Projekt Národní plán obnovy pro oblast vysokých škol pro roky 2022-2024
Registrační číslo projektu: NPO_ZČU_MSMT-16584/2022

Sbírka řešených příkladů k M2E

Petr Tomiczek

Obsah

1 Diferenciální rovnice 1.řádu

1.1 Separace proměnných

Teorie

Příklad 1: Najděte obecné řešení diferenciální rovnice prvního řádu

$$y' = \sqrt{y}\,4x\,.$$

Řešení: Použijeme vztah $y' = \frac{dy}{dx}$, separujeme proměnné a integrujeme

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = 4x\,dx \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{2}}\,dy = \int 4x\,dx \Rightarrow 2\sqrt{y} = 2x^2 + C \Rightarrow \mathbf{y} = (\mathbf{x^2} + \mathbf{C/2})^{\mathbf{2}},\ C \in \mathbb{R}\,.$$

Při dělení rovnice výrazem $\sqrt{y}$ jsme předpokládali, že $y \neq 0$. Funkce $\mathbf{y = 0}$ je však singulárním řešením této úlohy, které nedostaneme žádnou volbou konstanty C.

Příklad 2: Vyřešte počáteční úlohu

$$y' \sin y \cos x = \sin x \cos y\,, \quad y(0) = \tfrac{\pi}{4}\,.$$

Řešení: Položíme $y' = \frac{dy}{dx}$ a separací proměnných dostaneme $\frac{\sin y}{\cos y}\,dy = \frac{\sin x}{\cos x}\,dx\,.$ Substitucemi $u = \cos y\,,\ v = \cos x\,,$ tedy např. $\frac{\sin y}{\cos y}\,dy = \frac{-du}{u}$ dostaneme po integrování $-\ln|u| = -\ln|v| - \ln C\,,$ neboli $u = C \cdot v\,.$ Odtud

$$\cos \mathbf{y} = \mathbf{C} \cos \mathbf{x}\,,\ \ C \in \mathbb{R} \qquad (\text{obecné řešení}).$$

Dosadíme počáteční podmínku $y(0) = \frac{\pi}{4}$, ze které $\cos\frac{\pi}{4} = C\cos 0$, $C = \frac{\sqrt{2}}{2}$ a odtud

$$\cos \mathbf{y} = \frac{\sqrt{\mathbf{2}}}{\mathbf{2}} \cos \mathbf{x} \quad (\text{řešení počáteční úlohy}).$$

Příklad 3: Najděte obecné řešení rovnice

$$1 - y' = \cos y\,.$$

Řešení: Opět použijeme $\frac{dy}{dx} = y'$, separujeme proměnné

$\frac{dy}{dx} = 1 - \cos y \ \Rightarrow\ \int \frac{dy}{1 - \cos y} = \int 1\,dx$ a integrujeme levou stranu $\int \frac{dy}{1-\cos y} =$

$$\int \frac{1+\cos y}{1-\cos^2 y}\,dy = \int \Big[\frac{1}{\sin^2 y} + \frac{\cos y}{\sin^2 y}\Big]\,dy = \left[\begin{array}{l} u = \sin y \\ du = \cos y\,dy \end{array}\right] = -\operatorname{cotg} y + \int \frac{du}{u^2} =$$

$$-\operatorname{cotg} y - u^{-1} \quad \Rightarrow -\operatorname{cotg} y - (\sin y)^{-1} = x + C \Rightarrow \quad -\frac{\cos \mathbf{y} + \mathbf{1}}{\sin \mathbf{y}} = \mathbf{x} + \mathbf{C}\,.$$

1.2 Variace konstanty

Teorie

Příklad 4: Metodou variace konstanty řešte diferenciální rovnici

$$y' = -2y + x\,.$$

Řešení:
1.krok - Nejdříve vyřešíme homogenní rovnici metodou separace proměnných

$$y' = -2y \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = \int -2\,dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = -2x + \widetilde{C} \;\Rightarrow\; e^{\ln|y|} = e^{-2x+\widetilde{C}} \;\Rightarrow$$

$$y_h = Ce^{-2x}, \quad (C = \{\pm e^{\widetilde{C}}\} \cup \{0\}, \text{tedy } C \in \mathbb{R}, \text{neboť } y = 0 \text{ je také řešením})\,.$$

2.krok - Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $y_p = C(x)e^{-2x}$, tzv. partikulární řešení. Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$C'(x)e^{-2x} + C(x)e^{-2x}(-2) = -2C(x)e^{-2x} + x\,.$$

tedy

$$C'(x)e^{-2x} = x \;\Rightarrow\; C(x) = \int xe^{2x}\,dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} \;\Rightarrow$$

$y_p = (x\frac{e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4}) \cdot e^{-2x} \;\Rightarrow\; \mathbf{y_p = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}}\,.$

3.krok - Obecné řešení rovnice má tvar $\mathbf{y_o = y_h + y_p = Ce^{-2x} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}}\,.$

Příklad 5: Metodou variace konstanty řešte diferenciální rovnici

$$y' = \frac{1}{x}y + x\cos x\,.$$

Řešení:
1.krok - Nejdříve vyřešíme homogenní rovnici metodou separace proměnných

$$y' = \frac{1}{x}y \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{y} = \int \frac{1}{x}\,dx \;\Rightarrow\; \ln|y| = \ln|x| + \widetilde{C} \;\Rightarrow\; e^{\ln|y|} = e^{\ln|x|+\widetilde{C}} \;\Rightarrow$$

$$\mathbf{y_h = C \cdot x}, \quad (C = \{\pm e^{\widetilde{C}}\} \cup \{0\}, \text{tedy } C \in \mathbb{R}, \text{neboť } y = 0 \text{ je také řešením})\,.$$

2.krok - Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $y_p = C(x) \cdot x$, tzv. partikulární řešení. Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$C'(x)x + C(x) = \frac{1}{x}C(x)x + x\cos x\,.$$

tedy

$$C'(x)x = x\cos x \;\Rightarrow\; C(x) = \int \cos x\,dx = \sin x \;\Rightarrow\; \mathbf{y_p = \sin x \cdot x}\,.$$

3.krok - Obecné řešení rovnice má tvar $\mathbf{y_o = y_h + y_p = C \cdot x + \sin x \cdot x}\,.$

2 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

Teorie

2.1 Rovnice s konstantními koeficienty

Příklad 6: Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$y'' + 3y' - 18y = 0$$

hledáme ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (popř. $x\mathrm{e}^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$, pokud λ je k-násobný kořen charakteristického polynomu), pak $y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}$.

