Vážený čtenáři,

sbírka příkladů, kterou jsi právě otevřel Vám chce pomoci při studiu jedné z nejkrásnějších vědních disciplín - matematiky.

Sbírka obsahuje všechny typy příkladů, včetně výsledků, které se zkoušejí při přijímacím řízení na vysokých školách. V úvodu každé kapitoly jsou uvedené základní vzorce a spočítané vzorové příklady.

Při počítání ostatních příkladů Vám přeji hodně úspěchů.

Petr Tomiczek

Za pomoc při tvorbě sbírky děkuji své ženě RNDr. Světlaně Tomiczkové.

Obsah

Úpravy algebraických výrazů

(A) Základní úpravy   B) Úpravy výrazů s odmocninou   C) Dělení polynomu polynomem)

Značení: **N** - přirozená čísel, **R** - reálná čísla, **C** - komplexní čísla.

Úpravy výrazů s mocninami a odmocninami, $a, b \in \mathbf{R}$, $m, n \in \mathbf{N}$:

$$a^m a^n = a^{m+n}\,; \quad (a^m)^n = a^{mn}\,; \quad (ab)^m = a^m b^m\,; \quad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\,, \quad \left(\frac{b}{a}\right)^m = \frac{b^m}{a^m} \quad a \neq 0\,;$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} = b \quad \text{if} \quad b^n = a \quad ; \quad a^{m/n} = (a^{1/n})^m \; (a > 0 \text{ if } n \text{ is even})\,;$$

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} |a| & n \text{ je sudé} \\ a & n \text{ je liché} \end{cases} \quad ; \quad \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}\,; \quad \frac{\sqrt[n]{b}}{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}\,, \quad \frac{1}{a^n} = a^{-n} \quad a \neq 0\,.$$

Pravidla pro úpravy algebraických výrazů, $a, b \in \mathbf{R}$:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2\,; \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2\,; \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)\,;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3\,; \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3\,;$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)\,; \quad a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)\,;$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad \text{pro } n \in \mathbf{N}\,;$$

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \quad \text{pro } n \text{ je liché}\,;$$

A) Základní úpravy

Zjednodušte výrazy a uveďte podmínky:

1) $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}-\sqrt{2}) + (\sqrt{3}+\sqrt{2})^2 + (\sqrt{3}-\sqrt{2})^2$ [11]

2) $\dfrac{1 + \frac{1}{x-1}}{1 - \frac{1}{x+1}}$ [$\frac{x+1}{x-1}$; $x \neq -1, 0, 1$]

3) $\dfrac{m^4 - m}{2m^2 + 2m + 2}$ [$\frac{m(m-1)}{2}$; $m \in \mathbf{R}$]

4) $\left(\dfrac{1}{a+1} - \dfrac{2a}{a^2-1}\right)\left(\dfrac{1}{a} - 1\right)$ [$\frac{1}{a}$; $a \neq -1, 0, 1$]

5) $\dfrac{a-2b}{a+b} - \dfrac{2a-b}{b-a} - \dfrac{2a^2}{a^2-b^2}$ [$\frac{a-b}{a+b}$; $a = \pm b$]

6) $\left(\dfrac{1}{n-1} - \dfrac{3}{n^3-1} + \dfrac{3}{n^2+n+1}\right) \cdot \left(n + \dfrac{2n+1}{n-1}\right)$ [$\frac{n+5}{n-1}$; $n \neq 1$]

7) $\dfrac{5a}{3(4-a)} + \dfrac{a+4}{8-3a} \cdot \left(\dfrac{a-1}{a+4} - \dfrac{a-3}{a-4}\right)$ [$\frac{-5a+6}{3(a-4)}$; $a \neq \pm 4, \frac{8}{3}$]

8) $\left(\dfrac{x}{x^2-4} - \dfrac{2}{x^2+2x}\right) \cdot \dfrac{x^2-2x}{12} + \dfrac{x+8}{x-2}$ [$\frac{x^3+8x^2+128x+184}{12(x-2)(x+2)}$; $x \neq -2, 0, 2$]

9) $2n-\Big(\dfrac{2n-3}{n+1}-\dfrac{n+1}{2-2n}-\dfrac{n^2+3}{2n^2-2}\Big)\cdot\dfrac{n^3+1}{n^2-n}$ $\quad[2\frac{n-1}{n}\,;\ n\neq -1,0,1]$

10) $\Big(\dfrac{2a^2-2}{a^2+ab}\cdot\dfrac{a+b}{1-a}\Big):\dfrac{a^3+1}{a}$ $\quad[-\frac{2}{a^2-a+1}\,;\ a\neq -b, a\neq 1,0]$

11) $\dfrac{\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}}{1-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}}\cdot\dfrac{2-\frac{1+b^2}{b}}{\frac{1}{b^2}-\frac{2}{b}+1}$ $\quad[2a\,;\ a\neq \pm b, b\neq 0,1]$

12) $\dfrac{\frac{a^4-b^4}{a^2b^2}}{\Big(1+\frac{b^2}{a^2}\Big)\cdot\Big(1-\frac{2a}{b}+\frac{a^2}{b^2}\Big)}$ $\quad[\frac{a+b}{a-b}\,;\ a\neq b, a\neq 0, b\neq 0]$

13) $\Big[b^2-\dfrac{a}{1+(\frac{b-a}{a})^{-1}}\cdot\Big(\dfrac{ab}{b-a}-a\Big)\Big]:\dfrac{a^2+ab+b^2}{b}$ $\quad[b-a\,;\ a\neq 0, b\neq 0, a\neq b]$

14) $\dfrac{2a+b}{a^2+2ab+b^2}:\Big(\dfrac{3}{a-b}+\dfrac{3a}{a^3-b^3}\cdot\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}\Big)$ $\quad[\frac{a-b}{3(a+b)}\,;\ a\neq \pm b, a\neq -\frac{b}{2}]$

15) $\Big(\dfrac{2(a+b)^2}{ab}-8\Big):\Big(\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{b}{b-a}+\dfrac{2ab}{b^2-a^2}\Big)$ $\quad[\frac{2(a^2-b^2)}{ab}\,;\ a\neq \pm b, a\neq 0, b\neq 0]$

16) $\dfrac{a^3+b^3}{a+b}:(a^2-b^2)+\dfrac{a}{a+b}-\dfrac{a^2}{a^2-b^2}$ $\quad[\frac{a-b}{a+b}\,;\ a\neq \pm b]$

17) $\dfrac{\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1\Big)\cdot\Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\Big)}{\Big(\frac{x^4}{y^2}-\frac{y^4}{x^2}\Big):\Big(x^2-y^2\Big)}$ $\quad[1\,;\ x\neq \pm y, x\neq 0, y\neq 0]$

18) $\Big[\Big(\dfrac{3}{x-y}+\dfrac{3x}{x^3-y^3}\cdot\dfrac{x^2+xy+y^2}{x+y}\Big):\dfrac{2x+y}{x^2+2xy+y^2}\Big]\cdot\dfrac{3}{x+y}$ $\quad[\frac{9}{x-y}\,;\ x\neq \pm y, x=-\frac{y}{2}]$

19) $\Big(\dfrac{2x+y}{x+y}-\dfrac{x-2y}{x-y}-\dfrac{x^2}{x^2-y^2}\Big):\dfrac{x^3+y^3}{x^4-y^4}$ $\quad[\frac{y^2(x^2+y^2)}{x^3+y^3}\,;\ x\neq \pm y]$

20) $\dfrac{6x-3}{2x+2}\cdot\Big(\dfrac{2x}{1-4x+4x^2}-\dfrac{4x^2+2x}{8x^3-1}\Big)$ $\quad[\frac{6x}{8x^3-1}\,;\ x\neq \frac{1}{2},-1]$

B) Výrazy s odmocninami

21) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}+\dfrac{4}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ $\quad[4]$

22) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}-\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$ $\quad[(-3+2\sqrt{2+\sqrt{3}})(1+\sqrt{3})]$

23) $\dfrac{1}{\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}+\frac{1}{1-a^2}}\cdot\Big(1+\dfrac{a^2}{\sqrt{1-a^2}}+\sqrt{1-a^2}\Big)$ $\quad[\sqrt{1-a^2}\,;\ |a|<1]$

24) $\dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\dfrac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$ $\quad[4x^2-2\,;\ |x|\geq 1]$

25) $\dfrac{x+\sqrt{3}}{x}+\dfrac{x-\frac{3}{x}}{x+\sqrt{3}}$ $[2\,;\ x\neq -\sqrt{3},0]$

26) $\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$ $[\frac{2(a+b)}{a-b}\,;\ a\geq 0, b\geq 0, a\neq b]$

27) $\Big(\sqrt{a}+\dfrac{b-\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\Big):\Big(\dfrac{a}{\sqrt{ab}+b}+\dfrac{b}{\sqrt{ab}}-\dfrac{a+b}{\sqrt{ab}}\Big)$ $[-\frac{a+b}{\sqrt{a}}\,;\ a>0, b>0]$

28) $\Big(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\Big):\Big(a-b\Big)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ $[1\,;\ a\geq 0, b\geq 0, a\neq b]$

29) $x^2\Big[\dfrac{(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y})^2+(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y})^2}{x+\sqrt{xy}}\Big]^5\cdot\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{x}}{x^{-1}}}$ $[2^5\,;\ y\geq 0, x>0]$

30) $\dfrac{(x^{\frac{9}{8}}\cdot y^{\frac{5}{4}})^{\frac{2}{3}}\cdot z^{-\frac{3}{4}}}{x^{\frac{2}{3}}\cdot y^{\frac{3}{4}}\cdot z^{-\frac{5}{6}}}$ $[(xyz)^{\frac{1}{12}}\,;\ x>0, y>0, z>0]$

31) $\sqrt{2xy}\cdot\sqrt[3]{4x^2y^4}\cdot\sqrt[4]{8x^3y^2}\cdot\sqrt[6]{x^5y^7}\cdot\sqrt[12]{2x^3y^9}$ $[4\cdot x^3y^{\frac{17}{4}}\,;\ x\geq 0, y\geq 0]$

32) $\Big[\dfrac{3x^{-\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}-2x^{-\frac{1}{3}}}-\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{4}{3}}-x^{\frac{1}{3}}}\Big]^{-1}-\Big(\dfrac{1-2x}{3x-2}\Big)^{-1}$ $[\frac{x^2}{(2x-1)}\,;\ x\neq 0,\frac{1}{2},\frac{2}{3},1,2]$

33) $\Big(\dfrac{a^{-\frac{2}{3}}}{b^{-1}}-\dfrac{b^{-1}}{a^{-\frac{2}{3}}}\Big):\Big(\dfrac{a^{-\frac{1}{3}}}{b^{-\frac{1}{2}}}-\dfrac{b^{-\frac{1}{2}}}{a^{-\frac{1}{3}}}\Big)$ $[b^{\frac{1}{2}}a^{-\frac{1}{3}}+b^{-\frac{1}{2}}a^{\frac{1}{3}}\,;\ b>0, a\neq 0, b\neq a^{\frac{2}{3}}]$

34) $\Big(a^{\frac{1}{4}}+b^{\frac{1}{4}}\Big):\Big[\Big(\dfrac{a\sqrt[3]{b}}{b\sqrt{a^3}}\Big)^{\frac{3}{2}}+\Big(\dfrac{\sqrt{a}}{a\sqrt[8]{b^3}}\Big)^2\Big]$ $[ab\,;\ a>0, b>0]$

35) $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}:\dfrac{1}{x\sqrt{x}-1}$ $[x-1\,;\ x\geq 0, x\neq 1]$

