

Sbírka příkladů k M2E a SM2E

Petr Tomiczek

Obsah

1	Diferenciální rovnice 1. řádu	3
1.1	Separace proměnných	3
1.2	Přechod k separaci	4
1.3	Variace konstant	6
1.4	Bernoulliova rovnice	7
2	Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu	8
2.1	Systémy funkcí	8
2.2	Eulerova rovnice	9
2.3	Rovnice s konstantními koeficienty	10
2.4	Metoda snižování řádu	11
2.5	Nehomogenní rovnice	12
2.6	Metoda odhadu tvaru partikulárního řešení	14
2.7	Okrajové úlohy	17
2.8	Úlohy na vlastní čísla a vlastní funkce	18
3	Soustavy lineárních diferenciálních rovnic	20
3.1	Soustavy homogenních diferenciálních rovnic	20
3.2	Soustavy nehomogenních diferenciálních rovnic	22
4	Laplaceova transformace	26
4.1	Diferenciální rovnice	27
4.1.1	Konvoluce	28
4.2	Soustavy rovnic	29
5	Posloupnosti a řady funkcí	30
5.1	Posloupnosti funkcí	30
5.2	Funkční řady	31
5.3	Mocniné řady	33
6	Taylorova metoda pro řešení počátečních úloh	37
7	Fourierovy řady	39

1 Diferenciální rovnice 1. řádu

1.1 Separace proměnných

Příklad 1: Najděte obecné řešení (obecný integrál) diferenciální rovnice

$$y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y.$$

Separací proměnných převedeme rovnici na tvar

Teorie

$$\frac{dy}{\sin y} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \Rightarrow \frac{\cos y}{\sin y} dy = \frac{\sin x}{\cos x} dx$$

a substitucemi $u = \sin y$, $v = \cos x$ dostaneme po integrování

$$\ln |u| = -\ln |v| + \ln C, \quad \text{neboli} \quad \sin y = \frac{C}{\cos x} \quad (\text{obecný integrál}).$$

Příklad 2: Najděte obecné řešení rovnice $yy'\sqrt{x} = 1 + y^2$.

Separací proměnných převedeme rovnici na tvar

$$\frac{y dy}{1 + y^2} = \frac{dx}{\sqrt{x}} \Rightarrow \int \frac{y}{1 + y^2} dy = \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx \quad \text{a substitucí } u = 1 + y^2$$

dostaneme

$$\frac{1}{2} \ln |u| = 2\sqrt{x} + \tilde{C} \Rightarrow \ln |1 + y^2| = 4\sqrt{x} + 2\tilde{C} \Rightarrow y^2 = Ce^{4\sqrt{x}} - 1.$$

$$3. (xy^2 + x) dx + (y - x^2y) dy = 0 \quad [1 + y^2 = C(1 - x^2)]$$

$$4. xyy' = 1 - x^2 \quad [x^2 + y^2 = \ln Cx^2]$$

$$5. y' \operatorname{tg} x - y = a \quad [y = C \sin x - a]$$

$$6. xy dx + (x + 1)dy = 0 \quad [y = C(x + 1)e^{-x}]$$

$$7. \sqrt{y^2 + 1} dx = xydy \quad [\ln |x| = C + \sqrt{y^2 + 1}; x = 0]$$

$$8. e^y(1 + x^2)dy - 2x(1 + e^y) dx = 0 \quad [1 + e^y = C(1 + x^2)]$$

$$9. (x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, y(0) = 1 \quad [y\{\ln(1 - x^2) + 1\} = 1]$$

$$10. y' \sin x = y \ln y, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e \quad [y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}]$$

$$11. \sin y \cos x dy = \cos y \sin x dx, y(0) = \frac{\pi}{4} \quad [\cos x = \sqrt{2} \cos y]$$

$$12. y' \operatorname{cotg} x + y = 2, y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0 \quad [y = 2 - 4 \cos x]$$

Řešení pomocí [WolframAlpha](#)

1.2 Rovnice umožňující přechod k separaci proměnných.

Typ s přímkou

Příklad 13: Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2(x+y)}.$$

Substitucí $x + y = u$, $1 + y' = u'$ převedeme rovnici na tvar

$$u' - 1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2u} \Rightarrow \frac{du}{dx} = \frac{1-u}{2u}.$$

Teorie

Separaci proměnných a integrováním dostaneme

$$\int \frac{2u}{1-u} du = \int 1 dx, \quad \text{neboli} \quad -2u - 2 \ln |1-u| = x - C$$

a přejdeme k původním proměnným $3x + 2y + 2 \ln |1-x-y| = C$.

Příklad 14: Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$(x + y + 2) dx + (2x + 2y - 1) dy = 0.$$

Substitucí $x + y = u$, $dx + dy = du$ převedeme rovnici na tvar

$$(u + 2) dx + (2u - 1)(du - dx) = 0 \Rightarrow (3 - u) dx + (2u - 1) du = 0.$$

Separaci proměnných a integrováním dostaneme

$$\int \frac{2u-1}{3-u} du + \int 1 dx = -C, \quad \text{neboli} \quad -2u - 5 \ln |u-3| + x = -C$$

a přejdeme k původním proměnným $x + 2y + 5 \ln |x + y - 3| = C$.

$$15. y' - y = 2x - 3 \quad [2x + y - 1 = Ce^x]$$

$$16. y' = \sin(x - y) \quad \left[x + C = \frac{1 + \sin(x-y)}{\cos(x-y)} \right]$$

$$17. y' = \sqrt{4x + 2y - 1} \quad [\sqrt{4x + 2y - 1} - 2 \ln(\sqrt{4x + 2y - 1} + 2) = x + C]$$

$$18. y' = \cos(x - y - 1) \quad \left[y = x - 1 - 2 \operatorname{arccotg}\left(\frac{1}{C-x}\right) + 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \right]$$

$$19. y' \sqrt{1 + x + y} = x + y - 1 \quad \left[x + C = 2u + \frac{2}{3} \ln |u - 1| - \frac{8}{3} \ln(u + 2) \right. \\ \left. [u = \sqrt{1 + x + y}] \right]$$

WolframAlpha

Homogenní typ

Příklad 20: Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{x^2 + 2xy}{xy}.$$

Teorie

Substitucí $y = ux$, $y' = u'x + u$ převedeme rovnici na tvar

$$u'x + u = -\frac{x^2 + 2xux}{xux} \Rightarrow \frac{u \, du}{(u+1)^2} = -\frac{dx}{x}.$$

Integrováním dostaneme

$$\int \frac{u+1-1}{(u+1)^2} du = \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} = -\ln|x| + C$$

a přejdeme k původním proměnným

$$\ln\left|\frac{y}{x} + 1\right| + \frac{1}{\frac{y}{x} + 1} = -\ln|x| + C \Rightarrow \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C.$$

$$21. \quad y' = \frac{x+y}{x-y} \quad \left[\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln C \sqrt{x^2 + y^2} \right]$$

$$22. \quad y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2} \quad \left[x^2 + y^2 = Cy \right]$$

$$23. \quad xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \left[x^2 = C^2 + 2Cy \right]$$

$$24. \quad (3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy \quad \left[(x+y)^2 = Cx^3 e^{-\frac{x}{x+y}} \right]$$

$$25. \quad (x^2 + y^2)y' = 2xy \quad \left[y^2 - x^2 = Cy, y = 0 \right]$$

$$26. \quad xy' = y \cos \ln \frac{y}{x} \quad \left[\begin{aligned} \ln Cx &= \operatorname{cotg}\left(\frac{1}{2} \ln \frac{y}{x}\right) \\ y &= xe^{2k\pi}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \right]$$

$$27. \quad y + \sqrt{x^2 + y^2} - xy' = 0, y(1) = 0 \quad \left[y = \frac{x^2 - 1}{2} \right]$$

$$28. \quad (xy' - y) \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = x, y(1) = 0 \quad \left[\sqrt{x^2 + y^2} = e^{\frac{y}{x} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}} \right]$$

$$29. \quad (y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0, y(0) = 1 \quad \left[y^3 = y^2 - x^2 \right]$$

$$30. \quad y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, y(1) = 1 \quad \left[y = -x \right]$$

WolframAlpha

1.3 Variace konstant

Teorie

Příklad 31: Metodou variace konstanty řešte diferenciální rovnici

$$y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x.$$

1.krok - Nejdříve vyřešíme homogenní rovnici metodou separace proměnných

$$y' \cos^2 x + y = 0 \Rightarrow \ln |y| + \operatorname{tg} x = \ln \tilde{C} \Rightarrow y = Ce^{-\operatorname{tg} x}.$$

2.krok - Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $y = C(x)e^{-\operatorname{tg} x}$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$(C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} + C(x)e^{-\operatorname{tg} x} \frac{1}{\cos^2 x}) \cos^2 x + C(x)e^{-\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x.$$

tedy

$$C'(x)e^{-\operatorname{tg} x} \cos^2 x = \operatorname{tg} x \Rightarrow C(x) = e^{\operatorname{tg} x}(\operatorname{tg} x - 1).$$

3.krok - Obecné řešení rovnice má tvar $y = Ce^{-\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x - 1$.

Příklad 32: Metodou variace konstanty řešte $(x + 1)y' + xy = (x + 1)^2 e^x$.

1.krok - Nejdříve vyřešíme homogenní rovnici $(x + 1)y' + xy = 0$,

$$\frac{dy}{y} = \frac{-x dx}{x + 1} \Rightarrow \ln |y| = -x + \ln |x + 1| + \ln \tilde{C} \Rightarrow y = Ce^{-x}(x + 1).$$

2.krok - Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $y = C(x)e^{-x}(x + 1)$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$(x + 1)(C'(x)e^{-x}(x + 1) + C(x)(-e^{-x}(x + 1) + e^{-x})) + xC(x)e^{-x}(x + 1) = (x + 1)^2 e^x.$$

tedy

$$C'(x)e^{-x}(x + 1)^2 = (x + 1)^2 e^x \Rightarrow C(x) = \frac{e^{2x}}{2}.$$

3.krok - Obecné řešení rovnice má tvar $y = Ce^{-x}(x + 1) + \frac{e^x}{2}(x + 1)$.

33. $xy' - 2y = 2x^4$ [$y = Cx^2 + x^4$]

34. $xy' + y + 1 = 0$ [$y = \frac{C}{x} - 1$]

35. $xy' + (x + 1)y = 3x^2 e^{-x}$ [$xy = (x^3 + C)e^{-x}$]

36. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$ [$y = e^x(\ln |x| + C)$]

37. $y = x(y' - x \cos x)$ [$y = x(C + \sin x)$]

38. $(xy' - 1) \ln x = 2y$ [$y = C \ln^2 x - \ln x$]

39. $y \sin x + y' \cos x = 1$ [$y = \sin x + C \cos x$]

40. $(2e^y - x)y' = 1$ $[x = e^y + Ce^{-y}]$
41. $y' = \frac{y}{3x-y^2}$ $[x = Cy^3 + y^2]$
42. $y' = \frac{1}{x \sin y + 2 \sin 2y}$ $[x = 8 \sin^2 \frac{y}{2} + Ce^{-\cos y}]$
43. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, y(1) = 1$ $[y = -\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2}]$
44. $y' - 2xy = 1, y(0) = 0$ $[y = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt]$
45. $2\sqrt{x}y' - y = -\sin \sqrt{x} - \cos \sqrt{x}, y$ je omezená pro $\rightarrow \infty$ $[y = \cos \sqrt{x}]$
46. $2x^2y' - xy = 2x \cos x - 3 \sin x, y \rightarrow 0$ pro $x \rightarrow \infty$ $[y = \frac{\sin x}{x}]$
47. $(1 + x^2) \ln(1 + x^2)y' - 2xy = \ln(1 + x^2) - 2x \operatorname{arctg} x$ $[y = \operatorname{arctg} x]$
 $[y \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ pro $x \rightarrow -\infty]$

WolframAlpha

1.4 Bernoulliiova rovnice

Příklad 48: Převodem na lineární diferenciální rovnici vyřešte

$$x y' - y = x^2 y^{-1}.$$

Teorie

Substitucí $z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$ dostaneme

$$xy'y - y^2 = x^2 \Rightarrow xz' - 2z = 2x^2.$$

Vyřešíme lineární rovnici

1. hom. rovnice

$$xz' - 2z = 0$$

$$z_h = C x^2$$

2. part. řešení

$$x C' x^2 = 2x^2$$

$$C = \ln |x|^2$$

$$z_p = \ln x^2 \cdot x^2$$

3. obecné řešení

$$z = C x^2 + \ln(x^2) x^2 \Rightarrow$$

$$y^2 = C x^2 + \ln(x^2) x^2.$$

49. $y' + 2y = y^2 e^x$ $[y(e^x + Ce^{2x}) = 1, y = 0]$

50. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$ $[y = x^4 \ln^2 Cx, y = 0]$

51. $xy' + 2y + x^5 y^3 e^x = 0$ $[y^{-2} = x^4(2e^x + C), y = 0]$

52. $(1 + x^2)y' = xy + x^2 y^2$ $[\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}(C - \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+1}))]$

WolframAlpha

2 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

2.1 Systémy funkcí

Příklad 53: Máme rozhodnout o lineární závislosti nebo nezávislosti funkcí $1, x, x^2$ na intervalu $I = (-\infty, \infty)$.

