



Financováno
Evropskou unií
NextGenerationEU



Národní
plán
obnovy



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Projekt Národní plán obnovy pro oblast vysokých škol pro roky 2022-2024
Registrační číslo projektu: NPO_ZČU_MSMT-16584/2022

Toto dílo podléhá licenci Creative Commons 4.0 ve variantě BY-SA



Sbírka řešených příkladů k M3S

Petr Tomiczek

Obsah

1	Definiční obor a hladiny funkcí více proměnných	3
1.1	Definiční obor	3
1.2	Hladina funkce	5
2	Limity a spojitost funkcí více proměnných	7
2.1	Limity	7
2.2	Spojitost	9
3	Parciální derivace, gradient, derivace podle vektoru	10
3.1	Parciální derivace	10
4	Monotonie ve směru, diferenciál, tečna k hladině a grafu	11
4.1	Monotonie ve směru, diferenciál	11
4.2	Tečna k hladině a ke grafu	11
5	Hessova matice, druhý diferenciál a derivace vyšších řádů	12
5.1	Hessova matice a druhý diferenciál	12
5.2	Derivace vyšších řádů	12
6	Úlohy na optimalizaci	13
6.1	Lokální extrémy	13
6.2	Optimalizační úlohy s vazbami	14
7	Vícenásobné integrály	18
7.1	Dvojné integrály	18
7.2	Trojné integrály	19
7.3	Těžiště tělesa	21
8	Parciální diferenciální rovnice	23

1 Definiční obor a hladiny funkcí více proměnných

Teorie

1.1 Definiční obor

Příklad 1: Nalezněte a graficky znázorněte **definiční obor** funkce $f = f(x, y)$, kde

a) $f(x, y) = \sqrt{x^3 y^3}$,

d) $f(x, y) = \ln(2x + 8 - x^2 - y^2)$,

b) $f(x, y) = \sqrt{xy - 1}$,

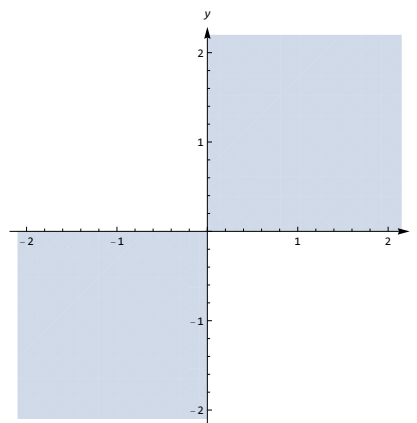
e) $f(x, y) = \sqrt{2y - x^2 - y^2}/(y - 1)$,

c) $f(x, y) = \ln(4 - x^2 - y^2)$,

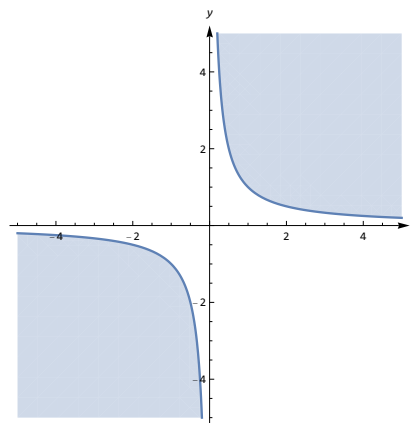
f) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{y}$.

Řešení:

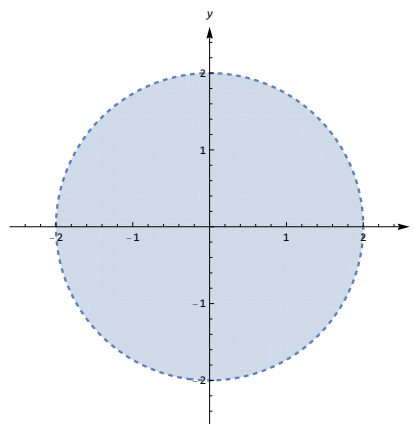
- a) Výraz pod odmocninou musí být nezáporný. Řešíme tedy nerovnici $x^3 y^3 \geq 0$. To platí, jestliže $x, y \geq 0$ nebo $x, y \leq 0$.



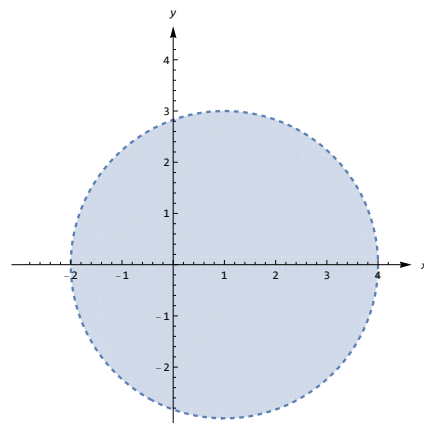
- b) Musí platit $xy - 1 \geq 0$. To nastane, jestliže $y \geq \frac{1}{x}$ pro $x > 0$ a $y \leq \frac{1}{x}$ pro $x < 0$.



- c) Musí platit $4 - x^2 - y^2 > 0$, což splňují body ležící uvnitř kružnice o poloměru 2 se středem v počátku.

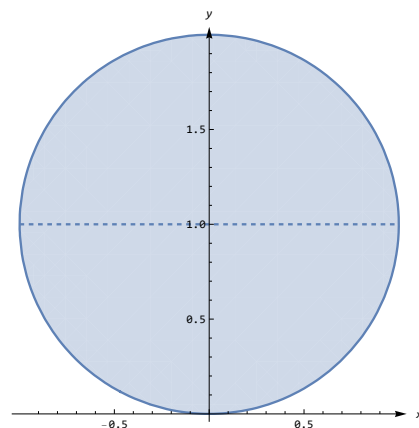


- d) Musí platit $2x + 8 - x^2 - y^2 > 0$, což po doplnění na čtverec vede k nerovnosti $9 \geq (x - 1)^2 + y^2$, kterou splňují body ležící uvnitř kružnice o poloměru 3 se středem v bodě $[1, 0]$.

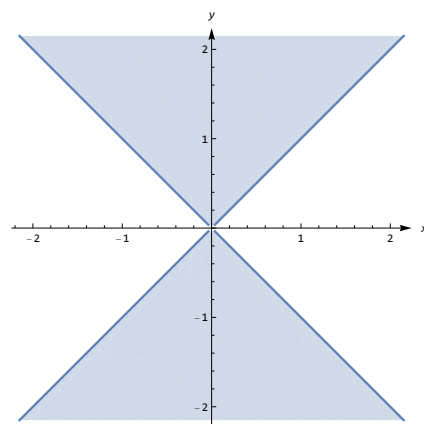


- e) Musí platit $2y - x^2 - y^2 \geq 0$ a zároveň $y \neq 1$.

Po doplnění na čtverec dostaneme $1 \geq x^2 + (y - 1)^2$, což splňují body ležící uvnitř kružnice o poloměru 1 se středem v bodě $[0, 1]$, pro které je $y \neq 1$.



- f) Argument funkce $\arcsin x$ leží v intervalu $[-1, 1]$, tedy platí $-1 \leq \frac{x}{y} \leq 1$. Hranice definičního oboru dané funkce je tvořena přímkami $y = x$ a $y = -x$. Body $[0, 1]$, $[0, -1]$ leží v definičním oboru, počátek tam nepatří.



1.2 Hladina funkce

Příklad 2:

Nalezněte a graficky znázorněte **hladiny** funkce $f = f(x, y)$, jestliže

a) $f(x, y) = x - y + 2$,

d) $f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{4}$,

b) $f(x, y) = \frac{x-2}{y+1}$,

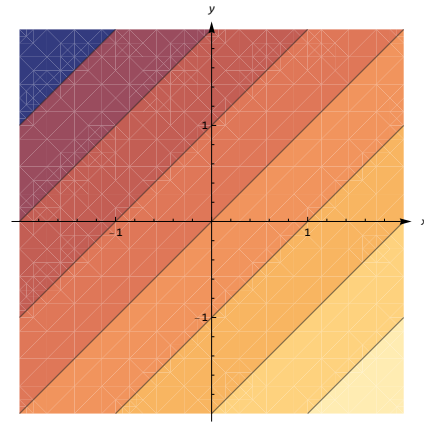
e) $f(x, y) = |x| + 2|y|$,

c) $f(x, y) = x^2 + y^2 + 4x - 2y + 9$,

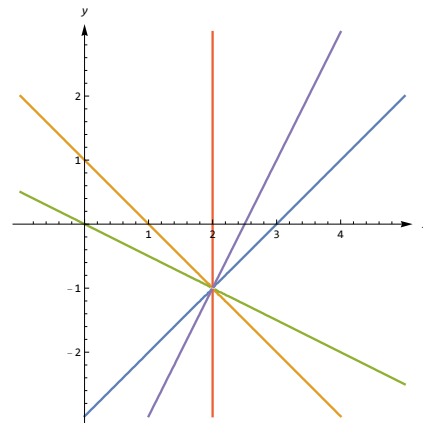
f) $f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$.

Řešení:

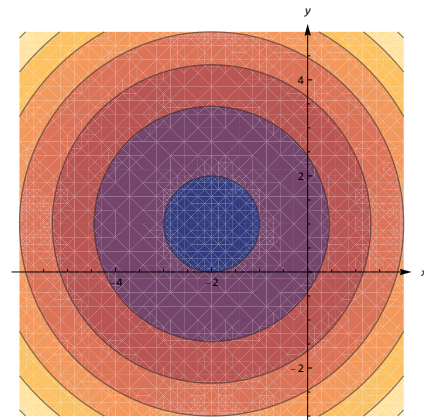
- a) Grafy funkcí splňující rovnici $x - y + 2 = C$, tedy $y = x + 2 - C$ jsou rovnoběžné přímky se směrnici 1.