C) Dělení polynomu polynomem

$$
\begin{array}{l}
(3x^3\ -x^2\ +x\ -4):(x-1)=3x^2+2x+3-\dfrac{1}{x-1},\quad x\neq 1\\
\underline{-(3x^3-3x^2)}\\
\quad\ 0\ +2x^2\\
\qquad \underline{-(2x^2-2x)}\\
\qquad\quad 0\ +3x\\
\qquad\qquad \underline{-(3x-3)}\\
\qquad\qquad\quad 0\ -1
\end{array}
$$

36) $(2x^4-x^3+x^2-x-1):(x^2+1)$ $[2x^2-x-1]$

37) $(x^3-5x^2+5x-2):(x-4)$ $[x^2-x+1+\frac{2}{x-4}\,;\ x\neq 4]$

Rovnice

(lineární, kvadratické, s absolutní hodnotou, exponenciální, logaritmické, soustavy rovnic)

Při řešení rovnice je nutné nejdříve určit podmínky, za kterých mají výrazy vyskytující se v rovnici smysl.

$$\frac{3\sqrt{x}+4}{2} - 2 = -3\,, \qquad \text{Podmínky}:\ x \geq 0\,.$$

Rovnice řešíme pomocí následujících úprav:

$$\begin{aligned}
\frac{3\sqrt{x}+4}{2} - 2 &= -3 \quad / \quad +2 && \text{Přičítání}\\
\frac{3\sqrt{x}+4}{2} &= -1 \quad / \quad \cdot 2 && \text{Násobení nenulovým číslem}\\
3\sqrt{x}+4 &= -2 \quad / \quad -4 && \text{Odečítání}\\
3\sqrt{x} &= -6 \quad / \quad :3 && \text{Dělení nenulovým číslem}\\
\sqrt{x} &= -2 \quad / \quad {}^2 && \text{Umocňování - pozor jedná se}\\
x &= 4 && \text{o neekvivalentní úpravu,}\\
& && \text{nutno vždy udělat zkoušku:}
\end{aligned}$$

Zkouška: L : $\frac{3\sqrt{4}+4}{2} - 2 = \frac{6+4}{2} - 2 = 3\,,$ P : $-3\,.$

Závěr: Tato rovnice nemá řešení.

A) Lineární rovnice

1) $x = x - 1$ [neexistuje řešení]

2) $5 - \frac{x}{3} = 2{,}5 - \frac{3x+1}{12}$ [$x = 31$]

3) $\frac{7+3x}{9} - 2 + \frac{x+2}{4} = 5x$ [$x = -\frac{26}{159}$]

4) $\frac{x+2}{\frac{3}{2}x+1} = \frac{2x-1}{3x+1}$ [$x = -\frac{6}{13}$]

Vyřešte rovnice a zapište podmínky pro parametr p tak, aby rovnice měla jediné řešení:

5) $x - 2 = \frac{3x - 4 - 2p^2}{p+2}$ [$x = -2p\,;\ p \neq 1, -2$]

6) $\frac{2x-3}{3} = \frac{2p^2 - x + 1}{p-1}$ [$x = 3p\,;\ p \neq -\frac{1}{2}, 1$]

B) Kvadratické rovnice

Kořeny kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0\,,$ $a, b, c \in \mathbf{R}\,,$ jsou čísla:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Vyřešte:

7) $x^2 - 7x + 12 = 0$ [$x_1 = 3\,, x_2 = 4$]

8) $\dfrac{x+2}{x+3}=\dfrac{2x-1}{3x+1}$ $[x_{1,2}=-1\pm i2]$

9) $2\sqrt{x+2}=x+1$ $[x=1+\sqrt{8}]$

10) $2\sqrt{x+5}=x+2$ $[x=4]$

11) $\dfrac{4}{\sqrt{3x+1}}+\sqrt{3x+1}=\sqrt{5x}$ $[x=5]$

12) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{x}}{2-x}=\sqrt{\dfrac{1}{2-x}}$ $[x=0]$

13) $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-9}=\sqrt{7x+2}$ $[x=2]$

14) $1+\sqrt{x+11}=x$ $[x=5]$

15) $\dfrac{x+\sqrt{3}}{x}-\dfrac{2x}{x+\sqrt{3}}=2$ $[x_{1,2}=\pm 1]$

16) $\sqrt{3x+1}=x-2$ $[x=\frac{7}{2}+\frac{\sqrt{37}}{2}]$

17) $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$ $[x_1=0\,,x_2=5]$

18) $x^2+4ax+36=0$ $[x_{1,2}=-2a\pm 2\sqrt{a^2-9}]$

19) Pro jaké číslo $a\in\mathbf{R}$ má následující kvadratická rovnice dvojnásobný kořen?
$(a-1)x^2+2(a+1)x+a-2=0$ $[a=\frac{1}{5}]$

20) Určete číslo p tak, aby součet druhých mocnin kořenů následující rovnice byl nejmenší.
$x^2+(p-2)x-p+1=0$ $[p=1]$

21) Určete $a,b,c\in\mathbf{R}$ pro $f(x)=ax^2+bx+c$ tak, aby $f(-1)=2\,,f(0)=1\,,f(2)=3\,.$
$[\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x+1]$

C) Rovnice s absolutní hodnotou

Definice absolutní hodnoty čísla $x\in\mathbf{R}\,,\quad |x|=\max\{x,-x\}\,.$

Platí: $|x|=x$ pro $x\geq 0\,,\quad |x|=-x$ pro $x\leq 0\,.$ Proto rovnice s absolutní hodnotou rozdělujeme na případy, kdy výrazy v absolutní hodnotě jsou nezáporné a nekladné.

22) $|2x+1|-|2x|+1=2x$ $[x=1]$

$-\frac{1}{2}$ $\qquad 0$ $\qquad$ æ

a) $x\in(-\infty,-\frac{1}{2}\rangle$	b) $x\in\langle-\frac{1}{2},0\rangle$	c) $x\in\langle 0,\infty)$
$-2x-1+2x+1=2x$	$2x+1+2x+1=2x$	$2x+1-2x+1=2x$
$x=0$	$x=-1$	$x=1$
nevyhovuje	nevyhovuje	vyhovuje

23) $1-2|x+1|=3x+2$ $[x=-\frac{3}{5}]$

24) $|3-2x|+x=1$ [neexistuje řešení]

25) $1-2|3-x|=3x+1$ $[x=-6]$

26) $-2x-|3x-2|=2x-1$ $[x=-1]$

27) $|x-3|=2x+3$ $[x=0]$

28) $|x|=x-1$ [neexistuje řešení]

29) $4(x+1)=|2x-1|$ $[x=-\frac{1}{2}]$

30) $3+4|x-2|=5x$ $[x=\frac{11}{9}]$

31) $2|x-4|+7=3x+3$ $[x=\frac{12}{5}]$

32) $4(x+3)-2x=|x+\dfrac{1}{2}|$ $[x=-4\frac{1}{6}]$

33) $5|x-3|-6=3(x+2)$ $[x_1=\frac{27}{2},\ x_2=\frac{3}{8}]$

34) $|x|=\dfrac{1}{2}x+1$ $[x_1=2\,, x_2=-\frac{2}{3}]$

35) $4|x-2|+5x=15$ $[x=\frac{23}{9}]$

36) $3x-|2x-1|=\dfrac{5}{6}$ $[x=\frac{11}{30}]$

37) $|x-10|=4+2x$ $[x=2]$

38) $1-2|x+1|=3x$ $[x=-\frac{1}{5}]$

39) $|7-x|-|2x+1|=2+x$ $[x=1]$

40) $|x|+|x-1|=1$ $[x\in\langle 0,1\rangle]$

41) $2x-|7-x|=3+|2-x|$ $[x=4]$

42) $2|x-3|+|6-2x|=|x+7|$ $[x_1=\frac{19}{3},\ x_2=1]$

43) $|x-1|+|x+1|+1=|x|$ [neexistuje řešení]

44) $|x|+|x-2|=x+1$ $[x_1=1\,, x_2=3]$

45) $|3x+6|-|x-2|=2(x+1)$ $[x_1=-\frac{5}{2}\,, x_2=-1]$

46) $|2x+1|-|x+3|=2(1-x)-3$ $[x_1=-3\,, x_2=\frac{1}{3}]$

47) $2|5-x|+3(x+1)=2|x|+9$ $[x_1=-\frac{4}{3}\,, x_2=4\,, x_3=\frac{16}{3}]$

48) $x+4-|x-2|=|x|-4$ $[x_1=-2\,, x_2=10]$

49) $|x-2|+2|1-x|=2|x|-1$ $[x_1=1\,, x_2=3]$

50) $|x-1|+|x+1|-\dfrac{3}{2}=|x|$ $[x_1=-\frac{3}{2}\,, x_2=-\frac{1}{2}\,, x_3=\frac{1}{2}\,, x_4=\frac{3}{2}]$

51) $|3-2x|+|x-5|=1+2|x-1|$ $[x_1=3,\ x_2=7]$

52) $|2x+6|-|4-2x|+|x+7|=4$ pro $x\in\langle -2,2\rangle$ $[x=-1]$

53) $|x+7|-|x-4|=|6-x|$ pro $x\in\langle -3,3\rangle$ $[x=1]$

D) Exponenciální a logaritmické rovnice

Exponenciální funkce a^x je definována pro $a>0\,, x\in\mathbf{R}$. Logaritmická funkce $\log_b x$ je definována pro $b\in(0,1)\cup(1,\infty)$, $x>0$.

Platí: $a^x\cdot a^y=a^{x+y}\,,\quad \dfrac{a^x}{a^y}=a^{x-y}\,,\quad a^{-x}=\dfrac{1}{a^x}\,,$

$$\log x+\log y=\log(x\cdot y)\,,\quad \log x-\log y=\log\frac{x}{y}\,,\quad \log x^n=n\cdot\log x\,,$$

$$\log_a x=\log_b x\cdot\log_a b\,,\quad \log_a a=1\,,\quad \log_a 1=0\,.$$

Značení: $\log x=\log_{10}x\,,\quad \ln x=\log_{\mathrm{e}}x\,.$

Řešené příklady:

54) a) $2^x=\dfrac{1}{4}\ \Rightarrow\ 2^x=2^{-2}\ \Rightarrow\ x=-2$ nebo

$\log 2^x=\log 4^{-1}\ \Rightarrow\ x\log 2=-1\log 2^2\ \Rightarrow\ x\log 2=-2\log 2\ \Rightarrow\ x=-2\,,$

b) $2^x=1\ \Rightarrow\ 2^x=2^0\ \Rightarrow\ x=0\,,$

c) $2^x=-3\,,$ neexistuje řešení $(a^x>0)\,,$

d) $2^x=3\ \Rightarrow\ x\log 2=\log 3\ \Rightarrow\ x=\dfrac{\log 3}{\log 2}\ \Rightarrow\ x=\log_2 3\,,$

e) $2^x=\sqrt[5]{8}\ \Rightarrow\ 2^x=2^{\frac{3}{5}}\ \Rightarrow\ x=\frac{3}{5}\,.$

55) $4 \cdot 3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = \dfrac{10}{3}$ $[x = -1]$

$4 \cdot 3^x + 2 \cdot 3 \cdot 3^x = \frac{10}{3} \;\Rightarrow\; 3^x = \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; x = -1$

56) $4^{2x+1} = 65 \cdot 4^{x-1} - 1$ $[x_1 = 1\,, x_2 = -2]$

Substituce: $y = 4^x$, $\quad 4y^2 = \frac{65}{4}y - 1 \;\Rightarrow\; 16y^2 - 65y + 4 = 0 \;\Rightarrow\; (16y-1)(y-4) = 0 \;\Rightarrow$ $x_1 = 1\,, x_2 = -2\,.$

57) $\log(x+3) + \log(x-2) = 2 - \log 2$ $[x = 7]$

Podmínky: $x > -3 \wedge x > 2 \;\Rightarrow\; x > 2$

$\log(x+3)\cdot(x-2) = \log 100 - \log 2 \;\Rightarrow\; \log(x^2 + x - 6) = \log 50 \;\Rightarrow\; x^2 + x - 56 = 0 \;\Rightarrow$ $x_1 = 7\,,\quad x_2 = -8$ (nevyhovuje).