Teorie

Budeme zkoumat, kdy $\forall x \in I$ nastane rovnost

$$c_1 1 + c_2 x + c_3 x^2 = 0.$$

Postupně pro $x = 0$ dostaneme $c_1 = 0$, pak pro $x = 1$ a $x = -1$ dostaneme $c_2 + c_3 = 0$ a $-c_2 + c_3 = 0$. Odtud plyne $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Podle definice jsou funkce $1, x, x^2$ lineárně nezávislé. Wronskián daných funkcí je

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0.$$

Tedy i podle věty 10.4 jsou funkce $1, x, x^2$ lineárně nezávislé.

Rozhodněte o lineární závislosti nebo nezávislosti následujících funkcí

54. $1, 2, x, x^2$ [závislé]
55. e^x, xe^x, x^2e^x [nezávislé]
56. $5, \cos^2 x, \sin^2 x$ [závislé]
57. $\cos x, \cos(x+1), \cos(x-2)$ [závislé]
58. $1, \arcsin x, \arccos x$ [závislé]
59. $\cos x, \sin x, \cos 2x$ [nezávislé]

Najděte Wronskián funkcí

60. $1, x$ [1]
61. e^{-x}, xe^{-x} [e^{-2x}]
62. $2, \cos x, \cos 2x$ [$-8 \sin^3 x$]
63. $4, \sin^2 x, \cos 2x$ [0]
64. $e^{-3x} \sin 2x, e^{-3x} \cos 2x$ [$-2e^{-6x}$]

WolframAlpha

2.2 Eulerova rovnice

Řešení Eulerovy rovnice $x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$, kde $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ hledáme ve tvaru $y(x) = x^\lambda$, (popř. $x^\lambda \ln x, \dots, x^\lambda \ln^{k-1} x$) $\lambda \in \mathbb{C}$.

Teorie

Příklad 65: Dosazením funkce $y(x) = x^\lambda$ do rovnice

$$x^2 y'' - 4x y' + 6y = 0$$

dostaneme $x^2 \lambda(\lambda - 1)x^{\lambda-2} - 4x \lambda x^{\lambda-1} + 6x^\lambda = 0$, tedy

$$(\lambda^2 - 5\lambda + 6)x^\lambda = 0.$$

Tato rovnost je splněna (při $x \neq 0$) pro kořeny $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, uvedeného polynomu. Funkce $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ tvoří fundamentální systém dané rovnice a její obecné řešení má tvar

$$y = C_1 x^2 + C_2 x^3.$$

Příklad 66: Podobně při řešení rovnice $x^2 y'' - 3x y' + 4y = 0$ dostaneme $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$ a fundamentální systém rovnice je tvořen funkcemi $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^2 \ln x$. Obecné řešení má tedy tvar $y = C_1 x^2 + C_2 x^2 \ln x$.

Příklad 67: Řešení rovnice $x^2 y'' + 3x y' + 2y = 0$ hledáme ve tvaru $y(x) = x^\lambda$. Po dosazení do rovnice dostaneme $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$. Do fundamentálního systému tedy patří funkce $y_1(x) = x^{-1+i}$, $y_2(x) = x^{-1-i}$ nebo $y_1(x) = x^{-1} \cos(\ln x)$, $y_2(x) = x^{-1} \sin(\ln x)$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = \frac{C_1}{x} \cos(\ln x) + \frac{C_2}{x} \sin(\ln x).$$

$$68. \quad x^2 y'' - 3x y' - y = 0 \quad \left[y = C_1 x^{2+\sqrt{5}} + C_2 x^{2-\sqrt{5}} \right]$$

$$69. \quad x^3 y''' + x^2 y'' = 0 \quad [y = C_1 + C_2 x + C_3 x \ln x]$$

$$70. \quad x^2 y'' + 5x y' + 3y = 0 \quad [y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-3}]$$

$$71. \quad x^2 y'' + 7x y' + 8y = 0 \quad [y = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-4}]$$

$$72. \quad x^3 y''' - 6y = 0 \quad [y = C_1 x^3 + C_2 \cos(\sqrt{2} \ln x) + C_3 \sin(\sqrt{2} \ln x)]$$

$$73. \quad x^2 y'' - 2x y' + 2y = 0; \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 1 \quad [y = x]$$

WolframAlpha

2.3 Rovnice s konstantními koeficienty

Příklad 74: Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$y'' - y' - 12y = 0$$

hledáme ve tvaru $y(x) = e^{\lambda x}$ (popř. $x e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x}$), pak $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$. Tedy $\lambda^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} - 12e^{\lambda x} = 0$ a číselný parametr λ je kořenem **charakteristické rovnice (charakteristického polynomu)**

$$\lambda^2 - \lambda + 12 = 0.$$

Tedy $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$, fundamentální systém rovnice je tvořen funkcemi e^{-4x} , e^{3x} a obecné řešení rovnice má tvar

$$y(x) = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{3x}.$$

Teorie

Příklad 75: Rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

má charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$. Fundamentální systém rovnice je nyní tvořen funkcemi $y_1(x) = e^{2x}$, $y_2(x) = x e^{2x}$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

Příklad 76: K rovnici $y'' + 4y = 0$ přísluší charakteristická rovnice $\lambda^2 + 4 = 0$ s kořeny $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Fundamentální systém je tvořen funkcemi $y_1(x) = e^{2ix}$, $y_2(x) = e^{-2ix}$ nebo $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 2x$. Obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x.$$

77. $y''' - y'' - y' + y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 3$ [$y = e^x(1 + x)$]

78. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y(0) = 6$, $y'(0) = 10$ [$y = 4e^x + 2e^{3x}$]

79. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$ [$y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{-3x}$]

80. $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$ [$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 x^3 + e^{-x}(C_5 + C_6 x)$]

81. $4y'' - 8y' + 5y = 0$ [$y = e^x(C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2})$]

82. $y''' - 8y = 0$ [$y = C_1 e^{2x} + e^{-x}(C_2 \cos \sqrt{3}x + C_3 \sin \sqrt{3}x)$]

83. $y^{(4)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$ [$y = (C_1 + C_2 x)e^{-x} + (C_3 \cos 2x + C_4 \sin 2x)e^{-x}$]

84. $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$ [$y = e^x \sin x$]

85. $y'' - 2y' + 3y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ [$y = e^x(\cos \sqrt{2}x + \sqrt{2} \sin \sqrt{2}x)$]

WolframAlpha

2.4 Metoda snižování řádu

Pokud známe jedno řešení $y_1(x)$ homogenní rovnice, pak další partikulární řešení hledáme ve tvaru $y(x) = y_1(x) \cdot z(x)$.

Teorie

Příklad 86: Rovnice $(\sin x - \cos x) y'' - 2 \sin x y' + (\cos x + \sin x) y = 0$ má jedno řešení $y_1 = e^x$. Pro druhé řešení $y(x) = e^x z(x)$, platí $y' = e^x(z + z')$, $y'' = e^x(z + 2z' + z'')$ a po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$(\sin x - \cos x) e^x(z + 2z' + z'') - 2 \sin x e^x(z + z') + (\cos x + \sin x) e^x z = 0 \Rightarrow$$

$$(\sin x - \cos x)(2z' + z'') - 2 \sin x z' = 0 \Rightarrow (u = z')$$

$$(\sin x - \cos x) u' - \cos x 2u = 0 \Rightarrow (\sin x - \cos x) du = \cos x 2u dx \Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{2u} du = \int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} dx; \quad \text{vypočteme integrál vpravo}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2 \cos x}{\sin x - \cos x} dx = \frac{1}{2} \int \frac{\cos x - \sin x + \cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} dx =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v = \sin x - \cos x \\ dv = (\cos x + \sin x) dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \int -1 dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{v} dv = -\frac{x}{2} + \ln |\sin x - \cos x| + C;$$

tedy $\frac{1}{2} \ln u = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \ln |\sin x - \cos x| + \hat{C} \Rightarrow u = C e^{-x} (\sin x - \cos x) (= z') \Rightarrow$

$z = C e^{-x} (-\sin x) \Rightarrow y = e^x C e^{-x} (-\sin x) = -C \sin x$ a obecné řešení má tvar

$$y = C_1 e^x + C_2 \sin x.$$

Nalezněte obecné řešení následujících rovnic, jestliže znáte partikulární řešení

87. $(1 - x^2)y'' - xy' + \frac{1}{4}y = 0; \quad y_1 = \sqrt{1+x} \quad [y = C_1\sqrt{1+x} + C_2\sqrt{1-x}]$

88. $x^2(x+1)y'' - 2y = 0; \quad y_1 = \frac{1+x}{x} \quad [y = C_1\left(\frac{1+x}{x}\right) + C_2\left(\frac{x^2+x-1}{x} - \frac{2(x+1)\ln|x+1|}{x}\right)]$

89. $xy'' + 2y' - xy = 0; \quad y_1 = \frac{e^x}{x} \quad [xy = C_1e^{-x} + C_2e^x]$

90. $y'' - 2(1 + \operatorname{tg}^2 x)y = 0; \quad y_1 = \operatorname{tg} x \quad [y = C_1 \operatorname{tg} x + C_2(1 + x \operatorname{tg} x)]$

91. $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^xy = 0; \quad y_1 = e^x - 1 \quad [y = C_1(e^x - 1) + \frac{C_2}{e^x+1}]$

92. $x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0 \quad [y = C_1x + \frac{C_2}{x} + C_3(x \ln|x| + 1)]$
 $[y_1 = x, y_2 = \frac{1}{x}]$

93. $(x^2 - 2x + 3)y''' - (x^2 + 1)y'' + 2xy' - 2y = 0 \quad [y = C_1x + C_2e^x + C_3(x^2 - 1)]$
 $[y_1 = x, y_2 = e^x]$

WolframAlpha

2.5 Nehomogenní rovnice

Teorie

Příklad 94: Metodou variace konstant vyřešíme rovnici

$$y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}.$$

1. Určíme obecné řešení homogenní rovnice $y'' + 9y = 0$ (viz metoda charakteristické rovnice, příklad (74))

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow y_h(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x.$$

2. Partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x) \cos 3x + C_2(x) \sin 3x.$$

Funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$ splňují soustavu algebraických rovnic:

$$\begin{aligned} C_1' \cos 3x + C_2' \sin 3x &= 0 \Rightarrow 3C_1' \cos 3x \sin 3x + 3C_2' \sin^2 3x = 0, \\ -3C_1' \sin 3x + 3C_2' \cos 3x &= \frac{1}{\sin 3x} \Rightarrow -3C_1' \sin 3x \cos 3x + 3C_2' \cos^2 3x = \frac{\cos 3x}{\sin 3x}. \end{aligned}$$