Řešení: Tedy $\lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} + 3\lambda \mathrm{e}^{\lambda x} - 18\mathrm{e}^{\lambda x} = 0$ a číselný parametr λ je kořenem **charakteristické rovnice (charakteristického polynomu)**

$$\lambda^2 + 3\lambda - 18 = (\lambda + 6)(\lambda - 3) = 0.$$

Kořeny polynomu jsou $\lambda_1 = -6$, $\lambda_2 = 3$; fundamentální systém rovnice tvoří funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^{-6x}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{3x}$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$\mathbf{y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-6x} + C_2 \mathrm{e}^{3x}}\,.$$

Příklad 7: Řešte úlohu

$$y'' - 4y' + 4y = 0\,.$$

Řešení: Úloha má charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$. Fundamentální systém rovnice je nyní tvořen funkcemi $y_1(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$\mathbf{y = C_1\, \mathrm{e}^{2x} + C_2\, x\, \mathrm{e}^{2x}}\,.$$

Příklad 8: Řešte úlohu $y'' + 9y = 0$.
Řešení: K rovnici přísluší charakteristická rovnice $\lambda^2 + 9 = 0$ s kořeny $\lambda_1 = 3i$, $\lambda_2 = -3i$. Fundamentální systém tvoří funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^{3ix}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{-3ix}$ nebo $y_1(x) = \cos 3x$, $y_2(x) = \sin 3x$. Obecné řešení má tvar

$$\mathbf{y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x}\,.$$

Příklad 9: Řešte úlohu $4y'' - 8y' + 5y = 0$.
Řešení: K rovnici přísluší charakteristická rovnice $4\lambda^2 - 8\lambda + 5 = 4(\lambda - 1)^2 + 1 = 0$ s kořeny $\lambda_1 = 1 + i\frac{1}{2}$, $\lambda_2 = 1 - i\frac{1}{2}$. Fundamentální systém je tvořen funkcemi $y_1(x) = \mathrm{e}^{(1+i\frac{1}{2})x}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{(1-i\frac{1}{2})x}$ nebo $y_1(x) = \mathrm{e}^x \cos\frac{x}{2}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^x \sin\frac{x}{2}$. Obecné řešení má tvar

$$\mathbf{y(x) = C_1 \mathrm{e}^{x} \cos \frac{x}{2} + C_2 \mathrm{e}^{x} \sin \frac{x}{2}}\,.$$

2.2 Nehomogenní rovnice

Teorie

Příklad 10: Metodou variace konstant vyřešíme rovnici

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}\,.$$

Řešení:

1. Určíme obecné řešení homogenní rovnice $y'' + 3y' + 2y = 0$ (viz metoda charakteristická rovnice, příklad (6)) $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -2, \lambda_2 = -1$, fundamentální systém je tvořen funkcemi $y_1(x) = \mathrm{e}^{-2x}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{-x}$ a homogenní řešení má tvar
$$y_h(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

2. Partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru
$$y_p(x) = C_1(x)\,\mathrm{e}^{-2x} + C_2(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$
Funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$ splňují obecně soustavu algebraických rovnic:
$$\begin{aligned} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) &= 0\,, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) &= \tfrac{f(x)}{a_2(x)}\,, \end{aligned}$$
kde $f(x)$ je pravá strana rovnice a $a_2(x)$ koeficient u druhé derivace funkce y. Tedy konkrétně
$$\begin{aligned} C_1'\mathrm{e}^{-2x} + C_2'\mathrm{e}^{-x} &= 0 \;\Rightarrow & C_1'\mathrm{e}^{-x} + C_2' &= 0\,, \\ C_1'(-2)\mathrm{e}^{-2x} + C_2'(-\mathrm{e}^{-x}) &= \tfrac{1}{e^x+1} \Rightarrow & 2C_1'\mathrm{e}^{-x} + C_2' &= \tfrac{-e^x}{e^x+1}\,. \end{aligned}$$
Odečteme první rovnici od druhé, pak $C_1' = \frac{-e^x e^x}{e^x+1} \Rightarrow C_1 = -\int \frac{e^{2x}}{e^x+1}\,dx = \begin{bmatrix} u = e^x + 1 \\ du = e^x\,dx \end{bmatrix} = -\int \frac{u-1}{u}\,du = -(u - \ln u) \Rightarrow C_1(x) = \ln|e^x+1| - e^x - 1\,.$
Z první rovnice plyne $-\frac{e^{2x}}{e^x+1}\,e^{-x} + C_2' = 0 \Rightarrow C_2(x) = \int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx = \ln|e^x+1|\,.$
Partikulární řešení má tvar
$$y_p(x) = (\ln|e^x+1| - e^x - 1)\,\mathrm{e}^{-2x} + (\ln|e^x+1|)\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

3. Obecným řešením úlohy je funkce
$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{C_1}\,\mathrm{e}^{-\mathbf{2x}} + \mathbf{C_2}\,\mathrm{e}^{-\mathbf{x}} + (\ln|\mathbf{e^x} + \mathbf{1}| - \mathbf{e^x} - \mathbf{1})\,\mathrm{e}^{-\mathbf{2x}} + (\ln|\mathbf{e^x} + \mathbf{1}|)\,\mathrm{e}^{-\mathbf{x}}\,.$$

<u>Příklad 11</u>: Metodou variace konstant vyřešíme počáteční úlohu

$$y'' + y = \operatorname{cotg}^2 x\,, \quad y(\tfrac{\pi}{2}) = 0,\; y'(\tfrac{\pi}{2}) = 0\,.$$

<u>Řešení:</u>

1. Určíme obecné řešení homogenní rovnice $y'' + y = 0$ (viz metoda charakteristická rovnice, příklad (6))

$$\lambda^2 + 1 = 0 \;\Rightarrow\; y_h(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x\,.$$

2. Partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)\cos x + C_2(x)\sin x\,.$$

Funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$ splňují soustavu algebraických rovnic:

$$\begin{aligned} C_1'\cos x + C_2'\sin x &= 0 \;\Rightarrow\; & C_1'\cos x\sin x + C_2'\sin^2 x &= 0\,,\\ -C_1'\sin x + C_2'\cos x &= \tfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \Rightarrow & -C_1'\sin x\cos x + C_2'\cos^2 x &= \tfrac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,. \end{aligned}$$

Sečtení rovnic dostaneme $C_2' = \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x} \Rightarrow C_2 = \int \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\,dx = \left[\begin{array}{c} u = \sin x \\ du = \cos x\,dx \end{array}\right]$
$\int \frac{1-u^2}{u^2}\,du = -u^{-1} - u \;\Rightarrow\; C_2(x) = -\frac{1}{\sin x} - \sin x\,.$
Z první rovnice plyne $C_1'\cos x + \frac{\cos^3 x}{\sin^2 x}\sin x = 0$, tedy $C_1' = -\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} \Rightarrow$
$C_1(x) = -\int \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}\,dx = -\int \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x}\,dx = \operatorname{cotg} x + x\,.$
Partikulární řešení má tvar

$$y_p(x) = (\operatorname{cotg} x + x)\,\cos x + (-\tfrac{1}{\sin x} - \sin x)\,\sin x\,.$$

3. Obecným řešením úlohy je funkce

$$\mathbf{y(x) = C_1\,\cos x + C_2\,\sin x + (\operatorname{cotg} x + x)\,\cos x - 1 - \sin^2 x}\,.$$