Řešte:

58) $2 \cdot 3^{x+1} - 6 \cdot 3^{x-1} - 3^x = 9$ $[x = 1]$

59) $2^{2x+1} + 4^{x+1} + 16^{\frac{x}{2}} = 28$ $[x = 1]$

60) $16^{3x-2} - 2 \cdot 8^x = 0$ $[x = 1]$

61) $2^{x^2 - 6x - \frac{5}{2}} = 16\sqrt{2}$ $[x_1 = 7\,, x_2 = -1]$

62) $4^x - 2^{x+1} + 5 = \log_2 16$ $[x = 0]$

63) $2^{2+x} - 2^{2-x} = 15$ $[x = 2]$

64) $\dfrac{\log(x^2+14)}{\log(7-x)} = 2$ $[x = \frac{35}{14}]$

65) $\dfrac{\log(x^2+5)}{2\log(3-x)} = 1$ $[x = \frac{2}{3}]$

66) $\dfrac{1}{2}\log(2x-3) = \log(x-3)$ $[x = 6]$

67) $\dfrac{1}{2}\log(2x+5) = \log(x-5)$ $[x = 10]$

68) $2\log x - \log\dfrac{1}{x} + \log 2\sqrt{x} = \log x^3 - \log\dfrac{1}{2} - 2$ $[x = 10^{-4}]$

69) $\log x^3 - \log 2x - \log\sqrt{x} = \dfrac{1}{2}\log x - \log 20 + 2$ $[x = 10]$

70) $\log(4x-3) + \log(3x-4) - \log(3-x) - \log(x-1) = 1$ $[x = 2]$

71) $(\log x)^{\log x} = 1$ $[x = 10]$

72) $\dfrac{3^{2x-1}}{3^{2+x}} = \dfrac{\log 4}{\log 2}$ $[x = \log_3 54]$

73) $\dfrac{2^{1-5x}}{2^{-2-3x}} = \dfrac{\log 81}{\log 9}$ $[x = 1]$

74) $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x-1} \cdot \left(\dfrac{8}{27}\right)^{x+3} = \dfrac{16}{81}$ $[x = -6]$

75) $\left(\frac{25}{49}\right)^{1-x} \cdot \left(\frac{7}{5}\right)^{x} = \left(\frac{49}{25}\right)^{3}$ $[x = \frac{8}{3}]$

E) Soustavy rovnic

Soustavy rovnic lze řešit např.

eliminací:

$$\begin{array}{rcl} x+y &=& 1 \\ 3x-2y &=& 8 \\ \hline x &=& 1-y \\ 3(1-y)-2y &=& 8 \\ \hline 3-3y-2y &=& 8 \\ -5y &=& 5 \\ y &=& -1 \\ x-1 &=& 1 \\ x &=& 2 \end{array}$$

Z jedné rovnice vyjádříme první neznámou pomocí druhé neznámé. Toto vyjádření dosadíme do druhé rovnice a dostaneme jednu rovnici s jednou neznámou.

ekvivalentními úpravami rovnic:

$$\begin{array}{rcll} x+y &=& 1 & /\cdot 2 \\ 3x-2y &=& 8 & \\ \hline 2x+2y &=& 2 & \\ 3x-2y &=& 8 & \\ \hline 5x+0y &=& 10 & \\ x &=& 2 & \\ 2+y &=& 1 & \\ y &=& -1 & \end{array}$$

Jednu z rovnic vynásobíme konstantou tak, aby po sečtení (odečtení) obou rovnic vznikla rovnice s jednou neznámou.

Řešte:

76) $2x - y = 1$
$-6x + 3y = -3$ $[y = 2x - 1\,, x \in \mathbf{R}]$

77) $x + 2y = 1$
$-2x - 4y = 0$ [neexistuje řešení]

78) $x - 3y = 10$
$3x - 2y = 9$ $[x = 1, y = -3]$

79) $x - 3y = 8$
$x^2 - 24y = 100$ $[x = 4 \pm \sqrt{13}]$
$[y = \frac{2}{3}(-2 \pm \sqrt{13})]$

80) $x^2 + y^2 = 25$
$4x + 3y = 25$ $[x = 4\,, y = 3]$

81) $x^2 + y^2 = 1$
$2x - y = 1$ $[x_1 = 0\,, y_1 = -1]$
$[x_2 = \frac{4}{5}\,, y_2 = \frac{3}{5}]$

82) $x^2 + y^2 = 4$
$y - x + 4 = 0$ [neexistuje řešení]

83) $x^2 + y^2 = 9$
$3y = x - 3$ $[x_1 = 3\,, y_1 = 0]$
$[x_2 = -\frac{12}{5}\,, y_2 = -\frac{9}{5}]$

Určete parametr m tak, aby soustava měla jediné řešení. Řešení nalezněte.

84) $y = (x-1)^2 + 2$ $[m = -2]$
$2x - y + m + 1 = 0$ $[x = 2\,, y = 3]$

85) $y = (x-1)^2 + 3$ $[m = \frac{7}{8}]$
$x - y + 2m = 0$ $[x = \frac{3}{2}\,, y = \frac{13}{4}]$

86) $y = (1-x)^2 + m - 3$ $[m = 12]$
$2x + y - 10 = 0$ $[x = 0\,, y = 10]$

87) $y = (3-x)^2 + 2m + 5$ $[m = \frac{9}{8}]$
$x - y + 4 = 0$ $[x = \frac{7}{2}\,, y = \frac{15}{2}]$

88) $y = (x-3)^2 - 3m + 5$ $[m = -6]$
$4x - y + 7 = 0$ $[x = 5\,, y = 27]$

89) $y = (x+1)^2 + m^2 + m + 4$
$2x + 3 - y + m = 0$ [neexistuje řešení]

90) Nalezněte řešení v závislosti na parametru $a \in \mathbf{R}$.

$3x + (a-1)y = 12$

$(a-1)x + 12y = 24$

$[x = \frac{24}{5+a}\,, y = \frac{12}{5+a}\,, a \neq -5, 7]$, $[a = -5$ neexistuje řešení , $[a = 7\,, x = 4 - 2y\,, y \in \mathbf{R}]$

Nerovnice

Při úpravě nerovnic se používají stejné úpravy jako při úpravě rovnic. Pozor, při násobení a dělení záporným číslem přechází nerovnost v obrácenou nerovnost.

$$\begin{array}{rcrll}
\dfrac{1+2x}{3} & > & -1 & /\cdot(-3) & \text{násobení záporným číslem} \\
-(1+2x) & < & 3 & /+1 & \\
-2x & < & 4 & /:(-2) & \text{dělení záporným číslem} \\
x & > & -2 & &
\end{array}$$

1) $3-\dfrac{3x}{2}<\dfrac{5}{8}-\dfrac{4x-3}{6}$ $[x\in(\frac{9}{4},\infty)]$

2) $\dfrac{7x-1}{3}+6>5x-\dfrac{5+3x}{2}$ $[x\in(-\infty,7)]$

3) $5-\dfrac{x}{3}<2{,}5-\dfrac{3x+1}{12}$ $[x\in(31,\infty)]$

4) $2(1-2x)^2\geq 2x+5$ $[x\in(-\infty,--\frac{1}{4}\rangle\cup\langle\frac{3}{2},\infty)]$

5) $(x-3)^2<2x(x+2)-(x+1)^2+4$ $[x\in(\frac{3}{4},\infty)]$

6) $\dfrac{3x-5}{x^2+4x-5}\geq\dfrac{1}{2}$ $[x\in(-5,1)]$

7) $x^2+x-2<0$ $[x\in(-2,1)]$

8) $2x-3>5\ \wedge\ -x+5<6$ $[x\in(4,\infty)]$

9) $|x-2|<5$ $[x\in(-3,7)]$

10) $\dfrac{3}{|x+1|}-1\geq 0$ $[x\in(-4,-1)\cup(-1,2)]$

11) $\dfrac{|3-5x|}{x-2}>6$ $[x\in(2,9)]$

12) $3x-|2x-1|\leq 5-x$ $[x\in(-\infty,2\rangle]$

13) $\sqrt{x+2}>x$ $[x\in(-1,2)]$

14) $-\dfrac{x}{2}<3x-\dfrac{|3+2x|}{4}$ $[x\in(\frac{1}{4},\infty)]$

15) $|2x+7|\geq 3$ $[x\in(-\infty,-5\rangle\cup\langle-2,\infty)]$

16) $|x^2+x-2|<x$ $[x\in(\sqrt{3}-1,\sqrt{2})]$

17) $|x-6|<x^2-5x+9$ $[x\in(-\infty,1)\cup(3,\infty)]$

18) $\left|\dfrac{x-3}{x-2}\right|<2$ $[x\in(-\infty,1)\cup(\frac{7}{3},\infty)]$

19) $\left|\dfrac{x+2}{3x+4}\right|>1$ $[x\in(-\frac{3}{2},-1)]$

20) $\left|\dfrac{x^2-8}{x+2}\right|<x+4$ $[x\in(-3,-\frac{8}{3})\cup(0,\infty)]$

21) $\left|\dfrac{2x^2+1}{x+1}\right|>2x-1$ $[x\in(-\infty,2)]$

22) $\log|x+1|<2$ $[x\in(-101,-1)\cup(-1,99)]$

23) $1\leq\dfrac{2\log x+3}{3}\leq\dfrac{5}{3}$ $[x\in\langle 1,10\rangle]$

24) $1<\dfrac{\log x+1}{3}<2$ $[x\in(10^2,10^5)]$

25) $\dfrac{1}{2}<\log x+1<\dfrac{5}{3}$ $[x\in(10^{-\frac{1}{2}},10^{\frac{2}{3}})]$

26) $2<\log|x|+3<4$ $[x\in(-10;-0{,}1)\cup(0{,}1;10)]$

27) $0<\dfrac{\log|x-1|+1}{2}\leq 1$ $[x\in(\langle-9;0{,}9)\cup(1{,}1;11\rangle]$

28) $|\log x-1|<2$ $[x\in(10^{-1},10^3)]$

29) $|\log\dfrac{x}{2}-1|\geq 2$ $[x\in(0,\frac{1}{5}\rangle\cup\langle 2\cdot 10^3,\infty)]$

Goniometrické výrazy, rovnice a nerovnice.