Odtud po sečtení rovnic dostaneme $3C_2' = \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{9} \ln |\sin 3x|$ a z první rovnice plyne $C_1' \cos 3x + \frac{\cos 3x}{3} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{x}{3}$. Partikulární řešení má tvar

$$y_p(x) = -\frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \ln |\sin 3x| \sin 3x.$$

3. Obecným řešením úlohy je funkce

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x - \frac{x}{3} \cos 3x + \frac{1}{9} \ln |\sin 3x| \sin 3x.$$

Příklad 95: Metodou variace konstant vyřešíme rovnici

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}.$$

1. Určíme obecné řešení homogenní rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$ (viz metoda charakteristické rovnice, příklad (75))

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow y_h(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$$

2. Partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x) e^{2x} + C_2(x) x e^{2x}.$$

Funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$ splňují soustavu algebraických rovnic:

$$\begin{aligned} C_1' e^{2x} + C_2' x e^{2x} &= 0 \Rightarrow C_1' + C_2' x = 0, \\ C_1' 2e^{2x} + C_2'(e^{2x} + x 2e^{2x}) &= \frac{e^{2x}}{x} \Rightarrow 2C_1' + C_2'(1 + 2x) = \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

Odečteme dvojnásobek první rovnici od druhé a dostaneme $C_2' = \frac{1}{x} \Rightarrow C_2 = \ln|x|$ a z první rovnice plyne $C_1' + \frac{1}{x}x = 0 \Rightarrow C_1 = -x$. Partikulární řešení má tvar

$$y_p(x) = -x e^{2x} + \ln|x| x e^{2x}.$$

3. Obecným řešením úlohy je funkce

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x} + \ln|x| x e^{2x}.$$

Řešte rovnice

$$96. \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \quad [y = e^x(x \ln|x| + C_1 x + C_2)]$$

$$97. \quad y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2+1} \quad [y = e^x(C_1 x + C_2 - \ln\sqrt{x^2+1} + x \operatorname{arctg} x)]$$

$$98. \quad y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x+1} \quad [y = (e^{-x} + e^{-2x}) \ln(e^x + 1) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}]$$

$$99. \quad y'' + y + \cotg^2 x = 0 \quad [y = 2 + C_1 \cos x + C_2 \sin x + \cos(x) \ln|\operatorname{tg} \frac{x}{2}|]$$

Vyřešte rovnici $y'' - y' = f(x)$, jestliže

$$100. \quad f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} \quad [y = e^x(x + C_1) - (e^x + 1) \ln(e^x + 1) + C_2]$$

$$101. \quad f(x) = e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}} \quad [y = \frac{1}{2} e^x (\arcsin(e^x) + e^x \sqrt{1 - e^{2x}} + C_1) + \frac{1}{3} \sqrt{(1 - e^{2x})^3} + C_2]$$

$$102. \quad f(x) = e^{2x} \cos(e^x) \quad [y = C_1 e^x - \cos(e^x) + C_2]$$

Řešte počáteční úlohy

$$103. \quad y'' + 4y = 2 \cos 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 4 \quad [y = \frac{1}{2}(4 + x) \sin 2x]$$

$$104. \quad y'' - 9y = 1 - x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad [y = \frac{1}{27}(e^{3x} + 2e^{-3x}) + \frac{1}{9}(x - 1)]$$

$$105. \quad y'' + y' - 2y = 2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \quad [y = e^x - 1]$$

2.6 Metoda odhadu tvaru partikulárního řešení

Příklad 106: Pomocí odhadu tvaru partikulárního řešení vyřešíme rovnici

$$y'' - 5y' = (x - 1)^2.$$

1. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 5\lambda = 0$, má kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$ a homogenní řešení má tvar

$$y_h = C_1 + C_2 e^{5x}.$$

2. Z rovnosti

$$(x - 1)^2 = e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$$

vyplývá $a = 0$, $b = 0$, $n = 2$, $m = 0 \Rightarrow k = \max\{m, n\} = 2$, $R_2(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, kde a_2, a_1, a_0 jsou konstanty. Kritické číslo $a + ib = 0$ je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, tedy $r = 1$.

Partikulární řešení nehomogenní rovnice má tedy tvar $x^r R_k(x)$, neboli

$$y_p(x) = x(a_2 x^2 + a_1 x + a_0),$$

potom $y'_p(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0 + x(2a_2 x + a_1) = 3a_2 x^2 + 2a_1 x + a_0$,
 $y''_p(x) = 6a_2 x + 2a_1$. Po dosazení y'_p, y''_p do dané rovnice dostaneme:

$$\begin{aligned} 6a_2 x + 2a_1 - 5(3a_2 x^2 + 2a_1 x + a_0) &= (x - 1)^2, \\ -15a_2 x^2 + (6a_2 - 10a_1)x + 2a_1 - 5a_0 &= x^2 - 2x + 1, \\ \Rightarrow a_2 = \frac{-1}{15}, a_1 = \frac{4}{25}, a_0 = \frac{-17}{125}, \end{aligned}$$

a partikulárním řešením je funkce $y_p(x) = x\left(\frac{-1}{15}x^2 + \frac{4}{25}x + \frac{-17}{125}\right)$.

3. Obecné řešení má tvar $y(x) = C_1 + C_2 x e^{5x} + x\left(\frac{-1}{15}x^2 + \frac{4}{25}x + \frac{-17}{125}\right)$.

Příklad 107: Pomocí metody odhadu vyřešíme rovnici

$$y'' - y = e^x - x.$$

1. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 1 = 0$, má kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ a homogenní řešení má tvar

$$y_h = C_1 e^x + C_2 e^{-x}.$$

2. Zadanou úlohu rozdělíme na dvě - s pravou stranou: a) e^x a b) $-x$.

- a) Z rovnosti

$$e^x = e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$$

vyplývá $a = 1$, $b = 0$, $n = 0$, $m = 0 \Rightarrow k = 0$, $R_0(x) = a_0$. Kritické číslo $a + ib = 1$ je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, tedy $r = 1$.

Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $y_p(x) = x e^x a_0$, potom $y_p'(x) = a_0(1+x)e^x$, $y_p''(x) = a_0(2+x)e^x$. Po dosazení dostaneme: $a_0(2+x)e^x - a_0 x e^x = e^x \Rightarrow a_0 = \frac{1}{2}$ a řešením je funkce

$$y_{p_a}(x) = \frac{1}{2} x e^x.$$

b) Z rovnosti

$$-x = e^{ax}(P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx)$$

vyplývá $a = 0$, $b = 0$, $n = 1$, $m = 0 \Rightarrow k = 1$, $R_1(x) = a_1 x + a_0$. Kritické číslo $a + ib = 0$ není kořenem charakteristické rovnice, tedy $r = 0$.

Partikulární řešení má nyní tvar $y_p(x) = a_1 x + a_0$, potom $y_p'(x) = a_1$, $y_p''(x) = 0$. Po dosazení dostaneme: $-(a_1 x + a_0) = -x \Rightarrow a_1 = 1$, $a_0 = 0$ a řešením je funkce

$$y_{p_b}(x) = x.$$

Partikulární řešení má tudíž tvar $y_p(x) = y_{p_a}(x) + y_{p_b}(x) = \frac{1}{2} x e^x + x$.

3. Obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + \frac{1}{2} x e^x + x.$$

Metodou odhadu řešte rovnice

108. $y'' + y = 4x e^x$ [$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + (2x - 2)e^x$]
109. $y'' - y = 2e^x - x^2$ [$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + x e^x + x^2 + 2$]
110. $y'' + y' - 2y = 3x e^x$ [$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} + (\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3})e^x$]
111. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$ [$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{\sin x}{10} + \frac{3 \cos x}{10}$]
112. $y'' + y = 4 \sin x$ [$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x - 2x \cos x$]
113. $y'' - 3y' + 2y = x \cos x$ [$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + (\frac{x}{10} - \frac{12}{100}) \cos x - (\frac{3x}{10} + \frac{34}{100}) \sin x$]
114. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + x e^{-x}$ [$y = C_1 e^x + C_2 e^{-4x} - \frac{x}{5} e^{-4x} - (\frac{x}{6} + \frac{1}{36}) e^{-x}$]
115. $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$ [$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x} + e^{3x}(\frac{6}{37} \sin x - \frac{1}{37} \cos x)$]
116. $y'' - 2y' + y = 6x e^x$ [$y = (C_1 + C_2 x + x^3) e^x$]
117. $y'' + y = x \sin x$ [$y = (C_1 - \frac{x^2}{4}) \cos x + (C_2 + \frac{x}{4}) \sin x$]

Řešte rovnice s počáteční podmínkou

$$118. y'' + 9y = 6e^{3x}; y(0) = y'(0) = 0 \quad [y = -\frac{1}{3}(\cos 3x + \sin 3x - e^{3x})]$$

$$119. y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x; y(0) = 2, y'(0) = 3 \quad [y = e^{2x}(\cos x - 2 \sin x) + (x+1)^2e^x]$$

$$120. y'' + 6y' + 9y = 10 \sin x; y(0) = y'(0) = 0 \quad [y = (x + \frac{3}{5})e^{-3x} + \frac{1}{5}(4 \sin x - 3 \cos x)]$$

$$121. y'' + 4y = \sin x; y(0) = y'(0) = 1 \quad [y = \cos 2x + \frac{1}{3}(\sin 2x + \sin x)]$$

$$122. y'' + y = 2 \cos x; y(0) = 1, y'(0) = 0 \quad [y = \cos x + x \sin x]$$

Odhadněte partikulární řešení následujících rovnic

$$123. y'' - 7y' = (x - 1)^2 \quad [A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x]$$

$$124. y'' + 7x' = e^{-7x} \quad [Axe^{-7x}]$$

$$125. y'' - 8y' + 16y = (10 - x)e^{4x} \quad [(A_1x^3 + A_2x^2)e^{4x}]$$

$$126. y'' + 25y = \cos 5x \quad [x(A \cos 5x + B \sin 5x)]$$

$$127. y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x) \quad [(A \cos 2x + B \sin 2x)e^{2x}]$$

$$128. y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x) \quad [x(A \cos 2x + B \sin 2x)e^{2x}]$$

$$129. y^{(4)} - y''' = 4 \quad [Ax^3]$$

$$130. y''' + 2y'' + y' = (2x + 1) \sin x + (x^2 - 4x) \cos x \quad \begin{aligned} & [(Ax^2 + Bx + C) \cos x +] \\ & [(Dx^2 + Ex + F) \sin x] \end{aligned}$$

$$131. y''' - y' = e^x \sin x + 2x^2 \quad \begin{aligned} & [e^x(A \cos x + B \sin x) +] \\ & [+x(Cx^2 + Dx + E)] \end{aligned}$$

$$132. y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = e^x(x \cos x + \sin x) \quad \begin{aligned} & [x^2e^x\{(Ax + B) \cos x +] \\ & [(Cx + D) \sin x\}] \end{aligned}$$

$$133. y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 3 \cos 2x + 1 \quad \begin{aligned} & [x^2(A \cos 2x + B \sin 2x) + C] \\ & [y = 3 \cos 2x + 1] \end{aligned}$$

WolframAlpha

2.7 Okrajové úlohy

Příklad 134: Pomocí charakteristické rovnice a dosazením okrajových podmínek vyřešíme smíšenou okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} y'' - 2y' - 8y &= 0, & x \in (0, 1), \\ y(0) &= 1, & y'(1) = 0. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = -2$ a obecným řešením úlohy je funkce $y(x) = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-2x}$. Z okrajových podmínek dostaneme

$$\left. \begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2, \\ 0 &= 4C_1 e^4 - 2C_2 e^{-2}, \end{aligned} \right\} \begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{1+2e^6}, \\ C_2 &= \frac{2e^6}{1+2e^6}. \end{aligned}$$

Řešením okrajové úlohy je funkce $y(x) = \frac{1}{1+2e^6} e^{4x} + \frac{2e^6}{1+2e^6} e^{-2x}$.