4. K dosazení počátečních podmínek potřebujeme derivaci obecného řešení:

$$y'(x) = -C_1\,\sin x + C_2\,\cos x + (-\tfrac{1}{\sin^2 x} + 1)\,\cos x - (\operatorname{cotg} x + x)\sin x - 2\sin x\,\cos x\,.$$

Nyní dosadíme počáteční podmínky:
$y(\frac{\pi}{2}) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = C_2 - 2\,, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 0 \;\Rightarrow\; 0 = -C_1 - \frac{\pi}{2}\,.$
Řešením počáteční úlohy je funkce

$$\mathbf{y(x) = -\tfrac{\pi}{2}\,\cos x + 2\,\sin x + (\operatorname{cotg} x + x)\,\cos x - 1 - \sin^2 x}\,.$$

2.3 Metoda odhadu tvaru partikulárního řešení

Teorie

<u>Příklad 12</u>: Pomocí odhadu tvaru partikulárníbo řešení vyřešíme rovnici

$$y'' - 2y' = x^2 + 1\,.$$

<u>Řešení:</u>

1. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 2\lambda = \lambda(\lambda - 2) = 0$ má kořeny $\lambda_1 = 0\,,\ \lambda_2 = 2$ a homogenní řešení má tvar

$$y_h = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

2. Z rovnosti

$$x^2 + 1 = \mathrm{e}^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$$

vyplývá $a = 0\,,\ b = 0\,,\ P_n(x) = x^2 + 1\,,\ Q_m(x) = 0\,,\ n = 2\,,\ m = 0\,.$ Partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = x^r \mathrm{e}^{ax}(R_k(x)\cos bx + S_k(x)\sin bx)\,,$$

kde $R_k(x), S_k(x)$ jsou neznámé polynomy stupně $k = \max\{m, n\}$ a $r \in \mathbb{N}$ je násobnost čísla $a + ib$ jakožto kořene charakteristického polynomu. Tudíž $k = \max\{2, 0\} = 2\,,\ R_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0\,,$ kde $a_2\,,\ a_1\,,\ a_0$ jsou hledané konstanty. Poznamenejme, že $S_2(x)\sin 0x = 0$. Kritické číslo $a + i\,b = 0$ je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, odtud $r = 1\,.$

Partikulární řešení nehomogenní rovnice má tedy tvar $x^1 R_2(x)$, neboli

$$y_p(x) = x\,(a_2x^2 + a_1x + a_0) = a_2x^3 + a_1x^2 + a_0x\,,$$

potom $y_p'(x) = 3a_2x^2 + 2a_1x + a_0\,,\ \ y_p''(x) = 6a_2x + 2a_1\,.$ Po dosazení y_p', y_p'' do dané rovnice dostaneme:

$$6a_2x + 2a_1 - 2\,(3a_2x^2 + 2a_1x + a_0) = x^2 + 1\,,$$
$$-6a_2x^2 + (6a_2 - 2a_1)x + 2a_1 - 2a_0 = x^2 + 1\,,$$
$$\Rightarrow \quad a_2 = -\tfrac{1}{6}\,,\ a_1 = -\tfrac{1}{2}\,,\ a_0 = -1\,.$$

Partikulárním řešením je funkce:

$$y_p(x) = x\,(-\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{2}x - 1)\,.$$

3. Obecné řešení má tvar

$$\mathbf{y(x) = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{2x} + x\,(-\tfrac{1}{6}x^2 - \tfrac{1}{2}x - 1)}\,.$$

Příklad 13: Pomocí metody odhadu vyřešíme rovnici

$$y'' + y = \cos x + \mathrm{e}^x \,.$$

Řešení:

1. Charakteristická rovnice $\lambda^2 + 1 = 0$ má kořeny $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ a homogenní řešení má tvar
$$y_h = \widetilde{C}_1\, \mathrm{e}^{ix} + \widetilde{C}_2\, \mathrm{e}^{-ix} \quad \text{nebo} \quad y_h = C_1 \cos x + C_2 \sin x \,.$$

2. Zadanou úlohu rozdělíme na dvě (princip superpozice) - s pravou stranou: a) $\cos x$ a b) e^x.

   a) Z rovnosti
   $$\cos x = \mathrm{e}^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$$
   vyplývá $a = 0$, $b = 1$, $P_n(x) = 1$, $Q_m(x) = 0$, $n = 0$, $m = 0 \Rightarrow k = 0$, $R_0(x) = a_0$, $S_0(x) = b_0$. Kritické číslo $a + i\,b = i$ je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, tedy $r = 1$.
   Partikulární řešení úlohy hledáme ve tvaru $y_{p_a}(x) = x(a_0 \cos x + b_0 \sin x)$, potom $y'_{p_a}(x) = a_0 \cos x + b_0 \sin x + x(-a_0 \sin x + b_0 \cos x)$, $y''_{p_a}(x) = 2(-a_0 \sin x + b_0 \cos x) - x(a_0 \cos x + b_0 \sin x)$. Po dosazení dostaneme: $2(-a_0 \sin x + b_0 \cos x) - x(a_0 \cos x + b_0 \sin x) + x(a_0 \cos x + b_0 \sin x) = \cos x \Rightarrow 2(-a_0 \sin x + b_0 \cos x) = \cos x \Rightarrow a_0 = 0$, $b_0 = \frac{1}{2}$ a partikulárním řešením je funkce
   $$y_{p_a}(x) = \frac{1}{2} x \sin x \,.$$

   b) Z rovnosti
   $$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$$
   vyplývá $a = 1$, $b = 0$, $P_n(x) = 1$, $Q_m(x) = 0$, $n = 0$, $m = 0 \Rightarrow k = 0$, $R_0(x) = a_0$. Kritické číslo $a + i\,b = 1$ není kořenem charakteristické rovnice, tedy $r = 0$.
   Partikulární řešení má nyní tvar $y_{p_b}(x) = \mathrm{e}^x a_0$, potom $y'_{p_b}(x) = \mathrm{e}^x a_0$, $y''_{p_b}(x) = \mathrm{e}^x a_0$. Po dosazení dostaneme: $2\mathrm{e}^x a_0 = \mathrm{e}^x \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2}$ a řešením je funkce
   $$y_{p_b}(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x \,.$$

   Partikulární řešení má tudíž tvar $y_p(x) = y_{p_a}(x) + y_{p_b}(x) = \frac{1}{2}(x \sin x + \mathrm{e}^x)$.

3. Obecné řešení má tvar
$$\mathbf{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{C_1} \cos \mathbf{x} + \mathbf{C_2} \sin \mathbf{x} + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\mathbf{x} \sin \mathbf{x} + \mathrm{e}^{\mathbf{x}}) \,.$$

3 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

3.1 Homogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Teorie

Příklad 14: Určíme fundamentální matici a obecné řešení homogenní soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= \ y_1 - y_2 \\ y_2' &= \ -4y_1 + y_2 \,. \end{aligned}$$

Řešení: Řešení homogenní úlohy hledáme ve tvaru $\vec{y}(x) = \vec{h}\mathrm{e}^{\lambda x}$, kde $\vec{h}, \lambda$ budou vlastní vektory a vlastní čísla matice soustavy

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice soustavy vypočítáme z rovnice

$$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1\,,\ \lambda_2 = 3\,.$$

K vlastním číslům určíme vlastní vektory:

$$\lambda_1 = -1: \quad (\mathbb{A}+\mathbb{I})\vec{h} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 3: \quad (\mathbb{A}-3\mathbb{I})\vec{h} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální systém je tvořen vektory: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} \right\}$.

