1. a) Určete parciální derivace prvního řádu funkce $z = z(x, y)$ dané rovnicí $z^3 - 3xy - 8 = 0$ v bodě $A = [0, 3]$.

b) Ke grafu funkce f najděte tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou ϱ. $f(x, y) = x^2 + y^2 - x$, $\varrho : 3x + 2y - z = 0$.

$[3(x - 2) + 2(y - 1) - (z - 3) = 0]$

c) K nulové hladině funkce f najděte tečnou rovinu, která je rovnoběžná s rovinou ϱ. $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 21$, $\varrho : x + 4y + 6z = 0$.
$[(x - 1) + 4(y - 2) + 6(z - 2) = 0, \quad (x + 1) + 4(y + 2) + 6(z + 2) = 0]$

2. Najděte lokální extrémy funkce f

a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$ $\quad [[1, 1], [-1, -1]$ min, $[0, 0]$ sedlo$]$

b) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$ $\quad [[1, 2]$ min$]$

c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$ $\quad [[-1, -2, 3]$ min$]$

d) $f(x, y, z) = xy + z(a - x - 2y - 3z)$ $\quad [[\frac{a}{5}, \frac{a}{10}, \frac{a}{10}]$ sedlo$]$

e) $f(x, y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ $\quad [\,[0, \pm 1], [\pm 1, 0]$ sedla, $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$, $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ min, $[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}]$, $[\frac{1}{\sqrt{2e}}, -\frac{1}{\sqrt{2e}}]$ max$]$

3. a) $\displaystyle\iint\limits_{y^2 \le x \le y+2} y\, \mathrm{e}^x \, dx\, dy$ $\quad \left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^4 + \frac{5}{2}\mathrm{e}\right]$

b) $\displaystyle\iint\limits_{x^2 \le y \le \sqrt{16 - x^2}} \frac{x}{(1+y)^2} \, dx\, dy$ $\quad [0]$

c) $\displaystyle\iint\limits_{1 \le x^2 \le y^2 \le 4} |x\, y| \, dx\, dy$ $\quad \left[\frac{9}{2}\right]$

d) $\displaystyle\iint\limits_{S} \frac{1}{x+y+1} \, dx\, dy$, kde S je trojúhelník s vrcholy $[1, 2], [5, 2], [4, 4]$

$\left[\frac{1}{5}(144 \ln 3 - 224 \ln 2)\right]$

e) $\displaystyle\iint\limits_{S} |x| \, dx\, dy$, kde S je dána nerovnostmi $x^2 \le y$, $4x^2 + y^2 \le 12$

$\left[4\sqrt{3} - \frac{10}{3}\right]$

4. a) $\displaystyle\iiint\limits_{V} \frac{xy^3 z}{(1+z^2)^2} \, dx\, dy\, dz$, kde V je dána nerovnostmi, $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 2$, $0 \le x$, $0 \le y$

$\left[-\frac{1}{60} + \frac{1}{16} \ln 5\right]$

b) $\displaystyle\iiint\limits_{V} x^2 y z^3 \, dx\, dy\, dz$, kde V je dána nerovnostmi $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le x$, $0 \le z \le xy$ $\quad \left[\frac{1}{312}\right]$

c) $\displaystyle\iiint\limits_{V} \frac{x+y}{4+z} \, dx\, dy\, dz$, kde V je dána nerovnostmi $x + y \le 3$, $0 \le y$, $0 \le x$, $0 \le z \le 4$ $\quad [9 \ln 2]$

d) $\displaystyle\iiint\limits_{V} \frac{xy}{(4+z)^2} \, dx\, dy\, dz$, kde V je dána nerovnostmi $x^2 + y^2 \le 4z \le 16$ $\quad [0]$

e) $\displaystyle\iiint\limits_{V} x^2 y z \, dx\, dy\, dz$, kde V je dána nerovnostmi $4x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, $z \le 0$

$\left[-\frac{1}{2^3} \frac{1}{105}\right]$

<u>*Příklad 1*</u> : Vypočítejte délku křivky $\vec{r}(t) = (t, \arcsin t, \frac{1}{4}\ln\frac{1-t}{1+t})$, $t \in [0, \frac{1}{2}]$ a najděte tečnu v bodě $B[\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{4}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}]$.

Řešení: Pro délku d křivky platí

$$d = \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{16}\frac{4}{(1-t^2)^2}}\, dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2(1-t^2)+1}{2(1-t^2)}\, dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\ln 3\,.$$

Tečna má tvar: $\vec{y}(\tau) = [\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}, \frac{1}{4}\ln\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}] + (1, \sqrt{2}, -1)\tau$, $\tau \in \mathbb{R}$.