Při úpravách goniometrických výrazů využíváme následujících vztahů:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha\,, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\beta\sin\alpha\,.$$

Pro $\alpha = \beta$ dostaneme: $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1\,,\quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\beta\,,$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,\quad 2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha\,,\quad 2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha\,.$

Dokažte následující identitu a napište podmínky, za kterých je splněna:

$$\frac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\frac{\cos x}{1+\cos x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$$

Podmínky: $1 + \cos 2x \neq 0 \Rightarrow 2x \neq \pi + 2\mathrm{k}\pi,\quad 1 + \cos \mathrm{x} \neq 0 \Rightarrow \mathrm{x} \neq \pi + 2\mathrm{k}\pi,\quad \mathrm{k} \in \mathbf{Z}.$
Tedy: $x \neq \pi + 2\mathrm{k}\pi \wedge \mathrm{x} \neq \dfrac{\pi}{2} + \mathrm{k}\pi\,.$
Úpravy: $\dfrac{\sin 2x}{1+\cos 2x}\cdot\dfrac{\cos x}{1+\cos x} = \dfrac{2\sin x\cos^2 x}{2\cos^2 x(1+\cos x)} = \dfrac{\sin x}{1+\cos x} = \dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}} = \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\,.$

Pro goniometrické funkce platí:

funkce\úhel	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

Upravte:

1) $\dfrac{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x - \operatorname{cotg}^2 x}$ $\quad [(\frac{\sin x}{\cos x})^6,\quad x \neq \mathrm{k}\frac{\pi}{2}, \mathrm{k} \in \mathbf{Z}]$

Vyřešte:

2) $\sin x(1 + 2\cos x) - \operatorname{tg} x = 0$ $\quad [x_1 = \mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{\pi}{3} + 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_3 = -\frac{\pi}{3} + 2\mathrm{k}\pi]$

3) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ $\quad [x = -\pi + 2\mathrm{k}\pi]$

4) $\sqrt{7\sin x - 2} = -\sqrt{2}\cos x$ $\quad [x = \frac{5}{6}\pi + 2\mathrm{k}\pi]$

5) $2\sin^2 x = 3\cos x$ $\quad [x_1 = \frac{5}{3}\pi + 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{\pi}{3} + 2\mathrm{k}\pi]$

6) $\dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{cotg} x - 2 = 0$ $\quad [x_1 = \frac{2}{3}\pi + \mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{\pi}{6} + \mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_3 = \frac{\pi}{3} + \mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_4 = -\frac{\pi}{6} + \mathrm{k}\pi]$

7) $\sin x = 1 - \cos 2x$ $\quad [x_1 = \mathrm{k}\pi, x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_3 = \frac{5}{6}\pi + 2\mathrm{k}\pi]$

8) $\operatorname{tg} x = -1$ $\quad [x = -\frac{\pi}{4} + \mathrm{k}\pi]$

9) $\sin 2x = -\dfrac{1}{2}$ $\quad [x_1 = -\frac{\pi}{12} + \mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{7}{12}\pi + \mathrm{k}\pi]$

10) $\sin x + \sin 2x = \operatorname{tg} x$ $[x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\mathrm{k}\pi,\ x_2 = \frac{5}{3}\pi + 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_3 = \mathrm{k}\pi]$

11) $2\cos^2 x + 3\cos x + 1 = 0$ $[x_1 = \frac{2}{3}\pi + 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{4}{3}\pi + 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_3 = \pi + 2\mathrm{k}\pi]$

12) $\operatorname{tg}\ x = \sin 2x$ $[x_1 = \frac{\pi}{4} + \mathrm{k}\pi, \frac{3}{4}\pi + \mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_3 = \mathrm{k}\pi]$

13) $\sin x + 2\cos x = -2$ $[x = \pi + 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x} \doteq 2.22 + 2\mathrm{k}\pi]$

14) $3 - \operatorname{cotg} x = (2+\sqrt{3})\operatorname{cotg} x - \sqrt{3}$ $[x = \frac{\pi}{4} + \mathrm{k}\pi]$

15) $\sin x + \cos x = \dfrac{1}{\cos x}$ $[x_1 = \mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{\pi}{4} + \mathrm{k}\pi]$

16) $\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg}^2 x - 3\operatorname{tg} x - 3 = 0$ $[x_1 = \frac{1}{3}\pi + \mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{2}{3}\pi + \mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_3 = \frac{4}{3}\pi + \mathrm{k}\pi]$

17) $2\cos 2x - 4\cos x = 1$ $[x = \frac{2}{3}\pi + 2\mathrm{k}\pi]$

18) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$ $[x_1 = \mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{\pi}{2} + \mathrm{k}\pi]$

19) $\dfrac{2}{\sin 2x} = (1 + \operatorname{tg}^2 x)\operatorname{cotg} x$ $[x \in \mathbf{R}\setminus\{\frac{1}{2}\mathrm{k}\pi\}]$

20) $\operatorname{tg}\ 2x - \operatorname{cotg} x = 0$ $[x_1 = \frac{1}{6}\pi + \mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{5}{6}\pi + \mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_3 = \frac{1}{2}\pi + \mathrm{k}\pi]$

21) $\operatorname{tg}\ \dfrac{x}{2} = 1 - \cos x$ $[x_1 = 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{1}{2}\pi + 2\mathrm{k}\pi]$

22) $|\sin x| = \sin x + 2\cos x$ $[x_1 = \frac{1}{2}\pi + 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{7}{4}\pi + 2\mathrm{k}\pi]$

23) $\cos^2 x + \sin x \cos \dfrac{x}{2} = 1$ $[x_1 = \mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{1}{3}\pi + 4\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_3 = \frac{5}{3}\pi + 4\mathrm{k}\pi]$

24) $(\cos^2 x - 1)\operatorname{cotg}^2 x = -3\sin x$ $[x_1 = \frac{1}{6}\pi + 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{5}{6}\pi + 2\mathrm{k}\pi]$

25) $\cos 2x - 3\cos x = 4\cos^2 \dfrac{x}{2}$ $[x_1 = \frac{2}{3}\pi + 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{4}{3}\pi + 2\mathrm{k}\pi]$

26) $\cos \dfrac{x}{2} = 1 + \cos x$ $[x_1 = \pi + 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{2}{3}\pi + 4\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_3 = \frac{10}{3}\pi + 4\mathrm{k}\pi]$

27) $2\sin \dfrac{x}{2} = 1 - \cos x$ $[x_1 = 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \pi + 4\mathrm{k}\pi]$

28) $2\cos x - \cos 2x = 1$ $[x_1 = 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{1}{2}\pi + \mathrm{k}\pi]$

29) $\cos x + \cos 2x = 0$ $[x_1 = \frac{1}{3}\pi + 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{5}{3}\pi + 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_3 = \pi + 2\mathrm{k}\pi]$

30) $\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x = 0$ $[x = \frac{2}{3}\mathrm{k}\pi]$

31) $\cos x + \sin 2x = 0$ $[x_1 = \frac{1}{2}\pi + \mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_2 = \frac{7}{6}\pi + 2\mathrm{k}\pi, \mathrm{x}_3 = \frac{11}{6}\pi + 2\mathrm{k}\pi]$

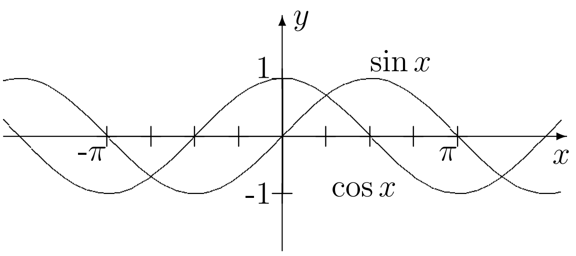
32) $\sin x + \cos 2x > 1$ $[x \in (0 + 2\mathrm{k}\pi, \frac{\pi}{6} + 2\mathrm{k}\pi) \cup (\frac{5}{6}\pi + 2\mathrm{k}\pi, \pi + 2\mathrm{k}\pi)]$

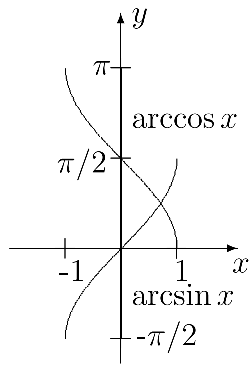
33) $\cos x > \dfrac{1}{2}$ $[x \in (-\frac{\pi}{3} + 2\mathrm{k}\pi, \frac{\pi}{3} + 2\mathrm{k}\pi)]$

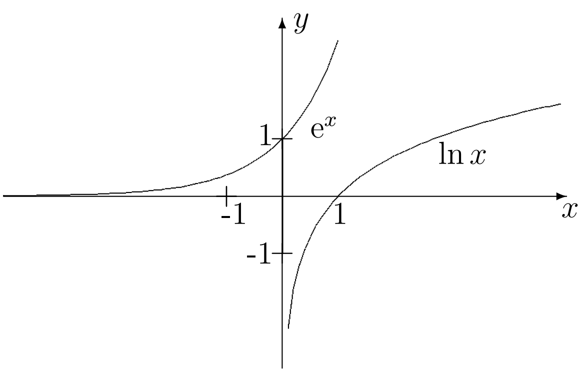
34) $\sin x > \cos x$ $[x \in (\frac{\pi}{4} + 2\mathrm{k}\pi, \frac{5}{4}\pi + 2\mathrm{k}\pi)]$

Funkce, definiční obory, grafy funkcí

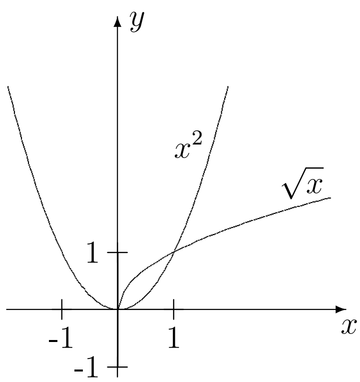
Funkce	Definiční obor	Funkce	Definiční obor
$\sin x$	$\mathbf{R}$	$\arcsin x$	$\langle -1, 1\rangle$
$\cos x$	$\mathbf{R}$	$\arccos x$	$\langle -1, 1\rangle$
e^x	$\mathbf{R}$	$\ln x$	$(0, \infty)$
$\mathrm{tg}\ x$	$\mathbf{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \mathrm{k}\pi\}$, $\mathrm{k} \in \mathbf{Z}$	$\mathrm{arctg}\, x$	$\mathbf{R}$
$\mathrm{cotg}\ x$	$\mathbf{R} \setminus \{\mathrm{k}\pi\}$, $\mathrm{k} \in \mathbf{Z}$	$\mathrm{arccotg}\, x$	$\mathbf{R}$
x^2	$\mathbf{R}$	$\sqrt{x}$	$(0, \infty)$



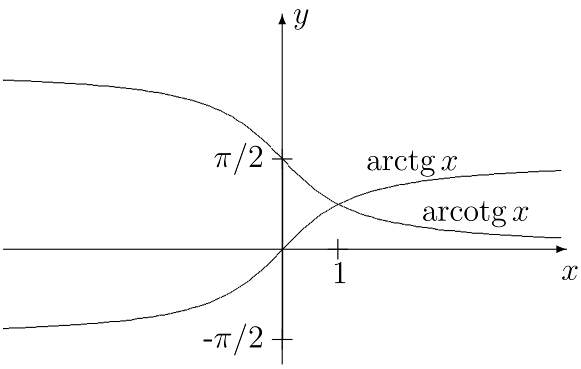




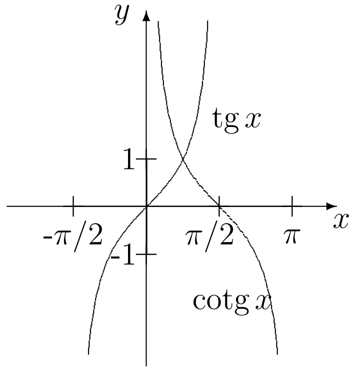
æ



æ



æ



æ

æ æ

Určete definiční obory funkcí:

1) $y = x + \sqrt{1-x}$ $\qquad [D(y) = (-\infty, 1\rangle]$

2) $y = \sqrt{\dfrac{x-2}{1-3x}}$ $\qquad [D(y) = (\frac{1}{3}, 2\rangle]$

3) $y = \dfrac{x}{x^2+8x+7}$ $\qquad [D(y) = \mathbf{R} \setminus \{-1, -7\}]$

4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{|x|-x-1}}$ $\qquad [D(y) = (-\infty, -\frac{1}{2})]$

5) $y = \log \dfrac{x+2}{x-3}$ $\qquad [D(y) = (-\infty, -2) \cup (3, \infty)]$

6) $y = \sqrt{x^2-4x+3}$ $\qquad [D(y) = (-\infty, 1\rangle \cup \langle\, 3, \infty)]$