Řešte následující okrajové úlohy

135. $y'' - y = 0; y(0) = 0, y(2\pi) = 1$ [$y = \frac{\sinh x}{\sinh 2\pi}$]

136. $y'' + y = 0; y(0) = 0, y(2\pi) = 1$ [nemá řešení]

137. $y'' - k^2 y = 0; y(0) = v_1, y(x_0) = v_2$ [$y = \frac{1}{\sinh kx_0} (v_1 \sinh k(x_0 - x) + v_2 \sinh kx)$]

138. $y'' - \alpha^2 y = 0; y(0) = v, y'(x_0) = 0$ [$y = v \frac{\cosh(x_0 - x)}{\cosh \alpha x_0}$]

139. $y'' - \alpha^2 s y = 0; y(0) = \frac{1}{s}, y'(x_0) = 0$ [$s < 0; y = \frac{\cos \alpha \sqrt{-s}(x_0 - x)}{s \cos \alpha \sqrt{-s} x_0}$ pro $x_0 \neq \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha \sqrt{-s}}$]
[pro $x_0 = \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha \sqrt{-s}}$ nemá řešení; $s > 0; y = \frac{\cosh \alpha \sqrt{s}(x_0 - x)}{s \cosh \alpha \sqrt{s} x_0}; k = 1, 2, 3, \dots$]

140. $y'' - \lambda^2 y = 0; \lambda \neq 0, y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{\lambda}$ [$y = \frac{\sinh \lambda x}{\lambda \sinh \lambda}$]

141. $y'' - \lambda^2 y = 0; \lambda \neq 0, y(0) = 0, y'(1) = \frac{1}{\lambda}$ [$y = \frac{\sinh \lambda x}{\lambda^2 \cosh \lambda}$]

142. $y'' - \lambda^2 y = 0; \lambda \neq 0, y'(0) = 0, y(1) = \frac{1}{\lambda}$ [$y = \frac{\cosh \lambda x}{\lambda \cosh \lambda}$]

143. $xy'' + y' = 0; y(1) = \alpha y'(1); y(x)$ je omezená pro $x \rightarrow \infty$ [$y = 0$]

144. $y^{(4)} - \lambda^4 y = 0; y(0) = y''(0) = 0, y(\pi) = y''(\pi) = 0$ [$y = C \sin kx$ pro $\lambda = k$]
[$k = 1, 2, 3, \dots$ $y = 0$ pro ostatní λ]

2.8 Úlohy na vlastní čísla a vlastní funkce

Teorie

Příklad 145: Určíme vlastní čísla a vlastní funkce okrajové úlohy

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(\pi) = 0.$$

Řešení hledáme ve tvaru $y(x) = e^{kx}$, potom charakteristická rovnice má tvar $k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{-\lambda}$.

- Pro $\lambda < 0$ je $k_1 = \sqrt{-\lambda}$, $k_2 = -\sqrt{-\lambda}$ a obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x} \Rightarrow y'(x) = \sqrt{-\lambda} C_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda} C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}.$$

Z okrajových podmínek dostáváme soustavu rovnic pro neznámé konstanty C_1, C_2

$$\left. \begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2, \\ 0 &= \sqrt{-\lambda} C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\pi} - \sqrt{-\lambda} C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}, \end{aligned} \right\} C_1 = 0, C_2 = 0 \Rightarrow y = 0.$$

- Pro $\lambda = 0$ má obecné řešení tvar $y(x) = C_1 + C_2 x \Rightarrow y'(x) = C_2$ a z okrajových podmínek dostaneme

$$C_1 \in \mathbb{R}, C_2 = 0 \Rightarrow y = C_1.$$

- Pro $\lambda > 0$ má obecné řešení tvar

$$y(x) = C_1 \cos \sqrt{\lambda}x + C_2 \sin \sqrt{\lambda}x \Rightarrow y'(x) = -\sqrt{\lambda} C_1 \sin \sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda} C_2 \cos \sqrt{\lambda}x.$$

Z okrajových podmínek plyne

$$\left. \begin{aligned} 0 &= C_2, \\ 0 &= -C_1 \sin \sqrt{\lambda}\pi, \end{aligned} \right\} \sqrt{\lambda}\pi = n\pi, n \in \mathbb{N}.$$

Dostáváme tak **posloupnost vlastních čísel**

$$\{1, 4, 9, 16, \dots\}$$

a **posloupnost jim odpovídajících vlastních funkcí** je

$$\{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots\}.$$

Najděte vlastní čísla a vlastní funkce úlohy $y'' + \lambda y = 0$, je-li

$$146. x \in \langle 0, \pi \rangle, y(0) = y'(\pi) = 0 \quad \left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2}{4}, y_K = \sin \frac{2K-1}{2}x, K \in \mathbb{N} \right]$$

147. $x \in \langle 0, \pi \rangle, y'(0) = y(\pi) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2}{4}, y_K = \cos \frac{2K-1}{2}x, K \in N \right]$
148. $x \in \langle 1, 2 \rangle, y(1) = y(2) = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2, y_K = \sin K\pi x, K \in N \right]$
149. $x \in \langle 1, 2 \rangle, y(1) = y'(2) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4}, y_K = \cos \frac{2K-1}{2}\pi x, K \in N \right]$
150. $x \in \langle 1, 2 \rangle, y'(1) = y(2) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4}, y_K = \sin \frac{2k-1}{2}\pi x, K \in N \right]$
151. $x \in \langle 1, 2 \rangle, y'(1) = y'(2) = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2, y_K = \cos K\pi x; K = 0, 1, 2, \dots \right]$
152. $x \in \langle a, b \rangle, y(a) = y(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{(b-a)^2}, y_K = \sin \frac{K\pi(x-a)}{b-a}, K \in N \right]$
153. $x \in \langle a, b \rangle, y(a) = y'(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}, y_K = \sin \frac{(2K-1)(x-a)\pi}{2(b-a)}, K \in N \right]$
154. $x \in \langle a, b \rangle, y'(a) = y(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}, y_K = \cos \frac{(2K-1)(x-a)\pi}{2(b-a)}, K \in N \right]$

Najděte vlastní čísla a vlastní funkce následujících okrajových úloh

155. $y'' + 2y' + \lambda y = 0; x \in \langle 0, l \rangle, y(0) = y(l) = 0$ $\left[\lambda_K = 1 + \frac{K^2\pi^2}{l^2} \right]$
 $\left[y_K = e^{-x} \sin \frac{K\pi x}{l}, K \in N \right]$
156. $x^2 y'' + x y' + \lambda y = 0; x \in \langle 1, l \rangle, y(1) = y(l) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{\ln^2 l}, y_K = \sin \frac{K\pi \ln x}{\ln l} \right]$
157. $y'' + (\lambda + 1)y = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2 - 1, K \in N \right]$
 $x \in \langle 0, 1 \rangle, y(0) = y'(0) = 0, y(1) - y'(1) = 0$ $\left[y_K = \sin(\operatorname{arctg}(K\pi) + K\pi x) \right]$
158. $y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0; y(l) = 0, y$ je omezená pro $x \rightarrow 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{l^2}, y_K = \frac{1}{x} \sin \frac{K\pi x}{l} \right]$

3 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Teorie

Příklad 159: Určíme fundamentální matici a obecné řešení homogenní soustavy

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 + y_2 \\y_2' &= 3y_1 + 4y_2.\end{aligned}$$

Řešení homogenní úlohy hledáme ve tvaru $\vec{y}(x) = \vec{h}e^{\lambda x}$, kde \vec{h} , λ budou vlastní vektory a vlastní čísla matice soustavy

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vlastní čísla matice soustavy dostaneme z rovnice

$$\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -3 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5.$$

K vlastním číslům určíme vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1: (\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{h}_1 = (1, -1)^T,$$

$$\lambda_2 = 5: (5\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{h}_2 = (1, 3)^T.$$

Fundamentální matice má tedy tvar

$$\mathbb{Y}(x) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5x} \right) = \begin{pmatrix} e^x & e^{5x} \\ -e^x & 3e^{5x} \end{pmatrix}$$

a obecné řešení má tvar

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5x}.$$

3.1 Soustavy homogenních diferenciálních rovnic

$$160. \begin{aligned}y_1' &= y_1 - y_2 \\y_2' &= y_2 - 4y_1\end{aligned} \quad \begin{aligned}[y_1 &= C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}] \\[y_2 &= 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}]\end{aligned}$$

$$161. \begin{aligned}y_1' + y_1 - 8y_2 &= 0 \\y_2' - y_1 - y_2 &= 0\end{aligned} \quad \begin{aligned}[y_1 &= 2C_1 e^{3x} - 4C_2 e^{-3x}] \\[y_2 &= C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}]\end{aligned}$$

$$162. \begin{aligned}y_1' &= y_1 + y_2 \\y_2' &= 3y_2 - 2y_1\end{aligned} \quad \begin{aligned}[y_1 &= e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)] \\[y_2 &= e^{2x}\{(C_1 + C_2) \cos x + (C_2 - C_1) \sin x\}]\end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll}
163. \begin{cases} y_1' = y_1 - 3y_2 \\ y_2' = 3y_1 + y_2 \end{cases} & \begin{cases} [y_1 = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)] \\ [y_2 = e^x(C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x)] \end{cases} \\
164. \begin{cases} y_1' + y_1 + 5y_2 = 0 \\ y_2' - y_1 - y_2 = 0 \end{cases} & \begin{cases} [y_1 = (2C_2 - C_1) \cos 2x - (2C_1 + C_2) \sin 2x] \\ [y_2 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x] \end{cases} \\
165. \begin{cases} y_1' = 2y_1 + y_2 \\ y_2' = 4y_2 - y_1 \end{cases} & \begin{cases} [y_1 = (C_1 + C_2x)e^{3x}] \\ [y_2 = (C_1 + C_2 + C_2x)e^{3x}] \end{cases} \\
166. \begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 \\ y_2' = 4y_1 - y_2 \end{cases} & \begin{cases} [y_1 = (C_1 + C_2x)e^x] \\ [y_2 = (2C_1 - C_2 + 2C_2x)e^x] \end{cases} \\
167. \begin{cases} y_1' = y_1 + y_3 - y_2 \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' = 2y_1 - y_2 \end{cases} & \begin{cases} [y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{-x}] \\ [y_2 = C_1e^x - 3C_3e^{-x}] \\ [y_3 = C_1e^x + C_2e^{2x} - 5C_3e^{-x}] \end{cases} \\
168. \begin{cases} y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 + y_3 \\ y_3' = 4y_1 - y_2 + 4y_3 \end{cases} & \begin{cases} [y_1 = C_1e^x + C_2e^{2x} + C_3e^{5x}] \\ [y_2 = C_1e^x - 2C_2e^{2x} + C_3e^{5x}] \\ [y_3 = -C_1e^x - 3C_2e^{2x} + 3C_3e^{5x}] \end{cases} \\
169. \begin{cases} y_1' = 4y_2 - 2y_3 - 3y_1 \\ y_2' = y_3 + y_1 \\ y_3' = 6y_1 - 6y_2 + 5y_3 \end{cases} & \begin{cases} [y_1 = C_1e^x + C_3e^{-x}] \\ [y_2 = C_1e^x + C_2e^{2x}] \\ [y_3 = 2C_2e^{2x} - C_3e^{-x}] \end{cases} \\
170. \begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 \\ y_3' = 3y_1 + y_3 \end{cases} & \begin{cases} [y_1 = e^x(2C_2 \sin 2x + 2C_3 \cos 2x)] \\ [y_2 = e^x(C_1 - C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)] \\ [y_3 = e^x(-C_1 - 3C_3 \cos 2x + 3C_3 \sin 2x)] \end{cases} \\
171. \begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 - y_3 \\ y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3 \\ y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3 \end{cases} & \begin{cases} [y_1 = C_1e^{2x} + (C_2 + C_3)e^{3x}] \\ [y_2 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}] \\ [y_3 = C_1e^{2x} + C_3e^{3x}] \end{cases} \\
172. \begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + y_3 \\ y_2' = y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' = 2y_3 - y_2 \end{cases} & \begin{cases} [y_1 = (C_1 + C_2x)e^x + C_3e^{2x}] \\ [y_2 = (C_1 - 2C_2 + C_2x)e^x] \\ [y_3 = (C_1 - C_2 + C_2x)e^x + C_3e^{2x}] \end{cases} \\
173. \begin{cases} y_1' = 4y_1 - y_2 \\ y_2' = 3y_1 + y_2 - y_3 \\ y_3' = y_1 + y_3 \end{cases} & \begin{cases} [y_1 = (C_1 + C_2x + C_3x^2)e^{2x}] \\ [y_2 = \{2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)x + 2C_3x^2\}e^{2x}] \\ [y_3 = \{C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_2 - 2C_3)x + C_3x^2\}e^{2x}] \end{cases}
\end{array}$$

WolframAlpha

3.2 Soustavy nehomogenních diferenciálních rovnic

Příklad 174: Řešení nehomogenní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}y_1' &= 2y_1 + y_2 + e^x \\y_2' &= 3y_1 + 4y_2.\end{aligned}$$

hledáme metodou **variace konstant**.