1. Popište parametricky úsečku spojující body $A[1,5,2]$ a $B[3,2,6]$.
2. Rozhodněte, zda obrazem vektorové funkce $\vec{r}\,(t) = (1, t^2, t^2)$, $t \in [-2, 2]$ je regulární jednoduchá křivka.
3. Popište rozdíl mezi křivkami $\vec{r}_1\,(t) = (\cos t\,,\, \sin t\,,\, 0)$ a $\vec{r}_2\,(t) = (\sin t\,,\, \cos t\,,\, 0)$ pro $t \in [0\,, 2\pi]$.
4. Najděte parametrické vyjádření křivky dané rovnicemi $x^2 + 2y^2 - 1 = 0$, $z - 1 = 0$, popište její vlastnosti a nakreslete ji.
5. Spočítejte délku jednoho závitu šroubovice dané vektorovou funkci $\vec{r}\,(t) = (\cos t,\, \sin t,\, 2t)$. Pro $t = \pi/2$ určete tečnu k této šroubovici.

Křivkové integrály

Křivkové integrály 1. druhu

<u>*Příklad 2*</u> : Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{ds}{x+y}\,,$$

kde $\mathcal{K}$ je úsečka AB a $A[0,2]$, $B[3,0]$.

Řešení: Parametrické vyjádření úsečky AB je: $[x,y] = A + t(B-A)$, po souřadnicích $x = 0 + 3t$, $y = 2 - 2t$, $t \in [0,1]$. Tudíž

$$\int_{\mathcal{K}} \frac{ds}{x+y} = \int_0^1 \frac{\sqrt{3^2 + (-2)^2}}{3t + 2 - 2t}\, dt = \sqrt{13}\ [\ln|t+2|\,]_0^1 = \sqrt{13}\ \ln\frac{3}{2}\,.$$

<u>*Příklad 3*</u> : Vypočítejte křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{K}} f(\vec{r})\, ds\,,$$

kde $f(\vec{r}) = z$, $\mathcal{K}$ je kuželová šroubovice $(t\cos t, t\sin t, t)$, $t \in [0,1]$.

$[\frac{1}{3}(\sqrt{3^3} - \sqrt{2^3})]$

4. $f(\vec{r}) = \frac{1}{x-y}$ a $\mathcal{K}$ je úsečka spojující body $A[0,-2,0]$, $B[4,0,0]$.
[Parametrické vyjádření úsečky AB je: $x = 0 + 4t,\ y = -2 + 2t,\ z = 0 + 0t,\ t \in [0,1]$. Tudíž $\int\limits_{\mathcal{K}} \frac{ds}{x-y} = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{4^2+2^2+0^2}}{4t+2-2t}\, dt = \frac{\sqrt{20}}{2}\ [\ln|1+t|\,]_0^1 = \sqrt{5}\ \ln 2\,.$]

5. $f(\vec{r}) = x + y$ a $\mathcal{K}$ je obvod trojúhelníka s vrcholy $A[0,1,0]$, $B[2,1,0]$, $C[0,3,0]$.
[$8 + 6\sqrt{2}$]

6. $f(\vec{r}) = x^2$ a $\mathcal{K}$ je graf funkce $y = \ln x$ na intervalu $[1,2]$.

7. $f(\vec{r}) = \sqrt{x^2+y^2}$ a $\mathcal{K}$ je dána rovnicí $x^2 + y^2 = 2x$.

Křivkové integrály 2. druhu

Příklad 8: Vypočítejte křivkový integrál

$$\int\limits_{\mathcal{K}^+} \frac{y^2\ dx - x^2\ dy}{x^2+y^2}\,,$$

kde $\mathcal{K}^+$ je orientovaná polovina kružnice ležící v polorovině dané nerovností $x \geq 0$, se středem v počátku, s počátečním bodem $A[0,-\varrho]$ a koncovým bodem $B[0,\varrho]$, $\varrho > 0$. Parametrizací $x(t) = \varrho\cos t$, $y(t) = \varrho \sin t$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ dostaneme

$$\int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\varrho^3\cos^3 t + \varrho^3 \sin^3 t}{\varrho^2\cos^2 t + \varrho^2\sin^2 t}\, dt = \varrho \int\limits_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} [(1-\sin^2 t)\cos t + (1-\cos^2 t)\sin t]\, dt = \frac{4\varrho}{3}\,.$$

9. Vypočítejte práci, která se vykoná v silovém poli $\vec{v}_1 = (2xy, x^2)$, popřípadě $\vec{v}_2 = (xy, y-x)$ při přemístění hmotného bodu z místa $A[0,0]$ do místa $B[1,1]$ po křivce $\mathcal{K}^+$ dané vztahy: a) $y = x$, b)$y = x^2$, c) $x = y^2$, d) lomená čára ACB s bodem $C[1,0]$, e) kratší oblouk kružnice $x^2 + (y-1)^2 = 1$.

