+b_2)^2} \leq \sqrt{a_1^2+a_2^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2} = \|\vec{u}\,\| + \|\vec{v}\,\|$
a $\vec{u} \cdot \vec{v} = a_1b_1 + a_2b_2 \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \|\vec{u}\,\| \cdot \|\vec{v}\,\|$.

Cvičení 1.4 :

Spočítejte normu vektoru $\vec{u} = (1, -1, 3)$ a skalární součin vektorů $\vec{u} \cdot \vec{v}$, pokud $\vec{v} = (-2, 1, 1)$.

V prostoru nekonečné dimenze jsou předchozí definice normy a skalárního součinu nepoužitelné. Proto zavádíme jejich obecnou formu.

Definice 1.6 : (zobecnění normy a skalárního součinu)
Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$. Zobrazení $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ splňující:

i) $\forall \vec{u} \in V : \|\vec{u}\| \geq 0$ a $\|\vec{u}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$,

ii) $\forall \vec{u} \in V, \forall a \in \mathbb{R} : \|a \cdot \vec{u}\| = |a| \cdot \|\vec{u}\|$,

iii) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (trojúhelníková nerovnost),

se nazývá **norma** na prostoru V. Říkáme, že V je normovaný lineární prostor. Číslo $d = \|\vec{u} - \vec{v}\|$ nazýváme **vzdálenost** vektorů $\vec{u}, \vec{v}$.

Zobrazení $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{R}$ splňující

i) $\forall \vec{u}, \vec{v} \in V : (\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{v}, \vec{u})$, (komutativita)

ii) $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, \forall a, b \in \mathbb{R} : (a\vec{u} + b\vec{v}, \vec{w}) = a(\vec{u}, \vec{w}) + b(\vec{v}, \vec{w})$, (linearita)

iii) $\forall \vec{u} \in V : (\vec{u}, \vec{u}) \geq 0, \quad (\vec{u}, \vec{u}) = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$, (pozitivní definitnost)

se nazývá **skalární součin** na prostoru V. Říkáme, že V je vektorový prostor se skalárním součinem.

Při zobecnění pojmů norma a skalární součin jsme se inspirovali základními vlastnostmi, které splňují tyto veličiny v konečné dimenzi.

V prostoru $\mathbb{R}^2$ platí pro vzdálenost vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2)$ vztah $d = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2}$.

Jestliže uvažujeme $(\cdot,\cdot) : V \times V \to \mathbb{C}$, (zobrazení do komplexních čísel), pak

$$(\vec{u}, \vec{v}) = \overline{(\vec{v}, \vec{u})},$$

(komplexně sdružené číslo).

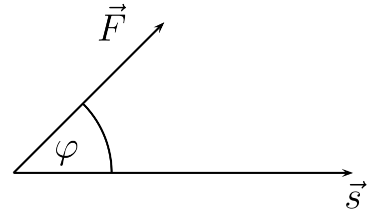
Příklad 1.5 : Množina $\mathbb{L}_2([0,1]) = \{f : \int_0^1 |f(x)|^2\, dx < \infty\}$ je nekonečně dimenzionální vektorový prostor s normou $\|f\| = \left(\int_0^1 |f|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$. Zobrazení $(f, g) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx$ je skalární součin na prostoru $\mathbb{L}_2([0,1])$.

Cvičení 1.5 : Dokažte, že $\mathbb{L}_1([0,1]) = \{f : \int_0^1 |f| dx < \infty\}$ je normovaný lineární prostor s normou $\|f\| = \int_0^1 |f|\, dx$.

Zobrazení $(f, g) = \int_0^1 f(x) \cdot g(x)\, dx$ však není skalárním součinem na tomto prostoru.

Platí $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \in \mathbb{L}_1([0,1])$, ale $\frac{1}{\sqrt{x}} \notin \mathbb{L}_2([0,1])$.

Práce vykonaná silou $\vec{F}$



$A = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{s}\| \cdot \cos\varphi$.

Poznámka 1.1: S pojmem skalárního součinu se velice často setkáme ve fyzice. Například, působí-li síla $\vec{F}$ po přímočaré dráze popsané směrem $\vec{s}$, pak vykoná práci $A = \vec{F} \cdot \vec{s} = \|\vec{F}\| \cdot \|\vec{s}\| \cdot \cos\varphi$, kde φ je úhel, který svírají vektory $\vec{F}$ a $\vec{s}$.

Věta 1.1 : (Vztah skalárního součinu a normy)
Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem, potom předpisem $\|\vec{u}\| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}$, $\vec{u} \in V$ je definovaná norma na prostoru V (norma indukovaná skalárním součinem) a platí **Schwarzova nerovnost**:

$$\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V : \ |(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \,. \tag{1.1}$$

Důkaz : Dokážeme pouze Schwarzovu nerovnost.

Z pozitivní definitnosti skalárního součinu vyplývá

$\forall\, a, b \in \mathbb{R}\, \forall\, \vec{u}, \vec{v} \in V$:

$0 \leq (a\vec{u} + b\vec{v}, a\vec{u} + b\vec{v}) = a^2(\vec{u}, \vec{u}) + 2ab(\vec{u}, \vec{v}) + b^2(\vec{v}, \vec{v})$.

Položíme-li $b = \begin{cases} \frac{(\vec{u},\vec{v})}{|(\vec{u},\vec{v})|} & \text{pro} \quad (\vec{u}, \vec{v}) \neq 0 \\ 1 & \text{pro} \quad (\vec{u}, \vec{v}) = 0 \end{cases}$, pak dostaneme

$0 \leq a^2\|\vec{u}\|^2 + 2a|(\vec{u}, \vec{v})| + \|\vec{v}\|^2$. Z poslední nerovnosti vyplývá, že uvedený kvadratický výraz má nekladný diskriminant, tedy $4|(\vec{u}, \vec{v})|^2 - 4\|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \leq 0$ a $|(\vec{u}, \vec{v})| \leq \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2$.

Cvičení 1.6 :

1. Rozhodněte, kdy ve Schwarzově nerovnosti nastává rovnost. [Pro lineárně závislé vektory]
2. Dokažte, že Schwarzova nerovnost je ekvivalentní s trojúhelníkovou nerovností. [$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 \Leftrightarrow (\vec{u}+\vec{v}, \vec{u}+\vec{v}) \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow (\vec{u}, \vec{u}) + 2(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{v}) \leq \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| + \|\vec{v}\|^2 \Leftrightarrow 2(\vec{u}, \vec{v}) \leq 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$.]

Nechť $(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|$, pak $(a\vec{u} - \vec{v}, a\vec{u} - \vec{v}) = (a\|\vec{u}\| - \|\vec{v}\|)^2$ a volbou $a = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{u}\|}$ dostaneme $a\vec{u} - \vec{v} = 0$, tedy vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$ jsou lineárně závislé.

Definice 1.7 : (úhel dvou vektorů)
Nechť V je vektorový prostor se skalárním součinem a normou $\|\vec{u}\,\| = \sqrt{(\vec{u}, \vec{u})}$, $\vec{u} \in V$. Číslo $\varphi \in [0, \pi]$ nazveme **úhlem** dvou vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in V$, jestliže platí

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{u}, \vec{v})}{\|\vec{u}\,\| \cdot \|\vec{v}\,\|} \,. \tag{1.2}$$

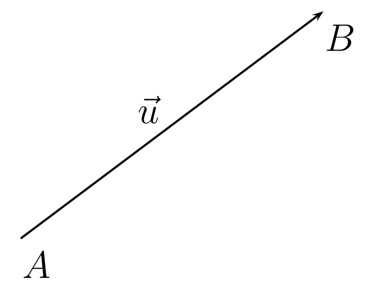
Jestliže $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (tj. $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$), pak říkáme, že vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou **ortogonální**, značíme $\vec{u} \perp \vec{v}$. Pokud navíc $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, pak říkáme, že vektory $\vec{u}, \vec{v}$ jsou **ortonormální**.

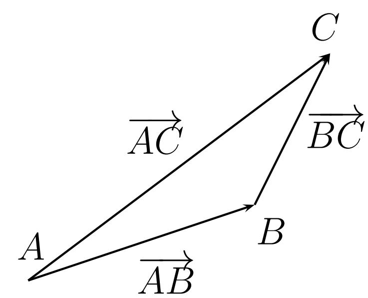
Definice 1.8 : (afinní prostor)
Nechť V je vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$, M je neprázdná množina a máme zobrazení $\omega : M \times M \to V$, pro které značíme $\omega(A, B) = \overrightarrow{AB}$, kde $A, B \in M$, $\overrightarrow{AB} \in V$. Jestliže platí

i) $\forall A \in M, \forall \vec{u} \in V \; \exists!\, B \in M : \overrightarrow{AB} = \vec{u}$,

ii) $\forall A, B, C \in M : \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$,

potom se dvojice (M, V) nazývá **afinní prostor** s nosičem M (bodově vektorový prostor).
Je-li navíc V vektorový prostor se skalárním součinem, pak se dvojice (M, V) nazývá **eukleidovský prostor**.
Prostor V se nazývá **zaměření** afinního prostoru a jeho dimenze je zároveň dimenzí afinního prostoru.
Prvky množiny M nazýváme **body afinního prostoru**.

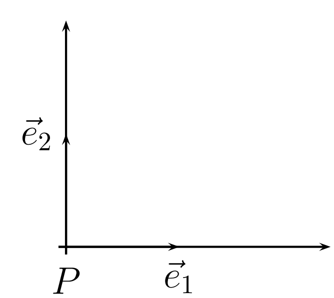




Poznámka 1.2:
Bodem i) předchozí definice je definována operace sčítání bodu $A \in M$ a vektoru $\vec{u} \in V$, píšeme $A + \vec{u} = B$.

Příklad 1.6 : Dvojice (V, V), kde V je vektorový prostor, tvoří afinní prostor.

Definice 1.9 : (soustava souřadnic)
Nechť (M, V) je afinní prostor dimenze n, dále bod $P \in M$ a množina $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\}$ je báze prostoru V. Potom uspořádanou dvojici $(P, \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\})$ nazveme **soustavou souřadnic** v prostoru (M, V), bod P se nazývá **počátkem soustavy souřadnic**, množiny bodů $P + t\,\vec{u}_i$, $t \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$ se nazývají **souřadnicové osy**.
Jestliže (M, V) je eukleidovský prostor se soustavou souřadnic $(P, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\})$ a vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n$ jsou navzájem ortogonální, pak soustava $(P, \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\})$ se nazývá **kartézská souřadnicová soustava**.



Poznámka 1.3: Libovolnému bodu $A \in M$ přiřazujeme v afinním prostoru (M, V) se souřadnicovou soustavou $(P, \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n\})$ takzvaný **polohový vektor** $\overrightarrow{PA}$.

Příklad 1.7 : Množina všech uspořádaných dvojic reálných čísel vytvoří afinní prostor $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$, s kartézskou souřadnicovou soustavou $\big((0, 0), \{(1, 0), (0, 1)\}\big)$.

<u>*Cvičení 1.7*</u>: Dokažte, že v afinním prostoru $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ z předchozího příkladu (1.7) platí $\cos\varphi = \frac{(\vec{u},\vec{v})}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$, kde φ je úhel svíraný vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

V dalším textu budeme **eukleidovský prostor dimenze n s kartézskou souřadnicovou soustavou a normou** indukovanou skalárním součinem značit $\mathbb{E}_\mathbf{n}$.

Definice 1.10 : (vektorový součin)
Nechť $\mathbb{E}_3$ je eukleidovský prostor. Zobrazení w z $\mathbb{E}_3 \times \mathbb{E}_3$ do $\mathbb{E}_3$, píšeme $w(\vec{u}, \vec{v}) \to \vec{u} \times \vec{v}$, které splňuje

i) jestliže $\vec{u}, \vec{v}$ jsou lineárně závislé, pak $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{o}$, jinak

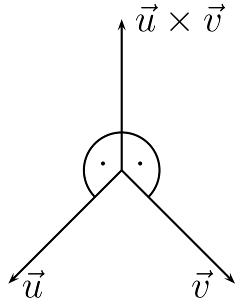
ii) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \sin\varphi$,
kde φ je úhel svíraný vektory $\vec{u}, \vec{v}$.

iii) $\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}$, $\quad \vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}$,

iv) uspořádaná trojice $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}$ je pravotočivá (má kladnou orientaci)

nazýváme **vektorový součin** vektorů $\vec{u}, \vec{v}$.

Vektorový součin



<u>*Poznámka 1.4*</u>:

i) Bod ii) předchozí definice říká, že velikost plochy rovnoběžníka určeného vektory $\vec{u}, \vec{v}$ se rovná velikosti vektorového součinu $\vec{u} \times \vec{v}$.

ii) O uspořádané trojici vektorů $(\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}, \overrightarrow{PC})$ řekneme, že je pravotočivá, jestliže při pohledu z bodu C přejde vektor $\overrightarrow{PA}$ v kladný násobek vektoru $\overrightarrow{PB}$ otočením v kladném směru (proti směru hodinových ručiček) o úhel $\varphi < \pi$.

<u>*Cvičení 1.8*</u>: Nechť $\mathbb{E}_3$ je eukleidovský prostor s pravotočivou kartézskou souřadnicovou soustavou a $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{E}_3$. Dokažte, že platí

i) $\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u}$,

ii) $\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \sqrt{\|\vec{u}\|^2\,\|\vec{v}\|^2 - (\vec{u}, \vec{v})^2}$,

iii) jestliže $\vec{u} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{v} = (b_1, b_2, b_3)$, pak $\vec{u} \times \vec{v} = (a_2b_3 - b_2a_3, a_3b_1 - b_3a_1, a_1b_2 - b_1a_2)$.

ad (iii) Návod: Položíme $\vec{w} = (c_1, c_2, c_3)$, pak z kolmostí $\vec{u} \perp \vec{w}$, $\vec{v} \perp \vec{w}$ plyne

$$\begin{aligned} &c_1a_1 + c_2a_2 + c_3a_3 = 0 / \cdot b_3, b_2 \\ &c_1b_1 + c_2b_2 + c_3b_3 = 0 / \cdot b_3, b_2 \quad \text{a odečíst.} \end{aligned}$$

Tedy $c_1(a_1b_3 - b_1a_3) = -c_2(a_2b_3 - b_2a_3)$, $c_1(a_1b_3 - b_1a_3) = -c_3(a_3b_2 - b_3a_2)$, neboli $\vec{w} = k(a_2b_3 - b_2a_3, a_3b_1 - b_3a_1, a_1b_2 - b_1a_2)$ a z bodu ii) předchozího cvičení plyne $|k| = 1$.

Definice 1.11 : (lineární zobrazení)
Řekneme, že zobrazení $F\colon X \to Y$ je **lineární zobrazení** z vektorového prostoru X dimenze n do vektorového prostoru Y dimenze m, jestliže

$$\forall\, \vec{u}, \vec{v} \in X \,\forall\, a, b \in \mathbb{R}\colon F(a\vec{u} + b\vec{v}) = aF(\vec{u}) + bF(\vec{v})\,.$$

Nechť $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ jsou vektory báze v prostoru X a jejich obrazy v prostoru Y jsou $\{F(\vec{e}_1), F(\vec{e}_2), \ldots, F(\vec{e}_n)\}$. V souřadnicích prostoru Y píšeme $F(\vec{e}_i) = (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi})$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
O matici $\mathbb{A}$ reálných čísel tvaru

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

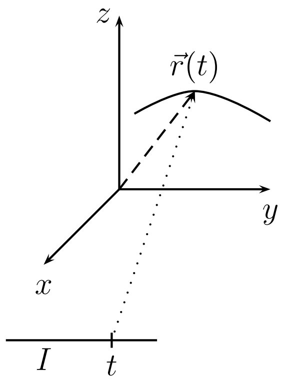
říkáme, že reprezentuje lineární zobrazení F.

Zobrazení $F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, které je dané předpisem $F(x) = kx$, $k \in \mathbb{R}$ (přímka procházející počátkem), je lineární. Operace derivování a integrování jsou také lineární.

<u>*Cvičení 1.9*</u> : Dokažte, že platí $F(\vec{u}) = \mathbb{A}\vec{u}$.

2 Křivky

Definice 2.1 : (vektorové funkce)
Nechť $I \subset \mathbb{R}$. Zobrazení $\vec{r}$ z množiny I do $\mathbb{E}_3$, $t \to \vec{r}\,(t)$, nazýváme **vektorovou funkcí jedné reálné proměnné**. Píšeme $\vec{r}\,(t) = (r_1(t), r_2(t), r_3(t))$. Funkce r_i, $i = 1, 2, 3$ nazýváme **souřadnice (složky) vektorové funkce** $\vec{r}$.
[Také píšeme $\vec{r}\,(t) = (x(t), y(t), z(t))$.]

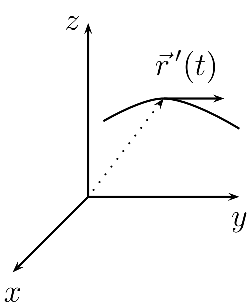


Poznámka 2.1: V případě, že parametr t je čas, pak množinu koncových bodů polohových vektorů $\vec{r}\,(t)$ nazýváme **trajektorie** pohybujícího se bodu.

Definice 2.2 : (spojitost a derivace vektorové funkce)
Řekneme, že vektor $\vec{r}_0 \in \mathbb{E}_3$ je **limitou vektorové funkce** $\vec{r} : I \mapsto \mathbb{E}_3$ v bodě t_0, jestliže $\lim\limits_{t \to t_0} \|\vec{r}\,(t) - \vec{r}_0\| = 0$.
Řekneme, že vektorová funkce $\vec{r}$ je **spojitá v bodě** t_0, jestliže $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{r}\,(t) = \vec{r}\,(t_0)$.
Vektor $\vec{r}\,'(t_0)$ se nazývá **derivace funkce** $\vec{r}$ v bodě t_0 ($\vec{r}$ je derivovatelná (diferencovatelná) v bodě t_0), jestliže

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\vec{r}\,(t) - \vec{r}\,(t_0)}{t - t_0} = \vec{r}\,'(t_0) \quad \left(= \frac{d\vec{r}}{dt}(t_0) = (r_1'(t_0), r_2'(t_0), r_3'(t_0))\right).$$

Funkce $\vec{r}$ je spojitá, derivovatelná na I, jestliže je spojitá, derivovatelná v každém bodě množiny I.



Cvičení 2.1 :

1. Dokažte, že funkce $\vec{r}$ je spojitá (derivovatelná) právě tehdy, když je spojitá (derivovatelná) každá její složka.
2. Analogicky k diferenciálu funkce jedné proměnné nadefinujte diferenciál vektorové funkce a n-tou derivaci funkce $\vec{r}$.

$\vec{r}$ je spojitá v bodě t_0, jestliže $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}\,(t)=\vec{r}\,(t_0)$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_i\,(t) = \vec{r}\,(t_0)$, $i = 1, 2, 3$.

Důsledek 2.1: Z předchozího cvičení vyplývá, že vlastnosti spojitých a derivovatelných funkcí jedné proměnné mají i vektorové funkce.
Například $(\vec{r}\,(t), \vec{s}(t))' = (\vec{r}\,'(t), \vec{s}(t)) + (\vec{s}\,'(t), \vec{r}\,(t))$ nebo $(\vec{r}\,(t) \times \vec{s}(t))' = \vec{r}\,'(t) \times \vec{s}(t) + \vec{s}\,'(t) \times \vec{r}\,(t)$.

Definice 2.3 : (křivka)
Nechť $I \subset \mathbb{R}$ je interval. Množina $\mathcal{K} \subset \mathbb{E}_3$ se nazývá **jednoduchá křivka**, jestliže je obrazem vektorové funkce $\vec{r}$ zobrazující interval I na množinu $\mathcal{K}$ a platí

i) $\vec{r}$ je spojitá funkce na I,

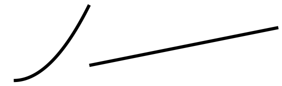
ii) $\vec{r}$ je prostá na vnitřku I.

Jestliže $I = [\alpha\,,\beta]$ a platí $\vec{r}\,(\alpha) = \vec{r}\,(\beta)$, pak se $\mathcal{K}$ nazývá **uzavřená jednoduchá křivka**.
Jestliže platí $\vec{r} \in C^n(I)$ (tzn. $\vec{r}^{\,(n)}$ (n-tá derivace) je spojitá na I), pak se $\mathcal{K}$ nazývá **jednoduchá křivka třídy** C^n (n-té třídy).
Jestliže $\forall\, t \in I$ platí $\|\vec{r}\,'(t)\| \neq 0$, pak se $\mathcal{K}$ nazývá **regulární jednoduchá křivka**.