- Nejdříve vyřešíme homogenní soustavu (viz příklad 159). Řešení homogenní soustavy má tvar

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C} = \begin{pmatrix} e^x & e^{5x} \\ -e^x & 3e^{5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5x},$$

kde $\mathbb{Y}(x)$ je fundamentální matice soustavy a \vec{C} je vektor konstant.

- Partikulární řešení dané soustavy hledáme ve tvaru $\vec{y}_p(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C}(x)$, kde $\vec{C}(x)$ je vektor funkcí. Po dosazení do soustavy dostaneme $\mathbb{Y}'(x)\vec{C}(x) + \mathbb{Y}(x)\vec{C}'(x) = \mathbb{A}\mathbb{Y}(x)\vec{C}(x) + \vec{b}(x)$. Protože $\mathbb{Y}' = \mathbb{A}\mathbb{Y}$, tak platí

$$C_1'(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_2'(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5x} = \begin{pmatrix} e^x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Odtud vyplývá

$$\begin{aligned}C_1' e^x + C_2' e^{5x} &= e^x &\Rightarrow & 4C_2' e^{5x} = e^x &\Rightarrow & C_2 = \frac{-1}{16} e^{-4x} \\-C_1' e^x + 3C_2' e^{5x} &= 0 &\Rightarrow & -4C_1' e^x = -3e^x &\Rightarrow & C_1 = \frac{3}{4} x\end{aligned}$$

a partikulární řešení soustavy má tvar

$$y_p(x) = \frac{3}{4} x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^x.$$

- Obecným řešením nehomogenní soustavy je funkce

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_p(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{5x} + \frac{3}{4} x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^x + \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^x.$$

Příklad 175: Řešení nehomogenní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 + e^x \\y_2' &= y_1 + x^2.\end{aligned}$$

dostaneme ve třech krocích.

- 1.krok Vyřešíme homogenní soustavu (v soustavě zůstanou jen členy s funkcemi a jejich derivacemi)

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 \\y_2' &= y_1.\end{aligned}$$

Matice soustavy je $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a její vlastní čísla dostaneme z rovnice

$$\det(\lambda \mathbb{I} - \mathbb{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1.$$

K vlastním číslům určíme vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1: \quad (1 \cdot \mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -1: \quad (-1 \cdot \mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Fundamentální matice má tedy tvar

$$\mathbb{Y}(x) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} \right) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix}.$$

Označíme $\vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, pak obecné řešení homogenní soustavy má tvar

$$\vec{y}_h(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} = C_1 \vec{h}_1 e^x + C_2 \vec{h}_2 e^{-x}.$$

- 2.krok Partikulární řešení soustavy hledáme ve tvaru $\vec{y}_p(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C}(x)$, kde $\vec{C}(x) = \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix}$ je nyní vektor funkcí.

Po dosazení do soustavy dostaneme

$$\mathbb{Y}'(x)\vec{C}(x) + \mathbb{Y}(x)\vec{C}'(x) = \mathbb{A}\mathbb{Y}(x)\vec{C}(x) + \vec{b}(x), \text{ kde } \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

Protože $\mathbb{Y}'(x) = \mathbb{A}\mathbb{Y}(x)$, tak platí

$$C_1'(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2'(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} = \begin{pmatrix} e^x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Odtud vyplývá

$$\begin{aligned}C_1' e^x + C_2' e^{-x} &= e^x & \Rightarrow & & 2C_1' e^x &= e^x + x^2 & \Rightarrow & & C_1' &= \frac{1}{2}(1 + x^2 e^{-x}) \\ C_1' e^x - C_2' e^{-x} &= x^2 & \Rightarrow & & 2C_2' e^{-x} &= e^x - x^2 & \Rightarrow & & C_2' &= \frac{1}{2}(e^{2x} - x^2 e^x)\end{aligned}$$

a pomocí per partes dostaneme

$$\int x^2 e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} + \int 2x e^{-x} dx = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} = (-x^2 - 2x - 2)e^{-x}.$$

$$\text{Tudíž } C_1 = \frac{1}{2}(x + (-x^2 - 2x + 2)e^{-x}), \quad C_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x} - (x^2 - 2x + 2)e^x\right)$$

a partikulární řešení soustavy má tvar

$$\begin{aligned} y_p(x) &= \frac{1}{2}(x + (-x^2 - 2x - 2)e^{-x}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{2x} - (x^2 - 2x + 2)e^x\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x e^x + \frac{1}{4}e^x - x^2 - 2 \\ \frac{1}{2}x e^x - \frac{1}{4}e^x - 2x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

- 3.krok Obecným řešením nehomogenní soustavy je vektorová funkce

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_p(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2}x e^x + \frac{1}{4}e^x - x^2 - 2 \\ \frac{1}{2}x e^x - \frac{1}{4}e^x - 2x \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} 176. \quad y_1' &= y_2 - 5 \cos x & [y_1 &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 2 \sin x - \cos x] \\ y_2' &= 2y_1 + y_2 & [y_2 &= 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} + \sin x + 3 \cos x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 177. \quad y_1' &= 4y_1 + y_2 - e^{2x} & [y_1 &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + (x + 1)e^{2x}] \\ y_2' &= y_2 - 2y_1 & [y_2 &= -2C_1 e^{2x} - C_2 e^{3x} - 2x e^{2x}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 178. \quad y_1' &= 2y_2 - y_1 + 1 & [y_1 &= (C_1 + 2C_2 x)e^x - 3] \\ y_2' &= 3y_2 - 2y_1 & [y_2 &= (C_1 + C_2 + 2C_2 x)e^x - 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 179. \quad y_1' &= 5y_1 - 3y_2 + 2e^{3x} & [y_1 &= C_1 e^{2x} + 3C_2 e^{4x} - e^{-x} - 4e^{3x}] \\ y_2' &= y_1 + y_2 + 5e^{-x} & [y_2 &= C_1 e^{2x} + C_2 e^{4x} - 2e^{-x} - 2e^{3x}] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 180. \quad y_1' &= 2y_1 - 4y_2 & [y_1 &= 4C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - 4x e^x] \\ y_2' &= y_1 - 3y_2 + 3e^x & [y_2 &= C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - (x - 1)e^x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 181. \quad y_1' &= 2y_1 - y_2 & [y_1 &= C_1 e^{3x} + 3x^2 + 2x + C_2] \\ y_2' &= y_2 - 2y_1 + 18x & [y_2 &= -C_1 e^{3x} + 6x^2 - 2x + 2C_2 - 2] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 182. \quad y_1' &= y_1 + 2y_2 + 16x e^x & [y_1 &= 2C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - (12x + 13)e^x] \\ y_2' &= 2y_1 - 2y_2 & [y_2 &= C_1 e^{2x} - 2C_2 e^{-3x} - (8x + 6)e^x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 183. \quad y_1' &= 2y_1 - y_2 & [y_1 &= (C_1 + C_2 x - x^2)e^x] \\ y_2' &= y_1 + 2e^x & [y_2 &= \{C_1 - C_2 + (C_2 + 2)x - x^2\}e^x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 184. \quad y_1' &= y_1 - y_2 + 8x & [y_1 &= C_1 \cos 2x - C_2 \sin 2x + 2x + 2] \\ y_2' &= 5y_1 - y_2 & [y_2 &= (C_1 + 2C_2) \cos 2x + (2C_1 - C_2) \sin 2x + 10x] \end{aligned}$$

185. $y_1' = 2y_1 - y_2$ $[y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + e^x(2 \cos x - \sin x)]$
 $y_2' = 2y_2 - y_1 - 5e^x \sin x$ $[y_2 = C_1 e^x - C_2 e^{3x} + e^x(3 \cos x + \sin x)]$
186. $y_1' = y_2 + \operatorname{tg}^2 x - 1$ $[y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \operatorname{tg} x]$
 $y_2' = -y_1 + \operatorname{tg} x$ $[y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2]$
187. $y_1' = -4y_1 - 2y_2 + \frac{2}{e^x - 1}$ $[y_1 = C_1 + 2C_2 e^{-x} + 2e^{-x} \ln |e^x - 1|]$
 $y_2' = 6y_1 + 3y_2 - \frac{3}{e^x - 1}$ $[y_2 = -2C_1 - 3C_2 e^{-x} - 3e^{-x} \ln |e^x - 1|]$
188. $y_1' = y_1 - y_2 + \frac{1}{\cos x}$ $[y_1 = (C_1 + x) \cos x + (C_2 + x) \sin x + (\cos x - \sin x) \ln |\cos x|]$
 $y_2' = 2y_1 - y_2$ $[y_2 = (C_1 - C_2) \cos x + (C_1 + C_2) \sin x + 2 \cos x \ln |\cos x| + 2x \sin x]$
189. $y_1' = 2y_1 + y_2 - 2y_3 - x + 2$ $[y_1 = C_1 e^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x]$
 $y_2' = 1 - y_1$ $[y_2 = x - C_1 e^x + C_2 \cos x - C_3 \sin x]$
 $y_3' = y_1 + y_2 - y_3 - x + 1$ $[y_3 = 1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x]$

Najděte partikulární řešení následujících soustav diferenciálních rovnic

190. $y_1' = y_1 + y_2; y_1(0) = 0, y_2(0) = -1$ $[y_1 = e^{2x} - e^{3x}]$
 $y_2' = -2y_1 + 4y_2$ $[y_2 = e^{2x} - 2e^{3x}]$
191. $y_1' = 3y_1 - y_2; y_1(0) = 1, y_2(0) = 5$ $[y_1 = e^{-2x}]$
 $y_2' = 10y_1 - 4y_2$ $[y_2 = 5e^{-2x}]$
192. $y_1' = 3y_1 + 8y_2; y_1(0) = 6, y_2(0) = -2$ $[y_1 = 2(2e^x + e^{-x})]$
 $y_2' = -3y_2 - y_1$ $[y_2 = -e^x - e^{-x}]$
193. $y_1' = e^x - y_2 - 5y_1; y_1(0) = \frac{119}{900}, y_2(0) = \frac{211}{900}$ $[y_1 = \frac{4}{25}e^x - \frac{1}{36}e^{2x}]$
 $y_2' = e^{2x} + y_1 - 3y_2$ $[y_2 = \frac{1}{25}e^x + \frac{7}{36}e^{2x}]$
194. $y_1' = y_2; y_1(0) = y_2(0) = 1$ $[y_1 = \cos x + \sin x]$
 $y_2' = -y_1$ $[y_2 = \cos x - \sin x]$
195. $y_1' = 4y_1 - 4y_2; y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$ $[y_1 = -4xe^{2x}]$
 $y_2' = y_1$ $[y_2 = (1 - 2x)e^{2x}]$
196. $y_1' = y_1 + y_2 + x; y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$ $[y_1 = x^2 - x + 1 - e^{-x}]$
 $y_2' = -y_1 - 2y_2$ $[y_2 = -x^2/2 + x - 1 - e^{-x}]$
197. $y_1' = y_1 + 5y_2; y_1(0) = -2, y_2(0) = 1$ $[y_1 = (\sin x - 2 \cos x)e^{-x}]$
 $y_2' = -3y_2 - y_1$ $[y_2 = e^{-x} \cos x]$
198. $2y_1' = 6y_1 - y_2 - 6x^2 - x + 3; y_1(0) = 2, y_2(0) = 3$ $[y_1 = e^{2x} + e^{3x} + x^2 + x]$
 $y_2' = 2y_2 - 2x - 1$ $[y_2 = 2e^{2x} + x + 1]$

4 Laplaceova transformace

Laplaceovou transformací funkce $f(t) : [0, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$ je funkce $F(p)$, kde $p \in \mathbb{C}$ a $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$, píšeme $F(p) = \mathcal{L}\{f(t)\}$.

