Sbírka příkladů k M2E a SM2E

Petr Tomiczek

Obsah

1 Diferenciální rovnice 1. řádu

1.1 Separace proměnných

Příklad 1 : Najděte obecné řešení (obecný integrál) diferenciální rovnice

$$y' = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y\,.$$

Teorie

Separací proměnných převedeme rovnici na tvar

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y \;\Rightarrow\; \frac{\cos y}{\sin y}\,dy = \frac{\sin x}{\cos x}\,dx$$

a substitucemi $u = \sin y$, $v = \cos x$ dostaneme po integrování

$$\ln|u| = -\ln|v| + \ln C\,, \qquad \text{neboli} \qquad \sin y = \frac{C}{\cos x} \qquad \text{(obecný integrál).}$$

Příklad 2 : Najděte obecné řešení rovnice $yy'\sqrt{x} = 1 + y^2$.
Separací proměnných převedeme rovnici na tvar

$$\frac{y\,dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{x}} \;\Rightarrow\; \int \frac{y}{1+y^2}\,dy = \int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{a substitucí} \quad u = 1 + y^2$$

dostaneme

$$\frac{1}{2}\ln|u| = 2\sqrt{x} + \tilde{C} \quad\Rightarrow\quad \ln|1+y^2| = 4\sqrt{x} + 2\tilde{C} \quad\Rightarrow\quad y^2 = Ce^{4\sqrt{x}} - 1.$$

3. $(xy^2 + x)\,dx + (y - x^2y)\,dy = 0$ $\quad\left[1 + y^2 = C(1 - x^2)\right]$
4. $xyy' = 1 - x^2$ $\quad\left[x^2 + y^2 = \ln Cx^2\right]$
5. $y' \operatorname{tg} x - y = a$ $\quad[y = C\sin x - a]$
6. $xy\,dx + (x+1)dy = 0$ $\quad\left[y = C(x+1)e^{-x}\right]$
7. $\sqrt{y^2+1}\,dx = xydy$ $\quad\left[\ln|x| = C + \sqrt{y^2+1}; x = 0\right]$
8. $e^y(1+x^2)dy - 2x(1+e^y)\,dx = 0$ $\quad\left[1 + e^y = C(1+x^2)\right]$
9. $(x^2-1)y' + 2xy^2 = 0\,,\ y(0) = 1$ $\quad\left[y\{\ln(1-x^2) + 1\} = 1\right]$
10. $y'\sin x = y\ln y\,,\ y(\frac{\pi}{2}) = e$ $\quad\left[y = e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\right]$
11. $\sin y\cos x dy = \cos y \sin x\,dx\,,\ y(0) = \frac{\pi}{4}$ $\quad\left[\cos x = \sqrt{2}\cos y\right]$
12. $y' \operatorname{cotg} x + y = 2\,,\ y(\frac{\pi}{3}) = 0$ $\quad[y = 2 - 4\cos x]$

Řešení pomocí WolframAlpha

1.2 Rovnice umožnující přechod k separaci proměnných.

Typ s přímkou

Příklad 13 : Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2(x+y)}\,.$$

Teorie

Substitucí $x+y=u\,,\ 1+y'=u'$ převedeme rovnici na tvar

$$u'-1 = -\frac{3}{2} + \frac{1}{2u} \ \Rightarrow\ \frac{du}{dx} = \frac{1-u}{2u}\,.$$

Separaci proměnných a integrováním dostaneme

$$\int \frac{2u}{1-u}\,du = \int 1\,dx\,, \qquad \text{neboli} \qquad -2u - 2\ln|1-u| = x - C$$

a přejdeme k původním proměnným $3x+2y+2\ln|1-x-y| = C\,.$

Příklad 14 : Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$(x+y+2)\,dx + (2x+2y-1)\,dy = 0\,.$$

Substitucí $x+y=u\,,\ dx+dy=du$ převedeme rovnici na tvar

$$(u+2)\,dx + (2u-1)(du-dx) = 0 \ \Rightarrow\ (3-u)\,dx + (2u-1)\,du = 0\,.$$

Separaci proměnných a integrováním dostaneme

$$\int \frac{2u-1}{3-u}\,du + \int 1\,dx = -C\,, \qquad \text{neboli} \qquad -2u - 5\ln|u-3| + x = -C$$

a přejdeme k původním proměnným $x+2y+5\ln|x+y-3| = C\,.$

15. $y'-y = 2x-3$ $\qquad [2x+y-1 = Ce^x]$

16. $y' = \sin(x-y)$ $\qquad \left[x+C = \frac{1+\sin(x-y)}{\cos(x-y)}\right]$

17. $y' = \sqrt{4x+2y-1}$ $\qquad \left[\sqrt{4x+2y-1} - 2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2) = x+C\right]$

18. $y' = \cos(x-y-1)$ $\qquad \left[y = x-1-2\,\mathrm{arcotg}(\frac{1}{C-x}) + 2k\pi; k\in Z\right]$

19. $y'\sqrt{1+x+y} = x+y-1$ $\qquad \left[x+C = 2u+\frac{2}{3}\ln|u-1| - \frac{8}{3}\ln(u+2)\right]$ $\left[u=\sqrt{1+x+y}\right]$

WolframAlpha

Homogenní typ

Příklad 20 : Najděte obecné řešení diferenciální rovnice

$$y' = -\frac{x^2 + 2xy}{xy}.$$

Teorie

Substitucí $y = ux$, $y' = u'x + u$ převedeme rovnici na tvar

$$u'x + u = -\frac{x^2 + 2xux}{xux} \;\Rightarrow\; \frac{u\,du}{(u+1)^2} = -\frac{dx}{x}.$$