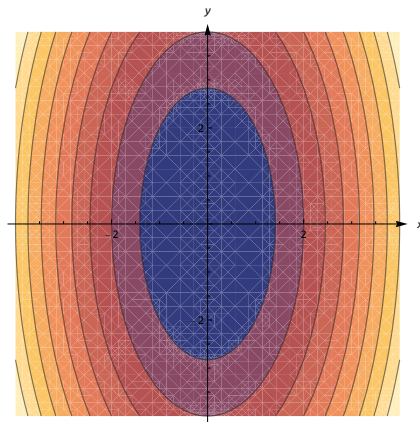
- b) Grafy funkcí splňující rovnici $\frac{x-2}{y+1} = C$, tedy $y = \frac{1}{C}(x - 2) - 1$ jsou přímky se směrnici $\frac{1}{C}$.



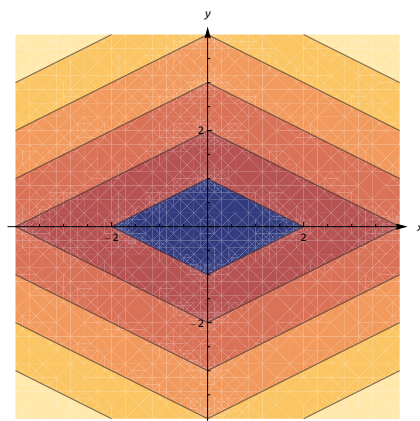
- c) Rovnici $x^2 + y^2 + 4x - 2y + 9 = C$ upravíme doplněním na čtverec na tvar $(x+2)^2 + (y-1)^2 = C - 4$. Hladiny jsou tedy tvořeny kružnicemi o poloměru $\sqrt{C - 4}$ (pokud $C \geq 4$) se středem v bodě $[-2, 1]$.



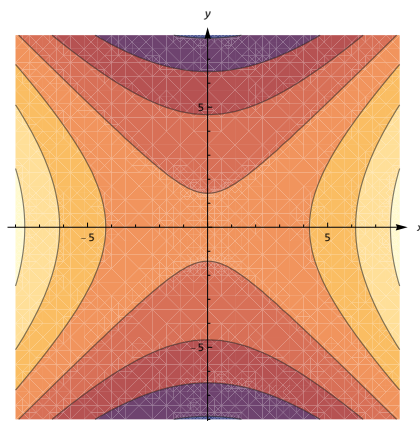
- d) Rovnici $x^2 + \frac{y^2}{4} = C$ vydělíme C a upravíme na tvar $\frac{x^2}{\sqrt{C}^2} + \frac{y^2}{\sqrt{2C}^2} = 1$. Odtud vyplývá, že hladiny jsou tvořeny elipsami s hlavní poloosou $a = \sqrt{C}$ (pokud $C \geq 0$) a vedlejší poloosou $b = \sqrt{2C}$ se středem v bodě $[0, 0]$.



- e) Z rovnice $|x| + 2|y| = C$ plyne, že $C \geq 0$ a $|y| = -\frac{1}{2}|x| + \frac{C}{2}$. Hladiny funkce jsou tvořeny úsečkami ležícími na přímkách $y = \pm \frac{1}{2}x + \frac{C}{2}$.



- f) Z rovnice $x^2 - y^2 + 2 = C$ plyne, že hladiny funkce jsou tvořeny hyperbolami se středem v počátku a asymptotami $y = \pm x$.



2.1 Limity

Příklad 3: Vypočtěte dvojnásobné limity $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$, $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$, limitu po přímkách $y = kx$, tj. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} f(x, y)$ a **dvojnou limitu** $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ pro funkce:

a) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y},$

d) $f(x, y) = \frac{\sin(xy)}{xy},$

b) $f(x, y) = \frac{x^3 y}{x^6 + y^2},$

e) $f(x, y) = \frac{x^3 + y^3}{xy},$

c) $f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}},$

f) $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}.$

Řešení:

- a) Poznamenejme, že zápis $x \rightarrow 0$ znamená, že x se blíží k 0, ale $x \neq 0$, podobně to platí pro y . Pro dvojnásobné limity tedy dostaneme

$$\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-y}{y} = -1 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x-y}{x+y} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x} = 1.$$

Substituce $y = kx$ vede k limitě: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} \frac{x-kx}{x+kx} = \frac{1-k}{1+k}$. Vzhledem k tomu, že po různých přímkách dojdeme k různým limitním hodnotám, již nemá smysl počítat dvojnou limit. Ta jistě neexistuje.

$$\text{b) } f(x, y) = \frac{x^3 y}{(x^6 + y^2)}, \quad \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 y}{(x^6 + y^2)} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{y^2} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^3 y}{(x^6 + y^2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^6} = 0.$$

Substituce $y = kx$ vede k limitě: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} \frac{x^3 kx}{x^6 + (kx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 k}{x^4 + k^2} = 0$. I když po různých přímkách dojdeme ke stejné limitě, o dvojnou limitě nic nevíme. Stačí uvažovat substituci $y = x^3$, potom $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x^3}} \frac{x^6}{x^6 + x^6} = \frac{1}{2} \neq 0$ a dvojná limita tedy neexistuje.

$$\text{c) } \lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0}{|y|} = 0 \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{|x|} = 0.$$

Substituce $y = kx$ vede k limitě: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} \frac{x(kx)^2}{x^2 + (kx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k^2 x}{1+k^2} = 0$, odtud však ještě nevyplývá, že dvojná limita existuje. K důkazu existence dvojnou limity použijeme přechod k polárním souřadnicím. Položíme $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, potom

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} \frac{r^3 (\cos \varphi)^2 \sin \varphi}{r} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} r^2 (\cos \varphi)^2 \sin \varphi = 0.$$

d) K výpočtu dvojné limity $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin xy}{xy}$ využijeme přechod k jedné proměnné pomocí substituce $z = xy$, potom $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{\sin xy}{xy} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 0$ (viz skripta MA1, příklad 6.6). Podobně postupujeme u ostatních limit.

e) $\lim_{y \rightarrow 0} \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + y^3}{xy} \right)$ neexistuje $\left(\frac{-y^3 \neq 0}{\rightarrow 0} \right)$ a podobně $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\lim_{y \rightarrow 0} \frac{x^3 + y^3}{xy} \right)$ neexistuje.

Substituce $y = kx$ vede k limitě: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} \frac{x^3 + (kx)^3}{xkx} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + k^3x}{k} = 0$. O dvojné limitě se pokusíme rozhodnout pomocí přechodu k polárním souřadnicím.

Položíme $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, pak $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^3 + y^3}{xy} = \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} \frac{r^3((\cos \varphi)^3 + (\sin \varphi)^3)}{r^2(\cos \varphi \sin \varphi)}$

$= \lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} \frac{r((\cos \varphi)^3 + (\sin \varphi)^3)}{\cos \varphi \sin \varphi}$. Pokud nyní položíme $r = \cos \varphi \sin \varphi$ (volíme speci-

ální křivku, po které se budeme blížit k počátku), pak $\lim_{\substack{r \rightarrow 0+ \\ \varphi \in [0, 2\pi)}} \frac{r((\cos \varphi)^3 + (\sin \varphi)^3)}{\cos \varphi \sin \varphi} = (\cos \varphi)^3 + (\sin \varphi)^3$.

Ze substituce $r = \cos \varphi \sin \varphi$ a $r \rightarrow 0$ plyne, že $\cos \varphi \rightarrow 0 \Rightarrow \sin \varphi \rightarrow \pm 1$ nebo $\sin \varphi \rightarrow 0 \Rightarrow \cos \varphi \rightarrow \pm 1$, neboli $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} \frac{x^3 + y^3}{xy} = (\cos \varphi)^3 + (\sin \varphi)^3 = \pm 1 \neq 0$ a dvojná limita tedy neexistuje.

Podobně pomocí substituce $y = x^2$ dostaneme: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x^2}} \frac{x^3 + x^6}{x^3} = 1 \neq 0$ a opět jsme ukázali, že dvojná limita neexistuje (po přímkách je 0, po parabole je 1).

f) Limity $\lim_{y \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y}$, $\lim_{x \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x}$ neexistují, tudíž neexistují ani dvojnásobné limity.

Substituce $y = kx$ vede k limitě: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=kx}} x \sin \frac{1}{kx} + kx \sin \frac{1}{x} = 0$, neboť součin omezené funkce a hodnoty, která se blíží k nule, se také blíží k nule.

Při výpočtu dvojné limity využijeme opět omezenosti funkce $\sin x$ a odhadu $\left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y|$. Odtud plyne, že $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} = 0$.

Existence a rovnost dvojnásobných limit nezaručí existenci limity funkce v bodě a obráceně z existence limity nevyplývá existence dvojnásobných limit. Přesto, jestliže existuje (dvojná) limita a "vnitřní limity", pak existují dvojnásobné limity.