Fundamentální matice má tedy tvar

$$\mathbb{Y}(x) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} \right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{3x} \\ 2\mathrm{e}^{-x} & 2\mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix}$$

a obecným řešením homogenní soustavy je vektor

$$\vec{y}(\mathbf{x}) = \mathbf{C_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathbf{x}} + \mathbf{C_2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathbf{3x}} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{3x} \\ 2\mathrm{e}^{-x} & 2\mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Jiné řešení: Soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= \ y_1 - y_2 \\ y_2' &= \ -4y_1 + y_2 \,. \end{aligned}$$

můžeme řešit i eliminací. Vyjádříme druhou funkci z první rovnice $y_2 = y_1 - y_1'$, pak $y_2' = y_1' - y_1''$ a dosadíme do druhé rovnice $y_1' - y_1'' = -4y_1 + y_1 - y_1' \Rightarrow$ $y_1'' - 2y_1' - 3y_1 = 0$ a dále použít postup jako v příkladu 6.

<u>Příklad 15</u>: Určíme fundamentální matici a obecné řešení homogenní soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= \ y_1 - 3y_2 \\ y_2' &= \ 3y_1 + y_2 \, . \end{aligned}$$

<u>Řešení:</u> Řešení homogenní úlohy hledáme ve tvaru $\vec{y}(x) = \vec{h}\mathrm{e}^{\lambda x}$, kde $\vec{h}, \lambda$ budou vlastní vektory a vlastní čísla matice soustavy

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} .$$

Vlastní čísla matice soustavy vypočítáme z rovnice

$$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(1-\lambda) + 9 = \lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$$

$\Rightarrow$ $\lambda_1 = 1 + 3i$, $\lambda_2 = 1 - 3i$. K vlastním číslům určíme vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1 + 3i : \quad (\mathbb{A} - (1+3i)\mathbb{I})\vec{h} = \begin{pmatrix} -3i & -3 \\ 3 & -3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = 1 - 3i : \quad (\mathbb{A} - (1-3i)\mathbb{I})\vec{h} = \begin{pmatrix} 3i & -3 \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

Fundamentální systém je tvořen vektory: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+3i)x}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1-3i)x} \right\}$.
Fundamentální matice má tedy tvar

$$\mathbb{Y}(x) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+3i)x}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1-3i)x} \right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+3i)x} & \mathrm{e}^{(1-3i)x} \\ -i\mathrm{e}^{(1+3i)x} & i\mathrm{e}^{(1-3i)x} \end{pmatrix}$$

a obecným řešením homogenní soustavy je vektor

$$\vec{y}(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+3i)x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \mathrm{e}^{(1-3i)x} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{(1+3i)x} & \mathrm{e}^{(1-3i)x} \\ -i\mathrm{e}^{(1+3i)x} & i\mathrm{e}^{(1-3i)x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} .$$

Řešení pomocí reálných funkcí má tvar

$$\vec{y}(\mathbf{x}) = \widetilde{\mathbf{C}}_\mathbf{1} \begin{pmatrix} \cos 3x \\ \sin 3x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathbf{x}} + \widetilde{\mathbf{C}}_\mathbf{2} \begin{pmatrix} \sin 3x \\ -\cos 3x \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathbf{x}}.$$

3.2 Nehomogenní soustavy lineárních diferenciálních rovnic

<u>Příklad 16</u>: Řešení nehomogenní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= \ y_1 - y_2 - \mathrm{e}^{2x} \\ y_2' &= \ -4y_1 + y_2 \,. \end{aligned}$$

hledáme metodou **variace konstant**.
<u>Řešení:</u>

1.krok Nejdříve vyřešíme homogenní soustavu (viz příklad 14). Řešení homogenní soustavy má tvar

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} & -\mathrm{e}^{3x} \\ 2\mathrm{e}^{-x} & 2\mathrm{e}^{3x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} + C_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} \,,$$

kde $\mathbb{Y}(x)$ je fundamentální matice soustavy a $\vec{C}$ je vektor konstant.

2.krok Partikulární řešení dané soustavy hledáme ve tvaru $\vec{y}_p(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C}(x)$, kde $\vec{C}(x)$ je vektor funkcí. Po dosazení do soustavy dostaneme $\mathbb{Y}'(x)\vec{C}(x) + \mathbb{Y}(x)\vec{C}'(x) = \mathbb{A}\mathbb{Y}(x)\vec{C}(x) + \vec{b}(x)$.
Zde $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -4 & 1 \end{pmatrix}$ je matice soustavy a $\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}$ je vektor pravých stran. Protože $\mathbb{Y}' = \mathbb{A}\mathbb{Y}$ (sloupce fundamentální matice jsou řešením této homogenní soustavy), tak platí

$$C_1'(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} + C_2'(x) \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} = \begin{pmatrix} -\mathrm{e}^{2x} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud vyplývá

$$\begin{aligned} C_1' \mathrm{e}^{-x} - \ C_2' \mathrm{e}^{3x} &= -\mathrm{e}^{2x} \\ 2C_1' \mathrm{e}^{-x} + 2C_2' \mathrm{e}^{3x} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 4C_1' \mathrm{e}^{-x} &= -2\mathrm{e}^{2x} \\ -4C_2' \mathrm{e}^{3x} &= -2\mathrm{e}^{2x} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} C_1(x) &= \tfrac{-1}{6} \mathrm{e}^{3x} \\ C_2(x) &= \tfrac{-1}{2} \mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

a partikulární řešení soustavy má tvar

$$\vec{y}_p(x) = \tfrac{-1}{6} \mathrm{e}^{3x} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} + \tfrac{-1}{2} \mathrm{e}^{-x} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3x} = \tfrac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2x}.$$

3.krok Obecným řešením nehomogenní soustavy je funkce

$$\vec{\mathbf{y}}(x) = \vec{\mathbf{y}}_h(x) + \vec{\mathbf{y}}_p(x) = \mathbf{C_1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-\mathbf{x}} + \mathbf{C_2} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathbf{3x}} + \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{\mathbf{2x}} \,.$$

Příklad 17: Řešení nehomogenní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= \ y_2 + \cos x \\ y_2' &= \ 2y_1 + y_2\,. \end{aligned}$$

dostaneme metodou variace konstant ve třech krocích.