Příklad 199: Najdeme z definice obrazy funkcí $f(t) = 1$, $f(t) = e^{-at}$, $a \in \mathbb{R}$:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p}, \operatorname{Re}(p) > 0; \quad \int_0^{\infty} e^{at} e^{-pt} dt = \left[\frac{e^{(a-p)t}}{a-p} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{p-a}, \operatorname{Re}(p-a) > 0.$$

Tedy $\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{p}$, $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$.

Příklad 200: Linearity, tj. $\mathcal{L}\{\alpha f_1 + \beta f_2\} = \alpha \mathcal{L}\{f_1\} + \beta \mathcal{L}\{f_2\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, Laplaceovy transformace využijeme pro $\cosh \omega t = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2}$, platí:

$$\mathcal{L}\{\cosh at\} = \frac{1}{2} (\mathcal{L}\{e^{at}\} + \mathcal{L}\{e^{-at}\}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a} \right) = \frac{p}{p^2 - a^2},$$

Podobně pro $\sinh at = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$ a také $\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}$, $\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$, $\omega \in \mathbb{R}$ ($e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$) dostaneme:

$$\mathcal{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{p^2 - a^2}, \quad \mathcal{L}\{\cos \omega t\} = \frac{p}{p^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

Příklad 201: V Laplaceově obrazu funkce $e^{at} f(t)$ dochází k **posunutí obrazu** $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{at} f(t) e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t) e^{-(p-a)t} dt = F(p-a)$, např.:

$$\mathcal{L}\{e^{at} \cos \omega t\} = \frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}, \quad \mathcal{L}\{e^{at} \sin \omega t\} = \frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}.$$

$$\mathcal{L}\{e^{5t} \cosh 2t\} = \frac{p-5}{(p-5)^2 - 4}, \quad \mathcal{L}\{e^{2t} \sinh 3t\} = \frac{3}{(p-2)^2 - 9}.$$

Příklad 202: Pokud vynásobíme argument funkce konstantou $a > 0$, pak dojde ke **změně měřítka** $\mathcal{L}\{f(at)\} = \int_0^{\infty} f(at) e^{-pt} dt = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(\tau) e^{-\frac{p}{a}\tau} d\tau = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right)$. Jelikož $\mathcal{L}\{\sin t\} = \frac{1}{p^2+1}$, tak $\mathcal{L}\{\sin 3t\} = \frac{1}{3} \frac{1}{(\frac{p}{3})^2+1} = \frac{3}{p^2+9}$.

Příklad 203: Derivováním Laplaceova obrazu podle p dostaneme:

$$\frac{dF(p)}{dp} = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} (-t) dt \Rightarrow \mathcal{L}\{t f(t)\} = -\frac{dF(p)}{dp} \quad \text{a} \quad \mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n F(p)}{dp^n}.$$

Konkrétně $\mathcal{L}\{t \cdot 1\} = -\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p} \right) = \frac{1}{p^2}$, $\mathcal{L}\{t \cdot t\} = -\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p^2} \right) = \frac{2}{p^3}$ a $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$.

Také $\mathcal{L}\{t \cos t\} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+1}\right) = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$, $\mathcal{L}\{t \sin t\} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$.

Příklad 204: Pro **obraz derivace** funkce platí: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0+)$, neboť pomocí per partes dostaneme $\int_0^\infty f'(t)e^{-pt} dt = [f(t)e^{-pt}]_0^\infty - \int_0^\infty f(t)e^{-pt}(-p) dt = -f(0+) + pF(p)$. Podobně $\mathcal{L}\{f''(t)\} = p^2F(p) - pf(0+) - f'(0+)$. Obecně platí: $\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^nF(p) - p^{n-1}f(0+) - \dots - f^{(n-1)}(0+)$.

Nyní budeme uvažovat funkci $\varphi(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$, potom $\varphi'(t) = f(t)$, $\varphi(0) = 0$

a pro **obraz integrálu** platí: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{F(p)}{p}$, neboť $p\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau) d\tau\right\} =$

$$p\mathcal{L}\{\varphi(t)\} - \overbrace{\varphi(0+)}^0 = \mathcal{L}\{\varphi'(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} = F(p).$$

4.1 Diferenciální rovnice

Příklad 205: Pomocí Laplaceovy transformace převedeme diferenciální rovnici s počátečními podmínkami na algebraickou rovnici. Chceme vyřešit:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Označíme $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$ a zobrazíme počáteční úlohu pomocí Laplaceovy transformace, dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t) + 5y'(t) + 6y(t)\} &= \\ p^2Y(p) - py(0+) - y'(0+) + 5(pY(p) - y(0+)) + 6Y(p) &= \\ (p^2 + 5p + 6)Y(p) - p - 5 = 0 &\Rightarrow \\ Y(p) = \frac{p+5}{p^2+5p+6}. \end{aligned}$$

Rozkladem na parciální zlomky obdržíme $\frac{p+5}{p^2+5p+6} = \frac{A}{p+3} + \frac{B}{p+2} = \frac{A(p+2)+B(p+3)}{p^2+5p+6} \Rightarrow p+5 = A(p+2) + B(p+3)$, pro $p = -3$ je $2 = A(-1)$, pro $p = -2$ je $3 = B$.

Tedy $Y(p) = \frac{-2}{p+3} + \frac{3}{p+2}$. Nyní k danému obrazu najdeme předmět Laplaceovy transformace. Jinými slovy chceme použít **zpětnou Laplaceovu transformaci**

$$\mathcal{L}^{-1}\{Y(p)\} = y(t).$$

Protože $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$, tak $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-2}{p+3}\right\} = -2e^{-3t}$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{p+2}\right\} = 3e^{-2t}$ a tedy $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+5}{p^2+5p+6}\right\} = -2e^{-3t} + 3e^{-2t}$. Řešením počáteční úlohy je funkce $y(t) = -2e^{-3t} + 3e^{-2t}$.

Příklad 206: Pomocí Laplaceovy transformace chceme vyřešit:

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2.$$

Označíme $\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(p)$ a zobrazíme počáteční úlohu pomocí Laplaceovy transformace, dostaneme:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{y''(t) - 2y'(t) + y(t)\} &= \\ p^2Y(p) - py(0+) - y'(0+) - 2(pY(p) - y(0+)) + Y(p) &= \\ (p^2 - 2p + 1)Y(p) + p - 2 - 2 &= 0 \Rightarrow Y(p) = \frac{4-p}{(p-1)^2}. \end{aligned}$$

Rozkladem na parciální zlomky obdržíme $\frac{4-p}{(p-1)^2} = \frac{A}{(p-1)^2} + \frac{B}{p-1} = \frac{A+B(p-1)}{(p-1)^2} \Rightarrow 4-p = A + B(p-1)$, pro $p=1$ je $3 = A$, pro $p=0$ je $4 = 3 - B$.

Tedy $Y(p) = \frac{3}{(p-1)^2} + \frac{-1}{p-1}$. Nyní k danému obrazu najdeme předmět Laplaceovy transformace. Protože $\mathcal{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$ a $\mathcal{L}\{te^{at}\} = -\frac{d}{dp} \left(\frac{1}{p-a} \right) = \frac{1}{(p-a)^2}$, tak $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{(p-1)^2}\right\} = 3te^t$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{p-1}\right\} = -e^t$ a řešením počáteční úlohy je funkce $y(t) = 3te^t - e^t$.

4.1.1 Konvoluce

Operátor, který dvěma reálným funkcím f, g přiřadí funkci $(f * g)(t)$ předpisem

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau \text{ se nazývá } \mathbf{konvoluce}.$$

Pro obraz konvoluce při Laplaceově transformaci platí: $\mathcal{L}((f * g)(t)) = F(p)G(p)$.

Příklad 207: Pomocí Laplaceovy transformace budeme řešit:

$$y''(t) + y(t) = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Zobrazíme diferenciální úlohu pomocí Laplaceovy transformace, dostaneme:

$$p^2Y(p) - py(0+) - y'(0+) + Y(p) = \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow Y(p) = \frac{1}{p^2+1} \frac{1}{p^2+1}.$$

$$\text{Odtud } y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{p^2+1} \frac{1}{p^2+1}\right\} = \int_0^t \sin(\tau) \sin(t-\tau) d\tau.$$

Zároveň platí $\frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2+1} - \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} \right)$ a také $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{p^2+1} - \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2} \right)\right) = \frac{1}{2}(\sin t - t \cos t)$.

4.2 Soustavy rovnic

Příklad 208: Pomocí Laplaceovy transformace vyřešíme soustavu diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_1 - 2y_2, & y_1(0+) &= 0, & \text{Jelikož } \mathcal{L}\{y_1'(t)\} &= pY_1(p) - y_1(0+), \\ y_2' &= -4y_1 + 3y_2, & y_2(0+) &= 1. & \mathcal{L}\{y_2'(t)\} &= pY_2(p) - y_2(0+), \end{aligned}$$

tak dostaneme soustavu algebraických rovnic

$$\begin{aligned} pY_1(p) - 0 &= Y_1(p) - 2Y_2(p), & \Rightarrow & & (p-1)Y_1(p) + 2Y_2(p) &= 0, \\ pY_2(p) - 1 &= -4Y_1(p) + 3Y_2(p), & & & 4Y_1(p) + (p-3)Y_2(p) &= 1. \end{aligned}$$

Odtud $Y_2(p) = -\frac{(p-1)}{2}Y_1(p)$ a po dosazení $4Y_1(p) - (p-3)\frac{(p-1)}{2}Y_1(p) = 1$.

Tudíž $Y_1(p) = \frac{-2}{(p+1)(p-5)} = \frac{1}{3(p+1)} - \frac{1}{3(p-5)}$ a $Y_2(p) = \frac{(p-1)}{(p+1)(p-5)} = \frac{1}{3(p+1)} + \frac{2}{3(p-5)}$.

Zpětnou transformací dostaneme $y_1(t) = \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{5t})$ a $y_2(t) = \frac{1}{3}(e^{-t} + 2e^{5t})$.