7) $y = \sqrt{x+1} + \log\,(x^2-3x)$ $\qquad [D(y) = \langle -1, 0) \cup\ (3, \infty)]$

8) $y = \sqrt{x+2} + \dfrac{1}{\log(1-x)}$ $\qquad [D(y) = \langle -2, 0) \cup (0, 1)\ ]$

9) $y = \log(2x^2+4x-6)$ $\qquad [D(y) = (-\infty, -3) \cup (1, \infty)]$

10) $y = \sqrt{\dfrac{1-\operatorname{cotg} x}{1+\operatorname{cotg} x}}$ $\qquad [D(y) = \langle\ \frac{\pi}{4} + \mathrm{k}\pi, \frac{3}{4}\pi + \mathrm{k}\pi)]$

11) $y = \sqrt{1+2\sin x} - \sqrt{1-2\sin x}$ $\qquad [D(y) = \langle \frac{5}{6}\pi + 2\mathrm{k}\pi, \frac{7}{6}\pi + 2\mathrm{k}\pi\rangle \cup \langle \frac{11}{6}\pi + 2\mathrm{k}\pi, \frac{13}{6}\pi + 2\mathrm{k}\pi\rangle]$

Sestrojte grafy následujících funkcí:

1) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+6x+9}}{x+3}$

2) $y = |x+1| - |1-x|$

3) $y = \dfrac{x+|x|}{2x^2}$

4) $y = \dfrac{|x|+x}{x}$

5) $y = \operatorname{tg} x\,,\ y = \operatorname{tg}\Big(x + \dfrac{\pi}{3}\Big)\,,\ y = |\operatorname{tg} x|$

6) $y = \sin\Big(x + \dfrac{\pi}{4}\Big)\,,\ y = \sin\Big(x + \dfrac{\pi}{4}\Big) + 2$

7) $y = \log x\,,\ y = \log(x+2)\,,\ y = \log(x+2) - 3$

8) $y = \mathrm{e}^{x-1}$

Posloupnosti

Reálná posloupnost je zobrazení z $\mathbf{N}$ do $\mathbf{R}$. Značíme $(a_n)_{n=1}^{\infty} = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$. Předpisem $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ definujeme n-tý částečný součet posloupnosti (a_n).
Pro aritmetickou posloupnost (AP) platí: $a_n = a_{n-1} + d$, kde $a_1, d \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$,
$s_n = \dfrac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$.
Pro geometrickou posloupnost (GP) platí: $a_n = a_{n-1} \cdot q$, kde $a_1, q \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}$,
$s_n = a_1 \dfrac{1 - q^n}{1 - q} \quad (q \neq 1), \quad s_n = na_1 \quad (q = 1), \; \lim\limits_{n \to \infty} s_n = s_\infty = s = \dfrac{a_1}{1 - q} \quad (\text{pro } |q| < 1)$.

Dokážeme, že posloupnost $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n=1}^{\infty}$ není ani aritmetická, ani geometrická:

$d = a_n - a_{n-1} = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n-1}{n-1+1} = \dfrac{n \cdot n - (n-1)(n+1)}{(n+1)n} = \dfrac{1}{n(n+1)}$, d není konstanta.

$q = \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{\frac{n}{n+1}}{\frac{n-1}{n-1+1}} = \dfrac{n^2}{(n+1)(n-1)} = \dfrac{n^2}{n^2 - 1}$ q není konstanta.

1) Dokažte, že posloupnost $\left(\dfrac{2n-1}{3}\right)_{n=1}^{\infty}$ je aritmetická. [$d = \frac{2}{3}$]

2) Částka 1225 Kč se má rozdělit tak, aby první osoba dostala 100 Kč a každá další vždy o 5 Kč více. Kolik osob lze takto podělit a kolik dostane poslední osoba. [$n = 10, a_{10} = 145$ Kč]

3) Určete AP, v níž součet prvních tří členů je 3, součet druhých mocnin těchto prvních tří členů je 35. [$a_1 = 5, d = -4;\; a_1 = -3, d = 4$]

4) Určete AP, v níž součet prvních tří členů je 27, součet druhých mocnin těchto prvních tří členů je 275. [$a_1 = 5, d = 4;\; a_1 = 13, d = -4$]

5) Určete všechny AP takové, že $s_n = 7n^2 - 3n$. [$a_1 = 4, d = 14$]

6) Určete všechny AP takové, že $a_2 + a_5 - a_3 = 10, a_1 + a_6 = 17$. [$a_1 = 1, d = 3$]

7) Určete všechny AP takové, že $a_1 + a_7 = 22, a_3 \cdot a_4 = 88$. [$a_1 = 2, d = 3$]

8) Určete všechny AP takové, že $a_7 = 21, s_7 = 105$. [$a_1 = 9, d = 2$]

9) Určete $a + 1$ v AP, jestliže $a_{10} = 37, s_{10} = 190$. [$a_1 = 1$]

10) V AP má platit $a_2 - a_3 + a_5 = 30, a_1 + a_6 = 38$. Určete a_{12}, s_{12}. [$a_{12} = 206, s_{12} = 1020$]

11) V rostoucí AP má platit $a_1 + a_2 = 4, a_1^2 + a_2^2 = 10$. Určete a_{10}, s_{10}. [$a_{10} = 19, s_{10} = 100$]

12) V AP má platit $a_1 + a_4 = -14, a_2 + a_5 = -10$. Určete a_{10}, s_{10}. [$a_{10} = 8, s_{10} = -10$]

13) V AP má platit $a_1 + a_4 = 22, a_2 + a_5 = 26$. Určete a_5, s_5. [$a_5 = 16, s_5 = 60$]

14) V AP určete a_{10}, je-li $s_n = n(3n - 5)$. [$a_{10} = 52$]

15) Najděte všechny GP, v nichž součet prvního a čtvrtého členu je 18, součet druhého a třetího členu je 12. [$a_1 = 2, q = 2;\; a_1 = 16, q = \frac{1}{2}$]

16) Průchodem skleněnou deskou se zeslabilo světlo na $\frac{11}{12}$ své původní intenzity. Jak se světlo zeslabí, projde-li čtyřmi stejnými deskami. [$(\frac{11}{12})^4$ krát]

17) Přičteme-li k číslům 2,7,17 totéž číslo, vzniknou první tři členy geometrické posloupnosti. Které číslo jsme pričetli? $[x = 3]$

18) Pro $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$ řešte rovnici: $1 + \sin^2 x + \sin^4 x + \sin^6 x + \cdots = 2\mathrm{tg}\, x$. $[x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{5\pi}{4}]$

19) V **R** řešte rovnici: $1 - \dfrac{2}{x} + \dfrac{4}{x^2} - \dfrac{8}{x^3} + \cdots = \dfrac{6}{x+5}$. $[x_1 = 4, x_2 = -3]$

20) Najděte a_5 v GP, pro kterou platí: $a_1 = 3, a_3 = 21$. $[q = \pm\sqrt{7}, a_5 = 147]$

21) Najděte GP, pro kterou platí: $a_1 = 2, a_p = 13122, s_p = 19682, p \in \mathbf{N}$. $[q = 3]$

22) Určete a_1, a_7 v GP, pro kterou platí: $q = 2, s_7 = 635$. $[a_1 = 5, a_7 = 320]$

23) Určete q, s_5 v GP, pro kterou platí: $a_1 = 3, a_5 = 12\,288$. $[q = 8, s_5 = 14043]$

24) Určete a_5 v GP, pro kterou platí: $a_4 - a_1 = 14, a_3 - a_2 = 4$. $[a_5 = 32, a_5 = -1]$

25) Určete a_5 v GP, pro kterou platí: $a_1 + a_2 + a_3 = -2, a_1 + 4 = a_2$. $[a_5 = -\frac{1}{6}, a_5 = -2]$

Kombinatorika, binomická věta, matematická indukce

Definujeme $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$ (n faktoriál), $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$ (kombinační číslo).

Počet všech uspořádání n prvků (**permutací**) je $n!$. Např. 6 různých pastelek lze uložit vedle sebe $6!\,(= 720)$ způsoby.

Pokud chci vybrat dvě pastelky z těchto šesti a nezáleží mi na jejich pořadí, pak to mohu učinit $\binom{6}{2} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$ způsoby. (Počet **kombinací** k prvků z n prvků je $\binom{n}{k}$).

V případě, že bude záležet na pořadí (např. tah červené, pak žluté je jiný než tah žluté, pak červené), pak máme $\binom{6}{2} \cdot 2! = 30$ možností. (**Variace** k prvků z n prvků).

Binomická věta:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b^1 + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} a^{n-i} b^i$$

Matematická indukce: Pomocí MI dokazujeme, že nějaký výrok $V(n)$ platí pro přirozená čísla.

1) Dokážeme platnost pro nějaké přirozené číslo n_0, tedy $V(n_0)$.

2) Dokážeme, že pokud platí $V(n)$, pak platí $V(n+1)$.

Pomocí matematické indukce ověříme platnost vztahu: $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Nejdříve pro $n = 1$: $\quad 1 = \dfrac{1(1+1)}{2}$ $\quad$ tedy výrok $V(n)$ platí.

Dále předpokládáme, že platí náš vztah pro n a dokážeme, že tento vztah platí i pro $n+1$. Chceme tedy dokázat platnost rovnosti:

$$1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\frac{(n+1)(n+1+1)}{2}.$$

Podle předpokladu platí: $1+2+3+\cdots+n+(n+1)=\dfrac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\dfrac{n(n+1)+2(n+1)}{2}$ $=\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$. Vztah tedy platí.

Vypočtěte:

1) $2\binom{x-1}{x-2}=\binom{x}{0}+\binom{x}{2}$ [$x_1=2, x_2=3$]

2) $12\binom{x}{x-1}+\binom{x+4}{x+2}=162$ [$x=8$]

3) $\binom{n}{2}+\binom{n-1}{2}=4$ [$n=3$]

4) $\binom{x}{2}=x+9$ [$x=6$]

5) Kolik je možno utvořit z číslic 0 až 9 čtyřciferných čísel, smí-li se v daném čísle každá číslice vyskytnout jen jednou? [4536]

6) V ročníku se vyučuje dvanácti předmětům. Kolika způsoby lze sestavit rozvrh na jeden den, připadá-li na tento den právě 6 různých jednohodinových předmětů. [924]

7) Určete minimální počet prvků konečné množiny, z nichž lze vytvořit 272 uspořádaných dvojic, ve kterých se žádný prvek neopakuje. [17]

8) Vybíráme 5 karet z 52 hracích karet. Kolika způsoby je lze vybrat tak, že: a) všechny mají srdcovou barvu; b) všechny mají stejnou barvu ; c) obsahují právě tři dámy; d) obsahují alespoň dvě esa? [a) 1287; b) 5148; c) 4512; d) 108 336]

9) Sedm stejných míčů je umístěno do sedmi košů tak, že v jednom koši jsou právě dva míče a v ostatních je nejvýše jeden míč. Kolika způsoby je lze takto rozdělit? [42]

10) Pomocí binomické věty vypočítejte: $(\sqrt{2}+i\sqrt{3})^5$ [$-11\sqrt{2}-i31\sqrt{3}$]

11) Pomocí binomické věty umocněte a určete čtvrtý člen $(2x^3-3y^2)^5$ [$-1080x^6y^6$]

Pomocí matematické indukce dokažte:

12) $1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}$

13) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

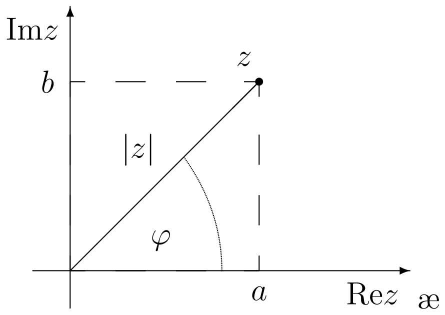
14) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}$

Komplexní čísla

Algebraický tvar komplexního čísla: $z = a+ib$, kde $a, b \in \mathbf{R}$, a je reálná část, b je imaginární část komplexního čísla, i je komplexní jednotka, pro kterou platí $i^2 = -1$.