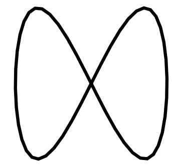
Křivka je po částech regulární jednoduchá křivka třídy C^1. (tzn. až na konečně mnoho bodů je $\vec{r}$ spojitě diferencovatelná funkce a $\|\vec{r}\,'(t)\| \neq 0$.)

Proměnná $t \in I$ se nazývá **parametr**, vektor $\vec{r}\,(t) \in \mathbb{E}_3$ se nazývá **průvodič bodu** křivky $\mathcal{K}$ a funkce $\vec{r}$ je její **parametrická reprezentace**.

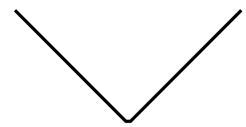
není spojitá



není prostá



není regulární



Křivka obecná

<u>*Příklad 2.1*</u> : Množina $\mathcal{K}$ obrazů funkce $\vec{r}\,(t)$, kde

1. $\vec{r}\,(t) = (t, t, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ je regulární jednoduchá křivka třídy $\mathcal{C}^\infty$.

2. $\vec{r}\,(t) = (t^3, t^3, 0)$, $t \in \mathbb{R}$ je jednoduchá křivka, která není regulární v bodě $t_0 = 0$, (i když se jedná o stejnou přímku jako v příkladu 1).

3. $\vec{r}\,(t) = (t\,,\,|t|\,,\,0)$, $t \in [-1; 1]$ je křivka (až na bod $t_0 = 0$ je regulární a spojitě diferencovatelná).

4. $\vec{r}\,(t) = (a\cos(t)\,,\,b\sin(t)\,,\,0)$, $t \in [0\,,2\pi]$, $a, b \in \mathbb{R}^+$ je uzavřená, regulární jednoduchá křivka třídy $\mathcal{C}^\infty$ (elipsa).

5. $\vec{r}\,(t) = (c\cos(t),\, c\sin(t),\, bt)$, $c > 0$, $b > 0$, $t \in [0\,,4\pi]$ je regulární jednoduchá křivka třídy $\mathcal{C}^\infty$ (dva závity šroubovice).

Poznámka 2.2: Křivka může být také zadána pomocí explicitních nebo implicitních rovnic.

	Explicitně	Implicitně
v $\mathbb{E}_2$	$y = \sqrt{1-x^2}\,,\ x \in [-1,1]$	$x^2 + y^2 = 1$
v $\mathbb{E}_3$	$y = x, z = x^2\,,\ x \in [0,2]$	$y - x = 0, z - x^2 = 0$

K přechodům mezi jednotlivými popisy křivky se využívá věta o implicitní funkci z MA2.

Cvičení 2.2: Najděte parametrické vyjádření křivky dané rovnicemi $x^2 + y^2 - 1 = 0,\ x + y + z - 1 = 0$, popište její vlastnosti a nakreslete ji.

Jestliže existuje $\vec{r}\,''(t_0)$ a $\vec{r}\,'(t_0)$, $\vec{r}\,''(t_0)$ jsou lineárně závislé, pak se bod $\vec{r}(t_0)$ nazývá **inflexní bod křivky**.

Definice 2.4 : (tečna křivky)
Nechť křivka $\mathcal{K}$ je parametrizovaná funkcí $\vec{r}$. Vektor derivace $\vec{r}\,'(t_0)$ nazýváme **tečný vektor křivky** $\mathcal{K}$ v bodě t_0.
Tečnou křivky $\mathcal{K}$ v bodě $\vec{r}\,(t_0)$ rozumíme přímku
$\vec{y}(\tau) = \vec{r}\,(t_0) + \vec{r}\,'(t_0)\,\tau\,,\ \tau \in \mathbb{R}$.

Příklady

Příklad 2.2: Najdeme tečnu k hyperbole dané implicitně rovnicí $x^2 - \frac{y^2}{2} = 1$ v bodě $B = [1,0]$.

Použijeme parametrickou reprezentaci (jedné větve) hyperboly: $\vec{r}\,(t) = (\cosh t\,,\ \sqrt{2}\sinh t)\,,\ t \in \mathbb{R}$.

V bodě B je $t_0 = 0$ a $\vec{r}\,'(0) = (0, \sqrt{2})$. Rovnice tečny má tedy tvar $\vec{y}(\tau) = [1,0] + (0,\sqrt{2})\,\tau\,,\ \tau \in \mathbb{R}$.

Cvičení 2.3:

Ověřte, zda funkce $F(x,y) = x^2 - \frac{y^2}{2} - 1$ splňuje předpoklady věty o implicitní funkci (z MA2) při řešení funkcionální rovnice $F(x,y) = 0$ v bodě B. Co víte o derivaci případného řešení v bodě $B = [1,0]$?

[Platí $F(B) = 0$, funkce F je spojitá i spojitě diferencovatelná na okolí bodu B a platí $\frac{\partial F}{\partial x}(B) = 2$, $\frac{\partial F}{\partial y}(B) = 0$. Předpoklad $\frac{\partial F}{\partial y}(B) \neq 0$ tedy není splněn.
Můžeme však využít předpokladu $\frac{\partial F}{\partial x}(B) \neq 0$ a tvrdit, že na okolí $U(0)$ existuje funkce $x = x(y)$, $x : U(0) \to \mathbb{R}$, která řeší funkcionální rovnici $F(x, x(y)) = 0$ a pro derivaci $\frac{\partial x}{\partial y}(B)$ platí: $\frac{\partial x}{\partial y}(B) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(B)}{\frac{\partial F}{\partial x}(B)} = 0$.
Explicitně máme $x = \sqrt{1 + \frac{y^2}{2}}$ a $\frac{dx}{dy}\Big|_0 = \frac{y}{2\sqrt{1+\frac{y^2}{2}}}\Big|_0 = 0$.]

Věta 2.1 : (transformace parametru)
Nechť $\varphi : I^* \to I$ je spojitě diferencovatelná funkce z intervalu I^* na interval I taková, že $\forall\, s \in I^* : \varphi'(s) \neq 0$. Potom funkce $\vec{r}\,(\varphi(s))\colon I^* \to \mathcal{K}$ je opět parametrickou reprezentací křivky $\mathcal{K}$.

Půlkružnici ležící pod osou x se středem v počátku a poloměrem $\varrho = 1$ lze parametrizovat vztahy $x = t\,,\ y = -\sqrt{1-t^2}\,,$ $t \in [-1\,,\,1]$ nebo také $x = \cos s\,,\ y = \sin s\,,$ $s \in [\pi\,,\,2\pi]\,,$ nebo-li $t = \varphi(s) = \cos s\,.$

Důkaz : Složením funkcí $\vec{r}$ a φ vznikne po částech regulární spojitě diferencovatelná vektorová funkce. Zbývá ukázat, že je prostá. Z předpokladu $\varphi'(s) \neq 0$ na I^* plyne, že buď $\varphi'(s) > 0$ nebo $\varphi'(s) < 0$ na I^*. Odtud plyne, že funkce φ je ostře monotónní, tedy prostá a složením dvou prostých funkcí vznikne opět prostá funkce.

Cvičení 2.4 : Dokažte, že za předpokladů věty 2.1 existuje k funkci $\varphi : I^* \to I$ inverzní funkce $\varphi^{-1} : I \to I^*$, pro kterou platí $(\varphi^{-1})'(t) \neq 0$, $\forall\, t \in I$. Můžeme tedy provést i zpětnou transformaci parametru $s = \varphi^{-1}(t)\,.$

Definice 2.5 : (délka křivky)
Máme křivku $\mathcal{K} = \{\vec{r}\,(t) :\ t \in [\alpha, \beta]\}\,.$ Číslo **d** se nazývá **délka křivky** $\mathcal{K}$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že pro každé dělení $\mathcal{D} = \{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta\}$ intervalu $[\alpha, \beta]$ s normou dělení $\nu(\mathcal{D}) = \max\limits_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} (t_k - t_{k-1}) < \delta$, $n \in \mathbb{N}$, platí:

$$\left|\ \sum_{k=1}^{n} \|\vec{r}\,(t_k) - \vec{r}\,(t_{k-1})\| - d\ \right| < \varepsilon\,.$$

V literatuře se také uvádí, že křivka $\mathcal{K}$, která má délku d, je **rektifikovatelná** křivka.

Pro délku d křivky $\mathcal{K}$ platí:

$$d = \int_{\alpha}^{\beta} \|\vec{r}\,'(t)\|\, dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r_1'(t))^2 + (r_2'(t))^2 + (r_3'(t))^2}\, dt\,. \tag{2.1}$$

Položíme-li

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} \|\vec{r}\,'(\tau)\|\, d\tau\,, \tag{2.2}$$

potom funkce $s\colon [\alpha, \beta] \to I^*$ je rostoucí, spojitá a existuje k ní inverzní funkce $\varphi\colon I^* \to [\alpha, \beta]\,.$ Položíme $t = \varphi(s)$ a dostaneme novou parametrizaci křivky $\mathcal{K}$.

Hovoříme o **přirozené parametrizaci** křivky. Parametr **s** se nazývá **oblouková délka**.

Také hovoříme o parametrizaci obloukem.

Derivace podle obloukové délky (oblouku) se obvykle značí tečkou. Vektor $\dot{\vec{r}}(s)$ je jednotkový tečný vektor křivky $\mathcal{K}$.

<u>*Cvičení 2.5*</u> :

a) Ověřte, že funkce $s = s(t)$ ze vztahu (2.2) je rostoucí a spojitě diferencovatelná. $[\, \frac{ds}{dt} = \|\vec{r}\,'\| > 0 \,]$

b) Ukažte, že pro derivaci vektorové funkce $\vec{r}$ podle obloukové délky s platí

$$\|\dot{\vec{r}}(s)\| = \left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\| = 1\,.$$

$[\, \left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds}\right\| = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|\frac{1}{\|\vec{r}\,'\|} = 1 \,]$

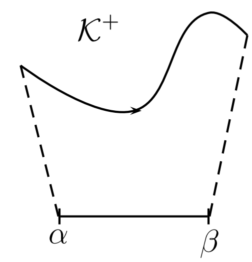
3 Křivkové integrály, Greenova věta

3.1 Křivkové integrály

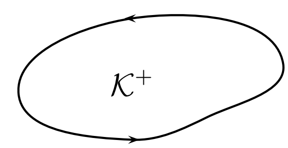
Definice 3.1 : (orientace křivky)
Řekneme, že křivka $\mathcal{K} = \{\vec{r}\,(t) \,:\, t \in [\alpha, \beta]\}$ má **orientaci**, jestliže má počáteční a koncový bod.
Jestliže $\vec{r}\,(\alpha)$ je počáteční a $\vec{r}\,(\beta)$ je koncový bod, pak má křivka $\mathcal{K}$ **kladnou orientaci**, značíme $\mathcal{K}^+$. Hovoříme o orientaci, která je **indukovaná parametrizací**. V opačném případě hovoříme o **záporné orientaci**, značíme $\mathcal{K}^-$.

U uzavřené křivky $\mathcal{K}$, která je hranicí množiny $\Omega \subset \mathbb{E}_2$ ($\partial\Omega = \mathcal{K}$) hovoříme o **kladné orientaci**, pokud při obíhání křivky ve směru orientace zůstává množina Ω po levé straně (oběh proti směru hodinových ručiček).

Orientace indukovaná parametrizací



Kladně orientovaná uzavřená křivka



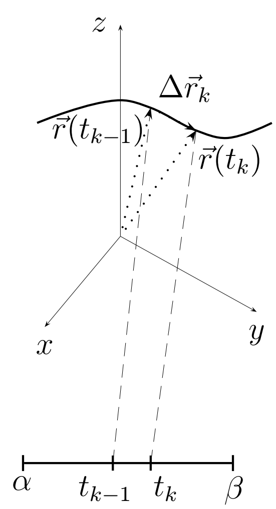
Definice 3.2 : (křivkové integrály)
Mějme křivku $\mathcal{K} = \{\vec{r}\,(t) \,:\, t \in [\alpha, \beta]\}$ s orientací indukovanou parametrizací. Nechť $\mathcal{D} = \{\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta\}$ je dělení intervalu $[\alpha, \beta]$, potom body $\vec{r}\,(t_k)\,,\ k = 0, 1, \ldots, n$ tvoří dělení $\mathcal{D}(\mathcal{K})$ křivky $\mathcal{K}$.
Označíme $\triangle\vec{r}_k = \vec{r}\,(t_k) - \vec{r}\,(t_{k-1})\,,\ \ \triangle r_{ki} = r_i(t_k) - r_i(t_{k-1})\,,$ $\triangle s_k = \|\triangle\vec{r}_k\|\,,\ i = 1, 2, 3,\ k = 1, \ldots, n\,.$ K funkci $f\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ definujeme **integrální součty** rovnostmi

$$J(f, \mathcal{D}(\mathcal{K})) = \sum_{k=1}^{n} f(\vec{r}\,(\xi_k))\,\triangle s_k\,,$$

$$J_i(f, \mathcal{D}(\mathcal{K}^+)) = \sum_{k=1}^{n} f(\vec{r}\,(\tau_k))\,\triangle r_{ki}\,, \quad i = 1, 2, 3\,,$$

kde $t_{k-1} \le \tau_k, \xi_k \le t_k\,,\ k = 1, 2, \ldots, n\,.$
Jestliže níže uvedené limity existují, pak **křivkový integrál 1. druhu** definujeme vztahem

$$\int_{\mathcal{K}} f(\vec{r}\,)\,ds = \lim_{\max\limits_k \triangle s_k \to 0} J(f, \mathcal{D}(\mathcal{K}))\,, \tag{3.1}$$



a **křivkový integrál 2. druhu** definujeme vztahem:

$$\int_{\mathcal{K}^+} f(\vec{r}\,)\,dr_i = \lim_{\max\limits_k \triangle s_k \to 0} J_i(f, \mathcal{D}(\mathcal{K}^+))\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{3.2}$$

Podobně jako integrál funkce jedné reálné proměnné vyjadřuje "plochu pod grafem funkce", pomocí křivkového integrálu prvního druhu spočítáme "plochu mezi křivkou a funkcí".

Povrch válce o výšce v a poloměru r (bez podstav) dostaneme integrováním konstantní funkce $f(\vec{r}) = v$ přes kružnici $\mathcal{K}$:
$x = r\cos t,\ y = r\sin t,$
$z = 0\,,\ t \in [0, 2\pi]\,.$
Neboli $\int_{\mathcal{K}} f(\vec{r})\,ds = \int_0^{2\pi} vr\,dt = 2\pi r v\,.$

Křivkové integrály 1.druhu

Příklady

Křivkové integrály 2.druhu

Příklady

Například pro výpočet práce, kterou vykoná síla $\vec{F}$ po dráze $\vec{s}$.

Poznámka 3.1:
Integrál přes uzavřenou křivku se značí $\oint_{\mathcal{K}} f(\vec{r})\,ds\,.$

Použijeme-li značení $\vec{r} = (x, y, z)$, pak pro $i=1$ dostaneme pro křivkový integrál druhého druhu zápis $\int_{\mathcal{K}^+} f(x, y, z)\,dx$ a křivkový integrál prvního druhu má tvar $\int_{\mathcal{K}} f(x, y, z)\,ds\,.$

Věta 3.1 : (výpočet křivkových integrálů)
Nechť $\mathcal{K} = \{\vec{r}(t) : t \in [\alpha, \beta]\}$ je kladně orientovaná křivka a funkce $f\colon \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ je spojitá, potom níže uvedené křivkové integrály existují a platí

$$\int_{\mathcal{K}} f(\vec{r})\,ds = \int_\alpha^\beta f(\vec{r}(t))\|\vec{r}\,'(t)\|\,dt\,, \tag{3.3}$$

$$\int_{\mathcal{K}^+} f(\vec{r})\,dr_i = \int_\alpha^\beta f(\vec{r}(t))\,r_i'(t)\,dt\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{3.4}$$

Poznámka 3.2:

1. Z definice křivkového integrálu vyplývá, že splňuje následující vztahy

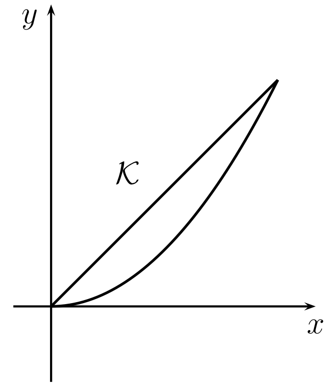
   i) $\int_{\mathcal{K}} (af + bg)\,ds = a\int_{\mathcal{K}} f\,ds + b\int_{\mathcal{K}} g\,ds\,, \quad a, b \in \mathbb{R}$

   ii) $\int_{\mathcal{K}_1\cup\mathcal{K}_2} f\,ds = \int_{\mathcal{K}_1} f\,ds + \int_{\mathcal{K}_2} f\,ds\,.$

2. Pro křivkový integrál 2. druhu platí
   $$\int_{\mathcal{K}^+} f(\vec{r})\,dr_i = -\int_{\mathcal{K}^-} f(\vec{r})\,dr_i\,.$$

3. Jestliže křivka $\mathcal{K}^+$ leží na ploše dané grafem funkce $z = z(x, y)$ a $\mathcal{K}^+_{xy}$ je ortogonální průmět křivky $\mathcal{K}^+$ do roviny-xy, potom platí
   $$\int_{\mathcal{K}^+} f(\vec{r})\,dx = \int_{\mathcal{K}^+} f(x, y, z)\,dx = \int_{\mathcal{K}^+_{xy}} f(x, y, z(x, y))\,dx\,.$$

4. Křivkový integrál 2. druhu se často používá ve tvaru
   $\int_{\mathcal{K}^+} \vec{v}\,d\vec{r} = \int_{\mathcal{K}^+} v_1\,dr_1 + v_2\,dr_2 + v_3\,dr_3 = \int_{\mathcal{K}^+} v_1\,dx + v_2\,dy + v_3\,dz = \int_{\mathcal{K}^+} \vec{v}\,d\vec{s}$, kde $\vec{v} : \mathcal{K} \to \mathbb{E}_3$ je vektorová funkce.



<u>*Příklad 3.1*</u> : Nechť $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, kde $\mathcal{K}_1$ je část paraboly $y = x^2$, $x \in [0,1]$, $\mathcal{K}_2$ je úsečka $y = x$, $x \in [0,1]$. Vypočítáme statický moment S_y křivky $\mathcal{K}$ vzhledem k ose y, tj. $S_y = \int\limits_{\mathcal{K}} x\, ds$.

Zřejmě $\int\limits_{\mathcal{K}} x\, ds = \int\limits_{\mathcal{K}_1} x\, ds + \int\limits_{\mathcal{K}_2} x\, ds.$

Parametrizujeme-li křivky: $\mathcal{K}_1$ pomocí funkce $\vec{r}_1(t) = (t, t^2)$; $\mathcal{K}_2$ pomocí funkce $\vec{r}_2(t) = (t,t)$, $t \in [0,1]$, potom

$$\int\limits_{\mathcal{K}_1} x\, ds = \int\limits_0^1 t\sqrt{1+4t^2}\, dt = \left[\begin{array}{ccc} u & = & 1+4t^2 \\ du & = & 8t\, dt \end{array} \right] = \frac{1}{8}\int\limits_1^5 \sqrt{u}\, du$$

$$= \frac{1}{8}\Big[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big] = \frac{1}{12}(5^{\frac{3}{2}} - 1) = \frac{5\sqrt{5}-1}{12}\, ; \quad \int\limits_{\mathcal{K}_2} x\, ds = \int\limits_0^1 t\sqrt{2}\, dt = \frac{\sqrt{2}}{2}\, .$$

Odtud vyplývá, že statický moment $S_y = \frac{5\sqrt{5}-1}{12} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Poznamenejme, že pokud křivku lze popsat pomocí grafu funkce $y = y(x)$, pak $ds = \sqrt{(\,dx)^2 + (\,dy)^2} = \sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2}\, dx$.

Odtud plyne $\int\limits_{\mathcal{K}} f(x,y)\, ds = \int\limits_{x_0}^{x_1} f(x, y(x))\sqrt{1 + (y'(x)^2)}\, dx.$ Tedy pro $\mathcal{K}_1 : y = x^2$ a $\mathcal{K}_2 : y = x$, $x \in [0,1]$ dostaneme $S_y = \int\limits_0^1 x\sqrt{1+(2x)^2}\, dx + \int\limits_0^1 x\sqrt{1+(1)^2}\, dx$.

<u>*Cvičení 3.1*</u> :

1. Vypočítejte $\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{v}\, d\vec{s} = \int\limits_{\mathcal{K}} x^2 y\, dx + (x-2)\, dy + xy^2\, dz$, kde $\mathcal{K} = (x, x^2, 2)$ s počátečním bodem $A = [0,0,2]$ a koncovým bodem $B = [1,1,2]$.