Pomocí Laplaceovy transformace najděte řešení následujících soustav diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} 209. \quad y_1' &= y_1 - 2y_2; & y_1(0+) &= 0, & y_2(0+) &= 1 \\ y_2' &= 5y_1 + 3y_2 & & & & \end{aligned} \quad \begin{aligned} & [y_1 = -\frac{2}{3}e^{2x} \sin(3x)] \\ & [y_2 = \frac{1}{3}e^{2x}(\sin(3x) + 3 \cos(3x))] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 210. \quad y_1' &= y_1 - y_2; & y_1(0+) &= 1, & y_2(0+) &= 1 \\ y_2' &= y_1 + 3y_2 & & & & \end{aligned} \quad \begin{aligned} & [y_1 = e^{2x}(-2x + 1)] \\ & [y_2 = e^{2x}(2x + 1)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 211. \quad y_1' &= 5y_1 - y_2; & y_1(0+) &= 2, & y_2(0+) &= 1 \\ y_2' &= y_1 + 5y_2 & & & & \end{aligned} \quad \begin{aligned} & [y_1 = e^{5x}(2 \cos x - \sin x)] \\ & [y_2 = e^{5x}(2 \sin x + \cos x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 212. \quad 2y_1' &= 6y_1 - y_2 - 6x^2 - x + 3; & y_1(0) &= 2, & y_2(0) &= 1 \\ y_2' &= 2y_2 - 2x - 1 & & & & \end{aligned} \quad \begin{aligned} & [y_1 = 2e^{3x} + x^2 + x] \\ & [y_2 = x + 1] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 213. \quad y_1' &= y_1 - y_2 + 8x; & y_1(0) &= 0, & y_2(0) &= 0 \\ y_2' &= 5y_1 - y_2 & & & & \end{aligned} \quad \begin{aligned} & [y_1 = -\sin 2x - 2 \cos 2x + 2x + 2] \\ & [y_2 = -5 \sin 2x + 10x] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 214. \quad y_1' &= 4y_1 - 2y_2 + x; & y_1(0) &= 0, & y_2(0) &= 0 \\ y_2' &= 2y_1 - y_2 & & & & \end{aligned} \quad \begin{aligned} & [y_1 = \frac{1}{54}(8e^{3x} - 9x^2 - 24x - 8)] \\ & [y_2 = \frac{1}{27}(2e^{3x} - 9x^2 - 6x - 2)] \end{aligned}$$

5 Posloupnosti a řady funkcí

5.1 Posloupnosti funkcí

Teorie

Příklad 215: Budeme vyšetřovat konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2}$.

Pro bodovou konvergenci platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2(1+\frac{x^2}{n^2})} = 1.$$

Při hledání množiny M , na které posloupnost konverguje stejnoměrně nás zajímá rozdíl $\left| \frac{n^2}{n^2+x^2} - 1 \right| = \left| \frac{n^2-n^2-x^2}{n^2+x^2} \right| = \frac{x^2}{n^2+x^2}$. Zjistíme, kdy platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} \frac{x^2}{n^2+x^2} = 0.$$

Pokud je M omezená množina, pak $\exists K \forall x \in M : |x| \leq K$ a platí

$$\frac{x^2}{n^2+x^2} \leq \frac{K^2}{n^2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} \frac{x^2}{n^2+x^2} = 0.$$

Jestliže $M = \mathbb{R}$, pak $\sup_{x \in M} \frac{x^2}{n^2+x^2} = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in M} \frac{x^2}{n^2+x^2} = 1$.

Daná posloupnost tedy konverguje stejnoměrně na každé omezené množině, na celé reálné ose konverguje bodově.

Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti $\{f_n(x)\}$, je-li

216. $f_n(x) = x^n$ [$x \in (-1, 1)$ bodově, $x \in \langle -1 + \varepsilon, 1 - \varepsilon \rangle$ stejn.]

217. $f_n(x) = \frac{\operatorname{arctg} nx}{\sqrt{n+x}}$ [$D(f_1) = (-1, \infty)$, $x \in (-1, +\infty)$ stejn.]

218. $f_n(x) = x^n + x^{n+1}$ [$x \in \langle -1, 1 \rangle$ bodově, $x \in \langle -1, 1 - \varepsilon \rangle$ stejn.]

219. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ [$x \in (-1, 1)$ bodově, $x \in \langle -1 + \varepsilon, 1 \rangle$ stejn.]

220. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ [$f_n \rightarrow 0$ pro $x \in \mathbb{R}$, ale $f_n(\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$]

221. $f_n(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}$ [$x \in \mathbb{R}$ stejn.]

222. $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x}$ [$x \in \langle 0, +\infty \rangle$ stejn.]

223. $f_n(x) = e^{n(x-1)}$ [$x \in (-\infty, 1)$ bodově, $x \in (-\infty, 1 - \varepsilon)$ stejn.]

224. $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$ [$x \in (-\infty, \infty)$ bodově, $x \in (-\infty, -\varepsilon) \cup \langle \varepsilon, +\infty \rangle$ stejn.]

225. $f_n(x) = x \operatorname{arctg} nx$ [$x \in \langle 0, +\infty \rangle$ bodově i stejn.]

5.2 Funkční řady

Příklad 226: Máme najít obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Použijeme odmocninové kritérium a zkoumáme, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí nerovnost $\sqrt[n]{|\ln^n x|} = |\ln x| < 1$, což je splněno pro $\frac{1}{e} < x < e$. Pro $x_1 = \frac{1}{e}$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, která diverguje; podobně pro $x_2 = e$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1^n$ opět diverguje. Obor konvergence dané řady je tedy interval $(\frac{1}{e}, e)$.

Najděte obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, je-li

$$227. f_n(x) = \frac{(-1)^n (1-x)^n}{2n+1} \quad [< 0, \infty)$$

$$228. f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \quad [x \in \mathbb{R} - < -1, 1 >]$$

$$229. f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}} \quad [x \in \mathbb{R} - \{-1, 1\}]$$

$$230. f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^n} \quad [|x| > 1]$$

$$231. f_n(x) = e^{-nx} \quad [x > 0]$$

$$232. f_n(x) = \frac{\cos nx}{e^{nx}} \quad [x > 0]$$

$$233. f_n(x) = (5 - x^2)^n \quad [2 < |x| < \sqrt{6}]$$

$$234. f_n(x) = n^{-\ln x^2} \quad [|x| > \sqrt{e}]$$

$$235. f_n(x) = n^2 e^{-nx^2} \quad [x \in \mathbb{R} - \{0\}]$$

$$236. f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n} \quad [|x| < 1]$$

Dokažte stejnoměrnou konvergenci $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, je-li

$$237. f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2} \quad [x \in \mathbb{R}]$$

$$238. f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+2^n} \quad [x \geq 0]$$

$$239. f_n(x) = \frac{x}{1+n^4 x^2} \quad [x \in \mathbb{R}]$$

$$240. f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}} \quad [x \in \mathbb{R}]$$

$$241. f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5 x^2} \quad [x \in \mathbb{R}]$$

242. $f_n(x) = \operatorname{arctg} \frac{2x}{x^2+n^3}$ $[x \in R]$
243. $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$ $[x \in R]$
244. $f_n(x) = \frac{x^2 \sin(n\sqrt{x})}{1+n^3x^4}$ $[x \geq 0]$
245. $f_n(x) = (\operatorname{arctg} \frac{x}{x^2+n^2})^2$ $[x \geq 0]$
246. $f_n(x) = \ln(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n})$ $[n \geq 2, |x| \leq a, a > 0]$
247. $f_n(x) = \frac{\sin(\frac{x^2}{n})}{x^2 \sqrt{n+1}}$ $[|x| \leq a, a > 0]$
248. $f_n(x) = \frac{\sin(\frac{x}{n}) \sin 2nx}{x^2+4n}$ $[x \in R]$
249. $f_n(x) = \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$ $[\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2]$
250. $f_n(x) = x^2 e^{-nx}$ $[\varepsilon \leq x \leq a, (\varepsilon, a > 0, \varepsilon < a)]$

WolframAlpha

5.3 Mocniné řady

Příklad 251: Najdeme obor konvergence řady $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^{3n}$.

Po substituci $y = x^3$ dostaneme mocninnou řadu $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n y^n$, která má poloměr konvergence $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|5^n|}} = \frac{1}{5}$. Pro $y = -\frac{1}{5}$ dostaneme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, která diverguje; podobně pro $y = \frac{1}{5}$ řada $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje. Obor konvergence původní řady $\sum_{n=1}^{\infty} 5^n x^{3n}$ je tedy interval $(-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}, \frac{1}{\sqrt[3]{5}})$.

Najděte poloměr konvergence řady

$$252. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n \quad \left[\frac{1}{4}\right]$$

$$253. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^{2n} \quad \left[\sqrt{\frac{e}{2}}\right]$$

$$254. \sum_{n=1}^{\infty} 3^n (n^3 + 2) x^{2n} \quad \left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

Najděte poloměr konvergence řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, je-li

$$255. a_n = \frac{1}{n^2} \quad [1]$$

$$256. a_n = \frac{1}{n!} \quad [\infty]$$

$$257. a_n = \frac{(1+i)^n}{n2^n} \quad [\sqrt{2}]$$

$$258. a_n = \alpha^{n^2} (0 < \alpha < 1) \quad [\infty]$$

$$259. a_n = \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} (a, b > 0) \quad \left[\min\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)\right]$$

$$260. a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}} \quad [1]$$

$$261. a_n = \frac{1}{a^n + b^n} (a, b > 0) \quad [\min(a, b)]$$

$$262. a_n = (-1)^{n-1} \left\{ \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} \right\}^p \quad [2^p]$$

$$263. a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad [1]$$

$$264. a_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)} \quad [1]$$

Najděte obor konvergence mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$, je-li

$$265. a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}, x_0 = 1 \quad [< 0, 2 >]$$

$$266. a_n = \left(\frac{2n-1}{3n+2}\right)^n, x_0 = -2 \quad [(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})]$$

$$267. a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}, x_0 = 0 \quad [(-1, 1 >]$$

$$268. a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}3^n}, x_0 = 1 \quad [< -2, 4 >]$$

$$269. a_n = \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}}, x_0 = -2 \quad [(-3, -1)]$$

$$270. a_n = \frac{5^n+(-3)^n}{n+1}, x_0 = 0 \quad [< -\frac{1}{5}, \frac{1}{5} >]$$

$$271. a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2}, x_0 = -1 \quad [< -2, 0 >]$$

$$272. a_n = \frac{\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}}, x_0 = -3 \quad [< -4, -2 >]$$

$$273. a_n = \sqrt[n]{a} - 1, x_0 = 0, a > 0, a \neq 1 \quad [< -1, 1 >]$$

$$274. a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+n+1}}, x_0 = 1 \quad [< 0, 2 >]$$

WolframAlpha

Najděte rozvoj funkce $f(x)$ v mocninou řadu

$$275. f(x) = e^{-x^2} \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}; x \in R \right]$$

$$276. f(x) = \cos^2 x \quad \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}; x \in R \right]$$

$$277. f(x) = \sin 3x \sin 5x \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!} (1 - 2^{4n}) x^{2n}; x \in R \right]$$

$$278. f(x) = \sin^3 x \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3(3^{2n}-1)}{4(2n+1)!} x^{2n+1}; x \in R \right]$$

$$279. f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2} \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{n+2}; x \in (-1, 1) \right]$$

$$280. f(x) = \frac{5x-4}{x+2} \quad \left[-2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7(-1)^{n-1}}{2^n} x^n; x \in (-2, 2) \right]$$

$$281. f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3} \quad \left[-\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 + (-1)^n 3^{n+1}}{3^{n+1}} x^n; x \in (-1, 1) \right]$$

$$282. f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in (-1, 1) \right]$$

$$283. f(x) = \ln \frac{3-2x}{2+3x} \quad \left[\ln \frac{3}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(-\frac{3}{2}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right\} \frac{x^n}{n}; x \in \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \right]$$

$$284. f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}; x \in (-1, 1) \right]$$

$$285. f(x) = \sqrt{1+x^2} \quad \left[1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (2n-3)!!}{(2n)!!} x^{2n}; x \in (-1, 1) \right]$$

$$286. f(x) = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)!!}{(2n)!!} x^{2n}; x \in (-1, 1) \right]$$

$$287. f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}} \quad \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{n!} x^{n+1}; x \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \right]$$

$$288. f(x) = (1+x^2) \operatorname{arctg} x \quad \left[x + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1} x^{2n+1}; x \in \langle -1, 1 \rangle \right]$$