Řešení:

1.krok Vyřešíme homogenní soustavu (v soustavě zůstanou jen členy s funkcemi a jejich derivacemi)

$$\begin{aligned} y_1' &= \ y_2 \\ y_2' &= \ 2y_1 + y_2\,. \end{aligned}$$

Matice soustavy je $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a její vlastní čísla dostaneme z rovnice

$$\det(\mathbb{A} - \lambda\mathbb{I}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = 2\,,\ \lambda_2 = -1\,.$$

K vlastním číslům určíme vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 2: \quad (\mathbb{A} - 2\cdot\mathbb{I})\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \ \Rightarrow\ \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -1: \quad (\mathbb{A} + 1\cdot\mathbb{I})\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \ \Rightarrow\ \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice má tedy tvar

$$\mathbb{Y}(x) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2x}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} \right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} & \mathrm{e}^{-x} \\ 2\mathrm{e}^{2x} & -\mathrm{e}^{-x} \end{pmatrix}.$$

Označíme $\vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, pak obecné řešení homogenní soustavy má tvar

$$\vec{y}_h(x) = \mathbb{Y}(x)\cdot\vec{C} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2x} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{-x} = C_1\,\vec{h}_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\vec{h}_2\,\mathrm{e}^{-x}\,.$$

2.krok Partikulární řešení soustavy hledáme metodou variace konstant ve tvaru $\vec{y}_p(x) = \mathbb{Y}(x)\cdot\vec{C}(x)$, kde $\vec{C}(x) = \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix}$ je nyní vektor funkcí.

Po dosazení do soustavy dostaneme

$$\mathbb{Y}'(x)\vec{C}(x) + \mathbb{Y}(x)\vec{C}'(x) = \mathbb{A}\mathbb{Y}(x)\vec{C}(x) + \vec{b}(x)\,,\ \text{kde } \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

protože $\mathbb{Y}'(x) = \mathbb{A}\mathbb{Y}(x)$, tak platí

$$C_1'(x)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x} + C_2'(x)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x} = \begin{pmatrix} \cos x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud vyplývá

$$\begin{aligned} C_1'\,\mathrm{e}^{2x} + C_2'\,\mathrm{e}^{-x} &= \cos x \\ 2C_1'\,\mathrm{e}^{2x} - C_2'\,\mathrm{e}^{-x} &= 0 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} 3C_1'\,\mathrm{e}^{2x} &= \cos x \\ 3C_2'\,\mathrm{e}^{-x} &= 2\cos x \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} C_1' &= \tfrac{1}{3}(\cos x\,\mathrm{e}^{-2x}) \\ C_2' &= \tfrac{2}{3}(\cos x\,\mathrm{e}^{x}) \end{aligned}$$

a pomocí per partes dostaneme
$\int \cos x\,\mathrm{e}^{-2x}\,dx = \cos x\,\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2} - \int -\sin x\,\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2}\,dx = \cos x\,\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-2} - \sin x\,\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{-4} -$
$- \int \cos x\,\frac{\mathrm{e}^{-2x}}{4}\,dx \;\Rightarrow\; \int \cos x\,\mathrm{e}^{-2x}\,dx = \frac{1}{5}(\sin x - 2\cos x)\,\mathrm{e}^{-2x}\,.$
Podobně $\int \cos x\,\mathrm{e}^{x}\,dx = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)\,\mathrm{e}^{x}$ a pro funkce $C_1(x), C_2(x)$ tedy platí:

$$C_1(x) = \tfrac{1}{15}(\sin x - 2\cos x)\,\mathrm{e}^{-2x}\,,\quad C_2(x) = \tfrac{1}{3}(\sin x + \cos x)\,\mathrm{e}^{x}\,.$$

Partikulární řešení soustavy má tvar

$$\vec{y}_p(x) = \tfrac{1}{15}(\sin x - 2\cos x)\,\mathrm{e}^{-2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{2x} + \tfrac{1}{3}(\sin x + \cos x)\,\mathrm{e}^{x}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}$$

$$= \tfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 2\sin x + \cos x \\ -\sin x - 3\cos x \end{pmatrix}.$$

3.krok Obecným řešením nehomogenní soustavy je vektorová funkce

$$\vec{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{C_1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{\mathbf{2x}} + \mathbf{C_2}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\mathrm{e}^{-\mathbf{x}} + \tfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}}\begin{pmatrix} 2\sin x + \cos x \\ -\sin x - 3\cos x \end{pmatrix}.$$

4 Úlohy na vlastní čísla a vlastní funkce

Teorie

<u>**Příklad 18**</u>: Určíme vlastní čísla a vlastní funkce okrajové úlohy

$$y'' + \lambda y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y'(\pi) = 0\,.$$

<u>Řešení:</u> Řešení hledáme ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{kx}$, potom charakteristická rovnice má tvar $k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}\,.$

a) Pro $\lambda < 0$ je $k_1 = \sqrt{-\lambda}$, $k_2 = -\sqrt{-\lambda}$ a obecné řešení úlohy má tvar

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x} \;\Rightarrow\; y'(x) = \sqrt{-\lambda}\,C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda}\,C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}\,.$$

Z okrajových podmínek dostáváme soustavu rovnic pro neznámé konstanty $C_1,\ C_2$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \;\Rightarrow 0 = C_1 + C_2 \\ y'(\pi) = 0 \Rightarrow 0 = \sqrt{-\lambda}\,C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\pi} - \sqrt{-\lambda}\,C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\pi} \end{array}\right\} \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{array} \;\Rightarrow\; y = 0\,.$$

Vlastní funkce úlohy musí být nenulové. Triviální řešení $y = 0$ tedy není vlastní funkcí úlohy.

b) Pro $\lambda = 0$ máme obecné řešení ve tvaru $y(x) = C_1 + C_2\,x \;\Rightarrow\; y'(x) = C_2$ a z okrajových podmínek dostaneme

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \;\Rightarrow 0 = C_1 \\ y'(\pi) = 0 \Rightarrow 0 = C_2 \end{array}\right\} \;\Rightarrow\; y = 0\,.$$

Opět nemáme vlastní funkci úlohy.

c) Pro $\lambda > 0$ má obecné řešení tvar

$$y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x \;\Rightarrow\; y'(x) = -\sqrt{\lambda}\,C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}\,C_2 \cos\sqrt{\lambda}x\,.$$

Z okrajových podmínek plyne

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \;\Rightarrow 0 = C_1 \\ y'(\pi) = 0 \Rightarrow 0 = \sqrt{\lambda}\,C_2 \cos\sqrt{\lambda}\,\pi \end{array}\right\} \sqrt{\lambda}\,\pi = (2n-1)\frac{\pi}{2}\,,\ n \in \mathbb{N}, (\text{aby } C_2 \neq 0)\,.$$

