

## Otázky a příklady ke zkoušce z M2S

1. Definujte pojem primitivní funkce, definujte určitý integrál a popište metodu per partes a substituční metodu jeho výpočtu. (skripta MA1, str. 86)
2. Co to je obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu, co to je integrální křivka diferenciální rovnice. Na příkladech vysvětlete pojmy obecné a singulární řešení rovnice. (skripta MA2, str. 3-4)
3. Co to je homogenní a nehomogenní lineární diferenciální rovnice prvního řádu, vysvětlete metodu variace konstanty. (str. 11-12)
4. Jak definujeme řešení počáteční úlohy pro lineární diferenciální rovnice  $n$ -tého řádu. Co to je fundamentální systém řešení této úlohy. Popište metodu variace konstant pro řešení této úlohy. (str. 14,17,23)
5. Definujte Taylorovu řadu a uveďte její aplikace. (str. 54, (MA1 str. 70))
6. Definujte Fourierovu řadu podle základního trigonometrického systému. (str. 53-54)
7. Zaveďte pojmy skalární součin dvou vektorů, norma vektoru, vzdálenost dvou bodů, úhel dvou vektorů v prostoru  $\mathbb{R}^n$ . (str. 66)
8. Definujte limitu a spojitost funkce více proměnných v bodě. Na příkladu ukažte rozdíl mezi dvojnou a dvojnásobnou limitou. (str. 70-72)
9. Co to je parciální derivace, derivace ve směru, diferenciál funkce více proměnných? (str. 73-75)
10. Co to je gradient? Jak se spočítá tečna k hladině, ke grafu funkce více proměnných. Co to je směr růstu, směr poklesu? (str. 80-82)

1.  $xy' - 2y = 2x^4$   $[y = Cx^2 + x^4]$
2.  $xy' + y = -\frac{1}{x}$   $[xy = C - \ln |x|]$
3.  $(xy' - 1) \ln x = 2y$   $[y = C \ln^2 x - \ln x]$
4.  $xydx + (x + 1)dy = 0$   $[y = C(x + 1)e^{-x}]$
5.  $\sqrt{y^2 + 1}dx = xydy$   $[\ln |x| = C + \sqrt{y^2 + 1}; x = 0]$
6.  $xy' - 2y = 2x^4$   $[y = Cx^2 + x^4]$
7.  $xy' + y + 1 = 0$   $[y = Cx - 1]$
8.  $xy' + (x + 1)y = 3x^2e^{-x}$   $[xy = (x^3 + C)e^{-x}]$
9.  $(xy + e^x)dx - xdy = 0$   $[y = e^x(\ln |x| + C)]$
10.  $y = x(y' - x \cos x)$   $[y = x(C + \sin x)]$
11.  $y'' - 4y' + 3y = 0; y(0) = 6, y'(0) = 10$   $[y = 4e^x + 2e^{3x}]$
12.  $4y'' - 8y' + 5y = 0$   $[y = e^x(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2})]$
13.  $y'' - 2y' + 2y = 0; y(0) = 0, y'(0) = 1$   $[y = e^x \sin x]$
14.  $y'' - 2y' + 3y = 0; y(0) = 1, y'(0) = 3$   $[y = e^x(\cos \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x)]$
15.  $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$   $[y = e^x(x \ln |x| + C_1x + C_2)]$
16.  $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$   $[y = (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1) + C_1e^{-x} + C_2e^{-2x}]$
17.  $y'' + y = x \sin x$   $[y = (C_1 - \frac{x^2}{4}) \cos x + (C_2 + \frac{x}{4}) \sin x]$
18.  $y'_1 = y_1 - y_2$   
 $y'_2 = y_2 - 4y_1$   $[y_1 = C_1e^{-x} + C_2e^{3x}]$   
 $[y_2 = 2C_1e^{-x} - 2C_2e^{3x}]$
19.  $y'_1 = y_1 + y_2$   
 $y'_2 = 3y_2 - 2y_1$   $[y_1 = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)]$   
 $[y_2 = e^{2x}\{(C_1 + C_2) \cos x + (C_2 - C_1) \sin x\}]$
20.  $y'_1 = 3y_1 - y_2$   
 $y'_2 = 4y_1 - y_2$   $[y_1 = (C_1 + C_2x)e^x]$   
 $[y_2 = (2C_1 - C_2 + 2C_2x)e^x]$

21. Pomocí Taylorovy řady najděte řešení úlohy  $y'' + y = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$ .
22. Pomocí Taylorovy řady najděte řešení úlohy  $y'' + y = 0$ ,  $y(0) = 0$ ,  $y'(0) = 1$ .
23. Vypočítejte Fourierovu řadu funkce  $f(x) = |x|$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ .
24. Vypočítejte Fourierovu řadu funkce  $f(x) = x^2$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ .
25. Vypočítejte Fourierovu řadu funkce  $f(x) = \sin \frac{x}{2}$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ .
26. Vypočítejte Fourierovu řadu funkce  $f(x) = \cos \frac{x}{2}$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ .
27. Vypočítejte Fourierovu řadu funkce  $f(x) = \operatorname{sgn} x$ ,  $x \in (-\pi, \pi)$ .
28. Rozhodněte o spojitosti fce  $f$  v bodě  $[0, 0]$ :  $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{xy}$ ,  $f(0, 0) = 0$ .
29. Rozhodněte o spojitosti fce  $f$  v bodě  $[0, 0]$ :  $f(x, y) = \frac{\sin(xy^2)}{x^2+y^2}$ ,  $f(0, 0) = 0$ .
30. Rozhodněte o spojitosti fce  $f$  v bodě  $[0, 0]$ :  $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x-y}$ ,  $f(0, 0) = 0$ .
31. Rozhodněte o spojitosti fce  $f$  v bodě  $[0, 0]$ :  $f(x, y) = \frac{x^2+y}{x-y}$ ,  $f(0, 0) = 0$ .
32. Rozhodněte, zda funkce  $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin x$  v bodě  $[0, 0]$  a ve směru  $(1, 0)$  roste nebo klesá.
33. Rozhodněte, zda funkce  $f(x, y) = -\operatorname{tg} y e^x$  v bodě  $[0, 0]$  a ve směru  $(0, 1)$  roste nebo klesá.
34. Najděte diferenciál funkce  $f(x, y) = \frac{xy^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ,  $f(0, 0) = 0$  v bodech  $[0, 0]$ ,  $[1, 1]$ .
35. Najděte diferenciál funkce  $f(x, y) = \frac{x^2y}{x+y}$ ,  $f(0, 0) = 0$  v bodech  $[0, 0]$ ,  $[2, 1]$ .
36. Najděte tečnou rovinu ke grafu funkce  $(x, y) = -x^4 - y^4 + x^2 + 2xy + y^2$  v bodech  $[0, 0, ?]$ ,  $[2, 1, ?]$ .
37. Najděte tečnou rovinu k hladině funkce  $(x, y) = x^3 + 2xy + y^2$  v bodech  $[0, -1]$ ,  $[-2, 1]$ .