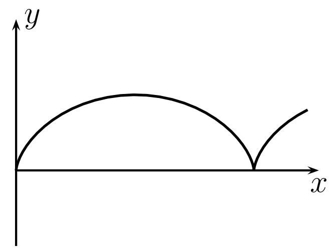
   $$[\ \int\limits_0^1 x^2 x^2\, dx + (x-2)\cdot 2x\, dx = \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - 2 = -\frac{17}{15}\ ]$$

2. Vypočítejte stejný integrál jako v předchozím příkladě pro $\mathcal{K} = (x, x, 2)$ opět od $A = [0,0,2]$ do $B = [1,1,2]$.

   $$[\ \int\limits_0^1 x^3\, dx + (x-2)\, dx = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 2 = -\frac{5}{4}\ ]$$

Výše uvedené příklady ukazují, že křivkový integrál závisí na cestě $\mathcal{K}$, po které jdeme z bodu A do bodu B. Nezávislost na cestě budeme diskutovat v kapitole 7.

Cykloida



Cvičení 3.2 :

V rovině $\mathbb{E}_2$ stanovte délku d jednoho oblouku cykloidy $\mathcal{K}$ daného rovnicemi:

$x = \varrho(t - \sin t)$, $\varrho \in \mathbb{R}$

$y = \varrho(1 - \cos t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$[\, d = \int\limits_{\mathcal{K}} ds = \int\limits_0^{2\pi} \varrho\sqrt{(1-\cos t)^2 + (\sin t)^2}\, dt = \varrho \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2\cos t}\, dt = 2\varrho \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2}\, dt = -4\varrho\big[\cos \frac{t}{2}\big]_0^{2\pi} = 8\varrho. \,]$

Definice 3.3 : (cirkulace vektorového pole)
Mějme kladně orientovanou uzavřenou křivku $\mathcal{K}$ a vektorové pole $\vec{v} : \mathcal{K} \to \mathbb{E}_3$, potom píšeme $\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{v}(\vec{r}\,)\, d\vec{r} = \oint\limits_{\mathcal{K}} \vec{v}\, d\vec{r}$ a hovoříme o **cirkulaci vektorového pole** $\vec{v}$ po uzavřené křivce $\mathcal{K}$.

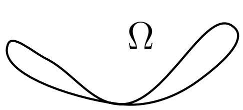
Příklad 3.2 :

Uvažujeme hmotný bod, na který působí síla $\vec{F}$ po dráze (křivce) $\mathcal{K}$ určené vektorovou funkcí $\vec{r}\,(t)$, kde t je nyní čas. Potom vykonaná práce W je dána vztahem:

$W = \int\limits_{\mathcal{K}} \vec{F}\, d\vec{r} = \int\limits_{t_0}^{t_1} \vec{F}(\vec{r}\,(t)) \frac{d\vec{r}}{dt}\, dt$, kde t_0, t_1 jsou počáteční a konečný čas pokusu. Položíme $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, pak $\vec{v}$ je rychlost hmotného bodu. Z druhého Newtonova zákona vyplývá, že $\vec{F} = m\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = m\vec{v}\,'$ a můžeme psát

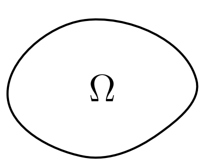
$W = \int\limits_{t_0}^{t_1} m\vec{v}\,'\vec{v}\, dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} m \frac{d}{dt} \frac{\vec{v}\cdot\vec{v}}{2}\, dt = \frac{1}{2}\, m \big[\|\vec{v}(t)\|^2\big]_{t_0}^{t_1} = \frac{1}{2}\, m\Big(\|\vec{v}(t_1)\|^2 - \|\vec{v}(t_0)\|^2\Big).$

Křivkově souvislá množina



3.2 Greenova věta

Jednoduše souvislá množina



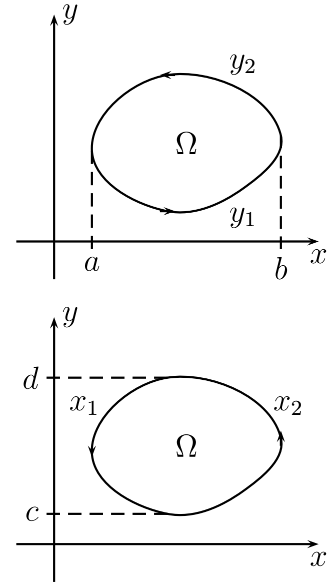
Definice 3.4 : (křivkově souvislá a jednoduše souvislá množina)
Množina $\Omega \subset \mathbb{E}_2$ se nazývá **křivkově souvislá**, jestliže každé dva její body lze spojit křivkou ležící v Ω.
Množina $\Omega \subset \mathbb{E}_2$ se nazývá **jednoduše souvislá**, jestliže její hranice $\partial\Omega$ je tvořena jednou uzavřenou křivkou.

Věta 3.2 : (Greenova věta v rovině)
Nechť $\mathcal{K}^+$ je kladně orientovaná uzavřená křivka, která tvoří hranici jednoduše souvislé množiny $\Omega \subset \mathbb{E}_2$, $(\partial\Omega^+ = \mathcal{K}^+)$. Nechť funkce f_1, f_2 mají spojité parciální derivace na $\overline{\Omega}$, píšeme $f_1,\ f_2 \in C^1(\overline{\Omega})$, $(\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega)$, potom platí

$$\iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega^+} f_1\, dx + f_2\, dy\,. \tag{3.5}$$

Příklady

Množina popsatelná funkcemi



obr. 1

Důkaz : Nejdříve uvažujeme množinu Ω **popsatelnou funkcemi**, tedy existují funkce $y_1(x)$, $y_2(x) : [a,b] \to \mathbb{R}$ a funkce $x_1(y)$, $x_2(y) : [c,d] \to \mathbb{R}$ takové, že $\forall\, [x,y] \in \Omega$ platí: Jestliže $a \le x \le b$, pak $y_1(x) \le y \le y_2(x)$ a zároveň, jestliže $c \le y \le d$, pak $x_1(y) \le x \le x_2(y)$. Potom z Fubiniovy věty pro dvojný integrál vyplývá

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\Omega} -\frac{\partial f_1}{\partial y}\, dxdy &= \int\limits_a^b \left(- \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial f_1}{\partial y}\, dy \right) dx \\
&= \int\limits_a^b \big[f_1(x, y_1(x)) - f_1(x, y_2(x)) \big]\, dx \\
&= \int\limits_a^b f_1(x, y_1(x))\, dx + \int\limits_b^a f_1(x, y_2(x))\, dx\,.
\end{aligned}$$

Protože grafy funkcí y_1, y_2 tvoří hranici $\partial\Omega^+$ (u funkce y_2 jdeme po grafu z bodu $[b, y_2(b)]$ do bodu $[a, y_2(a)]$), můžeme poslední dva integrály brát jako křivkové integrály po hranici $\partial\Omega^+$. Tedy

$$\iint\limits_{\Omega} -\frac{\partial f_1}{\partial y}\, dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega^+} f_1\, dx\,. \tag{3.6}$$

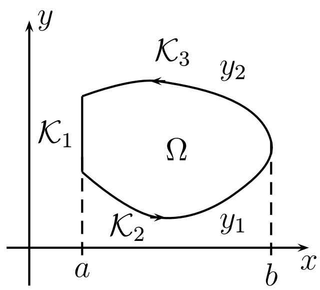
Podobně odvodíme

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x}\, dxdy = \int\limits_c^d \left(\int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial f_2}{\partial x}\, dx \right) dy \tag{3.7}$$

$$= \int\limits_c^d f_2(x_2(y), y)\, dy + \int\limits_d^c f_2(x_1(y), y)\, dy = \oint\limits_{\partial\Omega^+} f_2\, dy\,.$$

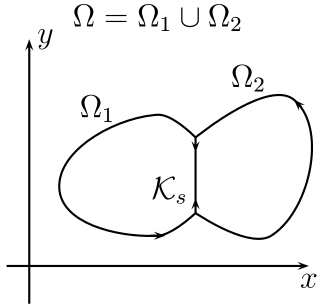
Sečtením vztahů (3.6) a (3.7) dostaneme tvrzení věty.

Část hranice rovnoběžná s osou



obr. 2

$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$



obr. 3

V případě, že část $\mathcal{K}_1$ hranice $\partial\Omega^+$ je rovnoběžná s osou y jako na obrázku 2, pak zřejmě $\int\limits_{\mathcal{K}_1} f(x,y)\,dx = 0$.

Greenova věta tedy platí i pro oblast Ω z obrázku 2, neboť $\int\limits_{\partial\Omega^+} f(x,y)\,dx = \int\limits_{\mathcal{K}_1} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\mathcal{K}_2} f(x,y)\,dx + \int\limits_{\mathcal{K}_3} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^b f(x,y_1(x))\,dx + \int\limits_b^a f(x,y_2(x))\,dx.$

V případě, že množinu Ω nelze rovnou popsat funkcemi, pak Greenova věta platí, pokud se Ω podaří rozdělit na konečný počet množin omezených funkcemi, viz obrázek 3.

Díky opačné orientaci se hodnoty křivkových integrálů přes společnou hranici $\mathcal{K}_s$ odečtou a platí $\oint\limits_{\partial\Omega} = \oint\limits_{\partial\Omega_1} + \oint\limits_{\partial\Omega_2}$.

3.3 Důsledky Greenovy věty

<u>Důsledek 3.1</u>: 1. (Výpočet plochy)

Nechť množina Ω splňuje předpoklady Greenovy věty, pak velikost její plochy meas (Ω) můžeme spočítat ze vztahu:

$$\operatorname{meas}(\Omega) = \frac{1}{2} \oint\limits_{\partial\Omega^+} x\,dy - y\,dx\,. \tag{3.8}$$

Jakobián $|\det \mathbf{J}_\Phi|$ popisuje deformaci plochy při zobrazení Φ. Například funkce $\Phi\colon x = u+v,\ y = u+v$ má $|\det \mathbf{J}_\Phi| = 0$ a zobrazí celou rovinu na přímku $y = x$.

<u>Důsledek 3.2</u>: 2. (Jakobián)

Nechť $\Phi : x = r_1(u,v), y = r_2(u,v)$ je regulární transformace z oblasti Ω_{uv} do oblasti Ω_{xy}, (tzn. $\det \mathbf{J}_\Phi \neq 0$).

Nechť $\Omega_1 \subset \Omega_{uv}$ a $\Phi(\Omega_1) = \Omega \subset \Omega_{xy}$, pak platí:

$$\operatorname{meas}\Omega = \oint\limits_{\partial\Omega^+} x\,dy = \pm \oint\limits_{\partial\Omega_1^+} r_1 \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial u}\,du + \frac{\partial r_2}{\partial v}\,dv \right) =$$

$$= \pm \iint\limits_{\Omega_1} \left(\frac{\partial}{\partial u}\left(r_1 \cdot \frac{\partial r_2}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(r_1 \cdot \frac{\partial r_2}{\partial u} \right) \right) du\,dv =$$

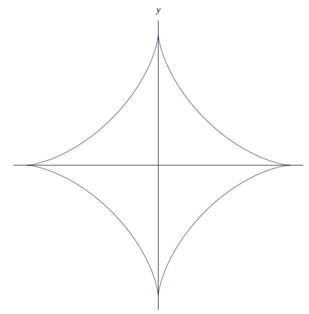
$$= \pm \iint\limits_{\Omega_1} \left(\frac{\partial r_1}{\partial u} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial v} - \frac{\partial r_1}{\partial v} \cdot \frac{\partial r_2}{\partial u} \right) du\,dv =$$

$$\pm \iint\limits_{\Omega_1} \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial v} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix} du\,dv \Rightarrow \frac{\operatorname{meas}\Omega}{\operatorname{meas}\Omega_1} \approx |\det \mathbf{J}_\Phi|\,.$$

<u>*Příklad 3.3*</u> :

Využijeme vztah 3.8 k výpočtu vnitřku asteroidy, která je dána implicitně rovnicí $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, kde $a > 0$, nebo parametricky $\vec{r}(t) = (a\cos^3 t, a\sin^3 t, 0), t \in (0, 2\pi)$. Vzhledem k symetrii asteroidy stačí uvažovat $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ a výsledek vynásobit čtyřmi. Tedy pro plochu S platí

Asteroida



$$S = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} [\, a\cos^3 t\, 3a\sin^2 t\cos t + a\sin^3 t\, 3a\cos^2 t\sin t\,]\, dt =$$

$$6a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\,\sin^2 t\cos^2 t\,]\, dt = \frac{3}{2}a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2t\, dt = \frac{3a^2\pi}{8}.$$

<u>*Cvičení 3.3*</u> :

a) Pomocí vztahu (3.8) spočítejte plochu elipsy.

[πab .]

b) Převeďte vztah (3.8) do polárních souřadnic.

[$\operatorname{meas}\Omega = \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega^+} r^2(\varphi)\, d\varphi$.]

4 Operátory skalárních a vektorových polí

Podrobnější informace o gradientu naleznete ve skriptech MA2.

Definice 4.1 : (gradient)
Nechť $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{E}_3$, $f = f(x,y,z)$, je diferencovatelné skalární pole (neboli diferencovatelná funkce tří reálných proměnných) a $A \in D$, potom vektor

$$\operatorname{grad} f(A) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), \frac{\partial f}{\partial z}(A) \right)$$

se nazývá **gradient** skalární funkce f v bodě A.

Příklady

Poznámka 4.1:

1. Pro derivaci funkce f podle vektoru $\vec{s}$ v bodě A platí $\lim\limits_{t\to 0} \frac{f(A+t\vec{s})-f(A)}{t} = \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(A)$ (= $\operatorname{grad} f(A) \cdot \vec{s}$, jestliže f je diferencovatelná).

2. Zavedeme-li (vektorový) diferenciální operátor **nabla**

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right),$$

pak píšeme $\operatorname{grad} f = \nabla f$.

Operátor ∇ se také nazývá **Hamiltonův operátor** .

Hamiltonův operátor je pojmenován po irském matematikovi a fyzikovi jménem William Rowan Hamilton (1805-1865),

který jako první popsal kvaterniony.

3. Směr největšího růstu funkce f z bodu $A = [x_0, y_0, z_0]$ popisuje vektor $\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} f(A)}{\|\operatorname{grad} f(A)\|}$. Vektor $\vec{n}$ je kolmý k hladině $S = \{[x,y,z] \in \mathbb{E}_3 : f(x,y,z) = f(A)\}$.

Zároveň je $\vec{n}$ jednotkový normálový vektor tečné nadroviny ϱ k hladině S v bodě A . Rovina ϱ je určena rovností $\frac{\partial f}{\partial x}(A)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y-y_0) + \frac{\partial f}{\partial z}(A)(z-z_0) = 0$.

Cvičení 4.1 :

Najděte v bodě $A = [1,1,3]$ tečnou rovinu ke kuželu, který je zadán rovnicí $z^2 = \frac{9}{2}(x^2+y^2)$.

[Kužel je nulovou hladinou funkce $f = \frac{9}{2}(x^2+y^2) - z^2$. Platí $\operatorname{grad} f = (9x, 9y, -2z)$ a normálový vektor v bodě A je $\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} f(A)}{\|\operatorname{grad} f(A)\|} = \frac{(9,9,-6)}{\sqrt{9^2+9^2+6^2}} = \frac{(3,3,-2)}{\sqrt{22}}$. Tečná rovina má tedy tvar $\varrho :\ 3(x-1) + 3(y-1) - 2(z-3) = 0$.]

Příklad 4.1: (Příklad 2.2 jinak) Uvažujeme funkci $f(x,y) = x^2 - 2y^2 - 1$, potom hladina $S = \{[x,y] \in \mathbb{E}_2 : f(x,y) = 0\}$ je křivka z příkladu 2.2. Najdeme tečný a normálový vektor k hladině S v bodě $B = [1,0]$.

Gradientem funkce f v bodě B je vektor $\operatorname{grad} f(B) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(B), \frac{\partial f}{\partial y}(B)\right) = (2x, -4y)|_B = (2,0)$. Jednotkový normálový vektor k hladině S v bodě B je $\vec{n} = (1,0) = \frac{\nabla f(B)}{\|\nabla f(B)\|}$. Tečný vektor v bodě B je podle příkladu 2.2 vektor $\vec{r}\,'(0) = (0, \sqrt{2})$. Platí $\vec{r}\,'(0) \cdot \vec{n} = 0$.

Poznámka 4.2: Obecně každá přímka $p : B + t \cdot \vec{v}$, pro kterou $\vec{v} \cdot \vec{r}\,' = 0$ a $\vec{r}\,'$ je tečný vektor ke křivce v bodě B, se nazývá **normálová přímka křivky**.

Definice 4.2 : (vnější normálový vektor)
Nechť uzavřená křivka $\mathcal{K}^+ = \{\vec{r}(t) : t \in I\}$ je hranicí množiny $\Omega \subset \mathbb{E}_2$. Potom $\vec{r}\,'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$ je tečný vektor ke hranici $\partial\Omega$ v bodě $\vec{r}(t_0)$ a vektor

$$\vec{n} = \frac{(y'(t_0), -x'(t_0))}{\sqrt{x'(t_0)^2 + y'(t_0)^2}}$$

se nazývá **vnější normálový vektor** množiny Ω.

Vnější normálový vektor množiny Ω směřuje ven z množiny Ω.

Definice 4.3 : (divergence)
Nechť vektorová funkce $\vec{v}\colon \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ je diferencovatelná, potom funkce

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

se nazývá **divergence** funkce $\vec{v}$ (nebo divergence vektorového pole definovaného funkcí $\vec{v}$).

Použijeme-li Hamiltonův operátor, pak

$$\operatorname{div} \vec{v} = \nabla \cdot \vec{v}\,.$$

Operátor $\nabla \cdot \nabla f = \triangle f$ se nazývá Laplasián, platí

$$\triangle f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,.$$

Také se používá značení $\triangle f = \nabla^2 f$.

Poznámka 4.3: Pokud funkce $\vec{v}$ popisuje rychlost tekutiny, potom $\operatorname{div} \vec{v}$ představuje objem tekutiny, který vyteče z jednotky objemu tekutiny za jednotku času.

Cvičení 4.2: Položte $\vec{v} = (f_2, -f_1)$ a dokažte, že Greenova věta má tvar $\iint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \vec{v}\; dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega^+} \vec{v}\,\vec{n}\,ds$, kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor vnější normály a s je oblouková délka.
[$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}$ a $\vec{v}\,\vec{n}\,ds = (f_2, -f_1) \cdot \frac{\left(\frac{dy}{dt}, -\frac{dx}{dt}\right)}{\sqrt{\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}}\, ds = (f_2, -f_1) \cdot \left(\frac{dy}{dt}, -\frac{dx}{dt}\right) \frac{dt}{ds}\, ds = f_1 dx + f_2 dy$]

Poznámka 4.4: (nezřídlové pole)
Pro nestlačitelné tekutiny je div $\vec{v} = 0$ (tzv. nezřídlové pole) a z předchozího cvičení plyne, že platí vztah

$$\oint\limits_{\partial\Omega^+} \vec{v}\,\vec{n}\,ds = 0\,,$$

který tvrdí, že "co vteče, to vyteče".