Dostáváme tak **posloupnost vlastních čísel** $\boldsymbol{\lambda_n = \frac{(2n-1)^2}{4}}$, $n \in \mathbb{N}$. Tedy

$$\{\tfrac{1}{4}, \tfrac{9}{4}, \tfrac{25}{4}, \ldots\}$$

a **posloupnost jim odpovídajících vlastních funkcí** je

$$\{\sin\tfrac{1}{2}x, \sin\tfrac{3}{2}x, \sin\tfrac{5}{2}x, \ldots\}.$$

Příklad 19: Najdeme vlastní čísla a vlastní funkce okrajové úlohy

$$y'' + 2y' + \lambda y = 0\,, \quad y(0) = 0\,, \quad y(\pi) = 0\,.$$

Řešení: Řešení hledáme ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{kx}$, potom charakteristická rovnice má tvar $k^2 + 2k + \lambda = 0 \Rightarrow (k+1)^2 = 1 - \lambda \Rightarrow k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-\lambda}\,.$

a) Pro $\lambda < 1$ je $k_1 = -1 + \sqrt{1-\lambda}\,,\ k_2 = -1 - \sqrt{1-\lambda}$ a obecné řešení úlohy má tvar

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{(-1+\sqrt{1-\lambda})x} + C_2\,\mathrm{e}^{(-1-\sqrt{1-\lambda})x}\,.$$

Z Dirichletových okrajových podmínek dostáváme soustavu rovnic pro konstanty $C_1,\ C_2$

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \ \Rightarrow 0 = C_1 + C_2 \\ y(\pi) = 0 \ \Rightarrow 0 = C_1\,\mathrm{e}^{(-1+\sqrt{1-\lambda})\pi} + C_2\,\mathrm{e}^{(-1-\sqrt{1-\lambda})\pi} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} C_2 = -C_1 \\ \text{a dosadíme} \end{array} \quad \Rightarrow$$

$$C_1\,\mathrm{e}^{-\pi}(\mathrm{e}^{(\sqrt{1-\lambda})\pi} - \mathrm{e}^{(-\sqrt{1-\lambda})\pi}) = 0 \ \text{(závorka je nulová pouze pro } \lambda = 1) \ \Rightarrow$$

$$C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow \ y = 0\,.$$

Vlastní funkce úlohy musí být nenulové. Triviální řešení $y = 0$ tedy není vlastní funkcí úlohy.

b) Pro $\lambda = 1$ máme obecné řešení ve tvaru $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{-x}$ a z okrajových podmínek dostaneme

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \ \Rightarrow 0 = C_1 \\ y(\pi) = 0 \ \Rightarrow 0 = C_2\,\pi\,\mathrm{e}^{-\pi} \end{array}\right\} \ \Rightarrow \ y = 0\,.$$

Opět nemáme vlastní funkci úlohy.

c) Pro $\lambda > 1$ má obecné řešení tvar

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{-x}\cos(\sqrt{\lambda-1})x + C_2\,\mathrm{e}^{-x}\sin(\sqrt{\lambda-1})x\,.$$

Z okrajových podmínek plyne

$$\left.\begin{array}{l} y(0) = 0 \ \Rightarrow 0 = C_1 \\ y(\pi) = 0 \ \Rightarrow 0 = C_2\,\mathrm{e}^{-\pi}\sin\sqrt{\lambda-1}\,\pi \end{array}\right\} \ \sqrt{\lambda-1}\,\pi = n\pi\,,\ n \in \mathbb{N}, (\text{aby } C_2 \neq 0)\,.$$

Dostáváme tak **posloupnost vlastních čísel** $\boldsymbol{\lambda_n = 1 + n^2}, n \in \mathbb{N}$. Tedy

$$\{2, 5, 10,\ \ldots\}$$

a **posloupnost jim odpovídajících vlastních funkcí** je

$$\{\,\mathrm{e}^{-x}\sin x,\ \mathrm{e}^{-x}\sin 2x,\ \mathrm{e}^{-x}\sin 3x,\ \ldots\}.$$

5 Laplaceova transformace

Teorie

Laplaceovou transformací funkce $f(t) : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ je funkce $F(p)$, kde $p \in \mathbb{C}$ a $F(p) = \int\limits_0^\infty f(t) e^{-pt}\, dt$, píšeme $F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\}$. Nejdříve ke vzorům f najdeme obrazy F.

$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$	$f(t)$	$F(p)$
1	$\frac{1}{p}$	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$	$\cosh at$	$\frac{p}{p^2-a^2}$	$\sinh at$	$\frac{a}{p^2-a^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\mathrm{e}^{at} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$	$\mathrm{e}^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\mathrm{e}^{at} t$	$\frac{1}{(p-a)^2}$	$\mathrm{e}^{at} t^2$	$\frac{2}{(p-a)^3}$	$\mathrm{e}^{at} t^n$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
$t \cos t$	$\frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$	$t \sin t$	$\frac{2p}{(p^2+1)^2}$	$t \cosh t$	$\frac{p^2+1}{(p^2-1)^2}$	$t \sinh t$	$\frac{2p}{(p^2-1)^2}$
$f'(t)$	$pF(p) - f(0_+)$			$f^{(n)}(t)$	$p^n F(p) - p^{n-1} f(0_+) - \cdots - f^{(n-1)}(0_+)$		

5.1 Diferenciální rovnice a Laplaceova transformace

Příklad 20: Chceme vyřešit počáteční úlohu:

$$y''(t) - 2y'(t) + 2y(t) = 0\,, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1\,.$$

Řešení: Označíme $\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(p)$ a pomocí Laplaceovy transformace dostaneme:

$$\mathscr{L}\{y''(t) - 2y'(t) + 2y(t)\} = \text{(používáme linearitu } \mathscr{L}\text{)}$$

$$p^2 Y(p) - p\, y(0+) - y'(0+) - 2(pY(p) - y(0+)) + 2Y(p) =$$

$$(p^2 - 2p + 2)Y(p) - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2-2p+2}\,.$$

Doplněním na čtverec dostaneme $Y(p) = \frac{1}{p^2-2p+2} = \frac{1}{(p-1)^2+1}$.
Nyní k danému obrazu najdeme předmět Laplaceovy transformace. Jinými slovy chceme použít **zpětnou Laplaceovu transformaci**

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y(p)\} = y(t).$$

Protože $\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$, tak $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{(p-1)^2+1}\} = \mathrm{e}^t \sin t\,.$ Řešením počáteční úlohy je tedy funkce $\mathbf{y(t) = e^t \sin t}\,.$