Vypočítejte

10. $\int\limits_{\mathcal{K}^+} (y^2 - z^2)\, dx + 2yz\, dy - x^2\, dz,$

kde $\mathcal{K}^+$ je křivka daná rovnicemi $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ t \in [0,1]$.

11. $\int\limits_{\mathcal{K}^+} (x^2 - 2xy)\, dx + (y^2 - 2xy)\, dy,$

kde $\mathcal{K}^+$ je křivka daná grafem funkce $y = x^2,\ x \in [-1,1]$.

12. $\int\limits_{\mathcal{K}^+} (y^2 + z)\, dx + xy\, dy + (x + y + yz)\, dz,$

kde $\mathcal{K}^+$ je křivka daná rovnicemi $x = 3\cos t,\ y = 3\sin t,\ z = t,\ t \in [0, \pi]\,.$

13. $\int\limits_{\mathcal{K}^+} (2 - y)\, dx + x\, dy,$

kde $\mathcal{K}^+$ je křivka daná rovnicemi $x = t - \sin t,\ y = 1 - \cos t,\ z = 0,\ t \in [0, 2\pi]\,.$

Plošné integrály 1.druhu

<u>*Příklad 14*</u> : Vypočítejte plošný integrál 1. druhu

$$\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}\ dS\,,$$

kde S je povrch koule s poloměrem ϱ a středem v počátku souřadného systému.

Řešení: Přechodem ke sférickým souřadnicím $x = \varrho \cos u \cos v,\ y = \varrho \sin u \cos v,\ z = \varrho \sin v,\ u \in [0, 2\pi),\ v \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}),\ dS = \varrho^2 \cos v\, dudv$ dostaneme

$$\iint\limits_S \sqrt{x^2 + y^2}\ dS = \int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\varrho^2 \cos^2 u \cos^2 v + \varrho^2 \sin^2 u \cos^2 v}\, \varrho^2 \cos v\ dvdu = \pi^2 \varrho^3.$$

<u>*Příklad 15*</u> : Vypočítejte integrál

$$\iint\limits_S [x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2]\ dS\,,$$

kde S je část kuželové plochy $z^2 = x^2 + y^2,\ z \geq 0$ ohraničená válcovou plochou $x^2 + y^2 = 4x\,.$

Řešení: Průmětem plochy S do roviny xy je kruh S_{xy} $((x - 2)^2 + y^2 = 4)$. Pro diferenciál plochy dS platí $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}\, dS_{xy} = \sqrt{\frac{2(x^2+y^2)}{x^2+y^2}}\, dS_{xy} = \sqrt{2}\, dS_{xy}\,.$ Tedy

$$\iint\limits_S x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2\ dS = \sqrt{2} \iint\limits_{S_{xy}} [x^2y^2 + (x^2 + y^2)^2]\ dS_{xy}\,.$$

Přechodem k polárním souřadnicím $x = \varrho \cos t,\ y = \varrho \sin t$ dostaneme $t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $0 \leq \varrho \leq 4\cos t$ a

$$\sqrt{2} \iint\limits_{S_{xy}} [x^2y^2 + (x^2 + y^2)^2]\ dS_{xy} = \sqrt{2} \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_0^{4\cos t} (\varrho^4 \cos^2 t \sin^2 t + \varrho^4)\, \varrho\ d\varrho dt =\ .$$

$$\sqrt{2}\,\frac{4^6}{6}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^6 t(\cos^2 t\sin^2 t+1)\;d\varrho dt=\sqrt{2}\,\frac{4^6}{6}\,\frac{87\pi}{256}=\frac{348\,\pi\,\sqrt{2}}{3}\,.$$

<u>*Příklad 16*</u>: Vypočítejte integrál

$$I=\iint\limits_S\frac{dS}{\sqrt{\varrho^2-z^2}}\,,$$

kde S je plášť válce s poloměrem ϱ, s podstavou v rovině xy a výškou k, $0<k<\varrho$.