V literatuře se často setkáme se značením $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$, potom

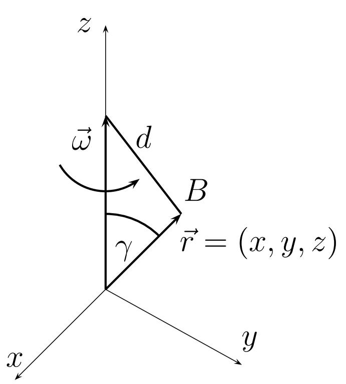
$$\operatorname{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Definice 4.4 : (rotace)
Nechť vektorová funkce $\vec{v}\colon \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ je diferencovatelná funkce, potom vektorová funkce

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \Big(\frac{\partial v_3}{\partial y} - \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}\Big)$$

se nazývá **rotace** funkce $\vec{v}$ (nebo rotace vektorového pole $\vec{v}$).
Pro lepší zapamatování píšeme rotaci ve tvaru

$$\operatorname{rot}\vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$



Poznámka 4.5: (fyzikální význam rotace)
Máme tuhé těleso, které se otáčí kolem osy otáčení o (je totožná se souřadnicovou osou z) konstantní úhlovou rychlostí ω.
Zvolíme vektor $\vec{\omega}$ takový, že $\|\vec{\omega}\| = \omega$, $\vec{\omega} = (0, 0, \omega)$ a při pohledu ve směru vektoru $\vec{\omega}$ se těleso otáčí proti směru hodinových ručiček (pravotočivý systém).
Označíme d vzdálenost bodu B otáčejícího se tělesa od osy otáčení o, potom rychlost $\vec{v}$ otáčení bodu B má velikost $\omega\, d$.
Jestliže vektor $\vec{r} = (x, y, z)$ je průvodič bodu B, potom $d = \|\vec{r}\| \sin\gamma$, kde γ je úhel vektorů $\vec{r}$ a $\vec{\omega}$. Odtud plyne $\omega\, d = \|\vec{\omega}\|\,\|\vec{r}\| \sin\gamma = \|\vec{\omega} \times \vec{r}\|$.
Zároveň $\vec{v} \perp \vec{\omega}$, $\vec{v} \perp \vec{r}$ a vektory $\vec{\omega}, \vec{r}, \vec{v}$ tvoří pravotočivý systém. Tedy $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{v} = (0, 0, \omega) \times (x, y, z) = (-\omega y, \omega x, 0)$ a $\operatorname{rot}\vec{v} = (0, 0, 2\,\omega)$.
Odtud vyplývá, že pro vektorové pole $\vec{v}$ popisující rychlost bodů otáčejícího se tělesa platí

$$\operatorname{rot}\vec{v} = 2\,\vec{\omega}\,.$$

Cvičení 4.3 :

a) Dokažte, že platí $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = 0$.

b) Dokažte, že platí $\operatorname{div}(f\,\vec{v}) = \operatorname{grad} f \cdot \vec{v} + f \cdot \operatorname{div}\vec{v}$.

c) Dokažte, že platí $\operatorname{div}(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \cdot \operatorname{rot}\vec{u} - \vec{u} \cdot \operatorname{rot}\vec{v}$.

d) Dokažte, že Greenovu větu lze psát ve tvaru

$$\iint\limits_{\Omega} \operatorname{rot}\vec{v} \cdot \vec{e}_3 \; dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega^+} \vec{v} \cdot \vec{\tau} \; ds\,,$$

kde $\vec{\tau}$ je jednotkový tečný vektor ke hranici $\partial\Omega$, s je oblouková délka a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

[$\operatorname{rot}\vec{v}\,\vec{e}_3 = \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y}$ a $\vec{\tau} = \frac{\vec{r}\,'}{\|\vec{r}\,'\|} = \frac{\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, 0\right)}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} = \frac{(dx, dy, 0)}{ds} \Rightarrow$ $(v_1, v_2, v_3)\,\frac{(dx, dy, 0)}{ds}\,ds = v_1\,dx + v_2\,dy$]

5 Plochy

Definice 5.1 : (plocha v $\mathbb{E}_3$)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{E}_2$ je jednoduše souvislá množina jejíž hranice $\partial\Omega$ je tvořena křivkou konečné délky.
Množina $S \subset \mathbb{E}_3$ se nazývá **jednoduchá plocha**, jestliže je obrazem vektorové funkce $\vec{r}$ zobrazující množinu Ω na množinu S ($S = \{\vec{r}\,(u,v) = (r_1(u,v), r_2(u,v), r_3(u,v)) : [u,v] \in \Omega\}$) a platí

i) $\vec{r}$ je spojitá funkce na Ω,

ii) $\vec{r}$ je prostá na vnitřku Ω.

Jestliže $\Omega = \overline{\Omega}$ (tj. Ω je uzavřená) a kromě konečně mnoha bodů platí $\forall\,[u_0,v_0] \in \partial\Omega\ \exists\,[u_1,v_1] \in \partial\Omega$, $[u_1,v_1] \neq [u_0,v_0]$ takové, že $\vec{r}\,([u_0,v_0]) = \vec{r}\,([u_1,v_1])$, pak se S nazývá **uzavřená jednoduchá plocha**.
Jestliže platí $\vec{r} \in C^n(\Omega)$ (tzn. n-té parciální derivace vektoru $\vec{r}$ jsou spojité na Ω), pak se S nazývá **jednoduchá plocha třídy** C^n (n-té třídy).
Jestliže $\forall\,[u,v] \in \operatorname{int}\Omega$ (vnitřek Ω) platí

Vektory $\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}$ jsou tedy lineárně nezávislé.

$$\frac{\partial\vec{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\vec{r}}{\partial v}(u,v) \neq \vec{o}\,,$$

pak se S nazývá **regulární jednoduchá plocha**.

Například povrch kužele je plocha.

Jestliže S je křivkově souvislá množina, kterou můžeme rozdělit na konečný počet regulárních jednoduchých ploch třídy C^1, pak se S nazývá **po částech hladká plocha**, zkráceně **plocha**.

Proměnné u, v se nazývají **parametry**, vektor $\vec{r}\,(u_0,v_0)$ se nazývá **průvodič bodu** plochy S a funkce $\vec{r}$ je její **parametrická reprezentace**.
Obraz hranice $\partial\Omega$, tedy množina

$$\partial S = \{\vec{r}\,(u,v) : [u,v] \in \partial\Omega\}$$

se nazývá **okraj plochy** S.

<u>*Příklad 5.1*</u> : Povrch koule je uzavřená (hladká plocha), povrch krychle je uzavřená po částech hladká plocha.

Definice 5.2 : (parametrické křivky)
Nechť $S = \{\vec{r}\,(u,v) : [u,v] \in \Omega\}$ je plocha.
Křivka $\mathcal{K}_u = \{\vec{r}\,(u,v_0) : [u,v_0] \in \Omega\,,\ v_0$ je konstantní$\}$ se nazývá **u-křivka** na ploše S.
Křivka $\mathcal{K}_v = \{\vec{r}\,(u_0,v) : [u_0,v] \in \Omega\,,\ u_0$ je konstantní$\}$ se nazývá **v-křivka** na ploše S.

Příklad 5.2 : (parametrická reprezentace sféry)

Povrch koule, tedy sféra má parametrickou reprezentaci

$\vec{r}\,(u,v) = (\varrho\cos u\cos v, \varrho\sin u\cos v, \varrho\sin v)$, kde $\varrho \in \mathbb{R}^+$ je konstantní a $\Omega = \{[u,v] \in \mathbb{R}^2 : 0 \le u \le 2\pi, -\frac{\pi}{2} \le v \le \frac{\pi}{2}\}$.

Parametrické křivky mají tvar

$\mathcal{K}_u = (\varrho\cos u\cos v_0, \varrho\sin u\cos v_0, \varrho\sin v_0)$ - u-křivka ("rovnoběžka")

$\mathcal{K}_v = (\varrho\cos u_0\cos v, \varrho\sin u_0\cos v, \varrho\sin v)$ - v-křivka ("poledník")

a jejich tečné vektory jsou

$\vec{r}_u = \frac{\partial\vec{r}}{\partial u} = (-\varrho\sin u\cos v_0, \varrho\cos u\cos v_0, 0)$ (ke $\mathcal{K}_u$),

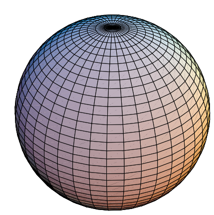
$\vec{r}_v = \frac{\partial\vec{r}}{\partial v} = (-\varrho\cos u_0\sin v, -\varrho\sin u_0\sin v, \varrho\cos v)$ (ke $\mathcal{K}_v$).

Vektorový součin těchto vektorů má tvar

$\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (\varrho^2\cos u\cos^2 v, \varrho^2\sin u\cos^2 v, \varrho^2\sin v\cos v)$.

Označíme $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u\times\vec{r}_v}{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|}$, pak trojice vektorů $(\vec{r}_u, \vec{r}_v, \vec{n})$ tvoří pravotočivý systém a vektor $\vec{n}$ je jednotkový vektor vnější normály k ploše S (směřuje ven).

Koule s parametrickými křivkami



Cvičení 5.1 :

1. Nechť $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-\varrho^2$. Čím je tvořena nulová hladina $f(x,y,z) = 0$ a jaký je vztah $\operatorname{grad} f$ a vektoru $\vec{n}$ z předchozího příkladu (5.2)?
2. Popište plochy tvořené funkcemi:

   $S_1 : \vec{r} = (u\cos v, u\sin v, 2u)\,,\ u \in [0,4],\ v \in [0,2\pi]\,,$

   $S_2 : \vec{r} = ((a+b\cos v)\cos u, (a+b\cos v)\sin u, b\sin v)\,,$
   $u \in [0,2\pi],\ v \in [0,2\pi]\,,\ a,b > 0\,.$

   [Plochu S_1 tvoří kužel s vrcholem v počátku. Plochou S_2 je duše v pneumatice - anuloid.]

Definice 5.3 : (tečná rovina)
Nechť $S = \{\vec{r}\,(u,v) : [u,v] \in \Omega\}$ je hladká plocha. Položíme $A = \vec{r}(u_0,v_0)$, $[u_0,v_0] \in \Omega$, pak **tečná rovina** k ploše S v bodě A je tvořena body:

$$A + t\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0) + s\,\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0)\,, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Jednotkový normálový vektor $\vec{n}$ k ploše S v bodě A je dán vztahem

$$\vec{n} = \pm \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0)}{\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0) \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0)\|}\,. \tag{5.1}$$

Pro parciální derivaci se velmi často používá značení $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \vec{r}_u$, potom

$$\vec{n} = \pm \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}\,.$$

<u>*Poznámka 5.1*</u>: Transformací $(u,v) = \Phi(\tilde{u},\tilde{v})$, pro kterou $u = -\tilde{u}$, $v = \tilde{v}$ změníme orientaci normálového vektoru $\vec{n}$ v opačnou. Tatáž změna orientace nastane, pokud použijeme transformaci $\Phi = (f_1, f_2)$, jejíž jakobián $\det J_\Phi = \frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(\tilde{u},\tilde{v})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial f_1}{\partial \tilde{v}} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{u}} & \frac{\partial f_2}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix}$ je záporný.

Připomeňme, že pro diferenciál oblouku platí $ds = \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$

Uvažujeme malou část tečné roviny, rovnoběžník o stranách $|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}(u_0,v_0)\,\triangle u|$, $|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}(u_0,v_0)\,\triangle v|$, $(\triangle u = u - u_0,\ \triangle v = v - v_0)$, potom jeho velikost $\triangle S$ (plocha) je dána vztahem:

$$\triangle S = \left\| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\,\triangle u \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\,\triangle v \right\|. \tag{5.2}$$

Z cvičení (1.8) vyplývá, že $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|^2 = \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right\|^2 \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\|^2 - \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2$. Odtud dostaneme následující definici velikosti plochy:

Příklady

Definice 5.4 : (velikost plochy)
Nechť $S = \{\vec{r}\,(u,v) : [u,v] \in \Omega\}$ je hladká plocha, potom její **velikost** P je dána vztahem:

$$P = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{\left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\right\|^2 \left\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right\|^2 - \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right)^2}\, dudv = \iint\limits_{\Omega} \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\, dudv. \tag{5.3}$$

<u>*Cvičení 5.2*</u> : Určete velikost povrchu pneumatiky, která je dána funkcí $\vec{r}\,(u,v) = ((a+\cos v)\cos u, (a+\cos v)\sin u, \sin v)$, $u \in [0,2\pi]$, $v \in [0,2\pi]$, $a > 0$. $[4\pi^2 a]$

<u>*Poznámka 5.2*</u>: Jestliže plocha S je popsána explicitně jako graf funkce $z = f(x,y)$, $[x,y] \in S_{xy}$, (S_{xy} je ortogonální projekce plochy S do roviny xy), potom její velikost P je dána vztahem:

$$P = \iint\limits_{S_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dxdy\,. \tag{5.4}$$

<u>*Cvičení 5.3*</u>: Dokažte vztah (5.4) pomocí vztahu (5.3).
[Položíme $u = x$, $v = y$, $\vec{r}\,(u,v) = (x, y, f(x,y))$, potom $\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x} = (1, 0, \frac{\partial f}{\partial x})$, $\frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y} = (0, 1, \frac{\partial f}{\partial y})$ a $\|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}\|^2 \, \|\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\|^2 - (\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v})^2 = (1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2)\,(1 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2) - (\frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial f}{\partial y})^2 = 1 + (\frac{\partial f}{\partial x})^2 + (\frac{\partial f}{\partial y})^2$]

<u>*Příklad 5.3*</u>: (povrch koule)

Vypočítáme velikost povrchu koule o poloměru ϱ.

Využijeme-li parametrizaci sféry z příkladu 5.2, dostaneme $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (\varrho^2 \cos u \cos^2 v, \varrho^2 \sin u \cos^2 v, \varrho^2 \sin v \cos v)$. Tedy $\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| = \varrho^2 \cos v$ a $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Pro velikost P povrchu koule plyne ze vztahu 5.3

$$P = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varrho^2 \cos v \; dv\, du = 2\pi\varrho^2 [\sin v]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi\varrho^2\,.$$

6 Plošné integrály, Gaussova věta, Stokesova věta

6.1 Orientovaná plocha

Definice 6.1 : (orientovaná plocha)
O ploše $S = \{\vec{r}\,(u,v) : (u,v) \in \Omega\}$ řekneme, že je **orientovaná**, jestliže u ní rozlišujeme dvě strany, obvykle **vnější** a **vnitřní** (také horní a dolní).
V každém bodě plochy zvolíme jednotkový normálový vektor $\vec{n}$ (pokud existuje) tak, že směřuje stále na stejnou stranu plochy S. Jestliže $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ $\left(-\frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}\right)$, pak říkáme, že plocha S je **orientovaná souhlasně (nesouhlasně)** se svou parametrizací. Značíme $S = S^+$, $(S = S^-)$.
U uzavřených ploch, tj. u povrchů těles, hovoříme o vnější (vnitřní) straně a **vnější (vnitřní) normále** $\vec{n}$, pokud vektor $\vec{n}$ směřuje ven z (dovnitř) tělesa.
O ploše S říkáme, že je orientovaná souhlasně (nesouhlasně) se svým okrajem, jestliže při obíhání po tomto okraji ve směru orientace okraje je horní strana plochy S, po levé (pravé) ruce.

Vnější normálový vektor a obíhání "tvoří" pravotočivý systém.

Příklad 6.1 :

1. Sféra z příkladu 5.2 je orientovaná souhlasně se svou parametrizací.
2. Möbiův list se nedá orientovat, má pouze jednu stranu. Jeho parametrizace je dána následující funkcí
$\vec{r}\,(u,v) = ((1 + u\sin(v/2))\cos v, (1 + u\sin(v/2))\sin v,$
$u\cos(v/2)), \quad (u,v) \in [-1/2, 1/2] \times [0, 2\pi]$.

Definice 6.2 : (vnitřní průměr plochy)
Máme plochu S, body $A, B \in S$ a množinu K_{AB} všech křivek $\mathcal{K} \subset S$ spojujících body A, B. Označíme $d(\mathcal{K})$ délku křivky $\mathcal{K}$.
Potom číslo
$$d(S) = \sup_{A,B \in S} \inf_{\mathcal{K} \in K_{AB}} d(\mathcal{K}) \tag{6.1}$$
nazveme **vnitřním průměrem plochy** S.

Vzdálenost dvou bodů na ploše je dána délkou nejkratší křivky, která je spojuje. Pak najdeme dva nejvíce vzdálené body a jejich vzdálenost je vnitřní průměr plochy.

Cvičení 6.1 : Určete vnitřní průměr $d(S)$ sféry S z příkladu (5.2)

$[\, d(S) = \pi\varrho \,]$

6.2 Plošné integrály

Definice 6.3 : (plošné integrály)
Mějme orientovanou plochu $S = \{\vec{r}\,(u,v) : (u,v) \in \Omega\}$. Nechť $\mathcal{D}(\Omega) = \{\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_n\}$ je dělení množiny Ω, potom plochy $S_k = \{\vec{r}\,(u,v) : (u,v) \in \Omega_k\}$ tvoří dělení $\mathcal{D}(S)$ plochy S. Zvolíme bod $[u_k, v_k] \in \Omega_k$, potom obraz $\vec{r}\,(u_k, v_k) \in S_k$ a $\vec{n}(u_k, v_k) = (n_{k1}, n_{k2}, n_{k3})$ je jednotkový normálový vektor k ploše S_k v bodě $\vec{r}\,(u_k, v_k)$. Označíme $\triangle S_k$ velikost plochy S_k. K funkci $f : S \to \mathbb{R}$ definujeme **integrální součty** rovnostmi:

$$J(f, \mathcal{D}(S)) = \sum_{k=1}^{n} f(\vec{r}\,(u_k, v_k))\,\triangle S_k\,,$$

a

$$J_i(f, \mathcal{D}(S^+)) = \sum_{k=1}^{n} f(\vec{r}\,(u_k, v_k))\,n_{ki}\,\triangle S_k\,, \quad i = 1, 2, 3\,.$$

Jestliže níže uvedené limity existují, potom **plošný integrál 1. druhu** definujeme vztahem:

$$\iint\limits_{S} f(\vec{r}\,)\,dS = \lim_{\max\limits_{k} d(S_k) \to 0} J(f, \mathcal{D}(S))\,, \tag{6.2}$$

plošný integrál 2. druhu definujeme vztahem:

$$\iint\limits_{S^+} f(\vec{r}\,)\,n_i\,dS = \lim_{\max\limits_{k} d(S_k) \to 0} J_i(f, \mathcal{D}(S^+))\,, \quad i = 1, 2, 3\,. \tag{6.3}$$

Příklady

Poznámka 6.1 :

1. Plošný integrál 2. druhu závisí na orientaci jednotkového normálového vektoru $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ a často se používá pro vektorovou funkci $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ ve tvaru

$$\iint\limits_{S^+} \vec{v}\,\vec{n}\,dS = \iint\limits_{S^+} v_1 n_1 + v_2 n_2 + v_3 n_3\,dS\,.$$

   Hovoříme o plošném integrálu z vektorového pole nebo **o toku vektorového pole** plochou S.

2. Označíme-li α, β, γ úhly, které svírá jednotkový normálový

vektor $\vec{n}$ s osami x, y, z (v kladném směru), potom platí $\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$, $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ a pro plošný integrál druhého druhu dostaneme

$$\iint\limits_{S^+} f(\vec{r})\, n_1\, dS = \iint\limits_{S^+} f(\vec{r})\, \cos\alpha\, dS = \iint\limits_{S_{yz}} f(\vec{r}) \frac{n_1}{|n_1|}\, dydz\,,$$

$$\iint\limits_{S^+} f(\vec{r})\, n_2\, dS = \iint\limits_{S^+} f(\vec{r})\, \cos\beta\, dS = \iint\limits_{S_{xz}} f(\vec{r}) \frac{n_2}{|n_2|}\, dxdz\,,$$

$$\iint\limits_{S^+} f(\vec{r})\, n_3\, dS = \iint\limits_{S^+} f(\vec{r})\, \cos\gamma\, dS = \iint\limits_{S_{xy}} f(\vec{r}) \frac{n_3}{|n_3|}\, dxdy\,,$$

kde S_{xy} je průmět plochy S^+ do roviny-xy ap.

3. Pokud S je uzavřená plocha a $\vec{n}$ je jednotkový vektor vnější normály, potom píšeme

$$\iint\limits_{S^+} f(\vec{r})\, n_i\, dS = \oiint\limits_{S^+} f(\vec{r})\, n_i\, dS\,.$$

Příklady

Věta 6.1 : (výpočet plošných integrálů)
Nechť $S = \{\vec{r}\,(u,v) : (u,v) \in \Omega\}$ je plocha a $f\colon S \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, potom níže uvedené plošné integrály existují a platí

$$\iint\limits_{S} f(\vec{r})\, dS = \iint\limits_{\Omega} f(\vec{r}\,(u,v))\, \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\, du\, dv\,. \tag{6.4}$$

Jestliže $S = S^+$ (plocha je orientovaná souhlasně se svou parametrizací), pak

$$\iint\limits_{S^+} f(\vec{r})\, n_3\, dS = \iint\limits_{\Omega} f(\vec{r}\,(u,v))\, \frac{\partial(r_1, r_2)}{\partial(u,v)}\, du\, dv\,. \tag{6.5}$$

Pro spojitou vektorovou funkci $\vec{v}\colon S \to \mathbb{E}_3$ dostaneme

$$\iint\limits_{S^+} \vec{v}\, \vec{n}\, dS = \iint\limits_{\Omega} \vec{v} \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\, du\, dv\,. \tag{6.6}$$

Pro smíšený součin tří vektorů platí

$$\vec{w}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \begin{vmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

Důkaz : Rovnost (6.4) plyne ze vztahu (5.2) pro velikost plochy, kde $dS = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\, du\, dv$.

Ze vztahu (5.1) pro jednotkový normálový vektor $\vec{n} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ vyplývá $\vec{n}\, dS = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|\, du\, dv = \vec{r}_u \times \vec{r}_v\, du\, dv$ a odtud dostaneme rovnost (6.6).