Příklad 21: Pomocí Laplaceovy transformace chceme vyřešit:

$$y''(t) - 4y'(t) + 4y(t) = 0\,, \quad y(0) = 2\,,\; y'(0) = 1\,.$$

Řešení: Zobrazíme počáteční úlohu pomocí Laplaceovy transformace, dostaneme:

$$\mathscr{L}\{y''(t) - 4y'(t) + 4y(t)\} = \text{(používáme linearitu } \mathscr{L}\text{)}$$

$$p^2Y(p) - py(0+) - y'(0+) - 4(pY(p) - y(0+)) + Y(p) =$$

$$(p^2 - 4p + 4)Y(p) - 2p - 1 + 8 = 0 \;\Rightarrow\; Y(p) = \tfrac{2p-7}{(p-2)^2}\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky obdržíme $\frac{2p-7}{(p-2)^2} = \frac{2(p-2)-3}{(p-2)^2} = \frac{2}{(p-2)} + \frac{-3}{(p-2)^2}$. Tedy $Y(p) = \frac{-3}{(p-2)^2} + \frac{2}{p-2}$. Nyní k danému obrazu najdeme předmět Laplaceovy transformace. Protože $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$ a $\mathscr{L}\{te^{at}\} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p-a}\right) = \frac{1}{(p-a)^2}$, tak $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{-3}{(p-2)^2}\} = -3t\mathrm{e}^{2t}$, $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{2}{p-2}\} = 2\mathrm{e}^{2t}$ a řešením počáteční úlohy je funkce

$$\mathbf{y(t) = -3t\mathrm{e}^{2t} + 2\mathrm{e}^{2t}}\,.$$

5.1.1 Konvoluce

Operátor, který dvěma reálným funkcím f, g přiřadí funkci $f * g$ předpisem $(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$ se nazývá **konvoluce**. Označíme $\mathscr{L}(f(t)) = F(p)$, $\mathscr{L}(g(t)) = G(p)$ Pro obraz konvoluce při Laplaceově transformaci platí:

$$\mathscr{L}((f * g)(t)) = F(p)G(p).$$

Příklad 22: Pomocí Laplaceovy transformace budeme řešit:

$$y''(t) - y(t) = \cos t\,, \quad y(0) = 0\,,\; y'(0) = 0\,.$$

Řešení: Zobrazíme diferenciální úlohu pomocí Laplaceovy transformace, dostaneme:

$p^2Y(p) - py(0+) - y'(0+) - Y(p) = \frac{p}{p^2+1} \;\Rightarrow\; Y(p) = \frac{1}{p^2-1}\frac{p}{p^2+1} = \frac{p}{p^4-1}$.

Odtud $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{p^2-1}\frac{p}{p^2+1}\} = \int\limits_0^t \sinh(\tau)\cos(t-\tau)\,d\tau$.

Zároveň platí $\frac{p}{p^4-1} = -\frac{p}{2(p^2+1)} + \frac{1}{4(p+1)} + \frac{1}{4(p-1)}$ a také $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{2}(\frac{-p}{p^2+1} + \frac{1}{2(p+1)} + \frac{1}{2(p-1)}\} = \frac{1}{2}(-\cos t + \frac{\mathrm{e}^{-t}+\mathrm{e}^{t}}{2}) = \frac{1}{2}(\cosh t - \cos t)$. Řešením počáteční úlohy je tedy funkce

$$\mathbf{y(t) = \frac{1}{2}(\cosh t - \cos t)}\,.$$

5.2 Soustavy rovnic

Příklad 23: Pomocí Laplaceovy transformace vyřešíme soustavu diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - \ \ y_2, \quad y_1(0+) = 1\,,\\ y_2' &= y_1 + 3y_2, \quad y_2(0+) = 1\,. \end{aligned}$$

Řešení: Jelikož $\mathscr{L}\{y_1'(t)\} = p\,Y_1(p) - y_1(0+)$, $\mathscr{L}\{y_2'(t)\} = p\,Y_2(p) - y_2(0+)$, tak dostaneme soustavu algebraických rovnic

$$\begin{aligned} p\,Y_1(p) - 1 &= Y_1(p) - \ \ Y_2(p),\\ p\,Y_2(p) - 1 &= Y_1(p) + 3Y_2(p), \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (p-1)Y_1(p) + \qquad\quad Y_2(p) &= 1,\\ -Y_1(p) + (p-3)Y_2(p) &= 1. \end{aligned}$$

Odtud $Y_2(p) = 1-(p-1)Y_1(p)$ a po dosazení $-Y_1(p)+(p-3)(1-(p-1)Y_1(p)) = 1$. Tudíž $Y_1(p) = \frac{p-4}{p^2-4p+4} = \frac{p-2-2}{(p-2)^2} = \frac{1}{p-2} + \frac{-2}{(p-2)^2}$ a $Y_2(p) = 1-(p-1)\frac{p-4}{(p-2)^2} = \frac{p}{(p-2)^2} = \frac{1}{p-2} + \frac{2}{(p-2)^2}$.

Zpětnou transformací dostaneme $\vec{y}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2t}(1-2t) \\ \mathrm{e}^{2t}(1+2t) \end{pmatrix}$.

Příklad 24: Pomocí Laplaceovy transformace vyřešte soustavu diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami:

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 - \ \ y_2, \quad y_1(0+) = 2\,,\\ y_2' &= \ \ y_1 + 5y_2, \quad y_2(0+) = 1\,. \end{aligned}$$

Řešení: Na soustavu aplikujeme Laplaceovu transformaci a dostaneme soustavu algebraických rovnic

$$\begin{aligned} p\,Y_1(p) - 2 &= 5Y_1(p) - \ \ Y_2(p),\\ p\,Y_2(p) - 1 &= \ \ Y_1(p) + 5Y_2(p), \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (p-5)Y_1(p) + \qquad\quad Y_2(p) &= 2,\\ -Y_1(p) + (p-5)Y_2(p) &= 1. \end{aligned}$$

Odtud $Y_2(p) = 2-(p-5)Y_1(p)$ a po dosazení $-Y_1(p)+(p-5)(2-(p-5)Y_1(p)) = 1$. Tudíž $Y_1(p) = \frac{2p-11}{(p-5)^2+1} = \frac{2(p-5)}{(p-5)^2+1} + \frac{-1}{(p-5)^2+1}$ a $Y_2(p) = 2-(p-5)\frac{2p-11}{(p-5)^2+1} = \frac{2((p-5)^2+1)-(p-5)(2(p-5)-1)}{(p-5)^2+1} = \frac{2}{(p-5)^2+1} + \frac{p-5}{(p-5)^2+1}$.

Protože platí $\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}\cos\omega t\} = \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}$, $\mathscr{L}\{\mathrm{e}^{at}\sin\omega t\} = \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}$, tak zpětnou transformací dostaneme $\vec{y}(\mathbf{t}) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{5t}(2\cos t - \sin t) \\ \mathrm{e}^{5t}(2\sin t + \cos t) \end{pmatrix}$.

6 Taylorova metoda pro řešení počátečních úloh

Teorie

Nechť funkce $f = f(x)$ má derivace všech řádů v bodě x_0. Mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

se nazývá **Taylorova řada** funkce f.

Taylorova metoda řešení počátečních úloh.

Předpokládáme, že řešení $y(x)$ počáteční úlohy má v bodě x_0 derivace všech řádů. Řešení pak hledáme ve tvaru

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

a hodnoty $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $\dots$ určíme z diferenciální rovnice a z počátečních podmínek.

Příklad 25: Vyřešíme počáteční úlohu

$$y' = 2y, \quad y(0) = 1$$

pomocí Taylorovy metody.

