

Otázky a příklady ke zkoušce z M2E

1. Co to je obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu, co to je integrální křivka diferenciální rovnice. Na příkladech vysvětlete pojmy obecné a singulární řešení rovnice. (přednáška, str. 18–19)
2. Co to je homogenní a nehomogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu. Vysvětlete metodu variace konstanty a co to je partikulární a obecné řešení úlohy. (str. 24–25)
3. Jak definujeme řešení počáteční úlohy pro lineární diferenciální rovnice n -tého řádu. Co to je fundamentální systém řešení této úlohy. Popište metodu variace konstant pro řešení této úlohy. (str. 26–27,32)
4. Jaký je rozdíl mezi počáteční a okrajovou úlohou, jaké typy okrajových úloh znáte? Co to je vlastní číslo a vlastní funkce okrajové úlohy (Sturm-Liovillový úlohy)? (str. 35–37)
5. Co to je matice soustavy diferenciálních rovnic prvního řádu s konstantními koeficienty, co to je vlastní číslo a vlastní vektor této matice? Co to je fundamentální systém a fundamentální matice? (str. 38–41)
6. Definujte Laplaceovu transformaci funkce f . Vysvětlete, co znamená, že Laplaceova transformace je lineární zobrazení? (str. 48–49)
7. Co to je zpětná Laplaceova transformace a operátor konvoluce? (str. 50–51)
8. Na příkladu ukažte rozdíl mezi bodovou a stejnoměrnou konvergencí posloupnosti funkcí (f_n) . (str. 52–53)
9. Co to je mocninná řada a její poloměr konvergence. Definujte Taylorovu řadu a uveďte její aplikace. (str. 56–58)
10. Definujte Fourierovu řadu podle základního trigonometrického systému. Co to je lichá a sudá funkce? (str. 61–62)

1. $xy' + y = -\frac{1}{x}$.
2. $xydx + (x+1)dy = 0$.
3. $xy' - 2y = 2x^4$.
4. $y'' - 2y' + 3y = 0$; $y(0) = 1, y'(0) = 3$.
5. $y = x(y' - x \cos x)$.
6. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y(0) = 6, y'(0) = 10$.
7. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$.
8. $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 0, y'(0) = 1$.
9. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$.
10. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1}$.
11. $y'_1 = 2y_2 - y_1 + 1$
 $y'_2 = 3y_2 - 2y_1$.
12. $y'_1 = 5y_1 - 3y_2 + 2e^{3x}$
 $y'_2 = y_1 + y_2 + 5e^{-x}$.
13. $y'_1 = y_1 + y_2$
 $y'_2 = 3y_2 - 2y_1$.
14. $y'_1 = 3y_1 - y_2$
 $y'_2 = 4y_1 - y_2$.

Určete vlastní čísla a vlastní funkce okrajové úlohy

15. $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.
16. $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(\pi) = 0$.

Pomocí Laplaceovy transformace vyřešte

17. $y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
18. $y''(x) + 5y'(x) + 6y(x) = 2e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
19. $y''(x) + 4y(x) = \cos x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
20. $y''(x) + 3y'(x) + 2y(x) = e^x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.
21. $y'_1 = y_1 - y_2 + 8x$; $y_1(0) = 0$,
 $y'_2 = 5y_1 - y_2$; $y_2(0) = 0$.
22. $y'_1 = 4y_1 - 2y_2 + x$; $y_1(0) = 0$,
 $y'_2 = 2y_1 - y_2$; $y_2(0) = 0$.

Pomocí Taylorovy řady najděte řešení úlohy

23. $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
24. $y'' = xy$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 3$.
25. $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
26. $y'' - 2y' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

Vypočítejte Fourierovy řady funkcí f pro $x \in (-\pi, \pi)$, kde

27. $f(x) = |x|$.
28. $f(x) = x$.
29. $f(x) = \sin \frac{x}{2}$.
30. $f(x) = \operatorname{sgn} x$.