Rovnost (6.5) plyne z následujících úprav

$$n_3\ dS = \big((0,0,1)\,,\,\vec{n}\big)\ dS = (0,0,1)\cdot(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\ du\, dv = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_3}{\partial u} \\ \frac{\partial r_1}{\partial v} & \frac{\partial r_2}{\partial v} & \frac{\partial r_3}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial u} \\ \frac{\partial r_1}{\partial v} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix} du\, dv = \frac{\partial(r_1,r_2)}{\partial(u,v)}\, du\, dv\,.$$

(Podobně lze upravit i $n_1\, dS = \frac{\partial(r_2,r_3)}{\partial(u,v)}$ a $n_2\, dS = -\frac{\partial(r_1,r_3)}{\partial(u,v)}$.)

$\frac{\partial(r_1,r_2)}{\partial(u,v)}$ je Jakobián zobrazení množiny Ω do průmětu S_{xy} množiny S do roviny xy. Platí

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial u} \\ \frac{\partial r_1}{\partial v} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial u} & \frac{\partial r_1}{\partial v} \\ \frac{\partial r_2}{\partial u} & \frac{\partial r_2}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Poznámka 6.2: Jestliže plocha S je tvořena grafem funkce $z = z(x,y)$ a S_{xy} je ortogonální průmět plochy S do roviny xy, pak platí

$$\iint\limits_{S^+} f(\vec{r}\,)\, n_3\, dS = \iint\limits_{S_{xy}} f(x,y,z(x,y))\, \frac{n_3}{|n_3|}\, dx\, dy\,. \tag{6.7}$$

Cvičení 6.2 : Jestliže plocha S je tvořena grafem funkce $z = z(x,y)$ a S_{xy} je ortogonální průmět plochy S do roviny-xy, pak dokažte, že platí

$$\iint\limits_{S} f(\vec{r}\,)\ dS = \iint\limits_{S_{xy}} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\tfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\tfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\ dx\, dy\,. \tag{6.8}$$

6.3 Gaussova věta

Věta 6.2 : (Gaussova věta)
Nechť V je omezené těleso, jehož hranice je tvořena orientovanou uzavřenou plochou S^+ a vektorová funkce $\vec{v} \in C^1(\overline{V})$, potom platí

$$\iiint\limits_{V} \operatorname{div} \vec{v}\ dV = \oint\!\!\!\oint\limits_{S^+} \vec{v}\,\vec{n}\ dS\,, \tag{6.9}$$

kde $\vec{n}$ je jednotkový vektor vnější normály k ploše S^+.

Příklady

"Co vznikne v tělese V, to proteče povrchem S."

<u>Důkaz</u> : Přepíšeme rovnost (6.9) do tvaru

$$\iiint_V \Big(\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}\Big)\,dxdydz = \iint_{S^+}(v_1n_1+v_2n_2+v_3n_3)\,dS.$$

Vidíme, že stačí postupně pro $i=1,2,3$ dokázat rovnosti

$$\iiint_V \frac{\partial v_i}{\partial r_i}\,dV = \iint_{S^+} v_i n_i\,dS\,, \quad \text{kde} \quad r_1=x, r_2=y, r_3=z\,. \tag{6.10}$$

Budeme předpokládat, že těleso V lze "popsat funkcemi", to znamená, že existují funkce $z_1(x,y), z_2(x,y)$ a platí

$V=\{[x,y,z]\in\mathbb{R}^3 : z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y)\,,\ [x,y]\in V_{xy}\}\,,$
kde V_{xy} je ortogonální průmět tělesa V do roviny-xy.

Dokážeme vztah (6.10) pro $i=3$. Z Fubiniovy věty vyplývá

$$\iiint_V \frac{\partial v_3}{\partial z}\,dxdydz = \iint_{V_{xy}} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial v_3}{\partial z}\,dz\,dxdy = \tag{6.11}$$
$$\iint_{V_{xy}}[v_3(x,y,z_2(x,y)) - v_3(x,y,z_1(x,y))]\,dxdy\,.$$

Povrch tělesa V značíme S, podobně $V_{xy}=S_{xy}$. Položíme $S=S_1\cup S_2\cup S_z$ tak, že povrch S_1 je tvořen grafem funkce z_1, povrch S_2 je tvořen grafem funkce z_2 a povrch S_z je rovnoběžný s osou z. Na ploše S_1 je $n_3<0$ (tedy $S_1=S_1^-$), na ploše S_2 je $n_3>0$ ($S_2=S_2^+$) a na S_z je $n_3=0$. Odtud a ze vztahu (6.7) vyplývá

$$\iint_{V_{xy}}[v_3(x,y,z_2(x,y)) - v_3(x,y,z_1(x,y))]\,dxdy =$$
$$\iint_{S_{xy}} v_3(x,y,z_2(x,y))\,dxdy - \iint_{S_{xy}} v_3(x,y,z_1(x,y))\,dxdy =$$
$$\iint_{S_2} v_3n_3\,dS + \iint_{S_1} v_3n_3\,dS + \iint_{S_z} v_3\,0\,dS = \iint_{S^+} v_3n_3\,dS.$$

Dokázali jsme platnost rovnosti (6.10) pro $i=3$. Pro $i=1,2$ je důkaz podobný.

Pro těleso V, které vznikne sjednocením konečného počtu těles "popsatelných funkcemi", dostaneme tvrzení věty součtem přes všechna tělesa. Plošné integrály na společných hranicích mají opačná znaménka a odečtou se.

Příklad 6.2 : (nezávislost divergence na souřadnicovém systému)

Z věty o střední hodnotě vyplývá, že existuje bod $A \in V$ takový, že

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{v}\, dV = \operatorname{div} \vec{v}(A) \cdot \operatorname{meas}(V)\,,$$

kde $\operatorname{meas}(V)$ je míra (objem) tělesa V. Nechť bod B je pevný, V je koule se středem v bodě B a S je její povrch, potom z Gaussovy věty plyne

$$\iint_S \vec{v}\,\vec{n}\, dS = \operatorname{div} \vec{v}(A) \cdot \operatorname{meas}(V)\,.$$

Nyní předpokládáme, že funkce $\vec{v}$ má spojité parciální derivace. Pro $\operatorname{meas}(V) \to 0$ dostaneme $A \to B$ a platí

$$\operatorname{div} \vec{v}(B) = \lim_{\operatorname{meas}(V) \to 0} \frac{\iint_S \vec{v}\,\vec{n}\, dS}{\operatorname{meas}(V)}\,.$$

Odtud již plyne nezávislost hodnoty divergence na souřadnicovém systému. (Plošný integrál a objem tělesa se nemění se změnou souřadnicového systému).

Příklad 6.3 : (objem tělesa)

Položíme-li $\vec{v} = \frac{1}{3}(x, y, z)$, pak z Gaussovy věty dostaneme pro objem tělesa V vztah

$$\operatorname{meas}(V) = \iiint_V 1\, dV = \frac{1}{3} \iint_{S^+} (x, y, z) \cdot \vec{n}\, dS\,.$$

Cvičení 6.3 : Pomocí předchozí rovnosti spočítejte objem koule.

[Podle příkladu (5.2) je vnější jednotkový normálový vektor k povrchu koule $\vec{n} = \frac{(\varrho^2 \cos u \cos^2 v, \varrho^2 \sin u \cos^2 v, \varrho^2 \sin v \cos v)}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$, tedy $(x, y, z) \cdot \vec{n} = \frac{\varrho^3 \cos v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|}$ a $\operatorname{meas}(V) = \frac{1}{3} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2\pi} \varrho^3 \cos v\, du\, dv = \frac{4}{3}\pi\varrho^3\,.$]

Pro kouli o objemu V, povrchu S a poloměru ϱ dostaneme rovnost $V = \frac{1}{3}\,\varrho\, S\,.$

6.4 Stokesova věta

Věta 6.3 : (Stokesova věta)
Nechť vektorová funkce $\vec{v} \in C^1(V)$, $V \subset \mathbb{E}_3$. Nechť plocha S, $\overline{S} \subset V$, má okraj tvořený křivkou ∂S a je orientovaná souhlasně se svým okrajem, potom platí

$$\iint\limits_{S^+} \operatorname{rot} \vec{v}\, \vec{n}\; dS = \oint\limits_{\partial S^+} \vec{v}\, \vec{\tau}\; ds\,, \tag{6.12}$$

kde $\vec{n}$ je jednotkový normálový vektor k ploše S^+ a $\vec{\tau}$ je jednotkový tečný vektor ke křivce ∂S^+.

Příklady

Důkaz : Přepíšeme rovnost (6.12) pomocí souřadnic vektorů $\vec{n}=(n_1,n_2,n_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $\vec{r}=(r_1,r_2,r_3)=(x,y,z)$ do tvaru

$$\iint\limits_{S^+} \left[\left(\tfrac{\partial v_3}{\partial y} - \tfrac{\partial v_2}{\partial z}\right)n_1 + \left(\tfrac{\partial v_1}{\partial z} - \tfrac{\partial v_3}{\partial x}\right)n_2 + \left(\tfrac{\partial v_2}{\partial x} - \tfrac{\partial v_1}{\partial y}\right)n_3\right]\, dS =$$
$$\oint\limits_{\partial S^+} \vec{v}\, \tfrac{1}{\|\vec{r}\,'\|}\left(\tfrac{dr_1}{dt}, \tfrac{dr_2}{dt}, \tfrac{dr_3}{dt}\right)\|\vec{r}\,'\|\; dt = \oint\limits_{\partial S^+} v_1\, dx + v_2\, dy + v_3\, dz\,.$$

Budeme předpokládat, že plocha S se dá "popsat funkcemi", to znamená, že pro body $[x,y,z] \in S$ platí : $z = z(x,y)$, $y = y(x,z)$, $x = x(y,z)$ a funkce x, y, z jsou spojitě diferencovatelné. Nejdříve dokážeme

$$\iint\limits_{S^+} \left[\frac{\partial v_1}{\partial z} n_2 - \frac{\partial v_1}{\partial y} n_3\right]\, dS = \oint\limits_{\partial S^+} v_1\; dx\,. \tag{6.13}$$

Označíme S^+_{xy}, ∂S^+_{xy} projekce plochy S^+ a jejího okraje ∂S^+ do roviny-xy. Podle bodu 3 z poznámky 3.2 pak platí $\oint\limits_{\partial S^+} v_1\, dx = \oint\limits_{\partial S^+_{xy}} v_1(x,y,z(x,y))\; dx$. Nyní v Greenově větě (vztah (3.4)) položíme $f_1 = v_1$, $f_2 = 0$ a dostaneme

$$\oint\limits_{\partial S^+_{xy}} v_1(x,y,z(x,y))\; dx = -\iint\limits_{S^+_{xy}} \frac{\partial v_1(x,y,z(x,y))}{\partial y}\; dxdy =$$
$$-\iint\limits_{S^+_{xy}} \left[\frac{\partial v_1(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial v_1(x,y,z)}{\partial z}\,\frac{\partial z}{\partial y}\right]\; dxdy\,. \tag{6.14}$$

Zbývá dokázat, že pravá strana v rovnosti (6.14) se rovná levé straně v rovnosti (6.13). Tečné vektory k ploše S jsou

$\vec{r}_x = (1, 0, \frac{\partial z}{\partial x})$, $\vec{r}_y = (0, 1, \frac{\partial z}{\partial y})$ a jednotkový normálový vektor má tvar $\vec{n} = (-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)/\|(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)\|$.

Tedy $n_2 = -\frac{1}{\|(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)\|}\frac{\partial z}{\partial y}$, $n_3 = \frac{1}{\|(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)\|}$. Dále podle (5.2) je $dS = \|(-\frac{\partial z}{\partial x}, -\frac{\partial z}{\partial y}, 1)\|\, dxdy$. Odtud pro levou stranu rovnosti (6.13) dostaneme

$$\iint\limits_{S^+} \Big[\frac{\partial v_1}{\partial z} n_2 - \frac{\partial v_1}{\partial y} n_3\Big]\, dS = -\iint\limits_{S^+_{xy}} \Big(\frac{\partial v_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial v_1}{\partial y}\Big)\, dxdy\,,$$

což jsme měli dokázat.
Podobně jako rovnost (6.13) lze dokázat i rovnosti obsahující funkce v_2, v_3 a sečtením těchto rovností dostaneme tvrzení věty.

Příklad 6.4 : (nezávislost rotace na souřadnicovém systému)

Z věty o střední hodnotě vyplývá, že existuje bod $A \in S$ takový, že

$$\iint\limits_{S} \operatorname{rot} \vec{v}\, \vec{n}\; dS = \operatorname{rot} \vec{v}(A)\, \vec{n}(A)\, \operatorname{meas}(S) \tag{6.15}$$

Nechť B je střed kruhu S, potom z (6.15) a (6.12) vyplývá $\oint_{\partial S} \vec{v}\; d\vec{s} = \operatorname{rot} \vec{v}(A)\, \vec{n}\, \operatorname{meas}(S)$ (u kruhu je jednotkový normálový vektor všude stejný).

Jestliže funkce $\vec{v}$ je spojitě diferencovatelná, pak pro zmenšující se kruh (tzn. $\operatorname{meas} S \to 0$) je $\operatorname{rot} \vec{u}(A) \to \operatorname{rot} \vec{v}(B)$ a platí

$$\operatorname{rot} \vec{v}(B)\, \vec{n} = \lim_{\operatorname{meas}(S)\to 0} \frac{\oint_{\partial S} \vec{v}\; d\vec{s}}{\operatorname{meas}(S)} \quad (= \operatorname{rot} \vec{v}_n(B))\,.$$

Rotace $\operatorname{rot} \vec{v}(B)$ je vektor, jehož projekce do vektoru $\vec{n}$ kolmého k plošce S se rovná plošné hustotě cirkulace vektorového pole $\vec{v}$ po hranici plošky S. Nenulová rotace určuje body vírů vektorového pole $\vec{v}$.

Cvičení 6.4 :

a) Nechť $\vec{v} = \operatorname{grad} f$, pak $\oint\limits_{\mathcal{K}} \vec{v}\, d\vec{s} = 0$. Dokažte.

b) Vypočítejte $\oint_{\mathcal{K}} \vec{v}\, d\vec{s}$, $\vec{v} = (-y, x, 0)\cdot\frac{1}{x^2+y^2}$, kde křivka $\mathcal{K} : x^2 + y^2 = 1; z = 0$ je orientovaná ve směru hodinových ručiček. Proč nemůžeme použít Stokesovu větu? Spočítejte $\iint\limits_{S} \operatorname{rot} \vec{v}\, \vec{n}\; dS$, pokud $\vec{v} = (z, x, y)$ a S je čtverec s vrcholy (0,0,0), (1,0,0), (1,1,0), (0,1,0). [± 1]

7 Nezávislost na cestě, operátory v křivočarých souřadnicích

7.1 Nezávislost křivkového integrálu na cestě

Z cvičení 3.1 víme, že křivkový integrál druhého druhu $\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{v}\, d\vec{s}$ závisí na tom, po jakých orientovaných křivkách se pohybujeme z počátečního bodu A do koncového bodu B. Následující příklad bude ilustrovat situaci, kdy na tvaru křivky $\mathcal{K}$ nezáleží.

Příklady

Příklad 7.1 : Nechť $\vec{v}(x,y,z) = (2x+3y, 3x+4y, 0)$ a pro $t \in [0,1]$ uvažujeme křivky

$\mathcal{K}_1 = \{(t,t,0)\}\,,\ \mathcal{K}_2 = \{(t^2,t,0)\}\,,\ \mathcal{K}_3 = \{(t,t^2,0)\}\,.$

Všechny uvedené křivky mají stejný počáteční a koncový bod a obecně platí:

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \vec{v}(x,y,z)\, d\vec{s} = \int\limits_0^1 \left[v_1 \frac{dr_1}{dt} + v_2 \frac{dr_2}{dt} + v_3 \frac{dr_3}{dt} \right] dt\,.$$

Tedy:

$$\int\limits_{\mathcal{K}_1} \vec{v}(x,y,z)\, d\vec{s} = \int\limits_0^1 (2t+3t+3t+4t)\, dt = 6\,,$$

$$\int\limits_{\mathcal{K}_2} \vec{v}(x,y,z)\, d\vec{s} = \int\limits_0^1 [(2t^2+3t)\cdot 2t + (3t^2+4t)\cdot 1]\, dt = 6\,,$$

$$\int\limits_{\mathcal{K}_3} \vec{v}(x,y,z)\, d\vec{s} = \int\limits_0^1 [(2t+3t^2)\cdot 1 + (3t+4t^2)\cdot 2t]\, dt = 6\,.$$

Definice 7.1 : (nezávislost na cestě)
Nechť $\Omega \subset \mathbb{E}_3$ je oblast (otevřená, souvislá množina), body $A, B \in \Omega$ a křivka $\mathcal{K} \subset \Omega$ s počátečním bodem A a koncovým bodem B. Dále $\vec{v}$ je vektorová funkce spojitá na Ω. Jestliže hodnota křivkového integrálu $\int\limits_{\mathcal{K}^+} \vec{v}\, d\vec{s}$ je závislá pouze na bodech A, B a je nezávislá na tvaru křivky $\mathcal{K}^+$, pak říkáme, že uvedený integrál je **nezávislý na cestě** v množině Ω.

Definice 7.2 : (potenciální vektorové pole)
Nechť k vektorovému poli $\vec{v} \in C(\Omega)$ existuje na oblasti Ω diferencovatelná funkce $f : \Omega \to \mathbb{R}$ taková, že $\vec{v}(x) = \operatorname{grad} f(x)$ $\forall\, x \in \Omega$, pak se funkce f nazývá **potenciál vektorového pole** a $\vec{v}$ je **potenciální vektorové pole**.

Věta 7.1 : Nechť $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{E}_3$ je spojitá vektorová funkce, potom křivkový integrál $\int_{\mathcal{K}} \vec{v}\, d\vec{s}$ je nezávislý na cestě právě tehdy, když $\vec{v}$ je potenciální vektorové pole.

Důkaz : "$\Rightarrow$" Nechť $\int_{\mathcal{K}} \vec{v}\, d\vec{s}$ je nezávislý na cestě. Zvolíme pevné body $A = [x_0, y_0, z_0]$ a $B = [x, y, z]$ v oblasti Ω. Položíme $f(x, y, z) = \int_{\widehat{AB}} v_1\, dx + v_2\, dy + v_3\, dz$, kde $\widehat{AB}$ je libovolná křivka spojující body A, B. Ukážeme, že $\frac{\partial f}{\partial x} = v_1$. Podle předpokladu platí

$$\int_{\widehat{AB}} v_1\, dx + v_2\, dy + v_3\, dz = \int_{\widehat{AB_1}} \vec{v}\, d\vec{s} + \int_{\widehat{B_1 B}} \vec{v}\, d\vec{s},$$

kde $B_1 = [x_0, y, z]$. Předpokládáme, že úsečka $B_1 B$ leží v Ω. Na cestě od bodu A k bodu B_1 je proměnná x konstantní ($x = x_0$). Tudíž $\frac{\partial}{\partial x}\big(\int_{\widehat{AB_1}} \vec{v}\, d\vec{s}\big) = 0$ a $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \int_{\widehat{B_1 B}} \vec{v}\, d\vec{s}$. Na úsečce $B_1 B$ se proměnné y, z nemění, tedy $dy = dz = 0$ a platí $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{x_0}^{x} v_1(\xi, y, z)\, d\xi = v_1(x, y, z)$. Podobně lze dokázat i $\frac{\partial f}{\partial y} = v_2$, $\frac{\partial f}{\partial z} = v_3$.

"$\Leftarrow$" Nyní předpokládáme, že existuje funkce f taková, že $\vec{v} = \operatorname{grad} f$. Dále nechť křivka $\mathcal{K}$ z bodu A do bodu B má parametrickou reprezentaci $\vec{r}(t) = (x(t)), y(t), z(t))$ a $\vec{r}(\alpha) = A$, $\vec{r}(\beta) = B$. Potom $\int_{\widehat{AB}} \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy + \frac{\partial f}{\partial z}\, dz = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{df}{dt}\, dt = [f(x(t), y(t), z(t))]_{\alpha}^{\beta} = f(B) - f(A)$. Odtud vyplývá, že integrál $\int_{\widehat{AB}} \vec{v}\, d\vec{s}$ nezávisí na křivce $\widehat{AB}$ spojující body A a B.

Připomeňme, že pro diferenciál funkce f platí $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$, tedy $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{dt}$.

Z důkazu plyne, že pro pole $\vec{v}$ s potenciálem f platí

$$\int_{\mathcal{K}} \vec{v}\, d\vec{s} = f(B) - f(A),$$

kde $\mathcal{K}$ je křivka z bodu A do bodu B.