Řešení: Z počáteční podmínky a rovnice plyne $y'(0) = 2$ a postupným derivováním rovnice dostaneme:

$$\begin{aligned}
y''(x) &= 2\,y'(x) && \Rightarrow y''(0) = 2^2\,, \\
y'''(x) &= 2\,y''(x) && \Rightarrow y'''(0) = 2^3\,, \\
y^{(4)}(x) &= 2\,y'''(x) && \Rightarrow y^{(4)}(0) = 2^4\,, \\
&\vdots \\
y^{(n)}(x) &= 2\,y^{(n-1)}(x) && \Rightarrow y^{(n)}(0) = 2^n\,.
\end{aligned}$$

Po dosazení do Taylorovy řady dostaneme

$$\mathbf{y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} x^n} \;\; (= \mathrm{e}^{\mathbf{2x}}).$$

<u>Příklad 26</u>: Pomocí Taylorovy metody řešíme počáteční úlohu

$$y'' - 3xy = 0, \quad y(0) = -1,\ y'(0) = 2\,.$$

<u>Řešení:</u> Z počátečních podmínek plyne, že $x_0 = 0$ a Taylorova řada řešení má tvar

$$y(x) = -1 + 2(x-0) + \frac{y''(0)}{2!}(x-0)^2 + \dots\,.$$

Z rovnice dostaneme postupným derivováním:

$$\begin{aligned}
&y''(x) = 3\,x\,y(x) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y''(0) = 3\cdot 0\cdot y(0) = 0\,, \\
&y'''(x) = 3\,(y(x) + x\,y'(x)) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y'''(0) = 3\,(y(0) + 0\cdot y'(0)) = 3\cdot(-1)\,, \\
&y^{(4)}(x) = 3\,(2y'(x) + x\,y''(x)) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y^{(4)}(0) = 3\,(2y'(0) + 0\cdot y''(0)) = 3\cdot 2\cdot 2\,, \\
&y^{(5)}(x) = 3\,(3y''(x) + x\,y'''(x)) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y^{(5)}(0) = 3\,(3y''(0) + 0\cdot y'''(0)) = 0\,, \\
&y^{(6)}(x) = 3\,(4y'''(x) + x\,y^{(4)}(x)) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y^{(6)}(0) = 3\,(4y'''(0) + 0\cdot y^{(4)}(0)) = 3^2\cdot 4\cdot(-1)\,, \\
&\qquad\qquad \vdots \\
&y^{(n)}(x) = 3\,((n-2)y^{(n-3)}(x) + x\,y^{(n-2)}(x)) \\
&\qquad\qquad \Rightarrow y^{(n)}(0) = 3\,(n-2)y^{(n-3)}(0)\,.
\end{aligned}$$

obecně

$$\begin{aligned}
&y^{(3n)}(0) = 3^n(3n-2)(3n-5)\cdots 4\cdot 1\cdot(-1)\,, \\
&y^{(3n+1)}(0) = 3^n(3n-1)(3n-4)\cdots 5\cdot 2\cdot 2\,, \\
&y^{(3n+2)}(0) = 0\,.
\end{aligned}$$

Po dosazení do předpokládaného tvaru řešení dostaneme:

$$\mathbf{y(x) = -1 + 2x + \frac{3\cdot(-1)}{3!}x^3 + \frac{3\cdot 2\cdot 2}{4!}x^4 + \dots}$$

$$\mathbf{= -1 + 2x + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)\frac{3^n(3n-2)\cdots 4\cdot 1}{(3n)!}x^{3n} + 2\frac{3^n(3n-1)\cdots 5\cdot 2}{(3n+1)!}x^{3n+1}}.$$

7 Fourierovy řady

Teorie

Příklad 27: Stanovíme Fourierovu řadu funkce $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 0 \le x \le \pi \\ -1 & \text{pro} \quad -\pi \le x \le 0 \end{cases}$

podle základního trigonometrického systému $\{\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\}$, tj. ve tvaru

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\,,$$

kde $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$, $a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$, $b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx$, $k = 1, 2, \ldots$.

Řešení: Vypočteme koeficienty a_k , b_k :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -1\,dx + \int_{0}^{\pi} 1\,dx\right) = 0 \quad \text{lichá funkce na symetrickém intervalu}\,,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\cos kx\,dx + \int_{0}^{\pi} \cos kx\,dx\right) = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,, \text{lichá funkce},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} -\sin kx\,dx + \int_{0}^{\pi} \sin kx\,dx\right) = (\text{sudá funkce}) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin kx\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi k}[\cos kx]_0^{\pi} = -\frac{2}{\pi k}[(-1)^k - 1]\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,.$$

Výsledek píšeme ve tvaru:

$$\mathbf{s(x)} = \frac{\mathbf{4}}{\pi}\sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \frac{\sin\mathbf{(2k-1)x}}{\mathbf{2k-1}}\,.$$

Příklad 28: Najdeme Fourierovu řadu funkce $f(x) = x$ podle základního trigonometrického systému.

Řešení: Vypočteme koeficienty a_k , b_k :

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0 \quad \text{lichá funkce na symetrickém intervalu}\,,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\cos kx\,dx = 0\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,, \text{lichá funkce},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx = (\text{sudá funkce}) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin kx\,dx$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[x\frac{-\cos kx}{k} - \frac{\sin kx}{k^2}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{k}(-1)^{k+1}\,, \quad k = 1, 2, \ldots\,.$$

Výsledek píšeme ve tvaru:

$$\mathbf{s(x)} = \frac{\mathbf{2}}{\pi}\sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty} \frac{\mathbf{(-1)^{k+1}}\sin\mathbf{kx}}{\mathbf{k}}\,.$$

Příklad 29: Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \pi^2 - x^2$ podle základního trigonometrického systému a spočítejte součet Fourierovy řady v bodech 0 a π.

Řešení: Vypočteme koeficienty a_k, b_k:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[\pi^2 - x^2]\,dx = (\text{sudá funkce}) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}[\pi^2 - x^2]\,dx = \frac{2}{\pi}\Big[\pi^2 x - \frac{x^3}{3}\Big]_0^{\pi} = \frac{4}{3}\pi^2,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos kx\,dx = (\text{sudá funkce}) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}(\pi^2 - x^2)\cos kx\,dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\Big[\pi^2\frac{\sin kx}{k} - x^2\frac{\sin kx}{k} - 2x\frac{\cos kx}{k^2} + 2\frac{\sin kx}{k^3}\Big]_0^{\pi} = \frac{4}{k^2}(-1)^{k+1}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\pi^2 - x^2)\sin kx\,dx = 0 \quad \text{lichá funkce}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Výsledek píšeme ve tvaru:

$$\mathbf{s(x)} = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{3}}\pi^{\mathbf{2}} + \sum_{\mathbf{k=1}}^{\infty}\frac{\mathbf{4(-1)^{k+1}}\cos\mathbf{kx}}{\mathbf{k^2}}.$$

Zadaná funkce je spojitá a po částech derivovatelná, proto platí

$$s(x) = \frac{f(x_-) + f(x_+)}{2} = f(x).$$

Pro body 0, π tak dostaneme

$$\pi^2 = f(0) = s(0) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k+1}}{k^2},$$

$$0 = f(\pi) = s(\pi) = \frac{2}{3}\pi^2 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{k^2}.$$