2.2 Spojitost

Příklad 4: Rozhodněte o **spojitosti** následujících funkcí:

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{\ln(1-x-y)}{x+y} & x+y \neq 0, \\ -1 & x+y = 0, \end{cases} & \text{c) } f(x, y) &= \begin{cases} (1 + \sinh(xy))^{xy} & xy \neq 0, \\ e & xy = 0, \end{cases} \\ \text{b) } f(x, y) &= \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & x^2 + y^2 = 0, \end{cases} & \text{d) } f(x, y) &= \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} & xy \neq 0, \\ 0 & xy = 0, \end{cases} \end{aligned}$$

Řešení:

- a) V příkladu vystupují pouze spojité funkce. Stačí tedy rozhodnout o limitě v bodech, kde $x + y = 0$. Použijeme přechod k jedné proměnné pomocí substituce $z = x + y$, potom

$$\lim_{[x,y] \rightarrow [x_0, -x_0]} \frac{\ln(1-x-y)}{x+y} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\ln(1-z)}{z} = -1$$

(viz skripta MA1, příklad 6.7 za 3.). Odtud plyne, že funkce f **je spojitá** na celém $\mathbb{R}^2$.

- b) Protože $f(x, 0) = 0$, tak $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=0}} f(x, y) = 0$ a zároveň substitucí $y = x^2$, dostaneme $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y=x^2}} \frac{x^4}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2} \neq 0$ a dvojná limita v počátku neexistuje. Tedy funkce f **není spojitá** v bodě $[0, 0]$.

- c) Opět v příkladu vystupují pouze spojité funkce. Stačí tedy rozhodnout o limitě v bodech, kde $xy = 0$. Použijeme přechod k jedné proměnné pomocí substituce $z = xy$, potom

$$\lim_{xy \rightarrow 0} (1 + \sinh(xy))^{xy} = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + \sinh z)^z = \lim_{z \rightarrow 0} (1 + \sinh z)^{\frac{1}{\sinh z} \frac{\sinh z}{z}} = e$$

(viz skripta MA1, příklad 6.7 za 2. a cvičení 6.11 za a). Odtud plyne, že funkce f **je spojitá** na celém $\mathbb{R}^2$.

- d) Při výpočtu dvojné limity v počátku jsme v předchozím příkladu 3 za f) využili odhadu $\left| x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} \right| \leq |x| + |y|$ a dokázali $\lim_{[x,y] \rightarrow [0,0]} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x} = 0$. Funkce $f(x, y) = x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}$ je tedy spojitá v počátku $[0, 0]$. Pozor není však spojitá na celém prostoru $\mathbb{R}^2$, protože limity $\lim_{y \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{y}$, $\lim_{x \rightarrow 0} y \sin \frac{1}{x}$ neexistují a na "osách" funkce f **spojitá není**.

3 Parciální derivace, gradient, derivace podle vektoru

Teorie

3.1 Parciální derivace

Příklad 5: Vypočtěte parciální derivace podle x a podle y , funkcí f v bodě $[x_0, y_0]$, jestliže:

- a) $f(x, y) = x^4 + y^2$, $[x_0, y_0] = [1, -1]$, c) $f(x, y) = \operatorname{tg}(xy)$, $[x_0, y_0] = [1, 0]$,
b) $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$, $[x_0, y_0] = [1, 2]$, d) $f(x, y) = \ln(y^3 + x)$, $[x_0, y_0] = [1, 0]$,

Řešení:

- a) Parciální derivace funkce f podle x v bodě $[1, -1]$ je

$$\frac{\partial(x^4+y^2)}{\partial x}(1, -1) = 4x^3|_{[1, -1]} = 4, \text{ podle } y \text{ je } \frac{\partial(x^4+y^2)}{\partial y}(1, -1) = 2y|_{[1, -1]} = -2.$$

- b) $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{x+y}\right) = \frac{(x+y)-x}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}$ a dosadíme bod $[1, 2]$, tedy $\frac{y}{(x+y)^2}|_{[1, 2]} = \frac{2}{9}$, podobně
 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x+y}\right) = \frac{-x}{(x+y)^2}$, tudíž $\frac{-x}{(x+y)^2}|_{[1, 2]} = \frac{-1}{9}$.

- c) $\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{tg}(xy))|_{[1, 0]} = \frac{y}{\cos^2(xy)}|_{[1, 0]} = 0$, $\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{tg}(xy))|_{[1, 0]} = \frac{x}{\cos^2(xy)}|_{[1, 0]} = 1$.

- d) $\frac{\partial}{\partial x}(\ln(y^3 + x))|_{[1, 0]} = \frac{1}{y^3+x}|_{[1, 0]} = 1$, $\frac{\partial}{\partial y}(\ln(y^3 + x))|_{[1, 0]} = \frac{3y^2}{y^3+x}|_{[1, 0]} = 0$.

Příklad 6: Vypočtěte parciální derivaci funkcí $f = f(x, y)$ v bodě $B = [x_0, y_0]$ podle vektoru $\vec{s} = (s_1, s_2)$, jestliže

- a) $f(x, y) = xy^2$, $B[1, -1]$, $\vec{s} = (1, 2)$, c) $f(x, y) = \cos(xy)$, $B[\pi, 1]$, $\vec{s} = (1, 0)$,
b) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x-y}}$, $B[1, 0]$, $\vec{s} = (2, -4)$, d) $f(x, y) = e^{2y+x}$, $B[1, 1]$, $\vec{s} = (2, 3)$,

Řešení: Pro výpočet parciální derivace funkce f podle vektoru $\vec{s}$ v bodě B využijeme vztah $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(B) = \operatorname{grad} f(B) \cdot \vec{s} = \nabla f(B) \cdot \vec{s} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(B), \frac{\partial f}{\partial y}(B)\right) \cdot \vec{s}$.

- a) Tedy $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(B) = \nabla f(B) \cdot \vec{s} = (y^2, 2xy)|_{[1, -1]} \cdot (1, 2) = (1, -2) \cdot (1, 2) = -3$.

- b) $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(B) = \left(-\frac{1}{2\sqrt{(x-y)^3}}, \frac{1}{2\sqrt{(x-y)^3}}\right)|_{[1, 0]} \cdot (2, -4) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \cdot (2, -4) = 1$.

- c) $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(B) = (y \sin(xy), x \sin(xy))|_{[\pi, 1]} \cdot (1, 0) = (0, 0) \cdot (1, 0) = 0$.

- d) $\frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(B) = (e^{2y+x}, 2e^{2y+x})|_{[1, 1]} \cdot (1, 2) = (e^3, 2e^3) \cdot (1, 2) = 5e^3$.

4 Monotonie ve směru, diferenciál, tečna k hladině a grafu

Teorie

4.1 Monotonie ve směru, diferenciál

Příklad 7: Spočítejte **diferenciál** funkce f v bodě $B[x_0, y_0]$ a rozhodněte zda v tomto bodě podle vektoru $\vec{s}$ funkce roste nebo klesá, jestliže:

a) $f(x, y) = \ln xy$, $B[1, 1]$, $\vec{s} = (1, -2)$, c) $f(x, y) = \cotg(xy)$, $B[\frac{\pi}{2}, 1]$, $\vec{s} = (0, 1)$,

b) $f(x, y) = \frac{x}{x+y}$, $B[1, 0]$, $\vec{s} = (1, -1)$, d) $f(x, y) = y - 4x$, $B[7, 1]$, $\vec{s} = (-2, 1)$,

Řešení: Pro diferenciál funkce f platí $df(B, (dx, dy)) = \frac{\partial f}{\partial x}(B) dx + \frac{\partial f}{\partial y}(B) dy$.

O růstu či poklesu rozhoduje znaménko $df(B, \vec{s}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{s}}(B) = \text{grad } f(B) \cdot \vec{s}$.

a) Tedy $df([1, 1], (dx, dy)) = \frac{y}{xy}|_{[1,1]} dx + \frac{x}{xy}|_{[1,1]} dy = dx + dy$ a o monotonii rozhodne $df([1, 1], (1, -2)) = dx + dy|_{(1,-2)} = -1 < 0$, tudíž funkce f v bodě B podle vektoru $\vec{s}$ klesá.

b) $df([1, 0], (dx, dy)) = \frac{y}{(x+y)^2}|_{[1,0]} dx + \frac{-x}{(x+y)^2}|_{[1,0]} dy = -dy$ a $-dy|_{(1,-1)} = 1 > 0$, tudíž funkce f v bodě B podle vektoru $\vec{s}$ roste.

c) $df([\frac{\pi}{2}, 1], (dx, dy)) = \frac{-y}{\sin^2(xy)}|_{[\frac{\pi}{2},1]} dx + \frac{-x}{\sin^2(xy)}|_{[\frac{\pi}{2},1]} dy = -dx - \frac{\pi}{2}dy$, odtud $df(B, \vec{s}) = -dx - \frac{\pi}{2}dy|_{(0,1)} = -\frac{\pi}{2} < 0$ a funkce f v B podle vektoru $\vec{s}$ klesá.

d) $df([7, 1], (dx, dy)) = -4dx + dy$ a $-4dx + dy|_{(-2,1)} = 9 > 0$, tudíž funkce f v bodě B podle vektoru $\vec{s}$ roste.

4.2 Tečna k hladině a ke grafu

Teorie

Příklad 8: Najděte tečnu k hladině a ke grafu **tečnu k hladině a ke grafu** funkce f v bodech $B[x_0, y_0]$ a $[x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$, jestliže:

a) $f(x, y) = x^2 - y$, $B[1, -1]$, c) $f(x, y) = \ln y$, $B[3, e]$,

b) $f(x, y) = \frac{xy}{x+y}$, $B[-5, 0]$, d) $f(x, y) = y^3 - \sqrt{x}$, $B[4, 1]$.