Poznámka 7.1: Vektorové pole $\vec{v} : \Omega \to \mathbb{E}_3$, $\vec{v} \in C^1(\Omega)$, je potenciální (také) právě tehdy, když

a) $\oint_{\mathcal{K}} \vec{v}\, d\vec{s} = 0 \quad \forall \mathcal{K} \subset \Omega$, $\mathcal{K}$ je uzavřená křivka (tzn. cirkulace je nulová - viz definice 3.3)

b) $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{o}$ na Ω. Tedy $\left(\frac{\partial v_3}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial z}, \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{\partial v_3}{\partial x}, \frac{\partial v_2}{\partial x} = \frac{\partial v_1}{\partial y}\right)$.

7.2 Operátory v křivočarých souřadnicích

Při výpočtu dvojných a trojných integrálů velice často využíváme přechodu od kartézských k jiným (křivočarým) souřadnicím. Najdeme nyní tvary operátorů grad, div, rot v těchto nových souřadnicích.

Předpokládáme, že v $\mathbb{E}_3$ jsou dány dvě soustavy souřadnic (viz definice 1.9) se souřadnicemi r_i, q_i, $i = 1, 2, 3$, které jsou svázány zobrazením $\Phi : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$, $\vec{r} = \Phi(\vec{q})$ s transformačními rovnicemi:

$$\begin{aligned} r_1 &= r_1(q_1, q_2, q_3) \\ r_2 &= r_2(q_1, q_2, q_3) \\ r_3 &= r_3(q_1, q_2, q_3) \end{aligned} \tag{7.1}$$

Parabolické cylindrické souřadnice jsou definované rovnicemi

$r_1 = \frac{1}{2}(q_1^2 - q_2^2)$
$r_2 = q_1 q_2$
$r_3 = q_3$.

a inverzním zobrazením $\Phi^{-1} : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$, $\vec{q} = \Phi^{-1}(\vec{r})$ s rovnicemi:

$$\begin{aligned} q_1 &= q_1(r_1, r_2, r_3) \\ q_2 &= q_2(r_1, r_2, r_3) \\ q_3 &= q_3(r_1, r_2, r_3) . \end{aligned} \tag{7.2}$$

Dále předpokládáme, že zobrazení Φ, Φ^{-1} jsou spojitě diferencovatelná a regulární (tzn. že $\det J_\Phi \neq 0$ viz MA II).

Definice 7.3 : (souřadnicová plocha, souřadnicová křivka)
Nechť $q_1 = q_{01}$, je konstantní a q_2, q_3 jsou libovolné (parametry), pak rovnice

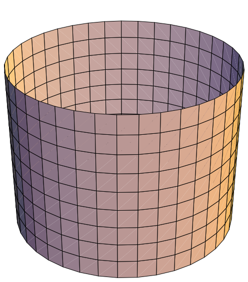
$$\vec{r} = \vec{r}(q_{01}, q_2, q_3) \tag{7.3}$$

je parametrickou reprezentací plochy v $\mathbb{E}_3$, která se nazývá **souřadnicová plocha**. Pro pevné $q_2 = q_{02}$, $q_3 = q_{03}$ dostaneme zbývající souřadnicové plochy:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_{02}, q_3) \qquad \vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_{03}) \tag{7.4}$$

U cylindrických souřadnic dostaneme pro pevné ϱ plášť válce, pro pevné φ rovinu procházející osou z a pro pevné z rovinu rovnoběžnou s rovinou xy.

Každé dvě souřadnicové plochy se protínají v **souřadnicových křivkách** (konstantní jsou dva parametry).
Křivka $\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_{02}, q_{03})$ se nazývá q_1-křivka. Analogicky definujeme q_2-křivku, q_3-křivku. O souřadnicích (q_1, q_2, q_3) hovoříme jako o **křivočarých souřadnicích**.



Příklad 7.2 : (cylindrické souřadnice)
Nechť $(r_1, r_2, r_3) = (x, y, z)$; $(q_1, q_2, q_3) = (\varrho, \varphi, z)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\varrho \in [0, \infty]$, $z \in \mathbb{R}$ a $\Phi : x = \varrho\cos\varphi$, $y = \varrho\sin\varphi$, $z = z$.
Φ^{-1}: $\varrho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $z = z$.

Potom zobrazení Φ^{-1} se nazývá **soustava cylindrických souřadnic**.

Definice 7.4 : (křivočará báze)
Nechť $A = [q_{01}, q_{02}, q_{03}] \in \mathbb{E}_3$ a $B = \vec{r}\,(A) \in \mathbb{E}_3$. Označíme

$$\vec{\vec{e}}_i = \Big(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i}\Big)(A), \quad i = 1, 2, 3\,.$$

Pak vektory $\vec{\vec{e}}_1, \vec{\vec{e}}_2, \vec{\vec{e}}_3$ tvoří **křivočarou bázi** (lokální báze, která se mění v závislosti na A). Uspořádaná dvojice $(B\,, \{\vec{\vec{e}}_1, \vec{\vec{e}}_2, \vec{\vec{e}}_3\})$ tvoří **křivočarou souřadnicovou soustavu**.

V cylindrických souřadnicích je
$\vec{\vec{e}}_1 = (\cos\varphi, \sin\varphi, 0)$,
$\vec{\vec{e}}_2 = (-\varrho\sin\varphi, \varrho\cos\varphi, 0)$,
$\vec{\vec{e}}_3 = (0, 0, 1)$.
Dále platí $\|\vec{\vec{e}}_1\| = 1$, $\|\vec{\vec{e}}_2\| = \varrho$, $\|\vec{\vec{e}}_3\| = 1$ a $(\vec{\vec{e}}_i, \vec{\vec{e}}_j) = 0$, $i \neq j$. Jakobiova matice má tvar

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\varrho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \varrho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a pro její determinant platí $\det J_\Phi = \varrho$.

J_Φ je matice přechodu od báze $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ k bázi $\vec{\vec{e}}_1, \vec{\vec{e}}_2, \vec{\vec{e}}_3$.

Poznámka 7.2: Jacobiova matice J_Φ zobrazení Φ ze (7.1) má tvar

$$J_\Phi = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \vec{q}} = \frac{\partial(r_1, r_2, r_3)}{\partial(q_1, q_2, q_3)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial r_1}{\partial q_1} & \frac{\partial r_1}{\partial q_2} & \frac{\partial r_1}{\partial q_3} \\ \frac{\partial r_2}{\partial q_1} & \frac{\partial r_2}{\partial q_2} & \frac{\partial r_2}{\partial q_3} \\ \frac{\partial r_3}{\partial q_1} & \frac{\partial r_3}{\partial q_2} & \frac{\partial r_3}{\partial q_3} \end{pmatrix}$$

Vektory $\vec{\vec{e}}_i = (\frac{\partial r_1}{\partial q_i}, \frac{\partial r_2}{\partial q_i}, \frac{\partial r_3}{\partial q_i})$, $i = 1, 2, 3$, tvoří sloupce Jakobiovy matice, jejíž determinant $\det J_\Phi \neq 0$ (Φ je regulární). Proto jsou vektory $\vec{\vec{e}}_1, \vec{\vec{e}}_2, \vec{\vec{e}}_3$ lineárně nezávislé a tvoří bázi.

Věta 7.2 : (operátory v křivočarých souřadnicích)
Nechť f je diferencovatelná funkce a $\vec{v} = \widehat{v}_1\,\vec{\vec{e}}_1 + \widehat{v}_2\,\vec{\vec{e}}_2 + \widehat{v}_3\,\vec{\vec{e}}_3$ je diferencovatelná vektorová funkce, $f, v_i : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$. Označíme $h_i = \|\vec{\vec{e}}_i\|$, tzv. Laméovy koeficienty, a položíme $h = h_1 h_2 h_3$. Jestliže vektory $\vec{\vec{e}}_1, \vec{\vec{e}}_2, \vec{\vec{e}}_3$ jsou ortogonální a pravotočivé, potom platí

$$\operatorname{grad} f(\vec{r}) = \frac{1}{h_1^2}\frac{\partial f(\vec{q})}{\partial q_1}\,\vec{\vec{e}}_1 + \frac{1}{h_2^2}\frac{\partial f(\vec{q})}{\partial q_2}\,\vec{\vec{e}}_2 + \frac{1}{h_3^2}\frac{\partial f(\vec{q})}{\partial q_3}\,\vec{\vec{e}}_3 \tag{7.5}$$

$$\operatorname{div} \vec{v}(\vec{r}) = \frac{1}{h}\left[\frac{\partial(\widehat{v}_1\,h)}{\partial q_1} + \frac{\partial(\widehat{v}_2\,h)}{\partial q_2} + \frac{\partial(\widehat{v}_3\,h)}{\partial q_3}\right] \tag{7.6}$$

$$\operatorname{rot} \vec{v}(\vec{r}) = \frac{1}{h}\begin{vmatrix} \vec{\vec{e}}_1 & \vec{\vec{e}}_2 & \vec{\vec{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3} \\ h_1^2\widehat{v}_1 & h_2^2\widehat{v}_2 & h_3^2\widehat{v}_3 \end{vmatrix} \tag{7.7}$$

Pro souřadnice vektoru $\vec{v} = \widehat{v}_1\,\vec{\vec{e}}_1 + \widehat{v}_2\,\vec{\vec{e}}_2 + \widehat{v}_3\,\vec{\vec{e}}_3$ v ortogonální bázi a souřadnice vektoru $\vec{v} = \mathbf{v}_1\mathbf{e}_1 + \mathbf{v}_2\mathbf{e}_2 + \mathbf{v}_3\mathbf{e}_3$ v ortonormální bázi platí $\mathbf{v}_i = h_i\,v_i$, $i = 1, 2, 3$.

Poznámka 7.3: Jiní autoři uvažují ortonormální bázi, tedy položí $\mathbf{e}_i = \frac{\vec{\vec{e}}_i}{\|\vec{\vec{e}}_i\|}$, potom např. $\operatorname{grad} f = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{1}{h_i}\,\frac{\partial f}{\partial q_i}\,\mathbf{e}_i$.

Důkaz : (dokážeme pouze vztahy (7.5), (7.6)).

Chceme vyjádřit gradient funkce f v křivočarých souřadnicích, tzn. ve tvaru $\operatorname{grad} f(\vec{q}\,) = \widehat{f}_1\,\widehat{\vec{e}}_1 + \widehat{f}_2\,\widehat{\vec{e}}_2 + \widehat{f}_3\,\widehat{\vec{e}}_3$. Z definice diferenciálu plyne

$$d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\,dq_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\,dq_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\,dq_3 = \widehat{\vec{e}}_1\,dq_1 + \widehat{\vec{e}}_2\,dq_2 + \widehat{\vec{e}}_3\,dq_3\,. \tag{7.8}$$

Pro diferenciál funkce f tedy platí

$$\begin{aligned} df(\vec{q}\,) &= \operatorname{grad} f(\vec{r}\,(\vec{q}\,)) \cdot d\vec{r}\,(\vec{q}\,) \\ &= (\widehat{f}_1\,\widehat{\vec{e}}_1 + \widehat{f}_2\,\widehat{\vec{e}}_2 + \widehat{f}_3\,\widehat{\vec{e}}_3)\,(\widehat{\vec{e}}_1\,dq_1 + \widehat{\vec{e}}_2\,dq_2 + \widehat{\vec{e}}_3\,dq_3)\,. \end{aligned}$$

Podle předpokladu jsou vektory $\widehat{\vec{e}}_1, \widehat{\vec{e}}_2, \widehat{\vec{e}}_3$ ortogonální, tedy

$$df(\vec{q}\,) = h_1^2 \widehat{f}_1\;dq_1 + h_2^2 \widehat{f}_2\;dq_2 + h_3^2 \widehat{f}_3\;dq_3\,,$$

zároveň však

$$df(\vec{q}\,) = \frac{\partial f}{\partial q_1}\,dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2}\,dq_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3}\,dq_3\,.$$

Z posledních dvou rovností vyplývá

$$\widehat{f}_i = \frac{1}{h_i^2}\frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad i = 1, 2, 3\,.$$

Tím je vztah (7.5) dokázán.

Pro jednoduchost uvažujeme vektor $\vec{v} = (\widehat{v}_1\,, 0, 0) = \widehat{v}_1\;\widehat{\vec{e}}_1$ a spočítáme jeho divergenci v křivočaré bázi $\widehat{\vec{e}}_1, \widehat{\vec{e}}_2, \widehat{\vec{e}}_3$. Podle předpokladu je daná báze ortogonální a pravotočivá, proto platí $\frac{\widehat{\vec{e}}_1}{h_1} = \frac{\widehat{\vec{e}}_2}{h_2} \times \frac{\widehat{\vec{e}}_3}{h_3}$ a $\operatorname{div}\vec{v} = \operatorname{div}(\widehat{v}_1\;\widehat{\vec{e}}_1) = \operatorname{div}\left(\widehat{v}_1\,h_1\,\frac{\widehat{\vec{e}}_2}{h_2} \times \frac{\widehat{\vec{e}}_3}{h_3}\right)$. Použijeme cvičení 4.3b,c a dostaneme

$$\operatorname{div}\left(\widehat{v}_1\,h_1 \frac{\widehat{\vec{e}}_2}{h_2} \times \frac{\widehat{\vec{e}}_3}{h_3}\right) = \operatorname{div}\left(\widehat{v}_1\,h_1 h_2 h_3 \frac{\widehat{\vec{e}}_2}{h_2^2} \times \frac{\widehat{\vec{e}}_3}{h_3^2}\right) =$$

$$\operatorname{grad}(\widehat{v}_1\,h_1 h_2 h_3) \cdot \left(\frac{\widehat{\vec{e}}_2}{h_2^2} \times \frac{\widehat{\vec{e}}_3}{h_3^2}\right) + \widehat{v}_1\,h_1 h_2 h_3 \operatorname{div}\left(\frac{\widehat{\vec{e}}_2}{h_2^2} \times \frac{\widehat{\vec{e}}_3}{h_3^2}\right) =$$

$$\operatorname{grad}(\widehat{v}_1\,h_1 h_2 h_3) \cdot \left(\frac{\widehat{\vec{e}}_2}{h_2^2} \times \frac{\widehat{\vec{e}}_3}{h_3^2}\right) + \widehat{v}_1\,h_1 h_2 h_3 \left(\frac{\widehat{\vec{e}}_2}{h_2^2} \cdot \operatorname{rot}\frac{\widehat{\vec{e}}_3}{h_3^2} - \frac{\widehat{\vec{e}}_3}{h_3^2} \cdot \operatorname{rot}\frac{\widehat{\vec{e}}_2}{h_2^2}\right).$$

Ve vztahu (7.5) položíme $f = q_i$, potom $\operatorname{grad} q_i = \frac{\vec{\widehat{e}}_i}{h_i^2}$, pro $i = 1, 2, 3$ a $\operatorname{rot} \frac{\vec{\widehat{e}}_3}{h_3^2} = \operatorname{rot} \operatorname{grad} q_3 = 0$ podle cvičení 4.3a. Neboli

$$\operatorname{div} \vec{v} = \operatorname{grad} (\widehat{v_1}\, h_1 h_2 h_3) \cdot \left(\frac{\vec{\widehat{e}}_2}{h_2^2} \times \frac{\vec{\widehat{e}}_3}{h_3^2} \right).$$

Použijeme označení $h = h_1 h_2 h_3$ a opět s využitím (7.5) dostaneme

$$\operatorname{div} \vec{v} = \left(\frac{\partial(\widehat{v_1}\, h)}{\partial q_1} \frac{\vec{\widehat{e}}_1}{h_1^2} + \frac{\partial(\widehat{v_1}\, h)}{\partial q_2} \frac{\vec{\widehat{e}}_2}{h_2^2} + \frac{\partial(\widehat{v_1}\, h)}{\partial q_3} \frac{\vec{\widehat{e}}_3}{h_3^2} \right) \cdot \frac{\vec{\widehat{e}}_1}{h} = \frac{1}{h} \frac{\partial(\widehat{v_1}\, h)}{\partial q_1}.$$

Nechť $f(\vec{r}) = x + y + z$, pak $\operatorname{grad} f = (1, 1, 1)$. V cylindrických souřadnicích je
$f = \varrho \cos\varphi + \varrho \sin\varphi + z$
$\frac{\partial f}{\partial \varrho} = \cos\varphi + \sin\varphi$,
$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = -\varrho \sin\varphi + \varrho \cos\varphi$
$\frac{\partial f}{\partial z} = 1$,
$h_1 = 1$, $h_2 = \varrho$, $h_3 = 1$.
Pro gradient funkce f v cylindrických souřadnicích tedy platí $\operatorname{grad} f(\vec{r}) = (\cos\varphi + \sin\varphi)\, \vec{\mathbf{e}}_1 + (-\varrho \sin\varphi + \varrho \cos\varphi) \frac{1}{\varrho} \vec{\mathbf{e}}_2 + \vec{\mathbf{e}}_3 = \left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}, \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$.

Cvičení 7.1: Určete vektory $\vec{\widehat{e}}_1, \vec{\widehat{e}}_2, \vec{\widehat{e}}_3$ ve sférických (příklad 5.2) a cylindrických souřadnicích (příklad 7.2). Dokažte, že $\vec{\widehat{e}}_1, \vec{\widehat{e}}_2, \vec{\widehat{e}}_3$ jsou ortogonální a v ortonormální bázi $\vec{\mathbf{e}}_1$, $\vec{\mathbf{e}}_2$, $\vec{\mathbf{e}}_3$ vyjádřete $\operatorname{grad} f$, $\operatorname{div} \vec{v}$.

[sférické: $\vec{\widehat{e}}_1 = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$, $\vec{\widehat{e}}_2 = (-\varrho \sin u \cos v, \varrho \cos u \cos v, 0)$, $\vec{\widehat{e}}_3 = (-\varrho \cos u \sin v, -\varrho \sin u \sin v, \varrho \cos v)$, $h_1 = 1$, $h_2 = \varrho \cos v$, $h_3 = \varrho$, $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial \varrho}, \frac{1}{\varrho \cos v} \frac{\partial f}{\partial u}, \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial v} \right)$, $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{\varrho^2 \cos v} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho}(v_1 \varrho^2 \cos v) + \frac{\partial}{\partial u}(v_2 \varrho) + \frac{\partial}{\partial v}(v_3 \varrho \cos v) \right)$.
cylindrické: $\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial \varrho}(\cos\varphi, \sin\varphi, 0) + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial f}{\partial \varphi}(-\varrho \sin\varphi, \varrho \cos\varphi, 0) + \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1)$; $\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{\varrho} \left(\frac{\partial}{\partial \varrho}(\varrho \mathbf{v}_1) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(\mathbf{v}_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\varrho \mathbf{v}_3) \right)$]

Příklad 7.3: Nechť $\vec{w} = (x, y, z)$, potom $\operatorname{div} \vec{w} = 3$. Ukážeme, že přechodem ke sférickým souřadnicím se divergence nezmění.

Uvažujeme ortonormální soustavu

$\vec{\mathbf{e}}_1 = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v)$, $\vec{\mathbf{e}}_2 = (-\sin u, \cos u, 0)$, $\vec{\mathbf{e}}_3 = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v)$, potom divergence $\operatorname{div} \vec{w} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial(w_1 h_2 h_3)}{\partial \varrho} + \frac{\partial(h_1 w_2 h_3)}{\partial u} + \frac{\partial(h_1 h_2 w_3)}{\partial v} \right]$, kde vektor $\vec{w} = (\varrho \cos u \cos v, \varrho \sin u \cos v, \varrho \sin v) = \varrho\, \vec{\mathbf{e}}_1 + 0\, \vec{\mathbf{e}}_2 + 0\, \vec{\mathbf{e}}_3$ má v ortonormální bázi souřadnice $(\varrho, 0, 0)$. Tedy

$$\operatorname{div} \vec{w} = \frac{1}{\varrho^2 \cos v} \left[\frac{\partial(\varrho^3 \cos v)}{\partial \varrho} + 0 + 0 \right] = 3.$$

Připomeňme, že $ds = \|\vec{r}\,'(t)\|\,dt$, tedy $ds^2 = \|\vec{r}\,'(t)\|^2\,dt^2 = (\vec{r}\,'(t)\,dt\,,\,\vec{r}\,'(t)\,dt) = (d\vec{r}, d\vec{r}\,)$.