Najděte rozvoj funkce $f(x)$ v mocninnou řadu

$$289. f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \quad \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in \langle -1, 1 \rangle \right]$$

$$290. f(x) = \arcsin x \quad \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in \langle -1, 1 \rangle \right]$$

$$291. f(x) = \operatorname{arctg} \frac{x+3}{x-3} \quad \left[-\frac{\pi}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in \langle -3, -3 \rangle \right]$$

$$292. f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{5}} \left\{ \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{n+1} + (-1)^n \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{n+1} \right\}; |x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \right]$$

$$293. f(x) = \frac{1}{1+x+x^2} \quad \left[\frac{2}{\sqrt{3}} \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{2\pi(n+1)}{3} x^n; x \in (-1, 1) \right]$$

$$294. f(x) = \frac{x \cos \alpha - x^2}{1 - 2x \cos \alpha + x^2} \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos n\alpha; x \in (-1, 1) \right]$$

$$295. f(x) = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{4n+1}}{4n+1}; x \in (-1, 1) \right]$$

$$296. f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2} \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}; x \in \langle -1, 1 \rangle \right]$$

$$297. f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} \quad \left[1 + \frac{x^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \frac{x^{2n+2}}{2n+1}; x \in \langle -1, 1 \rangle \right]$$

$$298. f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right) x^n; x \in (-1, 1) \right]$$

$$299. f(x) = \frac{e^x}{1-x} \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^n; x \in (-1, 1) \right]$$

$$300. f(x) = \operatorname{arctg}^2 x \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n-1}\right) \frac{x^{2n}}{n}; x \in \langle -1, 1 \rangle \right]$$

$$301. f(x) = e^x \sin x \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \sin(\frac{n\pi}{4})}{n!} x^n; x \in R \right]$$

$$302. f(x) = e^x \cos x \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\frac{n}{2}} \cos(\frac{n\pi}{4})}{n!} x^n; x \in R \right]$$

$$303. f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^2 \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n+1} (n!)^2}{(2n+2)!} x^{2n}; |x| \leq 1 \right]$$

Pomocí rozvoje v mocninnou řadu vypočtěte integrály

$$304. \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}; x \in R \right]$$

$$305. \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}; x \in R \right]$$

$$306. \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \quad \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!! x^{4n+1}}{(2n)!!(4n+1)}; x \in (-1, 1) \right]$$

$$307. \int_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}} \quad \left[\frac{x^3}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!! x^{2n+3}}{(2n)!!(2n+3)}; x \in \langle -1, 1 \rangle \right]$$

WolframAlpha

6 Taylorova metoda pro řešení počátečních úloh

Nechť funkce $f = f(x)$ má derivace všech řádů v bodě x_0 . Mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n,$$

se nazývá **Taylorova řada** funkce f .

Taylorova metoda řešení počátečních úloh

Předpokládejme, že řešení $y(x)$ počáteční úlohy má v bodě x_0 derivace všech řádů. Řešení pak hledáme ve tvaru

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

a hodnoty $y(x_0)$, $y'(x_0)$, \dots určíme z diferenciální rovnice a z počátečních podmínek.

Příklad 308: Řešíme počáteční úlohu

$$y' = -y, \quad y(0) = 1.$$

Z počáteční podmínky a rovnice plyne $y'(0) = -1$ a postupným derivováním rovnice dostaneme:

$$\begin{aligned} y''(x) = -y'(x) & \Rightarrow y''(0) = 1, \\ y'''(x) = -y''(x) & \Rightarrow y'''(0) = -1, \\ y^{IV}(x) = -y'''(x) & \Rightarrow y^{IV}(0) = 1, \\ & \vdots \\ y^{(n)}(x) = -y^{(n-1)}(x) & \Rightarrow y^{(n)}(0) = (-1)^n. \end{aligned}$$

Po dosazení do Taylorovy řady dostaneme $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n (= e^{-x})$.

Příklad 309: Řešíme počáteční úlohu

$$y'' = xy, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 3.$$

Z počátečních podmínek plyne

$$y(x) = 4 + 3(x - 0) + \frac{y''(0)}{2!}(x - 0)^2 + \dots$$

Z rovnice dostaneme postupným derivováním:

$$\begin{aligned}
 y''(x) &= x y(x) && \Rightarrow y''(0) = 0 y(0) = 0, \\
 y'''(x) &= y(x) + x y'(x) && \Rightarrow y'''(0) = y(0) + 0 \cdot y'(0) = 1 \cdot 4, \\
 y^{IV}(x) &= y'(x) + y'(x) + x y''(x) && \Rightarrow y^{IV}(0) = 2y'(0) + 0 \cdot y''(0) = 2 \cdot 3, \\
 &\vdots \\
 y^{(n)}(x) &= (n-2)y^{(n-3)}(x) + x y^{(n-2)}(x) && \Rightarrow y^{(n)}(0) = (n-2)y^{(n-3)}(0).
 \end{aligned}$$

Obecně

$$\begin{aligned}
 y^{(3n)}(0) &= (3n-2)(3n-5) \cdots 4 \cdot 1 \cdot 4, \\
 y^{(3n+1)}(0) &= (3n-1)(3n-4) \cdots 5 \cdot 2 \cdot 3, \\
 y^{(3n+2)}(0) &= 0.
 \end{aligned}$$

Po dosazení do předpokládaného tvaru řešení dostaneme:

$$\begin{aligned}
 y(x) &= 4 + 3x + \frac{4}{3!}x^3 + \frac{3}{4!}x^4 + \dots \\
 &= 4 + 3x + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(3n-2)(3n-5) \cdots 4 \cdot 1}{(3n)!} x^{3n} + 3 \frac{(3n-1)(3n-4) \cdots 5 \cdot 2}{(3n+1)!} x^{3n+1}.
 \end{aligned}$$

Najděte řešení počáteční úlohy ve tvaru Taylorovy řady

$$\begin{aligned}
 310. \quad y' - y &= 0, \quad y(0) = 1 && \left[y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right] \\
 311. \quad y'' + y &= 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 && \left[y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!} x^{2n} \right] \\
 312. \quad y'' + y &= 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 && \left[y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!} x^{2n+1} \right] \\
 313. \quad y'' - 2y' + y &= 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1 && \left[y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \right] \\
 314. \quad y'' - 2y' + y &= 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 && \left[y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!} x^n \right]
 \end{aligned}$$

7 Fourierovy řady

Teorie

Příklad 315: Stanovíme Fourierovu řadu funkce $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & \text{pro } -\pi \leq x \leq 0 \end{cases}$ podle základního trigonometrického systému, tj. ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Vypočteme koeficienty a_k, b_k :

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \, d\xi = 1, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos k\xi \, d\xi = \frac{1}{k} [\sin k\xi]_0^{\pi}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin k\xi \, d\xi = -\frac{1}{k} [\cos k\xi]_0^{\pi} = -\frac{1}{k} [(-1)^k - 1], \quad k = 1, 2, \dots$$

Výsledek píšeme ve tvaru:

$$s(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$, je-li

316. $f(x) = |x|$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \left[\frac{\pi}{2} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}; \frac{\pi^2}{8} \right]$

317. $f(x) = \pi^2 - x^2$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$
 $\left[\frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx; \frac{\pi^2}{6}, \frac{\pi^2}{12} \right]$

318. $f(x) = \text{sign } x$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \left[\frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}; \frac{\pi}{4} \right]$

319. $f(x) = \sin ax \quad a \notin \mathbb{Z}$ $\left[\frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{n^2 - a^2} \right]$

320. $f(x) = \cos ax \quad a \notin \mathbb{Z}$ $\left[\frac{2 \sin \pi a}{\pi} \left\{ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a \cos nx}{a^2 - n^2} \right\} \right]$

321. $f(x) = e^{ax} \quad a \neq 0$ $\left[\frac{2}{\pi} \sinh a\pi \left\{ \frac{1}{2a} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2 + n^2} (a \cos nx - n \sin nx) \right\} \right]$

$$322. f(x) = \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad |q| < 1 \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx; \text{zaved'te } e^{ix} = z \right]$$

Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$, je-li

$$323. f(x) = \frac{\pi - x}{2}, x \in (0, 2\pi) \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \right]$$

$$324. f(x) = x, x \in (a, a + 2l) \quad \left[a + l + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} (\sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} - \cos \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l}) \right]$$

$$325. f(x) = x^2, x \in (0, 2\pi) \quad \left[\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} \right]$$

$$326. f(x) = e^{ax}, x \in (-h, h) \quad \left[2 \sinh ah \left\{ \frac{1}{2ah} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ah \cos(\frac{n\pi x}{h}) - n \sin(\frac{n\pi x}{h})}{(ah)^2 + (\pi n)^2} \right\} \right]$$

$$327. f(x) = x \cos x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \left[\frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(4n^2 - 1)^2} \sin 2nx \right]$$

$$328. f(x) = e^x - 1, x \in (0, 2\pi) \quad \left[\frac{e^{2\pi} - 1}{\pi} \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\cos nx}{1+n^2} - \frac{n \sin nx}{1+n^2} \right) \right\} - 1 \right]$$

Najděte Fourierovu řadu funkcí $f_n(x) = \sin^n x$ a $g_n(x) = \cos^n x$ pro $n = 2, 3, 4, 5$.

$$329. f_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x \quad [g_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x]$$

$$330. f_3(x) = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x \quad [g_3(x) = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x]$$

$$331. f_4(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x \quad [g_4(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x]$$

$$332. f_5(x) = -\frac{5}{8} \sin x + \frac{5}{16} \sin 3x - \frac{1}{16} \sin 5x \quad [g_5(x) = \frac{5}{8} \cos x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 5x]$$

Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$, je-li

$$333. f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, x \in (0, \pi) \text{ (kosinová řada)} \quad \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2} \right]$$

$$334. f(x) = x^2, x \in (0, \pi) \text{ (sinová řada)} \quad \left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left\{ \frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^2} [(-1)^n - 1] \right\} \sin nx \right]$$

$$335. f(x) = \sin ax, a \in Z, x \in (0, \pi) \text{ (kosinová řada)} \quad \left[\frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{a^2 - (2n+1)^2} \text{ pro } a \text{ sudé} \right]$$

$$\left[\frac{4a}{\pi} \left\{ \frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{a^2 - 4n^2} \right\} \text{ pro } a \text{ liché} \right]$$

$$336. f(x) = \cos ax, a \in Z, x \in (0, \pi) \text{ (sinová řada)} \left[\begin{array}{l} -\frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)x}{a^2-(2n+1)^2} \text{ pro } a \text{ sudé} \\ -\frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \sin 2nx}{a^2-4n^2} \text{ pro } a \text{ liché} \end{array} \right]$$

$$337. f(x) = x\left(\frac{\pi}{2} - x\right), x \in (0, \frac{\pi}{2}) \text{ podle soustavy} \left[\begin{array}{l} \{\cos(2n-1)x\}, n \in N \quad \left[-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \left\{ 1 + \frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi} \right\} \cos(2n-1)x \right] \\ \{\sin(2n-1)x\}, n \in N \quad \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2} + \frac{8}{(2n-1)^3} \right\} \sin(2n-1)x \right] \end{array} \right]$$

Integrací Fourierova rozvoje funkce $f(x) = x$ najděte rozvoj funkcí x^2, x^3, x^4, x^5 pro $x \in (-\pi, \pi)$

$$338. f(x) = x \quad \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n} \right]$$

$$339. f(x) = x^2 \quad \left[\frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} (-1)^n \right]$$

$$340. f(x) = x^3 \quad \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{6-\pi^2 n^2}{n^3} \sin nx \right]$$

$$341. f(x) = x^4 \quad \left[\frac{\pi^4}{5} + 8 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{6-\pi^2 n^2}{n^4} \cos nx \right]$$

$$342. f(x) = x^5 \quad \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{120-20\pi^2 n^2 + \pi^4 n^4}{n^5} \sin nx \right]$$

WolframAlpha