Řešení: Přechodem k cylindrickým souřadnicím $\vec{r}:\,x=\varrho\cos u,\ y=\varrho\sin u,\ z=v,\ u\in[0,2\pi],\ v\in[0,k]$ dostaneme

$$I=\int\limits_0^k\int\limits_0^{2\pi}\frac{\|\vec{r}_u\times\vec{r}_v\|\;dudv}{\sqrt{\varrho^2-v^2}}=\int\limits_0^k\int\limits_0^{2\pi}\frac{\varrho}{\sqrt{\varrho^2-v^2}}\;dudv=2\pi\varrho\big[\arcsin\tfrac{v}{\varrho}\big]_0^k=2\pi\varrho\arcsin\tfrac{k}{\varrho}\,.$$

<u>*Příklad 17*</u>: Vypočítejte integrál

$$I=\iint\limits_S\sqrt{x^2+y^2}\;dS\,,$$

kde S je povrch koule se středem v počátku a poloměrem $\varrho>0$.

Řešení: Přechodem k sférickým souřadnicím $\vec{r}:\,x=\varrho\cos u\cos v,\ y=\varrho\sin u\cos v,\ z=\varrho\sin v,\ u\in[0,2\pi],\ v\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ dostaneme $dS=\varrho^2\cos v$ a

$$I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{(\varrho\cos u\cos v)^2+(\varrho\sin u\cos v)^2}\;\varrho^2\cos v\;dudv=\varrho^3\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}\cos^2 v\;dudv=\pi^2\varrho^3.$$

Plošné integrály 2.druhu

<u>*Příklad 18*</u>: Vypočítejte integrál

$$\iint\limits_{S^+}x^3\;dydz+y^3\;dxdz+3z\;dxdy\,,$$

kde S je vnější strana části rotačního paraboloidu $z=1-x^2-y^2$, která je omezená rovinou $z=0$.

Řešení: Úlohu lze rozložit na výpočet tří integrálů přes průměty plochy S do odpovídajících rovin yz, xz a xy.

Při průmětu do roviny yz platí $x = \sqrt{(1-y^2-z)^3}$, pokud vnější normálový vektor $\vec{n}$ má první souřadnici $n_1 > 0$, a zároveň $x = -\sqrt{(1-y^2-z)^3}$, pokud $n_1 < 0$. Tedy

$$\begin{aligned} I_x &= \iint\limits_{S^+} x^3\, dydz = 2\iint\limits_{S_{yz}} \sqrt{(1-y^2-z)^3}\, dydz = 2\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{0}^{1-y^2} (1-y^2-z)^{\frac{3}{2}}\, dzdy \\ &= -\tfrac{4}{5}\int\limits_{-1}^{1} [(1-y^2-z)^{\frac{5}{2}}]_0^{1-y^2}\, dy = \tfrac{4}{5}\int\limits_{-1}^{1} (1-y^2)^{\frac{5}{2}}\, dy = \left[\begin{array}{c} y = \sin t \\ dy = \cos t \end{array}\right] \\ &= \tfrac{4}{5}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 t \cos t\, dt = \tfrac{1}{10}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)^3\, dt = \tfrac{1}{10}\big(\pi + \tfrac{3}{2}\pi\big) = \tfrac{\pi}{4}\,. \end{aligned}$$

Při průmětu do roviny xz dostaneme stejnou úlohu jako v předchozím kroku (stačí zaměnit proměnné x a y, neboli $I_y = \frac{\pi}{4}$.

Při průmětu do roviny xy budeme integrovat přes průmět S_{xy}, kterým je kruh daný nerovností $x^2 + y^2 \le 1$ a přechodem k polárním dostaneme

$$\begin{aligned} I_z &= \iint\limits_{S^+} 3z\, dxdy = 3\iint\limits_{S^+_{xy}} 1 - x^2 - y^2\, dxdy = \left[\begin{array}{ll} x = \varrho\cos t, & \varrho \in [0,1] \\ y = \varrho \sin t, & t \in [0, 2\pi] \end{array}\right] \\ &= 3\int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{0}^{1} (1-\varrho^2)\,\varrho\, d\varrho dt = \left[\begin{array}{c} u = 1-\varrho^2 \\ du = -2\varrho\, d\varrho \end{array}\right] = -3\pi\int\limits_{1}^{0} u\, du = \tfrac{3\pi}{2}\,. \end{aligned}$$

Zadaný integrál má tedy hodnotu $I = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{2} = 2\pi$.

Příklad 19: Vypočítejte tok vektorového pole $\vec{v} = (4x, -2y^2, z^2)$ povrchem válce daného rovnicemi $x^2 + y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 3$.

Řešení: Pro tok T platí

$$T = \iint\limits_{S^+} \vec{v}\,\vec{n}\, dS\,,$$

kde $\vec{n}$ je vnější normálový vektor k povrchu válce. Úlohu lze rozložit na výpočet tří integrálu přes podstavy a plášť válce.