Poznámka 7.4: (délka oblouku, diferenciál objemu a plochy)
Ze vztahu (7.8) vyplývá pro diferenciál obloukové délky rovnost

$$ds^2 = d\vec{r}d\vec{r} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{3}\vec{\hat{e}}_i\vec{\hat{e}}_j dq_j dq_i = \sum_{i,j=1}^{3} g_{ij} dq_j dq_i\,, \tag{7.9}$$

kde $g_{ij} = \vec{\hat{e}}_i\vec{\hat{e}}_j$ se nazývají **metrické koeficienty** a poslední výraz v (7.9) se názývá **fundametální kvadratická forma** nebo **metrická forma**. Pro ortogonální bázi ($\vec{\hat{e}}_i\vec{\hat{e}}_j = 0,\ i \neq j$) platí: $ds^2 = \sum\limits_{i=1}^{3} h_i^2\, dq_i^2$.
Pro diferenciály souřadnicových ploch (viz také vztah (5.2)) máme:

$$\begin{aligned} dS_1 &= \|\vec{\hat{e}}_2 \times \vec{\hat{e}}_3\|\, dq_2 dq_3, \quad \text{pro} \quad q_1 = q_{01}\,,\\ dS_2 &= \|\vec{\hat{e}}_1 \times \vec{\hat{e}}_3\|\, dq_1 dq_3, \quad \text{pro} \quad q_2 = q_{02}\,,\\ dS_3 &= \|\vec{\hat{e}}_1 \times \vec{\hat{e}}_2\|\, dq_1 dq_2, \quad \text{pro} \quad q_3 = q_{03}\,. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Podél q_1 - křivky jsou proměnné q_2, q_3 konstantní, proto platí $d\vec{r} = \vec{\hat{e}}_1 dq_1$ a diferenciál obloukové délky ds_1 podél q_1-křivky je $ds_1 = h_1 dq_1$, podobně $ds_2 = h_2\, dq_2$, $ds_3 = h_3\, dq_3$.
Pro diferenciál objemu v křivočarých souřadnicích tedy platí $dV = |(dq_1\vec{\hat{e}}_1)(dq_2\vec{\hat{e}}_2 \times dq_3\vec{\hat{e}}_3)| = |\vec{\hat{e}}_1(\vec{\hat{e}}_2 \times \vec{\hat{e}}_3)|\, dq_1 dq_2 dq_3$. V ortogonální soustavě dostaneme

$$dV = h_1 h_2 h_3\, dq_1 dq_2 dq_3\,, \tag{7.11}$$

(smíšený součin tří vektorů, určuje objem tělesa určeného těmito vektory).

8 Tenzory

8.1 Sdružené báze

Pozor změna značení! Nyní jsou indexy souřadnic vektorů přemístěny nahoru, $\vec{r} = r^1\vec{e}_1 + r^2\vec{e}_2 + r^3\vec{e}_3 = (r^1, r^2, r^3)$ znamená vektor v základní bázi $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$.

Definice 8.1 : (Sdružená báze, kontravariantní, kovariantní souřadnice)
Uvažujeme vektory $\vec{\vec{e}}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}(A)$, $i = 1,2,3$ tvořící křivočarou bázi v bodě A a $B = \vec{r}(A)$ (definice 7.4).
Označíme $\vec{\vec{e}}^{\,1} = \nabla q^1(B)$ gradient funkce q^1, který je kolmý k ploše $S = \{[r^1, r^2, r^3] \in \mathbb{E}^3 : q^1(r^1, r^2, r^3) = q^1(B)\}$ a podobně definujeme $\vec{\vec{e}}^{\,2} = \nabla q^2(B)$, $\vec{\vec{e}}^{\,3} = \nabla q^3(B)$. Potom platí

$$\vec{\vec{e}}_i\,\vec{\vec{e}}^{\,j} = \delta_i^j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \qquad \text{(Kroneckerovo delta)} \tag{8.1}$$

Báze, pro které platí vztah (8.1) nazýváme **sdružené báze**.
Vyjádříme-li vektor $\vec{v} \in \mathbb{E}_3$ ve tvarech

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \widehat{v}^{\,1}\vec{\vec{e}}_1 + \widehat{v}^{\,2}\vec{\vec{e}}_2 + \widehat{v}^{\,3}\vec{\vec{e}}_3\,, \\ \vec{v} &= \widehat{v}_1\vec{\vec{e}}^{\,1} + \widehat{v}_2\vec{\vec{e}}^{\,2} + \widehat{v}_3\vec{\vec{e}}^{\,3}\,, \end{aligned} \tag{8.2}$$

potom souřadnice $\widehat{v}^{\,1}, \widehat{v}^{\,2}, \widehat{v}^{\,3}$ se nazývají **kontravariantní souřadnice** vektoru $\vec{v}$ a souřadnice $\widehat{v}_1, \widehat{v}_2, \widehat{v}_3$ se nazývají **kovariantní souřadnice** vektoru $\vec{v}$.

Příklady

Základní báze vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ je sdružená sama k sobě.
Analogicky říkáme, že vektory $\vec{\vec{e}}_1, \vec{\vec{e}}_2, \vec{\vec{e}}_3$ tvoří kontravariantní bázi a vektory $\vec{\vec{e}}^{\,1}, \vec{\vec{e}}^{\,2}, \vec{\vec{e}}^{\,3}$ kovariantní bázi.

Cvičení 8.1 : Dokažte, že platí vztah (8.1). Z definic (7.4), (8.1) máme $\vec{\vec{e}}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}$, $\vec{\vec{e}}^{\,i} = \nabla q^i$, $i = 1,2,3$. Pro diferenciál vektoru $\vec{r}$ v souřadnicích q^1, q^2, q^3 platí vztah (7.8), tedy $d\vec{r} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1}dq^1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2}dq^2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^3}dq^3 = \sum\limits_{i=1}^{3} \vec{e}_i\, dq^i$.

Vynásobíme (7.8) gradientem ∇q^1 a dostaneme
$dq^1 = \nabla q^1\, d\vec{r} = (\nabla q^1 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^1})\, dq^1 + (\nabla q^1 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^2})\, dq^2 + (\nabla q^1 \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^3})\, dq^3 = \vec{\vec{e}}^{\,1}\vec{\vec{e}}_1\, dq^1 + \vec{\vec{e}}^{\,1}\vec{\vec{e}}_2\, dq^2 + \vec{\vec{e}}^{\,1}\vec{\vec{e}}_3\, dq^3$.

Odtud již plyne $\vec{\vec{e}}^{\,j}\,\vec{\vec{e}}_i = \delta_i^j$.

Vztah (8.1) lze dokázat i pomocí následujícího maticového přístupu.

Uvažujeme Jacobiovy matice $J_{\Phi^{-1}}$, J_Φ zobrazení $\Phi^{-1} : \vec{r} \to \vec{q}$, a zobrazení $\Phi : \vec{q} \to \vec{r}$ ze vztahů (7.1), (7.2). Pro křivočarou bázi $\vec{\hat{e}}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i}(B)$ a k ní sdruženou bázi $\vec{\hat{e}}^{\,i} = \nabla q^i(B)$, $i = 1, 2, 3$ platí

$$J_{\Phi^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial q^1}{\partial r^1} & \frac{\partial q^1}{\partial r^2} & \frac{\partial q^1}{\partial r^3} \\ \frac{\partial q^2}{\partial r^1} & \frac{\partial q^2}{\partial r^2} & \frac{\partial q^2}{\partial r^3} \\ \frac{\partial q^3}{\partial r^1} & \frac{\partial q^3}{\partial r^2} & \frac{\partial q^3}{\partial r^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\hat{e}}^{\,1} \\ \vec{\hat{e}}^{\,2} \\ \vec{\hat{e}}^{\,3} \end{pmatrix}, \quad J_\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial r^1}{\partial q^1} & \frac{\partial r^1}{\partial q^2} & \frac{\partial r^1}{\partial q^3} \\ \frac{\partial r^2}{\partial q^1} & \frac{\partial r^2}{\partial q^2} & \frac{\partial r^2}{\partial q^3} \\ \frac{\partial r^3}{\partial q^1} & \frac{\partial r^3}{\partial q^2} & \frac{\partial r^3}{\partial q^3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \vec{\hat{e}}_1 & \vec{\hat{e}}_2 & \vec{\hat{e}}_3 \end{pmatrix}$$

Z předpokladu regularity zobrazení Φ (tedy $\det J_\Phi \neq 0$) plyne regularita inverzního zobrazení Φ^{-1} a odtud lineární nezávislost vektorů $\vec{\hat{e}}^{\,1}$, $\vec{\hat{e}}^{\,2}$, $\vec{\hat{e}}^{\,3}$. Tyto vektory tudíž tvoří bázi v prostoru $\mathbb{E}_3$.

Vynásobením Jacobiových matic $J_{\Phi^{-1}}, J_\Phi$ dostaneme jednotkovou matici $J_{\Phi^{-1}}\, J_\Phi = I$. Z definice součinu dvou matic již plyne vztah (8.1).

Poznamenejme, že platí

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial q^i}{\partial r^k} \frac{\partial r^k}{\partial q^i} &= 1 \qquad i = 1, 2, 3 \\ \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial q^i}{\partial r^k} \frac{\partial r^k}{\partial q^j} &= 0 \qquad i \neq j, \end{aligned} \tag{8.3}$$

Připomeňme, že $dr^i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial r^i}{\partial q^j}\, dq^j$, tedy $\frac{dr^i}{dr^i} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial r^i}{\partial q^j} \frac{\partial q^j}{\partial r^i} = 1\,.$

ale také obráceně

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial r^i}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial r^i} &= 1 \qquad i = 1, 2, 3 \\ \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial r^i}{\partial q^k} \frac{\partial q^k}{\partial r^j} &= 0 \qquad i \neq j\,. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Vztahem (8.2) jsme vektoru $\vec{v} = (v^1, v^2, v^3)$ přiřadili jeho kontravariantní souřadnice $\vec{v} = (\widehat{v}^{\,1}, \widehat{v}^{\,2}, \widehat{v}^{\,3})$ a kovariantní souřadnice $\vec{v} = (\widehat{v}_1, \widehat{v}_2, \widehat{v}_3)$. Nyní najdeme vztahy mezi jednotlivými druhy souřadnic. Vyjdeme z definice křivočaré báze

$$\vec{\hat{e}}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = \left(\frac{\partial r^1}{\partial q^i}, \frac{\partial r^2}{\partial q^i}, \frac{\partial r^3}{\partial q^i}\right) = \frac{\partial r^1}{\partial q^i}\vec{e}_1 + \frac{\partial r^2}{\partial q^i}\vec{e}_2 + \frac{\partial r^3}{\partial q^i}\vec{e}_3\,.$$

Neboli

$$\vec{\hat{e}}_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial r^j}{\partial q^i}\, \vec{e}_j = \frac{\partial r^j}{\partial q^i}\, \vec{e}_j \tag{8.5}$$

Albert Einstein (1879 - 1955) používal diferenciální geometrii jako matematický aparát v teorii relativity.

Ve vztahu (8.5) jsme použili tzv. Einsteinovu sumační konvenci. Index j, přes který se sčítá, je ve vztahu dvakrát a nazývá se němý, index i se nazývá volný.

Pro kontravariantní souřadnice $\widehat{v}^{\,1}, \widehat{v}^{\,2}, \widehat{v}^{\,3}$ vektoru $\vec{v}$ a původní souřadnice v^1, v^2, v^3 platí: $\vec{v} = \widehat{v}^{\,i}\vec{\widehat{e}}_i = \left(\widehat{v}^{\,i}\frac{\partial r^j}{\partial q^i}\right)\vec{e_j} = v^j e_j$, tedy

$$v^j = \frac{\partial r^j}{\partial q^i}\,\widehat{v}^{\,i}\,. \tag{8.6}$$

Nyní využijeme vztah (8.3) a odvodíme obrácené rovnosti k rovnostem (8.5) a (8.6). Platí

$$\tfrac{\partial q^i}{\partial r^1}\,\vec{\widehat{e}}_i = \tfrac{\partial q^i}{\partial r^1}\tfrac{\partial \vec{r}}{\partial q^i} = \underbrace{\frac{\partial q^i}{\partial r^1}\frac{\partial r^1}{\partial q^i}}_{1}\vec{e}_1 + \underbrace{\frac{\partial q^i}{\partial r^1}\frac{\partial r^2}{\partial q^i}}_{0}\vec{e}_2 + \underbrace{\frac{\partial q^i}{\partial r^1}\frac{\partial r^3}{\partial q^i}}_{0}\vec{e}_3 = \vec{e}_1\,.$$

Odtud plyne

$$\vec{e}_j = \frac{\partial q^i}{\partial r^j}\,\vec{\widehat{e}}_i \tag{8.7}$$

a pro souřadnice platí

$$\boxed{\widehat{v}^{\,i} = \frac{\partial q^i}{\partial r^j}\,v^j\,.} \tag{8.8}$$

Odvodíme podobné vztahy pro kovariantní souřadnice. Platí $\vec{\widehat{e}}^{\,i} = \nabla q^i = \frac{\partial q^i}{\partial r^1}\vec{e}_1 + \frac{\partial q^i}{\partial r^2}\vec{e}_2 + \frac{\partial q^i}{\partial r^3}\vec{e}_3 = \frac{\partial q^i}{\partial r^j}\vec{e}_j$ a $\widehat{v}_i\vec{\widehat{e}}^{\,i} = \widehat{v}_i\frac{\partial q^i}{\partial r^j}\vec{e}_j = v^j\vec{e}_j\,,$ tedy

$$\vec{\widehat{e}}^{\,i} = \frac{\partial q^i}{\partial r^j}\,\vec{e}_j \quad \text{a} \quad v^j = \frac{\partial q^i}{\partial r^j}\,\widehat{v}_i \tag{8.9}$$

a pro souřadnice platí

$$\vec{e}_j = \frac{\partial r^j}{\partial q^i}\,\vec{\widehat{e}}^{\,i} \quad \text{a} \quad \widehat{v}_i = \frac{\partial r^j}{\partial q^i}\,v^j \tag{8.10}$$

Přechod od základního ke kontravariantnímu systému

$$\widehat{v}^{\,i} = \frac{\partial q^i}{\partial r^j}\,v^j\,,$$

$$\vec{\widehat{e}}^{\,i} = \frac{\partial q^i}{\partial r^j}\,\vec{e}_j\,.$$

Přechod od základního ke kovariantnímu systému

$$\widehat{v}_i = \frac{\partial r^j}{\partial q^i}\,v_j\,,$$

$$\vec{e}^{\,j} = \frac{\partial r^j}{\partial q^i}\,\vec{\widehat{e}}^{\,i}\,.$$

<u>*Poznámka 8.1*</u>: Pro sdruženou bázi $\vec{e}^{\,1}, \vec{e}^{\,2}, \vec{e}^{\,3}$ k bázi $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ platí $\vec{e}^{\,i} = \vec{e}_i, \quad i = 1,2,3\,.$ Pro souřadnice vektoru $\vec{v}$ potom platí $\widehat{v}^{\,i} = \widehat{v}_i\,,\ i = 1,2,3$ a vztah (8.10) má tvar

$$\vec{e}^{\,j} = \frac{\partial r^j}{\partial q^i}\,\vec{\widehat{e}}^{\,i} \quad \text{a} \quad \boxed{\widehat{v}_i = \frac{\partial r^j}{\partial q^i}\,v_j} \tag{8.11}$$

Následující věta popisuje vztahy mezi kontravariantními a kovariantními souřadnicemi vektoru $\vec{v}$.

Věta 8.1 : (O transformaci sdružených bází)
Nechť $G = (g_{ij})$ je matice přechodu od báze $\vec{\vec{e}}^{\,j}$ (kovariantní) k bázi $\vec{\vec{e}}_i$ (kontravariantní), tedy $\vec{\vec{e}}_i = g_{ji}\,\vec{\vec{e}}^{\,j}$, $i = 1, 2, 3$ a $G^{-1} = (g^{ij})$ je inverzní matice k matici G, tedy $\vec{\vec{e}}^{\,j} = g^{ij}\,\vec{\vec{e}}_i$, $j = 1, 2, 3$, potom platí

$$g_{ij} = g_{ji} = \vec{\vec{e}}_i\,\vec{\vec{e}}_j \qquad g^{ij} = g^{ji} = \vec{\vec{e}}^{\,i}\,\vec{\vec{e}}^{\,j} \tag{8.12}$$

$$\begin{aligned} \widehat{v}_j &= g_{ji}\widehat{v}^{\,i} && \text{snížení indexu} \\ \widehat{v}^{\,i} &= g^{ij}\widehat{v}_j && \text{zvýšení indexu} \end{aligned} \tag{8.13}$$

Důkaz : Rovnost $\vec{\vec{e}}_i = g_{ji}\,\vec{\vec{e}}^{\,j}$ rozepíšeme pro $i = 1$ a vynásobíme vektorem $\vec{\vec{e}}_k$. Dostaneme $\vec{\vec{e}}_1\vec{\vec{e}}_k = g_{11}\,\vec{\vec{e}}^{\,1}\vec{\vec{e}}_k + g_{21}\,\vec{\vec{e}}^{\,2}\vec{\vec{e}}_k + g_{31}\,\vec{\vec{e}}^{\,3}\vec{\vec{e}}_k$ a využijeme vztah (8.1) pro sdružené báze. Tedy $\vec{\vec{e}}_1\vec{\vec{e}}_k = g_{k1}$. Podobně $\vec{\vec{e}}^{\,j} = g^{ij}\,\vec{\vec{e}}_i \Rightarrow \vec{\vec{e}}^{\,j}\vec{\vec{e}}^{\,i} = g^{ij}\,\vec{\vec{e}}_i\vec{\vec{e}}^{\,i} = g^{ij}$.

Vztah (8.13) dokážeme z rovnosti $\vec{\vec{e}}_i = g_{ji}\,\vec{\vec{e}}^{\,j}$ a definic kontravariantních ($\vec{v} = \widehat{v}^{\,i}\vec{\vec{e}}_i$) a kovariantních souřadnic ($\vec{v} = \widehat{v}_j\vec{\vec{e}}^{\,j}$) vektoru $\vec{v}$. Potom $\vec{v} = \widehat{v}^{\,i}\vec{\vec{e}}_i = \widehat{v}^{\,i}g_{ji}\,\vec{\vec{e}}^{\,j} = \widehat{v}_j\vec{\vec{e}}^{\,j} \Rightarrow \widehat{v}^{\,i}g_{ji} = \widehat{v}_j$. Podobně $\widehat{v}_j\vec{\vec{e}}^{\,j} = \widehat{v}_j g^{ji}\,\vec{\vec{e}}_i \Rightarrow \widehat{v}^{\,i} = g^{ij}\widehat{v}_j$.

Poznamenejme, že matice G se také nazývá **fundamentální matice**.

Definice 8.2 : (skalární součin, velikost vektoru, úhel vektorů)
Skalární součin vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ definujeme předpisem

$$\vec{u}\,\vec{v} = \widehat{u}^{\,i}\widehat{v}_i\,. \tag{8.14}$$

Velikost vektoru $\vec{u}$ definujeme předpisem

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\widehat{u}^{\,i}\widehat{u}_i}\,. \tag{8.15}$$

Úhel φ **dvou vektorů** $\vec{u}, \vec{v}$ definujeme předpisem

$$\cos\varphi = \frac{\widehat{u}^{\,i}\widehat{v}_i}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|} \qquad \varphi \in [0, \pi]\,. \tag{8.16}$$

Poznámka 8.2: Ze vztahů (8.8), (8.10) a (8.3) dostaneme pro skalární součin

$$\vec{u}\,\vec{v} = \widehat{u}^{\,i}\widehat{v}_i = \frac{\partial q^i}{\partial r^j}u^j\,\frac{\partial r^j}{\partial q^i}v_j = u_j v_j\,.$$

Odtud vyplývá, že skalární součin, velikost vektoru i úhel vektorů nezávisí na souřadnicovém systému. Říkáme, že jsou **invariantní** vůči změně souřadnic.
Využijeme-li vztah (8.13) pro snížení a zvýšení indexu, pak také platí $\vec{u}\,\vec{v} = \widehat{u}^{\,i}\widehat{v}_i = g^{ij}\widehat{u}_j\widehat{v}_i = \widehat{\vec{e}}^{\,i}\,\widehat{\vec{e}}^{\,j}\widehat{u}_j\widehat{v}_i$ a $\widehat{u}^{\,i}\widehat{v}_i = \widehat{u}^{\,i}g_{ij}\widehat{v}^{\,j} = \widehat{\vec{e}}_i\,\widehat{\vec{e}}_j\widehat{u}^{\,j}\widehat{v}^{\,i} = g_{ij}\widehat{u}^{\,j}\widehat{v}^{\,i}$.

Cvičení 8.2: Dokažte, že platí $\vec{u}\,\vec{v} = \widehat{u}_j\widehat{v}^{\,j}$.