Goniometrický tvar komplexního čísla: $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $|z|$ je absolutní hodnota, φ je argument komplexního čísla.

Graficky:



Platí: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$,

$\sin\varphi = \frac{b}{|z|}$, $\quad \cos\varphi = \frac{a}{|z|}$.

Moivreova věta: $(\cos\varphi + \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$.
Eulerova identita: $\mathrm{e}^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

1) Převeďte na goniometrický tvar čísla $z = \sqrt{3} + i$, $z = \sqrt{3} - i$, $z = -1 + i\sqrt{3}$

[$z = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}), z = 2(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}), z = 2(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3})$]

2) Převeďte na algebraický tvar číslo $2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$. [$z = 2 - i2$]

Vypočtěte:

3) $|3 - i4| + \left|\dfrac{-2-i3}{3-i2}\right|$ [6]

4) $\left|\dfrac{i^{10}-i}{i2+1}\right|$ [$\frac{\sqrt{10}}{5}$]

5) $\dfrac{1}{i} - \dfrac{1}{1+i} + \dfrac{1}{1-i} + \left|\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}\right|$ [2]

6) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^6$ [-1]

Vypočtěte absolutní hodnotu následujících čísel:

7) $\dfrac{7+i3}{2+i5}$ [$\sqrt{2}$]

8) $\dfrac{1}{(1+i)(2-i)(3+i)}$ [$\frac{1}{10}$]

9) $2 - i - \dfrac{3+i3}{1-i}$ [$\sqrt{20}$]

10) $\dfrac{3-i2}{3+i2}$ [$\frac{5-i12}{13}$]

Vypočtěte součin $z_1 \cdot z_2$ a podíl $\frac{z_1}{z_2}$ komplexních čísel:

11) $z_1 = 3(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6})$,
$z_2 = 16(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$.
[$z_1 \cdot z_2 = 48\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}, \frac{z_1}{z_2} = \frac{3}{16}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}$]

12) $z_1 = 3 - i, z_2 = 2 + i3$.
[$z_1 \cdot z_2 = 9 + i7, \frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{13}(3 - i11)$]

Vypočtěte:

13) $(1+i)^{20}$ [-1024]

14) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{26}$ [i]

15) $(\sqrt{3} - i)^{20}$ [$2^{20}(\cos\frac{2}{3}\pi + i\sin\frac{2}{3}\pi)$]

16) $(1-i)^{12}$ [-2^6]

17) $(1+i)^8$ [16]

18) Užitím Moievrovy věty a vzorce pro třetí mocninu dvojčlenu odvoďte vztahy pro kosinus a sinus trojnásobného argumentu.

$$[\cos 3\varphi = \cos^3\varphi - 3\cos\varphi\sin^2\varphi; \sin 3\varphi = 3\cos^2\varphi\sin\varphi - \sin^3\varphi]$$

19) Užitím Moievrovy věty vyjádřete $\sin 4x$, $\cos 4x$ tak, aby získané výrazy obsahovaly jen mocniny $\sin x$ a $\cos x$.

$$[\cos 4\varphi = \cos^4\varphi - 6\cos^2\varphi\sin^2\varphi + \sin^4\varphi; \sin 4\varphi = 4\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin^3\varphi]$$

Řešte v oboru **C** rovnici:

20) $x^3 - 2 = 0$ $\quad [x_k = \sqrt[3]{2}(\cos\frac{2k\pi}{3} + i\sin\frac{2k\pi}{3}), k = 0, 1, 2]$

Návod: $x^3 = |x|^3(\cos 3\varphi + \sin 3\varphi)\,,\ 2 = 2(\cos(0 + 2\mathrm{k}\pi) + \sin(0 + 2\mathrm{k}\pi))\,.$

21) $\dfrac{x+2}{x+3} = \dfrac{2x-1}{3x+1}$ $\quad [x = -1 \pm i2]$

22) $(2 + i3)z + iz = 1 - i$ $\quad [z = -\frac{1}{10} - i\frac{3}{10}]$

23) $x^6 + 64 = 0$ $\quad [x_k = 2(\cos\frac{-\pi+2k\pi}{6} + i\sin\frac{-\pi+2k\pi}{6}), k = 0, 1, 2, 3, 4, 5]$

24) $x^4 = -8 + i8\sqrt{3}$ $\quad [x_k = 2(\cos\frac{\pi+3k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+3k\pi}{6}), k = 0, 1, 2, 3]$

25) $x^5 = -16\sqrt{3} - i16$ $\quad [x_k = 2(\cos\frac{\pi+6k\pi}{30} + i\sin\frac{\pi+6k\pi}{30}), k = 0, 1, 2, 3, 4]$

26) $x = \sqrt[3]{-1}$ $\quad [x_k = (\cos\frac{\pi+2k\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}), k = 0, 1, 2]$

27) $x = \sqrt{i}$ $\quad [x_k = (\cos\frac{\pi+4k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi+4k\pi}{4}), k = 0, 1]$

28) $x^6 + i8 = 0$ $\quad [x_k = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi+2k\pi}{6} + i\sin\frac{\pi+2k\pi}{6}), k = 0, 1, 2, 3, 4, 5]$

29) $(5 + i)\overline{z} + 2z = i22\,,\quad z = x + iy\,.$ $\quad [z = 1 - i7]$

30) $\dfrac{x^2 - 1}{x - i} = 4i$ $\quad [x_1 = 1 + i2,\ x_2 = -1 + i2]$

31) $x^3 + i = 0$ $\quad [x_1 = i,\ x_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2},\ x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}]$

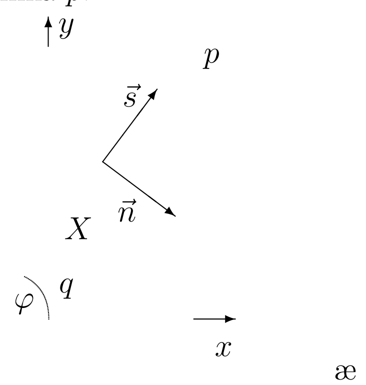
32) $(x + 3)^3 = -8$ $\quad [x_1 = -2 + i\sqrt{3}i,\ x_2 = -2 - i\sqrt{3}i,\ x_3 = -5]$

Geometrie a trigonometrie

Analytická geomerie v rovině:

Značení: $X[x_1;x_2]$, $\vec{a}=(a_1;a_2)$, kde x_1,x_2, popř. a_1,a_2 jsou souřadnice bodu X, popř. vektoru $\vec{x}$. Skalární součin $\vec{a}\cdot\vec{b}$ vektorů $\vec{a}=(a_1;a_2)$, $\vec{b}=(b_1;b_2)$ je dán vztahem: $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2$. Dva vektory jsou kolmé, jestliže $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$; jsou rovnoběžné, jestliže existuje $c\in\mathbf{R}$ tak, že $\vec{a}=c\cdot\vec{b}$. Pro velikost vektoru platí: $\|\vec{a}\|=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$. Pro úhel α, který svírají vektory $\vec{a},\vec{b}$ platí: $\cos\alpha=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$.

Přímka p:



obecný tvar:
$ax+by+c=0\,,$

$\vec{n}=(a,b)$ je normálový vektor, kolmý k přímce p.

směrnicový tvar:
$y=kx+q\,,$

k je směrnice přímky p, platí: $k=\operatorname{tg}\varphi$; q je vzdálenost průsečíku přímky p s osou y od počátku.

parametrický tvar:
$x=x_1+s_1t$
$y=x_2+s_2t\,,$

$X[x_1;x_2]$ je libovolný bod přímky p a $\vec{s}=(s_1;s_2)$ je směrový vektor přímky p.

Kuželosečky:

elipsa:	$\dfrac{(x-s_1)^2}{a^2}+\dfrac{(y-s_2)^2}{b^2}=1\,,$	
hyperbola:	$\dfrac{(x-s_1)^2}{a^2}-\dfrac{(y-s_2)^2}{b^2}=1\,,$	
parabola:	$2p(y-v_2)=(x-v_1)^2\,,$	
kružnice:	$(x-s_1)^2+(y-s_2)^2=r^2\,,$	

$S[s_1;s_2]$ je střed kuželosečky,
$V[v_1;v_2]$ je vrchol kuželosečky (paraboly),
a je hlavní poloosa, b je vedlejší poloosa kuželosečky,
$|p/2|$ je vzdálenost ohniska paraboly od jejího vrcholu,
r je poloměr kružnice.

Analytická geomerie v prostoru:

Rovina ρ:	obecný tvar: $ax+by+cz+d=0\,,$	$\vec{n}=(a,b,c)$ je normálový vektor, kolmý k rovině ρ.
	parametrický tvar: $x=x_1+r_1u+s_1v$ $y=x_2+r_2u+s_2v$ $z=x_3+r_3u+s_3v$	$X[x_1;x_2;x_3]$ je libovolný bod roviny ρ, $\vec{a}=(r_1;r_2;r_3)$ a $\vec{b}=(s_1;s_2;s_3)$ jsou různoběžné vektory ležící v rovině ρ; u, v jsou parametry.
Přímka p:	parametrický tvar: $x=x_1+s_1t$ $y=x_2+s_2t$ $z=x_3+s_3t$	$X[x_1;x_2;x_3]$ je libovolný bod přímky p a $\vec{s}=(s_1;s_2;s_3)$ je směrový vektor přímky p; t je parametr.

Trojúhelníky:

C

v_c

S_b S_a

T

t_b

t_a

A B

Výška je kolmice z vrcholu na protilehlou stranu. Těžnice je spojnice vrcholu se středem protilehlé strany. Těžiště dělí těžnici v poměru 1:2. Střed kružnice opsané leží v průsečíků os stran. Střed kružnice vepsané leží v průsečíků os úhlů. Střední příčka je spojnice středů stran, je rovnoběžná se stranou, kterou neprotíná a má poloviční velikost této strany.

æ

1) Pro trojúhelník v rovině je dán vrchol $A[3;-4]$, rovnice výšky $v_b : 7x-2y-1=0$ a rovnice výšky $v_c : 2x-7y-6=0$. Vypočítejte souřadnice vrcholu C.

$\Big[C[-4;-2]\Big]$

Řešení: Normálový vektor přímky v_b, $\vec{n_b}=(7;-2)$, je zároveň směrovým vektorem přímky b.
Parametrické vyjádření přímky b (obsahující stranu b):
$x=3+7t \quad y=-4-2t\,.$
Bod C je průsečíkem přímek b a v_c:
$2(3+7t)-7(-4-2t)-6=0 \;\Rightarrow\; t=-1 \;\Rightarrow\; x=-4\,,\; y=-2\,.$

2) V rovině vypočítejte souřadnice bodu B, který je souměrný s bodem $A[5;-1]$ podle přímky o rovnici $3x+4y+14=0$. $\Big[B[-1;-9]\Big]$

3) V trojúhelníku o vrcholech $A[4;6]$, $B[-4;0]$, $C[-1;-4]$ určete rovnici přímky, na níž leží výška v_a. $[-3x+4y-12=0]$

4) Napište rovnice všech přímek, které procházejí bodem $A[-1;3]$ a s přímkou p o rovnici $4x-2y-1=0$ svírají úhel velikosti $\frac{\pi}{4}$. $\left[\begin{array}{llll} q_1: & x=-1+3t & q_2: & x=-1-t \\ & y=3+t & & y=3+3t \end{array}\right]$

5) Napište rovnici přímky p, která prochází bodem $A[2;1]$ a je kolmá k vektoru $\vec{n}=(2;7)$.