Řešení: Tečna k hladině funkce f v bodě $B[x_0, y_0]$ má tvar $\frac{\partial f}{\partial x}(B)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(B)(y - y_0) = 0$ a tečna ke grafu $\frac{\partial f}{\partial x}(B)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(B)(y - y_0) = z - f(B)$.

a) Tedy $2(x - 1) - 1(y + 1) = 0$ a $2(x - 1) - 1(y + 1) = z - 2$.

b) $\frac{y^2}{(x+y)^2}|_{[-5,0]}(x + 5) - \frac{x^2}{(x+y)^2}|_{[-5,0]}y = -y = 0$ a $-y = z$.

c) $\frac{1}{e}(y - e) = 0$ a $\frac{1}{e}(y - e) = z - 1$.

d) $-\frac{1}{4}(x - 4) + 3(y - 1) = 0$ a $-\frac{1}{4}(x - 4) + 3(y - 1) = z + 1$.

5 Hessova matice, druhý diferenciál a derivace vyšších řádů

Teorie

5.1 Hessova matice a druhý diferenciál

Příklad 9: Vypočítejte Hessovu matici a druhý diferenciál funkce f v bodě $B[x_0, y_0]$, jestliže:

a) $f(x, y) = x^3 + xy^2$, $B[-2, 2]$, c) $f(x, y) = \sin(4x) \cos(3y)$, $B[\frac{\pi}{2}, \pi]$,

b) $f(x, y) = y\sqrt{x}$, $B[1, -1]$, d) $f(x, y) = 25x - y^4$, $B[-4, 1]$.

Řešení: Hessova matice má obecný tvar $H = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}$ a druhý diferenciál je kvadratická forma tvaru $d^2f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$. Tedy

a) $H = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2xy \end{pmatrix}$, $H(-2, 2) = \begin{pmatrix} -12 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$, $d^2f = -12 dx^2 + 8 dx dy - 8 dy^2$.

b) $H = \begin{pmatrix} -y \frac{1}{4\sqrt{x^3}} & \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & 0 \end{pmatrix}$, $H(1, -1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$, $d^2f = \frac{1}{4} dx^2 + dx dy$.

c) $H = \begin{pmatrix} -16 \sin(4x) \cos(3y) & -12 \cos(4x) \sin(3y) \\ -12 \cos(4x) \sin(3y) & -9 \sin(4x) \cos(3y) \end{pmatrix}$, $H(\frac{\pi}{2}, \pi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $d^2f = 0$.

d) $H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12y^2 \end{pmatrix}$, $H(-4, 1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$, $d^2f = 12 dy^2$.

5.2 Derivace vyšších řádů

Příklad 10: Vypočítejte následující derivace:

a) $\frac{\partial^5(x^3y^2)}{\partial x^3 \partial y^2}$,

c) $\frac{\partial^4(\frac{xy}{z})}{\partial x \partial y \partial z^2}$,

b) $\frac{\partial^{10}(e^{2x-3y})}{\partial x^7 \partial y^3}$,

d) $\frac{\partial^6(\sin x \sin y \cos z)}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2}$

Řešení:

a) $\frac{\partial^5(x^3y^2)}{\partial x^3 \partial y^2} = \frac{\partial^3}{\partial x^3} \frac{\partial^2(x^3y^2)}{\partial y^2} = \frac{\partial^3}{\partial x^3}(x^3 \cdot 2) = 12x$,

b) $\frac{\partial^{10}(e^{2x-3y})}{\partial x^7 \partial y^3} = \frac{\partial^7}{\partial x^7} \frac{\partial^3(e^{2x-3y})}{\partial y^3} = (-3)^3 \frac{\partial^7}{\partial x^7}(e^{2x-3y}) = (-3)^3 2^7 (e^{2x-3y})$,

c) $\frac{\partial^4(\frac{xy}{z})}{\partial x \partial y \partial z^2} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial^2(\frac{xy}{z})}{\partial z^2} = 2 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{xy}{z^3}\right) = 2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{z^3}\right) = \frac{2}{z^3}$,

d) $\frac{\partial^6(\sin x \sin y \cos z)}{\partial x^2 \partial y^2 \partial z^2} = \frac{\partial^4(\sin x \sin y (-\cos z))}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{\partial^2(\sin x (-\sin y) (-\cos z))}{\partial x^2} = -\sin x \sin y \cos z$.

6 Úlohy na optimalizaci

6.1 Lokální extrémy

Příklad 11: Najděte **lokální extrémy** funkce $f = f(x, y)$, jestliže:

- a) $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2$, c) $f(x, y) = x^2 + 12xy + 2y^2$,
 b) $f(x, y) = xye^{-xy}$, d) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$.

Řešení: Nejprve najdeme stacionární body ($\nabla f = \vec{0}$) a pak pomocí **minorů** Hessovy matice rozhodneme o typu extrému.

- a) Pro stacionární body $[x_0, y_0]$ platí $\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right) = (0, 0)$, tedy

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 4x^3 - 2(x + y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4y^3 - 2(x + y) = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x &= y \\ 4x^3 - 4x &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 0, y = 0 \\ x &= \pm 1, y = \pm 1. \end{aligned}$$

Pro Hessovu matici platí $H(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}$. Odtud

St. bod	$\mathbb{H}(x_0, y_0)$	Hlavní minory $\mathbb{H}$	Typ bodu
$[0, 0]$	$\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$	$M_1 = -2 < 0$ $M_2 = 0$	neumíme rozhodnout
$[1, 1]; [-1, -1]$	$\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}$	$M_1 = 10 > 0$ $M_2 = 96 > 0$	minimum

- b) $\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= ye^{-xy} - xy^2e^{-xy} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= xe^{-xy} - x^2ye^{-xy} = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} y(1 - xy) &= 0 \\ x(1 - xy) &= 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= 0, y = 0 \\ x &\neq 0, y = 1/x. \end{aligned}$

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} e^{-xy}y^2(xy - 2) & e^{-xy}(x^2y^2 - 3xy + 1) \\ e^{-xy}(x^2y^2 - 3xy + 1) & e^{-xy}x^2(xy - 2) \end{pmatrix}. \text{ Odtud}$$

St. bod	$\mathbb{H}(x_0, y_0)$	Hlavní minory $\mathbb{H}$	Typ bodu
$[0, 0]$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$M_1 = 0$ $M_2 = -1$	sedlový bod
$[x, \frac{1}{x}]$	$\begin{pmatrix} \frac{-1}{ex^2} & \frac{-1}{e} \\ \frac{-1}{e} & \frac{-1}{ex^2} \end{pmatrix}$	$M_1 = \frac{-1}{ex^2} < 0$ $M_2 = \left(\frac{1}{x^4} - 1\right)\frac{1}{e^2} = 0$	maximum pro $ x < 1$ sedlo pro $ x > 1$ nevíme pro $ x = 1$

$$c) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 12y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 12x + 4y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

St. bod	$\mathbb{H}$	Hlavní minory $\mathbb{H}$	Typ bodu
$[0, 0]$	$\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 12 & 2 \end{pmatrix}$	$M_1 = 2 > 0$ $M_2 = -142 < 0$	sedlo

$$d) \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - \frac{4}{x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - \frac{10}{y} = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x^2 + yx - 4 = 0 \\ xy + 2y^2 - 10 = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x^2 - 2y^2 + 6 = 0 \\ 2y^2 - 6 \pm y\sqrt{y^2 - 3} - 4 = 0 \end{cases}$$

$$2y^2 - 10 = \pm y\sqrt{y^2 - 3} \quad 3y^4 - 37y^2 + 100 = 0 \quad y = \pm 2, x = \pm 1$$

$$4y^4 - 40y^2 + 100 = y^2(y^2 - 3) \quad y^2 = \frac{37 \pm \sqrt{37^2 - 1200}}{6} \quad y = \pm \frac{5}{\sqrt{3}}, x = \mp \frac{4}{\sqrt{3}}$$

St. bod	$\mathbb{H}$	Hlavní minory $\mathbb{H}$	Typ bodu
$[1, 2]$	$\begin{pmatrix} 2 + \frac{4}{x^2} & 1 \\ 1 & 2 + \frac{10}{y^2} \end{pmatrix}$	$M_1 = 2 + \frac{4}{x^2} > 0$ $M_2 = (2 + \frac{4}{x^2})(2 + \frac{10}{y^2}) - 1 > 0$	minimum

V bodě $[1, 2]$ je ostré lokální minimum. Ostatní získané body nejsou v definičním oboru funkce f .

6.2 Optimalizační úlohy s vazbami

Příklad 12: Najděte **vázané extrémy** funkce $f = f(x, y)$ vzhledem k přípustné množině $V = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : h(x, y) \leq 0\}$, jestliže:

- | | |
|---|---|
| a) $f(x, y) = x^2 - y^2,$
$h(x, y) = x + y + 1.$ | c) $f(x, y) = x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2,$
$h(x, y) = x + y.$ |
| b) $f(x, y) = 2x^2 + xy,$
$h(x, y) = 3x + 2y - 2.$ | d) $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2,$
$h(x, y) = x^2 + y^2 - 8.$ |

Příklady na vázané extrémy rozdělíme do dvou kroků:

i) Nejdříve budeme hledat stacionární body funkce f a pokud budou ležet v množině V , pak rozhodneme o jejich typu (viz příklad 11).

ii) Pomocí Lagrangeovy funkce $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ budeme hledat extrémy funkce f vzhledem k hranici ∂V a vzhledem k množině V .