[$\widehat{u}^{\,i}\widehat{v}_i = g^{ij}\widehat{u}_j\widehat{v}_i = \widehat{u}_j g^{ij}\widehat{v}_i = \widehat{u}_j\widehat{v}^{\,j}$]

8.2 Tenzory nultého řádu

Definice 8.3 : (tenzor nultého řádu)
Nechť f je veličina (funkce) vyjádřená v proměnných r^1, r^2, r^3 a $\widehat{f}$ jsou hodnoty této veličiny (funkce) po přechodu k proměnným q^1, q^2, q^3 (pomocí transformace Φ (viz (7.1)). Jestliže

$$f = \widehat{f}\,, \tag{8.17}$$

pak se f nazývá **tenzor 0-tého řádu** nebo **skalár**.

Příklad 8.1 :

1. Z poznámky (8.1) vyplývá, že skalární součin, velikost vektoru a úhel dvou vektorů jsou tenzory 0-tého řádu.
2. Ze vztahu (7.9) plyne pro diferenciál oblouku ds rovnost $ds^2 = d\vec{r}\cdot d\vec{r}$, což je opět skalární součin dvou vektorů a diferenciál oblouku je tedy tenzor 0-tého řádu.
3. Pro délku d křivky $\mathcal{K}$ platí podle (2.1) $d = \int\limits_{t_0}^{t_1} \|\vec{r}\,'(\tau)\|\, d\tau$.

   Zároveň platí $\|\vec{r}\,'(\tau)\|^2 = \left(\frac{d\vec{r}}{d\tau}, \frac{d\vec{r}}{d\tau}\right) = \left(\frac{dr^1}{d\tau}\vec{e}_1 + \frac{dr^2}{d\tau}\vec{e}_2 + \frac{dr^3}{d\tau}\vec{e}_3, \frac{dr^1}{d\tau}\vec{e}_1 + \frac{dr^2}{d\tau}\vec{e}_2 + \frac{dr^3}{d\tau}\vec{e}_3\right) = \vec{e}_i\vec{e}_j\frac{dr^i}{d\tau}\frac{dr^j}{d\tau}$.
   Z derivace složené funkce dostaneme
   $\frac{d\vec{r}}{d\tau} = \frac{d\vec{r}}{dq^1}\frac{dq^1}{d\tau} + \frac{d\vec{r}}{dq^2}\frac{dq^2}{d\tau} + \frac{d\vec{r}}{dq^3}\frac{dq^3}{d\tau} = \widehat{\vec{e}}_1\frac{dq^1}{d\tau} + \widehat{\vec{e}}_2\frac{dq^2}{d\tau} + \widehat{\vec{e}}_3\frac{dq^3}{d\tau}$. Odtud plyne $\|r'(\tau)\|^2 = \widehat{\vec{e}}_i\widehat{\vec{e}}_j\frac{dq^i}{d\tau}\frac{dq^j}{d\tau} = g_{ij}\frac{dq^i}{d\tau}\frac{dq^j}{d\tau}$ a zřejmě norma $\|r'(\tau)\|$ i délka d křivky jsou tenzory 0-tého řádu.

8.3 Tenzory prvního řádu

Nechť nyní kromě transformace $\vec{r} = \Phi(\vec{q})$ ze (7.1) existuje transformace souřadnic $\vec{r} = \widetilde{\Phi}(\vec{\widetilde{q}})$, potom existuje také transformace $\vec{\widetilde{q}} = \vec{\widetilde{q}}(\vec{q}) = \widetilde{\Phi}^{-1}(\Phi(\vec{q}))$ a z derivace funkce více proměných plyne

$$\frac{\partial \widetilde{q}^k}{\partial r^i} = \frac{\partial \widetilde{q}^k}{\partial q^1}\frac{\partial q^1}{\partial r^i} + \frac{\partial \widetilde{q}^k}{\partial q^2}\frac{\partial q^2}{\partial r^i} + \frac{\partial \widetilde{q}^k}{\partial q^3}\frac{\partial q^3}{\partial r^i}\,, \qquad i,k = 1,2,3 \tag{8.18}$$

Vyjádříme nyní vztah mezi kovariantními souřadnicemi vektoru $\vec{v}$ v systémech q^1, q^2, q^3 a $\widetilde{q}^1, \widetilde{q}^2, \widetilde{q}^3$. Nechť

$$\vec{v} = \widehat{v}_1 \nabla q^1 + \widehat{v}_2 \nabla q^2 + \widehat{v}_3 \nabla q^3 = \widetilde{v}_1 \nabla \widetilde{q}^1 + \widetilde{v}_2 \nabla \widetilde{q}^2 + \widetilde{v}_3 \nabla \widetilde{q}^3 \,.$$

Tedy

$$\widehat{v}_j \Big(\frac{\partial q^j}{\partial r^1}, \frac{\partial q^j}{\partial r^2}, \frac{\partial q^j}{\partial r^3}\Big) = \widetilde{v}_j \Big(\frac{\partial \widetilde{q}^j}{\partial r^1}, \frac{\partial \widetilde{q}^j}{\partial r^2}, \frac{\partial \widetilde{q}^j}{\partial r^3}\Big)$$

neboli

$$\widehat{v}_j \frac{\partial q^j}{\partial r^i} = \widetilde{v}_j \frac{\partial \widetilde{q}^j}{\partial r^i} \qquad i = 1,2,3\,.$$

Do poslední rovnosti dosadíme vztah (8.18), pro $k = j$ dostaneme

$$\widehat{v}_1 \frac{\partial q^1}{\partial r^i} + \widehat{v}_2 \frac{\partial q^2}{\partial r^i} + \widehat{v}_3 \frac{\partial q^3}{\partial r^i} = \widetilde{v}_j \Big(\frac{\partial \widetilde{q}^j}{\partial q^1}\frac{\partial q^1}{\partial r^i} + \frac{\partial \widetilde{q}^j}{\partial q^2}\frac{\partial q^2}{\partial r^i} + \frac{\partial \widetilde{q}^j}{\partial q^3}\frac{\partial q^3}{\partial r^i}\Big) \quad i = 1,2,3.$$

Porovnáním koeficientů u parciálních derivací $\frac{\partial q^1}{\partial r^i}, \frac{\partial q^2}{\partial r^i}, \frac{\partial q^3}{\partial r^i}$ obdržíme rovnosti $\widehat{v}_1 = \widetilde{v}_j \frac{\partial \widetilde{q}^j}{\partial q^1}$, $\widehat{v}_2 = \widetilde{v}_j \frac{\partial \widetilde{q}^j}{\partial q^2}$, $\widehat{v}_3 = \widetilde{v}_j \frac{\partial \widetilde{q}^j}{\partial q^3}$. Odtud plyne

$$\widehat{v}_i = \frac{\partial \widetilde{q}^j}{\partial q^i}\, \widetilde{v}_j \qquad i = 1,2,3\,. \tag{8.19}$$

Poznamenejme, že pro $\vec{r} = \vec{\widetilde{q}}$ dostaneme $\nabla \widetilde{q}^j = \nabla r^j = \vec{e}^{\,j}$, $\widetilde{v}_j = v_j$ a

$$\widehat{v}_i = \frac{\partial r^j}{\partial q^i}\, v_j \qquad i = 1,2,3$$

což souhlasí se vztahem (8.11).

<u>*Cvičení 8.3*</u>: Dokažte analogický vztah ke vztahu (8.19) pro kontravariantní souřadnice vektoru $\vec{v}$, tedy

$$\widehat{v}^{\,i} = \widetilde{v}^j \,\frac{\partial q^i}{\partial \widetilde{q}^j} \qquad i = 1,2,3\,.$$

Ze vztahů (8.11), (8.19) vyplývá, že při přechodu mezi souřadnicovými systémy musí souřadnice vektoru splňovat předem dané vztahy, což vede k následující definici.

Definice 8.4 : (tenzor 1. řádu, vektor)
Nechť hodnoty T^1, T^2, T^3 (reálná čísla) vyjádřené v proměnných r^1, r^2, r^3 nabývají v proměnných q^1, q^2, q^3 hodnot $\widehat{T}^{\,1}, \widehat{T}^{\,2}, \widehat{T}^{\,3}$. Jestliže platí

$$\widehat{T}^{\,i} = \frac{\partial q^i}{\partial r^j} T^j \,, \tag{8.20}$$

pak se hodnoty T^1, T^2, T^3 nazývají souřadnice **kontravariantního tenzoru prvního řádu** (nebo kontravariantního vektoru).
Nechť hodnoty T_1, T_2, T_3 (reálná čísla) vyjádřené v proměnných r^1, r^2, r^3 nabývají v proměnných q^1, q^2, q^3 hodnot $\widehat{T}_1, \widehat{T}_2, \widehat{T}_3$. Jestliže platí

$$\widehat{T}_i = \frac{\partial r^j}{\partial q^i} T_j \,, \tag{8.21}$$

pak se hodnoty T_1, T_2, T_3 nazývají souřadnice **kovariantního tenzoru prvního řádu** (nebo kovariantního vektoru).

Poznamenejme, že tenzor není pouze množina souřadnic v daném souřadnicovém systému, ale všechny možné množiny souřadnic po libovolné (regulární) transformaci souřadnic. Souřadnice T_1, T_2, T_3 pouze reprezentují tenzor.

<u>*Příklad 8.2*</u> :

1. (tečný vektor - kontravariantní tenzor 1. řádu)
   Máme křivku $\mathcal{K} = \{\vec{r}\,(t) \,:\, t \in [\alpha, \beta]\}$ v souřadnicové soustavě $(r^1,\, r^2,\, r^3)$ a po transformaci Φ^{-1} zkoumáme křivku $\widehat{\mathcal{K}} = \{\vec{q}\,(t) \,:\, t \in [\alpha, \beta]\}$ $\quad (\vec{q}\,(t) = \Phi^{-1}(\vec{r}\,(t))\,)$ v souřadnicové soustavě $(q^1,\, q^2,\, q^3)$. Pro složky $\tau^i,\, \widehat{\tau}^{\,i}$, $i = 1, 2, 3$ tečných vektorů ke křivce $\mathcal{K}$ platí

$$\tau^i = \frac{dr^i}{dt} \,, \qquad \widehat{\tau}^{\,i} = \frac{dq^i}{dt} \,, \qquad i = 1, 2, 3 \,.$$

   Z pravidel pro derivaci funkce více proměnných plyne

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{dq^i}{dr^1}\frac{dr^1}{dt} + \frac{dq^i}{dr^2}\frac{dr^2}{dt} + \frac{dq^i}{dr^3}\frac{dr^3}{dt} = \frac{dq^i}{dr^j}\frac{dr^j}{dt} \,.$$

Odtud
$$\widehat{\tau}^{\,i} = \frac{\partial q^i}{\partial r^j}\tau^j \,.$$
Z poslední rovnosti vyplývá, že tečný vektor ke křivce se transformuje podle vztahu (8.20) a je tedy kontravariantním tenzorem 1. řádu.

2. (gradient - kovariantní tenzor 1. řádu)

   Nechť $f = f(\vec{r}\,)$ je diferencovatelná funkce a zobrazení $\Phi : \vec{q} \to \vec{r}$ je transformace dána vztahem (7.1). Položíme $\widehat{f}\,(\vec{q}\,) = f(\Phi(\vec{q}\,))$, potom platí
   $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial r^1}, \frac{\partial f}{\partial r^2}, \frac{\partial f}{\partial r^3}\right)$, $\quad \operatorname{grad} \widehat{f} = \left(\frac{\partial \widehat{f}}{\partial q^1}, \frac{\partial \widehat{f}}{\partial q^2}, \frac{\partial \widehat{f}}{\partial q^3}\right)$ a
   $$\frac{\partial \widehat{f}}{\partial q^i} = \frac{\partial f}{\partial r^j}\frac{\partial r^j}{\partial q^i} \,.$$
   Odtud vyplývá, že složky $\operatorname{grad} f$ splňují vztah (8.21), tedy gradient funkce f je kovariantní tenzor prvního řádu.

Cvičení 8.4 : Rozhodněte, zda zrychlení $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ je tenzor (nyní je číslo 2 exponent).

[Platí $\frac{d^2 q^i}{dt^2} = \frac{d}{dt}\frac{dq^i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^i}{\partial r^j}\frac{dr^j}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial q^i}{\partial r^j}\right)\frac{dr^j}{dt} + \frac{\partial q^i}{\partial r^j}\frac{d^2 r^j}{dt^2} = \frac{\partial^2 q^i}{\partial r^k \partial r^j}\frac{dr^k}{dt}\frac{dr^j}{dt} + \frac{\partial q^i}{\partial r^j}\frac{d^2 r^j}{dt^2}$. Odtud vyplývá, že zrychlení není tenzor.]

8.4 Tenzory druhého řádu

Definice 8.5 : (tenzory 2. řádu)
Nechť devět hodnot T^{kl}, $k,l = 1,2,3$ (reálná čísla) vyjádřených v proměnných r^1, r^2, r^3 nabývá v proměnných q^1, q^2, q^3 hodnot $\widehat{T}^{ij}$, $i,j = 1,2,3$. Jestliže platí

$$\widehat{T}^{ij} = \frac{\partial q^i}{\partial r^k}\frac{\partial q^j}{\partial r^l}T^{kl}\,, \tag{8.22}$$

pak se hodnoty T^{kl} nazývají souřadnice **kontravariantního tenzoru druhého řádu**.
Nechť devět hodnot T_{kl}, $k,l = 1,2,3$ (reálná čísla) vyjádřených v proměnných r^1, r^2, r^3 nabývá v proměnných q^1, q^2, q^3 hodnot $\widehat{T}_{ij}$, $i,j = 1,2,3$. Jestliže platí

$$\widehat{T}_{ij} = \frac{\partial r^k}{\partial q^i}\frac{\partial r^l}{\partial q^j}T_{kl}\,, \tag{8.23}$$

pak se hodnoty T_{kl} nazývají souřadnice **kovariantního tenzoru druhého řádu**.
Nechť devět hodnot T^k_l, $k,l = 1,2,3$ (reálná čísla) vyjádřených v proměnných r^1, r^2, r^3 nabývá v proměnných q^1, q^2, q^3 hodnot $\widehat{T}^{\,i}_{\,j}$, $i,j = 1,2,3$. Jestliže platí

$$\widehat{T}^{\,i}_{\,j} = \frac{\partial q^i}{\partial r^k}\frac{\partial r^l}{\partial q^j}T^k_l\,, \tag{8.24}$$

pak se hodnoty T^k_l nazývají souřadnice **smíšeného tenzoru druhého řádu**.

Příklad 8.3 : (metrický tenzor)

Ve větě (8.1) jsme zavedli fundamentální matici $G = (g_{ij})$ jako matici přechodu od báze $\widehat{\vec{e}}^{\,j}$ k bázi $\widehat{\vec{e}}_i$. Ze vztahů (8.12) a (8.5) vyplývá

$g_{ij} = \widehat{\vec{e}}_i\widehat{\vec{e}}_j = \frac{\partial r^k}{\partial q^i}\vec{e}_k\,\frac{\partial r^l}{\partial q^j}\vec{e}_l = \frac{\partial r^k}{\partial q^i}\frac{\partial r^l}{\partial q^j}\,\vec{e}_k\vec{e}_l.$

Označíme-li $\widehat{T}_{ij} = g_{ij} = \frac{\partial r^k}{\partial q^i}\frac{\partial r^l}{\partial q^j}T_{kl}$, vidíme, že matice G určuje (symetrický, tj. $g_{ij} = g_{ji}$) kovariantní tenzor 2. řádu, který se nazývá **metrický tenzor**.

Příklad 8.4 : (Kroneckerovo delta - smíšený tenzor)

Upravíme $\frac{\partial q^i}{\partial r^k}\frac{\partial r^l}{\partial q^j}\delta^k_l = \frac{\partial q^i}{\partial r^k}\frac{\partial r^k}{\partial q^j} = \widehat{\vec{e}}^{\,i}\widehat{\vec{e}}_j = \delta^i_j$, tedy

$(\widehat{\delta}\,^i_j) = \delta^i_j = \frac{\partial q^i}{\partial r^k}\frac{\partial r^l}{\partial q^j}\delta^k_l\,.$

Odtud vyplývá, že Kroneckerovo delta δ^i_j je smíšený tenzor 2. řádu.

<u>*Cvičení 8.5*</u> :

a) Dokažte, že inverzní matice $G^{-1} = (g^{ij})$ je kontravariantní tenzor 2. řádu. $[\, g^{ij} = \vec{\widehat{e}}\,^i \vec{\widehat{e}}\,^j = \nabla q^i \nabla q^j = \frac{\partial q^i}{\partial r^k}\vec{e}_k \frac{\partial q^j}{\partial r^l}\vec{e}_l = \frac{\partial q^i}{\partial r^k}\frac{\partial q^j}{\partial r^l}\vec{e}\,^k\vec{e}\,^l\,.]$

8.5 Tenzory vyšších řádů

Definice 8.6 : (tenzory vyšších řádů)
Nechť hodnoty $T^{k_1k_2\dots k_m}_{l_1l_2\dots l_n}$ (tj. 3^{m+n} reálných čísel) vyjádřené v r^1, r^2, r^3 nabývají v proměnných q^1, q^2, q^3 hodnot $\widehat{T}\,^{i_1i_2\dots i_m}_{j_1j_2\dots j_n}$. Jestliže platí

$$\widehat{T}\,^{i_1i_2\dots i_m}_{j_1j_2\dots j_n} = \frac{\partial q^{i_1}}{\partial r^{k_1}} \dots \frac{\partial q^{i_m}}{\partial r^{k_m}} \frac{\partial r^{l_1}}{\partial q^{j_1}} \dots \frac{\partial r^{l_n}}{\partial q^{j_n}} T^{k_1k_2\dots k_m}_{l_1l_2\dots l_n}, \tag{8.25}$$

pak se hodnoty $T^{k_1k_2\dots k_m}_{l_1l_2\dots l_n}$ nazývají souřadnice **tenzoru řádu $\mathbf{m+n}$**, m krát kontravariantního a n krát kovariantního.

8.6 Tenzorová algebra

Definice 8.7 : (základní operace s tenzory)

i) Součet a rozdíl tenzorů

Jestliže tenzory S, T jsou oba m krát kontravariantní a n krát kovariantní, pak jejich **součet** je dán vztahem

$$S + T = S^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n} + T^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n}$$

Podobně definujeme rozdíl tenzorů.

ii) Součin tenzorů

Jestliže S je tenzor m krát kontravariantní a n krát kovariantní a T je tenzor p krát kontravariantní a s krát kovariantní, pak jejich **součin** $P = S \cdot T$ je $m + p$ krát kontravariantní a $n+s$ krát kovariantní tenzor daný vztahem

$$P = S^{i_1 i_2 \dots i_m}_{j_1 j_2 \dots j_n} \cdot T^{k_1 k_2 \dots k_p}_{l_1 l_2 \dots l_s}$$

iii) Kontrakce tenzoru (úžení tenzoru)

Jestliže jeden kontravariantní a jeden kovariantní index tenzoru T ($= T^{ij}_{klm}$) řádu n zvolíme shodné (např. $j = k$, tj. T^{ij}_{jlm}) a vypočteme součet přes shodný index ($\sum_{j=1}^{3} T^{ij}_{jlm} = T^{i}_{lm}$), potom takto získaný tenzor (T^{i}_{lm}) se nazývá **kontrakce tenzoru** T a je řádu $n - 2$.

iv) Vnitřní součin

Nejdříve vytvoříme vnější součin tenzorů T a S ($TS = T^{i}_{jk} S^{lm}_{n}$), potom kontrakcí tohoto součinu přes jeden kontravariantní (kovariantní) index u prvního tenzoru (T) a jeden kovariantní (kontravariantní) index u druhého tenzoru získáme **vnitřní součin tenzorů** T a S. ($T^{i}_{jk} S^{lm}_{n} = T^{i}_{j} S^{m}_{n}$)

Cvičení 8.6 : Dokažte, že kontrakce tenzoru je tenzor.

[Např. dokážeme, že $T^{i}_{ji} = T_j$ je tenzor. Platí $\widehat{T}{}^{i}_{jk} = \frac{\partial q^i}{\partial r^l} \frac{\partial r^m}{\partial q^j} \frac{\partial r^n}{\partial q^k} T^{l}_{mn}$. Pro $i = k$ je $\frac{\partial q^i}{\partial r^l} \frac{\partial r^n}{\partial q^i} = \delta^n_l$, potom $T_j = T^{i}_{ji} = \frac{\partial r^m}{\partial q^j} \delta^n_l T^{l}_{mn} = \frac{\partial r^m}{\partial q^j} T_m$.]

Reference

[1] Boček L.: Tenzorový počet, SNTL, Praha 1976

[2] Míka S.: Matematická analýza III Tenzorová analýza, skripta ZČU Plzeň 1993

[3] Spiegel M.R.: Schaum's Outlines Vector Analysis (And An Introduction to Tensor Analysis) McGraw-Hill, Inc. 1959, 1974, ISBN 0-07-084378-3