Vnější normálový vektor k podstavě v rovině $z = 0$ je $\vec{n} = (0, 0, -1)$ a pro první integrál platí

$$I_1 = \iint\limits_{S^+} (4x, -2y^2, z^2)\,(0,0,-1)\, dS = \iint\limits_{S_{xy}} -z^2\, dxdy = 0\,.$$

Vnější normálový vektor k podstavě v rovině $z = 3$ je $\vec{n} = (0, 0, 1)$ a pro druhý integrál platí

$$I_2 = \iint\limits_{S^+} (4x, -2y^2, z^2)\,(0,0,1)\, dS = \iint\limits_{S_{xy}} z^2\, dxdy = 3^2\pi 2^2 = 36\pi\,.$$

Vnější normálový vektor k plášti válce získáme po parametrizaci $\vec{r}: x = 2\cos u$, $y = 2\sin u$, $z = v$, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [0, 3]$, potom tečné vektory mají tvar $\vec{r}_u = (-2\sin u,\, 2\cos u,\, 0)$, $\vec{r}_v = (0,\, 0,\, 1)$ a normálový vektor $\vec{n} = (\cos u, \sin u, 0)$. Pro třetí integrál tedy platí

$$I_3 = \iint\limits_{S^+} (4x, -2y^2, z^2)\,(\cos u, \sin u, 0)\, dS = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^3 [8\cos^2 u - 8\sin^3 u]\, 2\, dvdu = 48\pi\,.$$

Zadaný integrál má tedy hodnotu $I = 0 + 36\pi + 48\pi = 84\pi$.

<u>*Příklad 20*</u> : Vypočítejte integrál $I = \iint\limits_{S^+} \vec{v}\,\vec{n}\; dS$, jestliže $\vec{v} = (x, y, z)$ a plocha S je parametrizována funkcí $\vec{r}(u, v) = (u\cos v, u\sin v, cv)$, $[u, v] \in [a, b] \times [0, 2\pi]$, $0 < a < b$, $c > 0$.

Řešení: Pro výpočet využijeme rovnost $\iint\limits_{S^+} \vec{v}\,\vec{n}\; dS = \iint\limits_{\Omega} \vec{v}\,(\vec{r}_u \times \vec{r}_v)\; du\,dv$. Platí $\vec{r}_u = (\cos v, \sin v, 0)$, $\vec{r}_v = (-u\sin v, u\cos v, c)$ a $\vec{r}_u \times \vec{r}_v = (c\sin v, -c\cos v, u)$. Tedy

$$I = \int_a^b \int_0^{2\pi} (u\cos v, u\sin v, cv)\,(c\sin v, -c\cos v, u)\; du\,dv = \int_a^b \int_0^{2\pi} c\,v\,u\; du\,dv = (b^2 - a^2)c\pi.$$

Greenova věta

<u>*Příklad 21*</u> : Užitím Greenovy věty vypočtěte křivkový integrál

$$\int_{\mathcal{K}^+} (x + y)\; dx - (x - y)\; dy\,,$$

kde $\mathcal{K}^+$ je kladně orientovaná elipsa $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Řešení: V Greenově větě $\iint\limits_{\Omega} \left(-\frac{\partial f_1}{\partial y} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\right)\, dxdy = \oint\limits_{\partial\Omega^+} f_1\; dx + f_2\; dy$ položíme $f_1 = x + y$, $f_2 = -x + y$, pak $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 1$ a $\frac{\partial f_2}{\partial x} = 1$. Tedy

$$\int_{\mathcal{K}} (x + y)\; dx - (x - y)\; dy = \iint_{\Omega} (-1 - 1)\; dxdy\,.$$

Převedeme dvojný integrál přes Ω do zobecněných polárních souřadnic

$$\begin{aligned} x &= 2\,r\cos\varphi, \\ y &= 3\,r\sin\varphi, \quad r > 0\,,\;\; 0 \le \varphi < 2\pi\,. \end{aligned}$$

Pro Jakobián této transformace dostaneme

$$J_{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,\cos\varphi & -2\,r\sin\varphi \\ 3\,\sin\varphi & 3\,r\cos\varphi \end{pmatrix}; \quad |\det J_{\mathbf{f}}| = |6\,r| = 6\,r\,.$$

Tudíž

$$\int_{\mathcal{K}} (x + y)\; dx - (x - y)\; dy = \iint_{\Omega} -2\; dxdy = \int_0^1 \int_0^{2\pi} -2 \cdot 6\,r\; drd\varphi = -24\,\pi\,.$$