Řešení:

a) i) Pro stacionární body funkce f platí $2x = 0$ Bod $[0, 0]$ ale neleží ve V ,
 $-2y = 0$ protože $0 + 0 + 1 \not\leq 0$.

ii) Zavedeme Lagrangeovu funkci $L(x, y, \lambda) = x^2 - y^2 + \lambda(x + y + 1)$ a najdeme její stacionární body:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= -2y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x + y + 1 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Tato soustava nemá řešení, tudíž funkce } f \\ \text{nemá extrémy vzhledem k množině } V. \end{array}$$

b) i) Pro $f(x, y) = 2x^2 + xy$ je $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x + y = 0$ Stac. bod $[0, 0]$ leží ve V .
 $\frac{\partial f}{\partial y} = x = 0$ Rozhodneme o typu extrému

St. bod	$\mathbb{H}$	Hlavní minory $\mathbb{H}$	Typ bodu
$[0, 0]$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$M_1 = 4 > 0$ $M_2 = -1 < 0$	sedlový bod

ii) Zavedeme Lagrangeovu funkci $L(x, y, \lambda) = 2x^2 + xy + \lambda(3x + 2y - 2)$ a najdeme její stacionární body:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 4x + y + 3\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= x + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 3x + 2y - 2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} x = -2\lambda \rightarrow -8\lambda + y + 3\lambda = 0 \rightarrow y = 5\lambda \\ \rightarrow -6\lambda + 10\lambda - 2 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{1}{2}, x = -1, y = \frac{5}{2}. \end{array}$$

Druhý diferenciál Lagrangeovy funkce je $d^2L = d^2f + \lambda d^2h = 4dx^2 + 2dxdy$ a po dosazení vazební podmínky $dh = 3dx + 2dy = 0$ dostaneme

$$d^2L = 4dx^2 + dx(-3dx) = dx^2 > 0.$$

Tedy bod $[-1, \frac{5}{2}]$ je bodem minima funkce f vzhledem k hranici ∂V množiny V a protože $\lambda = \frac{1}{2} > 0$, tak je bod $[-1, \frac{5}{2}]$ i bodem minima funkce f vzhledem k celé množině V .

Poznámka: Na hranici ∂V množiny V můžeme hledat extrém funkce f také přechodem k jedné proměnné. Z vazby plyne, že $y = \frac{1}{2}(2 - 3x)$ a po dosazení do f dostaneme funkci jedné proměnné: $f(x, y(x)) = f(x) = 2x^2 + x\frac{1}{2}(2 - 3x) = \frac{1}{2}x^2 + x$. Pak $f'(x) = x + 1 = 0 \rightarrow x = -1$, $f''(x) = 1 > 0$ a v bodě $[-1, \frac{5}{2}]$ má funkce f minimum na hranici ∂V množiny V .

c) i) Pro $f(x, y) = x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2$ je $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + y^2 + 12x = 0$
 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy + 2y = 0$

$$y(x+1) = 0 \rightarrow (x = -1, y = \pm 3) \vee (y = 0 \text{ a } x = 0 \vee x = -4)$$

Bod $[-1, 3]$ neleží ve V . Bod $[0, 0]$ leží na ∂V .

Hessova matice má tvar $H(x, y) = \begin{pmatrix} 6x+12 & 2y \\ 2y & 2 \end{pmatrix}$. Pak

St. bod	$\mathbb{H}(x_0, y_0)$	Hlavní minory $\mathbb{H}$	Typ bodu
$[-1, -3]$	$\begin{pmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}$	$M_1 = 6 > 0$ $M_2 = -24 < 0$	sedlový bod
$[0, 0]$	$\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$M_1 = 12 > 0$ $M_2 = 24 > 0$	minimum
$[-4, 0]$	$\begin{pmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$M_1 = -12 < 0$ $M_2 = -24 < 0$	sedlový bod

ii) Zavedeme Lagrangeovu funkci $L(x, y, \lambda) = x^3 + xy^2 + 6x^2 + y^2 + \lambda(x + y)$ a najdeme její stacionární body:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 3x^2 + y^2 + 12x + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 2xy + 2y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x + y = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &3x^2 + y^2 + 12x - 2xy - 2y = 0 \wedge y = -x \\ &\rightarrow 6x^2 + 14x = 0 \rightarrow x(6x + 14) = 0 \rightarrow \\ &x = y = \lambda = 0 \vee x = -\frac{7}{3}, y = \frac{7}{3}, \lambda = -\frac{56}{9}. \end{aligned}$$

Druhý diferenciál Lagrangeovy funkce je $d^2L = (6x+12)dx^2 + 4y dx dy + 2dy^2$ a po dosazení vazební podmínky $dh = dx + dy = 0$ dostaneme

$$d^2L = (6x - 4y + 14)dx^2 \text{ a } d^2L\left(-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right) = -\frac{28}{3}dx^2 < 0$$

Tedy bod $[-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}]$ je bodem maxima funkce f vzhledem k hranici ∂V množiny V a protože $\lambda = -\frac{56}{9} < 0$, tak je bod $[-1, \frac{5}{2}]$ i bodem maxima funkce f vzhledem k celé množině V .

Bod $[0, 0]$ vyšetřovat nemusíme, protože je podle bodu i) bodem minima k celé rovině $\mathbb{R}^2$ a tedy i k množině V .

Poznámka: Na hranici ∂V je $y = -x$ a $f(x, y(x)) = f(x) = 2x^3 + 7x^2$. Pak $f'(x) = 6x^2 + 14x = 0 \rightarrow x = -\frac{7}{3}, x = 0$. Zároveň $f''(x) = 12x + 14$ a $f''(0) = 14 > 0$, tedy v bodě $[0, 0]$ má funkce f minimum na hranici ∂V množiny V a $f''(-\frac{7}{3}) = -\frac{84}{3} + 14 < 0$, tedy v bodě $[-\frac{7}{3}, \frac{7}{3}]$ má funkce f maximum na hranici ∂V .

d) i) Pro funkci $f(x, y) = x^2 + 4xy + y^2$ je

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 4y = 0$	St. bod	$\mathbb{H}(x_0, y_0)$	Hlavní minory $\mathbb{H}$	Typ bodu
$\frac{\partial f}{\partial y} = 4x + 2y = 0$	$[0, 0] \in V$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$	$M_1 = 2 > 0$ $M_2 = -12 < 0$	sedlový bod

ii) Položíme $L(x, y, \lambda) = x^2 + 4xy + y^2 + \lambda(x^2 + y^2 - 8)$ a hledáme stacionární body Lagrangeovy funkce:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= 2x + 4y + \lambda 2x = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} &= 4x + 2y + \lambda 2y = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= x^2 + y^2 - 8 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &2xy + 4y^2 + \lambda 2xy - 4x^2 - 2yx - \lambda 2yx = 0 \\ &\rightarrow 4y^2 - 4x^2 = 0 \rightarrow y^2 = x^2 \rightarrow 2x^2 - 8 = 0 \\ &\rightarrow [2, 2, -3]; [-2, -2, -3]; [-2, 2, 1]; [2, -2, 1]. \end{aligned}$$

Druhý diferenciál Lagrangeovy funkce je $d^2L = 2dx^2 + 8dxdy + 2dy^2 + \lambda(2dx^2 + 2dy^2) = 2(dx^2 + 4dxdy + dy^2 + \lambda(dx^2 + dy^2))$ a po dosazení vazební podmínky $dh = 2x dx + 2y dy = 0 \rightarrow dy = -\frac{x}{y} dx$ dostaneme

$$d^2L = 2dx^2 \left(1 - 4\frac{x}{y} + \frac{x^2}{y^2} + \lambda(1 + \frac{x^2}{y^2})\right).$$

Tedy v jednotlivých stacionárních bodech platí

$$d^2L([2, 2, -3]) = d^2L([-2, -2, -3]) = 2dx^2(1 - 4 + 1 - 3(1 + 1)) < 0,$$

$$d^2L([-2, 2, 1]) = d^2L([2, -2, 1]) = 2dx^2(1 + 4 + 1 + 1(1 + 1)) > 0.$$

Body $[2, 2], [-2, -2]$ jsou body maxima funkce f vzhledem k hranici ∂V množiny V a protože $\lambda = -3 < 0$, tak je tento bod bodem maxima funkce f vzhledem k celé množině V .

Body $[-2, 2], [2, -2]$ jsou body minima funkce f vzhledem k hranici ∂V množiny V a protože $\lambda = 1 > 0$, tak je tento bod bodem minima funkce f vzhledem k celé množině V .

Poznámka: Na hranici ∂V platí $y = \pm\sqrt{8-x^2}$ a pro $y = \sqrt{8-x^2}$ je $f(x, y(x)) = f(x) = x^2 + 4x\sqrt{8-x^2} + 8 - x^2 = 4x\sqrt{8-x^2} + 8$. Potom $f'(x) = 4\sqrt{8-x^2} - 4x^2(\sqrt{8-x^2})^{-1} = 0 \rightarrow \sqrt{8-x^2} = x^2(\sqrt{8-x^2})^{-1} \rightarrow 8-x^2 = x^2 \rightarrow x = \pm 2$.

Zároveň $f''(x) = 4(-x(\sqrt{8-x^2})^{-1} - 2x(\sqrt{8-x^2})^{-1} - x^3(\sqrt{8-x^2})^{-3})$, tedy $f''(x) = 4x(-3(\sqrt{8-x^2})^{-1} - x^2(\sqrt{8-x^2})^{-3})$. Odtud $f''(2) < 0$ a $f''(-2) > 0$, tedy v bodě $[2, 2]$ má funkce f maximum na hranici ∂V množiny V a v bodě $[-2, 2]$ má funkce f minimum na hranici ∂V .