$[2x+7y-11=0]$

6) Nalezněte číslo a tak, aby bod $A[-7;a]$ byl bodem přímky procházející body $B[2;3]$, $C[4;-3]$. $[a=30]$

7) Napište rovnici tečny kružnice $(x-2)^2+(y+1)^2=25$ v bodě $T[6;2]$ $[4x+3y-30=0]$

8) Najděte bod X, v němž přímka AB, kde $A[1;\frac{9}{2}]$, $B[-4;3]$ protíná osu prvního a třetího kvadrantu. $\Big[X[6;6]\Big]$

9) Trojúhelník má vrcholy $A[2;1]$, $B[-4;3]$, $C[-3;2]$. Napište obecnou rovnici těžnice t_a a vypočítejte její délku. $[3x+11y-17=0, \frac{\sqrt{130}}{2}]$

10) Bodem $H[2;-5]$ veďte přímky, které jsou rovnoběžné s asymptotami hyperboly, která je dána rovnicí $x^2-4y^2=4$. $[2y=x-12\,,\; -2y=x+8]$

11) V rovině napište rovnici paraboly, která má osu na ose y a prochází body $A[2;5]$, $B[1;-1]$.
$[(y+3) = 2x^2]$

12) Napište rovnici elipsy, která má ohniska v bodech $F_1[-2;1]$, $F_2[4;1]$ a délka její hlavní osy je 10. $\left[(\frac{x-1}{5})^2 + (\frac{y-1}{4})^2 = 1\right]$

13) V rovině napište rovnici kružnice, která má střed v bodě $S[5;-1]$ a dotýká se přímky $3x+4y+14=0$. $[(x-5)^2+(y+1)^2=25]$

14) Napište rovnici vrcholové tečny paraboly o rovnici $y^2+3x+4y-8=0$. $[x=4]$

15) Vypočítejte souřadnice ohnisek křivky, která je dána v rovině rovnicí $4x^2+3y^2+4x-6y=8$.
$\left[F_1[-\frac{1}{2};2],\ F_2[-\frac{1}{2};0]\right]$

16) Napište rovnice tečen ke kružnici $x^2+y^2=5$, které jsou rovnoběžné s přímkou $p: 2x-y+1=0$. $[2x-y\pm 5=0]$

17) Určete rovnici paraboly, která má vrchol v počátku, osu na ose x a prochází bodem $A[3;-6]$. Stanovte též její ohnisko a řídící přímku. $\left[y^2=12x,\ F[3;0],\ x=-3\right]$

18) Jaká křivka v rovině je určena rovnicí $2x^2+2y^2+6x-10y=1$? Zjistětě, jestli počátek $P[0;0]$ leží uvnitř této křivky. [kružnice, Ano]

19) Najděte střed a poloměr kružnice, která prochází body $A[2;1]$, $B[1;4]$, $C[6;9]$.
$\left[S[6;4],\ r=5\right]$

20) Napište analytické vyjádření nejmenší koule, která má střed $S[1;2;3]$ a obsahuje body $A[1;0;0]$, $B[1;-3;0]$, $C[6;2;1]$. $[(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=34]$

21) Hyperbola v rovině má osy v souřadnicových osách a prochází body $M[4;\sqrt{3}]$ a $N[2\sqrt{2};-1]$. Určete souřadnice ohnisek této hyperboly. $\left[F_1[-\sqrt{5};0],\ F_1[\sqrt{5};0]\right]$

22) Napište rovnici elipsy, která má hlavní osu rovnoběžnou s osou x, střed $S[1;3]$, ohnisko $F[-4;3]$ a velikost vedlejší poloosy $b=4$. $\left[\frac{(x-1)^2}{41}+\frac{(y-3)^2}{16}=1\right]$

23) Pro které hodnoty čísla K je rovnice $x^2+y^2+2x-6y+K=0$ rovnicí kružnice?
$[K<10]$

24) Výška a rovnoběžné strany lichoběžníka jsou v poměru 2 : 3 : 5, jeho obsah je $P = 512\,\mathrm{cm}^2$. Vypočtěte délku rovnoběžných stran a výšku. $[16, 24, 40]$

25) Rovnoramennému lichoběžníku lze vepsat kružnici. Určete délku ramene c lichoběžníka, jestliže základny mají délky a, b. $\left[c=\frac{a+b}{2}\right]$

26) Ukažte, že rovnicí $x^2-4y^2-6x-16y-11=0$ je dána hyperbola. Určete souřadnice jejího středu a rovnice asymptot. $\left[S[3;-2], 2y=-x-1, 2y=x-7\right]$

27) Jsou dány body $M[3;0;4]$ a $N[5;6;9]$. Napište rovnici roviny, která prochází bodem M a je kolmá k vektoru $\overrightarrow{MN}$. $[2x+6y+5z-26=0]$

28) Vzdálenost středu dvou kružnic, které mají poloměry 17 cm a 10 cm, je 21 cm. Určete výpočtem vzdálenost těchto středů kružnic od bodu, v němž středná protíná společnou tečnu obou kružnic. $[30, 51]$

29) K bodům $A[2; 3]$, $B[4; 7]$, $C[6; 2]$ určete bod D tak, aby $ABCD$ byl rovnoběžník.

$\left[D[4; -2]\right]$

30) Oč se změní obsah kruhu o poloměru r, vzroste-li délka hraniční kružnice o ε?

$[\varepsilon r + \dfrac{\varepsilon^2}{4\pi}]$

31) Formát A0 normalizovaného papíru je obdélník, jehož šířka a délka je v poměru $1 : \sqrt{2}$ a jeho obsah je $1\,\mathrm{m}^2$. Vypočtěte strany tohoto obdélníka. $\left[2^{-\frac{1}{4}}\,\mathrm{m},\ 2^{\frac{1}{4}}\,\mathrm{m}\right]$

32) Napište rovnici roviny ρ, která prochází počátčkem soustavy souřadnic a je kolmá k vektoru $\vec{n} = (2; 1; -3)$. $[2x + 1y - 3z = 0]$

33) Dokažte, že trojúhelník $A[4; -2; 7]$, $B[0; 6; -1]$, $C[2; -4; 3]$ je pravoúhlý! $\left[\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BC} = 0\right]$

34) Je dána kružnice o středu S a poloměru r =5 cm. Vypočtěte délku tětivy AB na sečně kružnice vzdálené od jejího středu $v = 3$ cm. [8 cm]

35) Určete osovou rovnici hyperboly, která hlavní osu má v ose x, prochází bodem $A[4{,}5; 1]$ a jejíž asymptoty mají rovnice $3y = \pm 2x$. $\left[\frac{x^2}{18} - \frac{y^2}{8} = 1\right]$

36) Kvádr má povrch $S = 166\,\mathrm{cm}^2$, objem $V = 140\,\mathrm{cm}^2$ a jednu hranu dlouhou 4 cm. Určete délku ostatních hran kvádru. $[5, 7]$

37) Pravidelný čtyřboký jehlan $ABCDV$ má podstavnou hranu délky a a boční hranu délky $2a$. Vypočtěte délku úsečky AM, kde M je střed úsečky CV. $\left[d = a\sqrt{2}\right]$

38) Vypočtěte obsah osového řezu pravidelného čtyřbokého jehlanu, který obsahuje úhlopříčku podstavy. Podstavná hrana měří $5\sqrt{2}$ cm, boční hrana 10 cm. $[25\sqrt{3}]$

39) Plášť rotačního válce je P, obvod jeho kruhové podstavy je o. Určete objem válce.

$\left[\dfrac{o \cdot P}{4\pi} - \dfrac{o^3}{8\pi^2}\right]$

40) Koule a krychle mají stejné povrchy. Jaký je poměr jejich objemů? $\left[\sqrt{\frac{6}{\pi}}\right]$

41) Ze tří kovových koulí s poloměry $r_1 = 3$ cm, $r_2 = 4$ cm, $r_3 = 5$ cm byla zhotovená jediná koule. Jaký je její poloměr? [6]

42) Vypočtěte výšku h, z níž vidí kosmonaut 1% povrchu Země (koule o poloměru $r = 6370$ km).

$\left[h = 6370(\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{100}} - 1)\right]$

43) V kružnici o poloměru 15 cm je vedena tětiva délky 10 cm. Určete výpočtem vzdálenost průsečíku tečen kružnice vedených v krajních bodech této tětivy od středu kružnice.

$[\sqrt{2} \cdot 22{,}5]$

44) Pro trojúhelník ABC v rovině známe rovnici strany $a:\ 3x+7y-3=0$, strany $b:\ 2x+3y+2=0$ a patu $P[2;-3]$ výšky v_c na straně c. Napište obecnou rovnici strany c.

$[9x+11y+15=0]$

45) Určete vnitřní úhly trojúhelníka, který dostanete, spojíte-li na kruhovém ciferníku hodin číslice 2, 6, 9. $[45°, 60°, 75°]$

46) Vypočítejte délku tětivy, kterou vytíná přímka o rovnici $y=x-4$ na kružnici se středem $S[-1;2]$ a poloměrem $r=5$. $[\sqrt{2}]$

47) Napište rovnici roviny, která prochází body $A[1;-1;2], B[2;1;2], C[1;1;4]$.

$[-2x+y-z+5=0]$

48) Určete vzájemnou polohu přímek $p: 3x+4y-3=0,\ q: x=1+2t,\ y=2-t,\ t\in\mathbf{R}$.

$\left[P[-7;6]\right]$

49) Vypočtete souřadnice bodu P, který je souměrný s bodem $Q[10;21]$ podle přímky p o rovnici $2x+5y-38=0$. $\left[P[-2;-9]\right]$

50) V rovině je dán bod $A[1;1]$, přímka $p: 4x-3y+9=0$ a na ní bod $C[-3;-1]$. Na přímce p leží jedna strana obdélníka $ABCD$. Napište obecné neparametrické rovnice přímek, na kterých leží zbývající strany obdelníka.

$[4x-3y-1=0, 3x+4y-7=0, 3x+4y+13=0]$

51) Určete rovnici kružnice, která má střed $S[1;3]$ a dotýká se přímky dané rovnicí $7x+y=0$. Stanovte též bod dotyku T. $\left[(x-1)^2+(y-3)^2=2, T[-0{,}4;2{,}8]\right]$

52) Ukažte, že čtyřúhelník $ABCD$, kde $A[-1;-3], B[-4;1], C[-8;-2], D[-5;-6]$, je čtverec.

$\left[\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=0\right]$

53) Určete rovnici kolmice vedené bodem $A[2{,}5;1]$ k přímce o rovnici $2x+y-3=0$.