Podobně postupujeme pro $y = -\sqrt{8-x^2}$.

7 Vícenásobné integrály

7.1 Dvojné integrály

Příklad 13: Vypočtěte $I = \iint_M f(x, y) \, dx dy$, jestliže

- a) $f(x, y) = \frac{y^2}{x^2}$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : xy \geq 1, 4y \geq x, y \leq 3\}$.
b) $f(x, y) = e^x y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : y^2 \leq x \leq y + 2\}$.
c) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$.
d) $f(x, y) = 2x + y$, $M = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 : 2x \geq y \geq x, x \leq 1\}$.

Řešení:

- a) Průsečík funkcí $y = \frac{x}{4}, y = \frac{1}{x}$ je bod $[2, \frac{1}{2}]$, tedy $\frac{1}{2} \leq y \leq 3$ a pro x platí $4y \geq x \geq \frac{1}{y}$. Tudíž

$$I = \int_{\frac{1}{2}}^3 \int_{\frac{1}{y}}^{4y} \frac{y^2}{x^2} \, dx dy = \int_{\frac{1}{2}}^3 \left[-\frac{y^2}{x} \right]_{\frac{1}{y}}^{4y} dy = \int_{\frac{1}{2}}^3 \left[-\frac{y}{4} + y^3 \right] dy = \left[-\frac{y^2}{8} + \frac{y^4}{4} \right]_{\frac{1}{2}}^3 = \frac{1225}{64}.$$

- b) Průsečíky funkcí $y^2 = x, y = x - 2$ jsou body $[1, -1], [4, 2]$, odtud $-1 \leq y \leq 2$
a

$$I = \int_{-1}^2 \int_{y^2}^{y+2} e^x y \, dx dy = \int_{-1}^2 y(e^{y+2} - e^{y^2}) \, dy = \begin{array}{l} \text{per partes} \\ \text{a substitute} \end{array} \\ = [e^2(ye^y - e^y) - \frac{1}{2}e^{y^2}]_{-1}^2 = \frac{1}{2}e^4 - \frac{5}{2}e.$$

- c) Použijeme přechod k polárním souřadnicím:

$$\iint_M \sqrt{1 - x^2 - y^2} \, dx dy \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ \det J_\Phi = r \end{array} \right\} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \sqrt{1 - (r \cos \varphi)^2 - (r \sin \varphi)^2} r \, dr d\varphi \\ = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \sqrt{1 - r^2} r \, dr = \left\{ \begin{array}{l} u = 1 - r^2 \\ du = -2r \, dr \end{array} \right\} = \frac{\pi}{-4} \int_1^0 \sqrt{u} \, dr = \frac{\pi}{-4} \frac{2}{3} [\sqrt{u^3}]_1^0 = \frac{\pi}{6}.$$

- d) Průsečík funkcí $y = 2x, y = x$ je bod $[0, 0]$, tedy $x \in [0, 1]$. Tudíž

$$\int_0^1 \int_x^{2x} 2x + y \, dy dx = \int_0^1 \left[2xy + \frac{y^2}{2} \right]_x^{2x} dx = \int_0^1 \left[4x^2 + \frac{4x^2}{2} - 2x^2 - \frac{x^2}{2} \right] dx = \left[\frac{7x^3}{6} \right]_0^1 = \frac{7}{6}.$$

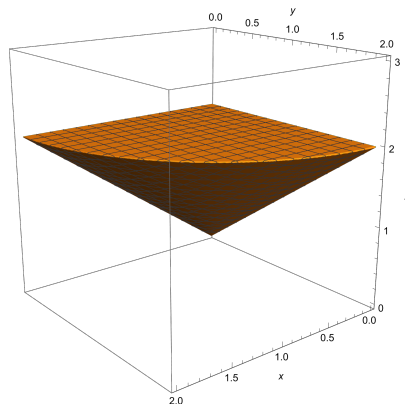
7.2 Trojné integrály

Příklad 14: Pro množinu $M \subset \mathbb{R}^3$ danou podmínkami P vypočtěte

- a) $\iiint_M \frac{xy^3z}{(1+z^2)^2} dx dy dz$, kde $P: \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 2, x \geq 0, y \geq 0$.
- b) objem tělesa M daného nerovnostmi $P: x^2+y^2 \leq 1, x^2+y^2+z^2 \leq 4$.
- c) $\iiint_M 2y(1+z) dx dy dz$, kde P : množina M_{xy} , tedy průmět množiny M do roviny xy , je tvořena trojúhelníkem ABC , kde $A[0,0], B[1,1], C[0,2]$, a $x \leq z \leq 4$.
- d) $\iiint_M x^2 dx dy dz$, kde $P: 4x^2+y^2+z^2 \leq 1, x \leq 0, z \leq 0$.

Řešení:

- a) Označíme M_{xy} průmět množiny M do roviny xy , potom M_{xy} je čtvrtkruh o poloměru 2 v prvním kvadrantu a platí:



$$\begin{aligned} \iiint_M \frac{xy^3z}{(1+z^2)^2} dx dy dz &= \int_{M_{xy}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 \frac{xy^3z}{(1+z^2)^2} dz dxdy \left\{ \begin{array}{l} u = 1+z^2 \\ du = 2z dz \end{array} \right\} = \\ \int_{M_{xy}} \int_{1+x^2+y^2}^5 \frac{xy^3}{u^2} \frac{du}{2} dxdy &= \int_{M_{xy}} \frac{xy^3}{2} \left[\frac{1}{-u} \right]_{1+x^2+y^2}^5 dxdy \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ \det J_{\Phi} = r \end{array} \right\} = \\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \frac{r \cos \varphi (r \sin \varphi)^3}{2} \left(\frac{1}{1+r^2} - \frac{1}{5} \right) r dr d\varphi &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi (\sin \varphi)^3 d\varphi \int_0^2 \frac{r^5}{1+r^2} - \frac{r^5}{5} dr \\ &= \left\{ \begin{array}{l} v = \sin \varphi \\ w = 1+r^2 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} dv = \cos \varphi d\varphi \\ dw = 2r dr \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int_0^1 (v)^3 dv \left(\int_1^5 \frac{(w-1)^2}{2w} dw - \left[\frac{r^6}{30} \right]_0^2 \right) = \\ \frac{1}{8} \left(\frac{1}{2} \int_1^5 w - 2 + \frac{1}{w} dw - \frac{32}{15} \right) &= \left(\frac{1}{16} \left[\frac{w^2}{2} - 2w + \ln w \right]_1^5 - \frac{4}{15} \right) = 4 - \frac{1}{60} + \frac{1}{16} \ln 5. \end{aligned}$$

b) Pro objem V tělesa M platí:

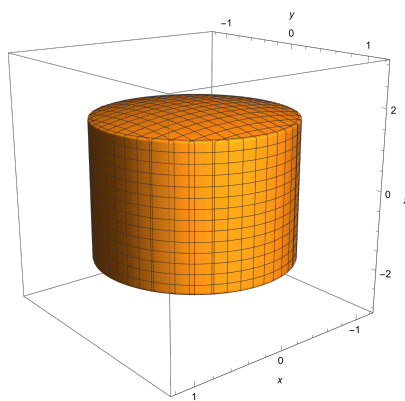
$$V = \iiint_M 1 \, dx dy dz.$$

Přechodem k cylindrickým souřadnicím

$\Phi : x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, z = z$
dostaneme $r^2 \leq 1, z^2 \leq 4 - r^2,$
 $\varphi \in [0, 2\pi)$ a $dx dy = r dr d\varphi$, tedy

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{-\sqrt{4-r^2}}^{\sqrt{4-r^2}} r \, dz dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2\sqrt{4-r^2} \, r \, dr d\varphi =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u = 4 - r^2 \\ du = -2r dr \end{array} \right\} = \int_0^{2\pi} \int_4^3 -\sqrt{u} \, du d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} \right]_3^4 d\varphi = \frac{4}{3} \pi (8 - \sqrt{27}).$$



c) Pro body trojúhelníka ABC platí

$0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 2 - x$. Odtud

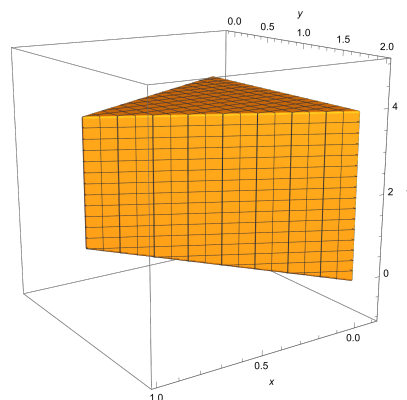
$$\iiint_M 2y(1+z) \, dx dy dz =$$

$$\int_{M_{xy}} \int_x^4 2y(1+z) \, dz dx dy =$$

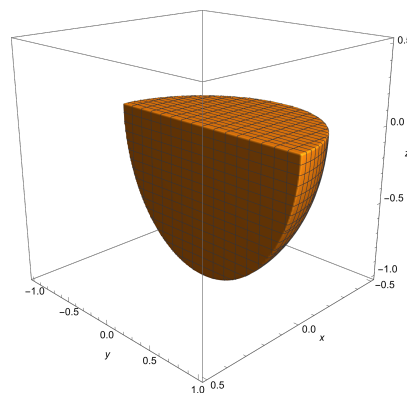
$$\int_0^1 \int_x^{2-x} \left[2y \left(z + \frac{z^2}{2} \right) \right]_x^4 dy dx =$$