$[-x+2y+0{,}5=0]$

54) Zjistěte vzájemnou polohu přímek $p_1: x=3+2t, y=2+4t, z=2+6t;\ p_2: x=4+s,$ $y=5+2s, z=1+3s$. [rovnoběžky]

55) Základna rovnoramenného trojúhelníka má vrcholy $A[-3;1], B[5;-7]$. Vypočtěte souřadnice vrcholu C, leží-li na přímce o rovnici $2x-3y=5$. $\left[C[\frac{1}{13};-\frac{21}{13}]\right]$

56) Je dána kružnice $k(S[-1;3], r=4\,\mathrm{cm})$. Určete analyticky její průnik P s přímkou AB, kde $A[-2;-4], B[1;5]$. $\left[P[-1;-1]\right]$

57) Trojúhelník v rovině je určen vrcholy $A[-2;-4], B[2;-2]$ a průsečíkem výšek $V[1;2]$. Vypočítejte souřadnice vrcholu C. $\left[C[\frac{10}{3};-\frac{8}{3}]\right]$

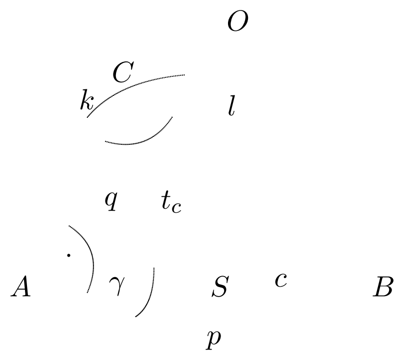
58) Určete rovnici elipsy se středem v počátku, jedním ohniskem v bodě $F[4;0]$ a procházející bodem $A[3;1]$. $[x^2+9y^2=18]$

59) Vypočtěte souřadnice bodu T kružnice o rovnici $x^2+y^2=1$, který je nejblíž k bodu $B[1;2]$.

$\left[T[\frac{1}{\sqrt{5}};\frac{2}{\sqrt{5}}]\right]$

Konstrukční úlohy

60) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $c = 8\,\text{cm}$, $t_c = 7\,\text{cm}$, $\gamma = 60°$.



æ

Popis konstrukce:

1. $c = AB = 8\,\text{cm}$
2. S: S střed úsečky AB
3. k: $k \equiv (S; t_c)$
4. p: $A \in p$, úhel p a c je γ
5. q: $A \in q$, $q \perp p$
6. l: $S \in l$, $l \perp c$
7. O: $O = l \cap q$
8. m: $m \equiv (O; OA)$
9. C: $C = m \cap k$
10. $\triangle ABC$

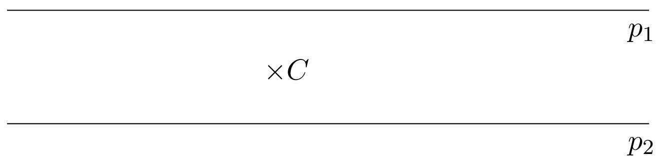
61) Sestrojte pravoúhlý trojúhelník ABC, je-li dáno $a + b = 10\,\text{cm}$, $\alpha = 30°$. Vyjádřete poměr jeho odvěsen.

62) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a = 8\,\text{cm}$, $v_a = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 60°$ a vypočítejte poloměr kružnice opsané tomuto trojúhelníku.

63) Zvolte úsečku AS o velikosti $|AS| = 5\,\text{cm}$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC s těžnicí AS, které mají $|AC| = 4\,\text{cm}$, $|AB| = 6\,\text{cm}$.

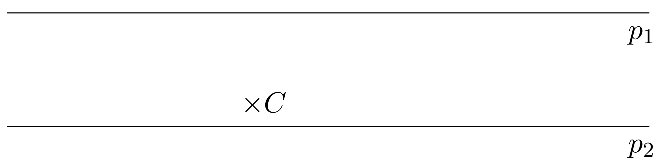
64) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dána velikost strany c, výšky v_c a těžnice t_c.

65) Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC tak, aby měl vrchol v bodě C, vrchol A ležel na přímce p_1 a vrchol B na přímce p_2, $p_2 || p_1$.



æ

66) Sestrojte pravoúhlý rovnoramenný trojúhelník ABC tak, aby vrchol pravého úhlu byl v bodě C a vrcholy A, B ležely v uvedeném pořadí na přímkách $p_2 || p_1$.



67) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $v_a = 7\,\text{cm}$, $v_b = 6\,\text{cm}$, $\alpha = 45°$ a vepište mu kružnici.

68) Je dána kružnice $k = (S; r = 15\,\text{mm})$ a bod M, který leží vně kružnice k. Sestrojte rovnostranný trojúhelník ABC, který je opsaný dané kružnici a jehož jedna strana prochází bodem M. Konstrukci popište!

69) Sestrojte trojúhelník ABC o stranách $c = 4\,\text{cm}$, $a = 7\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$. Najděte všechny body jeho roviny, ze kterých jsou obě strany c i a vidět pod pravým úhlem. Konstrukci odůvodněte!

70) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a : b : c = 3 : 5 : 6$, $v_c = 4\,\text{cm}$.

71) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $a = 8\,\text{cm}$, $v_a = 5\,\text{cm}$, $t_a = 7\,\text{cm}$ a opište mu kružnici.

72) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $\alpha = 60°$, $v_b = 9\,\text{cm}$, $\rho = 2{,}5\,\text{cm}$ (poloměr kružnice vepsané).

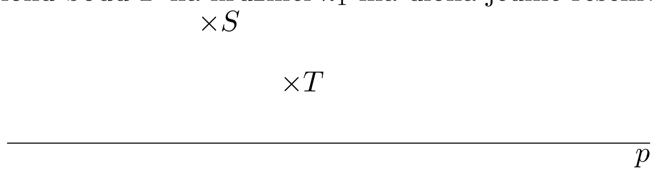
73) Zvolte úhel KAM o velikosti $\alpha = 30°$. Sestrojte všechny trojúhelníky ABC, které mají vrchol B na rameni AK, vrchol C na rameni AM, $v_c = 2\,\mathrm{cm}$, $|BC| + |CA| = 6{,}5\,\mathrm{cm}$.

74) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $\gamma = 60°$, $v_a = 6\,\mathrm{cm}$, $c = 8\,\mathrm{cm}$. Pro jaké v_a bude trojúhelník rovnostranný?

75) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno γ, v_c, c. Konstrukci popište.

76) Sestrojte trojúhelník ABC, je-li dáno $t_c = 8\,\mathrm{cm}$, $c = 10\,\mathrm{cm}$, $r = 6\,\mathrm{cm}$ (poloměr kružnice opsané). Určete hodnotu $\sin\gamma$.

77) Sestrojte kružnici k, která se dotýká přímky p a kružnice $k_1(S, r), r = ST$ v bodě T. Pro jakou polohu bodu T na kružnici k_1 má úloha jediné řešení?



78) Společným bodem A kružnic $k_1(S_1; r_1 = 5\,\mathrm{cm})$, $k_2(S_2; r_2 = 4\,\mathrm{cm})$, $|S_1S_2| = 6\,\mathrm{cm}$,veďte všechny přímky, na nichž obě kružnice vytínají shodné tětivy.

79) Je dána kružnice $k(S; r = 4\,\mathrm{cm})$, a bod P tak, že $|SP| = 10\,\mathrm{cm}$. Veďte bodem P přímku na níž kružnice k vytíná tětivu velikosti $t = 5\,\mathrm{cm}$. Vypočtěte vzdálenost středu této tětivy od bodu S.

80) Zvolte libovolné dvě soustředné kružnice. Sestrojte přímku, na níž dané kružnice vytnou tři úsečky, jejichž velikosti jsou v poměru 1 : 2 : 1.

81) Jsou dány rovnoběžky a, b, jejichž vzdálenost je $10\,\mathrm{cm}$. Narýsujte kružnici, která se dotýká přímky a, na přímce b vytíná úsek $u = 6\,\mathrm{cm}$ a prochází bodem M.

82) jsou dány dvě různé rovnoběžné přímky p_1, p_2. Dále je dána přímka P_3 s nimi různoběžná. Sestrojte čtverec $ABCD$ tak, aby jeho vrchol A ležel na přímce p_1, vrchol C na přímce p_2, úhlopříčka BD na přímce p_3.

83) Je dána krychle $ABCDA'B'C'D'$. Z vrcholu A' spusťte kolmici na rovinu $AB'D'$, její patu označte M. Nakreslete skutečnou velikost úsečky $A'M$.

84) Je dána obdélník $ABCD$. Sestrojte graficky stranu čtverce, který bude mít týž obsah, jako daný obdélník.

85) Sestrojte pravidelný osmiúhelník, jehož strana má délku $10\,\mathrm{mm}$. Konstrukci popište.

86) Nakreslete obrys krychle, která je vidět při pohledu ve směru její libovolné tělesové úhlopříčky.

87) Do kruhové výseče ASB s úhlem $ASB = 75°$, poloměrem $|AS| = |BS| = r = 7{,}5\,\mathrm{cm}$ vepište čtverec, jehož jedna strana je rovnoběžná s přímkou AB.

88) Sestrojte kružnici, která se dotýká dané přímky p v bodě T a dané kružnice $k(S; r = 5\,\mathrm{cm})$.

89) Sestrojte společné tečny ke dvěma vzájemně se protínajícím kružnicím.

90) Na přímce AB sestrojte všechny body M takové, že platí: $|AM| : |AB| = \sqrt{2} : 2$.

Následující příklady tvořily přijímací zkoušku z matematiky na vysokou školu v roce 2000.

1) Je dán výraz $\dfrac{2a-3b}{(2a)^{\frac{1}{2}}-(3b)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(2a)^{\frac{3}{2}}-(3b)^{\frac{3}{2}}}{2a-3b}$.

a) Určete jeho hodnotu pro $a=2$, $b=3$. $[\frac{6}{5}]$

b) Výraz upravte a zjednodušte. $[\frac{\sqrt{2a}\sqrt{3b}}{\sqrt{2a}+\sqrt{3b}}]$

c) Napište, pro které hodnoty a,b má výraz smysl. $[\sqrt{2a}\neq\sqrt{3b},\ 2a\neq 3b]$

2) Je dána rovnice $\dfrac{1}{2}\log(2x+7)=\log(x-4)$.

a) Stanovte podmínky řešitelnosti v $\mathbf{R}$. $[x>4]$

b) Řešte danou rovnici. $[x=9]$

c) Proveďte zkoušku. $[\mathrm{L}:\sqrt{2\cdot 9+7}=5,\ \mathrm{P}:9-4=5]$

3) Je dána funkce $f\colon y=x^2-2$.

a) Sestrojte graf funkce f.

b) Určete obor funkčních hodnot $H(f)$ funkce f. $[H(f)=\langle -2,\infty)]$

4) V aritmetické posloupnosti známe dva členy: $a_6=25$, $a_7=28$.

a) Určete diferenci této posloupnosti. $[d=3]$

b) Nalezněte první člen a_1. $[a_1=10]$

c) Napište vzorec pro n-tý člen ($n\in\mathbf{N}$) a vypočtěte prvních pět členů této posloupnosti. $[a_n=10+(n-1)\cdot 3,\ 10,13,16,19,22]$

5) Je dáno komplexní číslo $\dfrac{(1-i)^2}{1+i}$.

a) Vyjádřete číslo c v algebraickém tvaru. $[c=-1-i]$

b) Vypočtěte $|c|$. $[|c|=\sqrt{2}]$

c) Číslo c převeďte na goniometrický tvar. $[c=\sqrt{2}(\cos\frac{5}{4}\pi+\sin\frac{5}{4}\pi)]$

d) V goniometrickém tvaru vypočtěte c^7 a výsledek převeďte na algebraický tvar. $[-8+i8]$

6) V pravoúhlém souřadnicovém systému jsou dány body $A=[-2,-4]$, $B=[3,-1]$.

a) Napište obecnou rovnici přímky $p=AB$. $\left[-3x+5y+14=0\right]$

b) Určete průsečík P přímky p s osou x. $\left[P=[\frac{14}{3},0]\right]$

c) Napište parametrické rovnice přímky p', která je kolmá na přímku p a prochází bodem P. $\left[x=\frac{14}{3}-3t,\ y=5t\right]$

d) Určete průsečík P' přímky p' s osou y. $\left[P=[0,\frac{70}{9}]\right]$

e) Stanovte souřadnice bodů $A'=[?,-4]$ a $B=[3,?]$, pro které platí $A'\in p'$, $B'\in p'$. $\left[A'=[\frac{106}{15},-4],\ B'=[3,\frac{25}{9}]\right]$