$$= \int_0^1 \int_x^{2-x} 2y \left(12 - x - \frac{x^2}{2} \right) dy dx = \int_0^1 [y^2]_x^{2-x} \left(12 - x - \frac{x^2}{2} \right) dy dx =$$

$$\int_0^1 (4 - 4x) \left(12 - x - \frac{x^2}{2} \right) dx = 2 \int_0^1 (x^3 + x^2 - 26x + 24) dx = \frac{139}{6}.$$



d) Na hranici elipsoidu $4x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ platí $z = \pm \sqrt{1 - 4x^2 - y^2}$ a zároveň $z \leq 0$. Průřezem M_{xy} je polovina elipsy ($x \leq 0$) s hlavní poloosou délky $a = \frac{1}{2}$ a vedlejší poloosou délky $b = 1$, tedy



$$\begin{aligned}
\iiint_M x^2 dx dy dz &= \int \int_{M_{xy} - \sqrt{1-4x^2-y^2}}^0 x^2 dz dxdy = \int_{M_{xy}} x^2 \sqrt{1-4x^2-y^2} dxdy = \\
\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ \det J_\Phi = \frac{1}{2}r \end{array} \right\} &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^1 \frac{1}{4} (r \cos \varphi)^2 \sqrt{1-r^2} r dr d\varphi \left\{ \begin{array}{l} u = 1-r^2, du = -2r dr \\ \cos^2 \varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2} \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{4} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \int_1^0 \left[\frac{2}{3} \sqrt{u^3} - \frac{2}{5} \sqrt{u^5} \right]_1^0 \frac{1+\cos 2\varphi}{2} du d\varphi = \frac{2\pi}{15}.
\end{aligned}$$

7.3 Těžiště tělesa

Příklad 15: Pro těleso $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, které je dáno podmínkami P a má hustotu $\varrho = \varrho(x, y, z)$ vypočítejte jeho těžiště:

- a) $P: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 2, x + y \geq 0, \varrho(x, y, z) = x.$
- b) $P:$ Průmětem tělesa Ω do roviny xy je trojúhelník ABC s vrcholy $A[0, 0], B[1, 0], C[1, 2]$ a zároveň $0 \leq z \leq xy, \varrho(x, y, z) = z.$

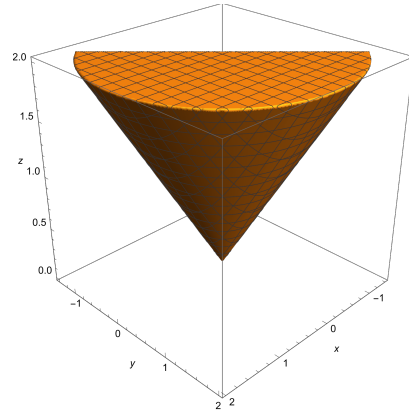
Řešení:

- a) Pro **těžiště** $T = [x_T, y_T, z_T]$ tělesa $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ platí:

$$x_T = \frac{M_{yz}}{m}, \quad y_T = \frac{M_{xz}}{m}, \quad z_T = \frac{M_{xy}}{m},$$

kde m je hmotnost tělesa a M_{yz}, M_{xz}, M_{xy} jsou statické momenty tělesa Ω vzhledem k rovinám yz, xz, xy .

Postupně vypočteme hmotnost a statické momenty tělesa Ω .



$$m = \int \int_{\Omega_{xy}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 1 dz dy dx = \int_{\Omega_{xy}} [2 - \sqrt{x^2 + y^2}] dy dx =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ \det J_\Phi = r \end{array} \right\} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^2 [2 - r] r dr d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[r^2 - \frac{r^3}{3} \right]_0^2 d\varphi = \frac{4\pi}{3}.$$

$$\begin{aligned}
M_{yz} &= \int_{\Omega_{xy}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 x \, dz dy dx = \int_{\Omega_{xy}} x (2 - \sqrt{x^2 + y^2}) \, dy dx = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ \det J_{\Phi} = r \end{array} \right\} \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^2 r \cos \varphi [2 - r] r \, dr d\varphi = [\sin \varphi]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \left[\frac{2r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 d\varphi = \frac{4\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{xy} &= \int_{\Omega_{xy}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 z \, dz dy dx = \int_{\Omega_{xy}} \frac{1}{2} [z^2]^2 \sqrt{x^2+y^2} \, dy dx = \left\{ \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \\ \det J_{\Phi} = r \end{array} \right\} \\
&= \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^2 [4 - r^2] r \, dr d\varphi = \frac{\pi}{2} \left[\frac{4r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^2 d\varphi = 2\pi.
\end{aligned}$$

Rovnost $M_{yz} = M_{xz}$ plyne ze symetrie tělesa. Pro těžiště T dostáváme $x_T = \frac{\frac{4\sqrt{2}}{3}}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} = y_T$, $z_t = \frac{2\pi}{\frac{4\pi}{3}} = \frac{3}{2}$. Tudíž $T = [\frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{3}{2}]$.

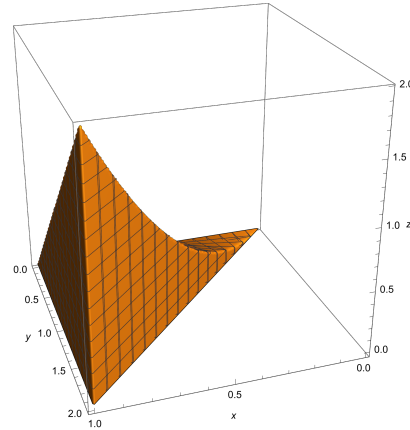
- b) Souřadnice bodů $[x, y]$ trojúhelníka ABC splňují nerovnosti

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 2x.$$

Hmotnost m tělesa Ω s hustotou

$\varrho(x, y, z) = z$ je tedy

$$m = \int_0^1 \int_0^{2x} \int_0^{xy} z \, dz dy dx.$$



$$m = \int_0^1 \int_0^{2x} \int_0^{xy} z \, dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} \frac{(xy)^2}{2} \, dy dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{2x} dx = \left[\frac{8x^6}{6 \cdot 6} \right]_0^1 = \frac{2}{9}.$$

$$M_{yz} = \int_0^1 \int_0^{2x} \int_0^{xy} xz \, dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} x \frac{(xy)^2}{2} \, dy dx = \int_0^1 \frac{x^3}{2} \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^{2x} dx = \left[\frac{8x^7}{6 \cdot 7} \right]_0^1 = \frac{4}{21}.$$

$$M_{xz} = \int_0^1 \int_0^{2x} \int_0^{xy} yz \, dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} y \frac{(xy)^2}{2} \, dy dx = \int_0^1 \frac{x^2}{2} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^{2x} dx = \left[\frac{16x^7}{8 \cdot 7} \right]_0^1 = \frac{2}{7}.$$

$$M_{xy} = \int_0^1 \int_0^{2x} \int_0^{xy} z^2 \, dz dy dx = \int_0^1 \int_0^{2x} x \frac{(xy)^3}{3} \, dy dx = \int_0^1 \frac{x^3}{3} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^{2x} dx = \left[\frac{4x^8}{3 \cdot 8} \right]_0^1 = \frac{1}{6}.$$

Pro těžiště tělesa Ω platí $T = [\frac{6}{7}, \frac{9}{7}, \frac{3}{4}]$.

8 Parciální diferenciální rovnice

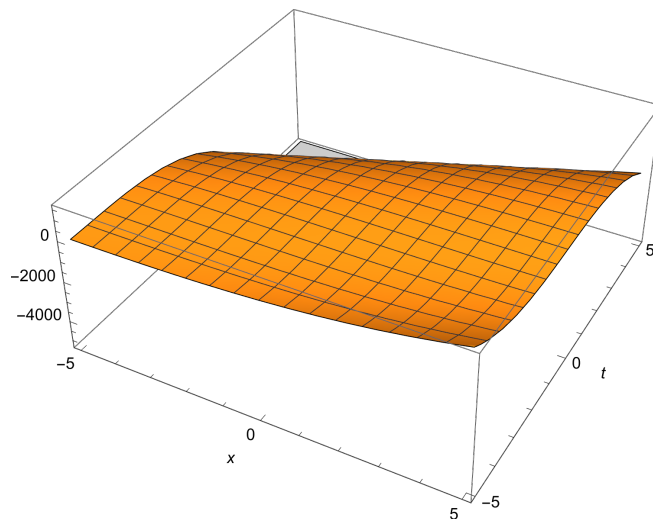
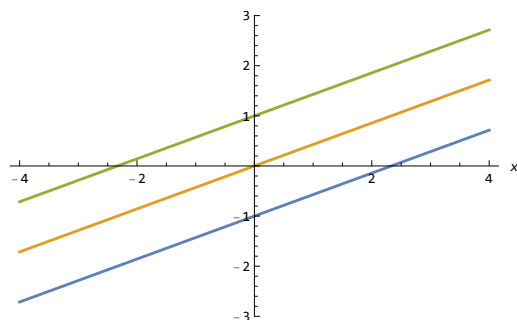
Teorie

Příklad 16: Řešte následující **parciální diferenciální rovnici** prvního řádu s počáteční podmínkou. Nakreslete **charakteristiky** a načrtněte řešení.

- a) $7u_x + 3u_t = 0$, $u(x, 0) = (x - 5)^3$.
 b) $(1 + x^2)u_x + 2txu_t = 0$, $u(0, t) = e^{-t^2}$.
 c) $-xu_x + tu_t = 0$, $u(x, 2) = x^2$.
 d) $x^2u_x + u_t = 0$, $u(x, 0) = \sin x$.

Řešení:

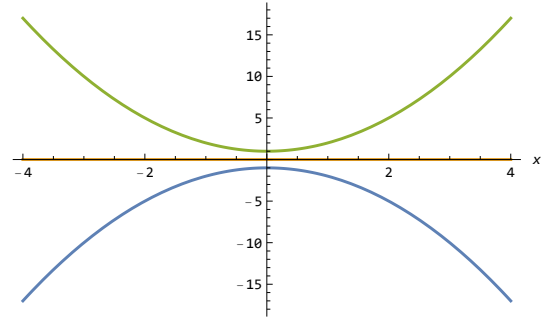
- a) Na levou stranu rovnice pohlížíme jako na skalární součin vektorů $\vec{h} = (7, 3)$ a $\nabla u = (u_x, u_t)$, tudíž $(7, 3) \cdot (u_x, u_t) = 0$. Tento skalární součin představuje derivaci funkce u podle vektoru $\vec{h}$ v libovolném bodě $[x, t]$. Neboli funkce u je konstantní ve směru $\vec{h}$. Přímký se směrovým vektorem $\vec{h}$ jsou charakteristiky, jejichž rovnice mají tvar $7t - 3x = C, C \in \mathbb{R}$. Hodnota funkce u v bodech $[x, t]$ ležících na charakteristice je konstantní a proto platí $u(x, t) = g(C) = g(7t - 3x)$, kde g je diferencovatelná funkce jedné reálné proměnné. Její hodnotu určíme z počáteční podmínky $u(x, 0) = (x - 5)^3$, tedy $u(x, 0) = g(-3x) = (x - 5)^3$. Položíme $w = -3x$, potom $x = \frac{-w}{3}$ a odtud $g(w) = \left(\frac{-w}{3} - 5\right)^3$. Pro řešení rovnice tedy platí



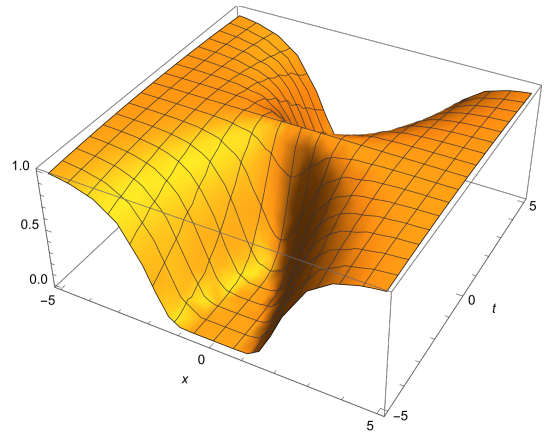
$$u(x, t) = \left(\frac{-7t + 3x}{3} - 5 \right)^3.$$

- b) Nyní $\vec{h} = (1 + x^2, 2tx)$ a pro diferenciál funkce u platí $du = u_x dx + u_t dt = \frac{\partial u}{\partial \vec{h}} = (1 + x^2)u_x + 2txu_t = 0$. Funkce u je konstantní podél charakteristik (křivek), které mají tečný vektor $\vec{h} = (dx, dt)$. Tyto křivky získáme řešením obyčejné diferenciální rovnice $\frac{dt}{dx} = \frac{2tx}{1+x^2}$. Tedy $\underbrace{(1+x^2)}_{dx} u_x + \underbrace{2tx}_{dt} u_t = 0$, pak

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} &= \frac{2tx}{1+x^2} \\ \frac{dt}{t} &= \frac{2x}{1+x^2} dx \\ \int \frac{1}{t} dt &= \int \frac{2x}{1+x^2} dx \quad (v = 1+x^2) \\ \ln |t| &= \ln |1+x^2| + \ln \tilde{C}, \quad (\tilde{C} > 0) \\ t &= (1+x^2) \cdot C, \quad (C \in \mathbb{R}) \\ C &= \frac{t}{1+x^2}.\end{aligned}$$



Hodnota funkce u v bodech $[x, t]$ ležících na charakteristice je konstantní a proto platí $u(x, t) = g(C) = g(\frac{t}{1+x^2})$, kde g je diferencovatelná funkce jedné reálné proměnné. Z počáteční podmínky $u(0, t) = e^{-t^2}$ plyne $u(0, t) = g(t) = e^{-t^2}$. Pro řešení rovnice tedy platí



$$u(x, t) = g\left(\frac{t}{1+x^2}\right) = e^{-\left(\frac{t}{1+x^2}\right)^2}.$$

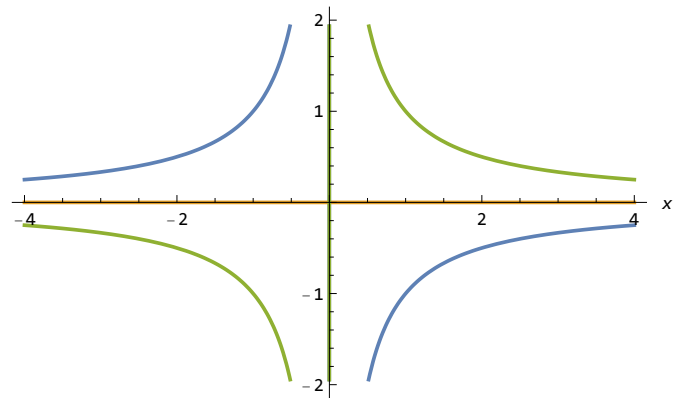
c) Položíme $\underbrace{-x}_{dx} u_x + \underbrace{t}_{dt} u_t = 0$, a řešíme ODR

$$\begin{aligned}\frac{dt}{dx} &= \frac{t}{-x} \\ \frac{1}{t} dt &= \frac{1}{x} dx \\ \int \frac{1}{t} dt &= - \int \frac{1}{x} dx\end{aligned}$$

$$\ln |t| = -\ln |x| + \ln \tilde{C}, \quad (\tilde{C} > 0)$$

$$t = \frac{C}{x}, \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$C = tx.$$

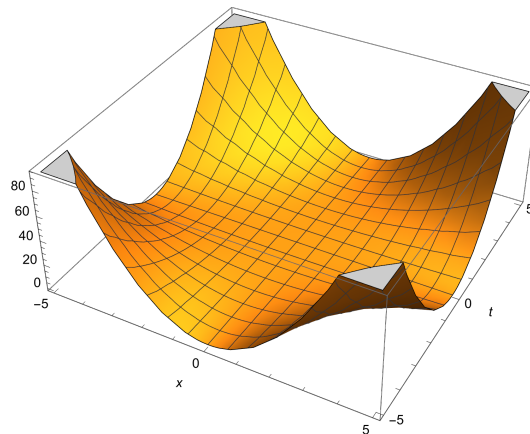


Na charakteristikách platí

$$u(x, t) = g(C) = g(tx),$$

kde g je diferencovatelná funkce jedné reálné proměnné. Z počáteční podmínky $u(x, 2) = x^2$ plyne $u(x, 2) = g(2x) = x^2$. Položíme $w = 2x$, potom $x = \frac{w}{2}$ a odtud $g(w) = \left(\frac{w}{2}\right)^2$. Pro řešení rovnice platí

$$u(x, t) = g(tx) = \frac{1}{4}(tx)^2.$$



d) $x^2 u_x + u_t = 0$, $\underbrace{x^2}_{dx} u_x + \underbrace{1}_{dt} u_t = 0$.

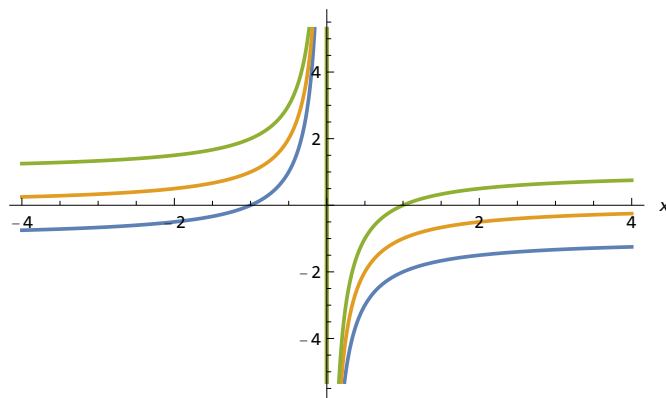
$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x^2}$$

$$1 dt = \frac{1}{x^2} dx$$

$$\int 1 dt = \int \frac{1}{x^2} dx$$

$$t = -\frac{1}{x} + C, \quad (C \in \mathbb{R})$$

$$t + \frac{1}{x} = C.$$



Na charakteristikách platí $u(x, t) = g(C) = g(t + \frac{1}{x})$. Z počáteční podmínky $u(x, 0) = \sin x$ plyne $u(x, 0) = g(\frac{1}{x}) = \sin x$. Položíme $w = \frac{1}{x}$, potom $x = \frac{1}{w}$ a odtud $g(w) = \sin \frac{1}{w}$. Pro řešení rovnice dostaneme

$$u(x, t) = g(t + \frac{1}{x}) = \sin \frac{1}{t + \frac{1}{x}} = \sin \frac{x}{xt + 1}.$$