Integrováním dostaneme

$$\int \frac{u+1-1}{(u+1)^2}\,du = \ln|u+1| + \frac{1}{u+1} = -\ln|x| + C$$

a přejdeme k původním proměnným

$$\ln|\frac{y}{x} + 1| + \frac{1}{\frac{y}{x}+1} = -\ln|x| + C \;\Rightarrow\; \ln|x+y| + \frac{x}{x+y} = C.$$

21. $y' = \frac{x+y}{x-y}$ $\left[\operatorname{arcotg}\frac{y}{x} = \ln C\sqrt{x^2+y^2}\right]$

22. $y' = \frac{2xy}{x^2-y^2}$ $\left[x^2 + y^2 = Cy\right]$

23. $xy' - y = \sqrt{x^2+y^2}$ $\left[x^2 = C^2 + 2Cy)\right]$

24. $(3y^2 + 3xy + x^2)dx = (x^2 + 2xy)dy$ $\left[(x+y)^2 = Cx^3 e^{-\frac{x}{x+y}}\right]$

25. $(x^2 + y^2)y' = 2xy$ $\left[y^2 - x^2 = Cy\,,\ y = 0\right]$

26. $xy' = y\cos\ln\frac{y}{x}$ $\left[\ln Cx = \operatorname{cotg}(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x})\right]$ $\left[y = xe^{2k\pi}, k \in Z\right]$

27. $y + \sqrt{x^2+y^2} - xy' = 0\,,\ y(1) = 0$ $\left[y = \frac{x^2-1}{2}\right]$

28. $(xy' - y)\operatorname{arcotg}\frac{y}{x} = x\,,\ y(1) = 0$ $\left[\sqrt{x^2+y^2} = e^{\frac{y}{x}\operatorname{arcotg}\frac{y}{x}}\right]$

29. $(y^2 - 3x^2)dy + 2xydx = 0\,,\ y(0) = 1$ $\left[y^3 = y^2 - x^2\right]$

30. $y' = \frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2}\,,\ y(1) = 1$ $\left[y = -x\right]$

WolframAlpha

1.3 Variace konstant

Teorie

Příklad 31 : Metodou variace konstanty řešte diferenciální rovnici

$$y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x\,.$$

1.krok - Nejdříve vyřešíme homogenní rovnici metodou separace proměnných

$$y' \cos^2 x + y = 0 \;\Rightarrow\; \ln|y| + \operatorname{tg} x = \ln \widetilde{C} \;\Rightarrow\; y = Ce^{-tgx}\,.$$

2.krok - Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $y = C(x)e^{-tgx}$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$(C'(x)e^{-tgx} + C(x)e^{-tgx}\frac{1}{\cos^2 x})\cos^2 x + C(x)e^{-tgx} = \operatorname{tg} x\,.$$

tedy

$$C'(x)e^{-tgx}\cos^2 x = \operatorname{tg} x \;\Rightarrow\; C(x) = e^{tgx}(tgx - 1)\,.$$

3.krok - Obecné řešení rovnice má tvar $y = Ce^{-tgx} + \operatorname{tg} x - 1\,.$

Příklad 32 : Metodou variace konstanty řešte $(x+1)y' + xy = (x+1)^2e^x\,.$

1.krok - Nejdříve vyřešíme homogenní rovnici $(x+1)y' + xy = 0\,,$

$$\frac{dy}{y} = \frac{-x\,dx}{x+1} \;\Rightarrow\; \ln|y| = -x + \ln|x+1| + \ln\widetilde{C} \;\Rightarrow\; y = Ce^{-x}(x+1)\,.$$

2.krok - Řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $y = C(x)e^{-x}(x+1)$. Po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$(x+1)(C'(x)e^{-x}(x+1) + C(x)(-e^{-x}(x+1) + e^{-x})) + xC(x)e^{-x}(x+1) = (x+1)^2e^x\,.$$

tedy

$$C'(x)e^{-x}(x+1)^2 = (x+1)^2e^x \;\Rightarrow\; C(x) = \frac{e^{2x}}{2}\,.$$

3.krok - Obecné řešení rovnice má tvar $y = Ce^{-x}(x+1) + \frac{e^x}{2}(x+1)\,.$

33. $xy' - 2y = 2x^4$ $\quad [y = Cx^2 + x^4]$

34. $xy' + y + 1 = 0$ $\quad [y = \frac{C}{x} - 1]$

35. $xy' + (x+1)y = 3x^2e^{-x}$ $\quad [xy = (x^3 + C)e^{-x}]$

36. $(xy + e^x)dx - xdy = 0$ $\quad [y = e^x(\ln|x| + C)]$

37. $y = x(y' - x\cos x)$ $\quad [y = x(C + \sin x)]$

38. $(xy' - 1)\ln x = 2y$ $\quad [y = C\ln^2 x - \ln x]$

39. $y\sin x + y'\cos x = 1$ $\quad [y = \sin x + C\cos x]$

40. $(2e^y - x)y' = 1$ $\quad [x = e^y + Ce^{-y}]$

41. $y' = \frac{y}{3x-y^2}$ $\quad \left[x = Cy^3 + y^2\right]$

42. $y' = \frac{1}{x\sin y + 2\sin 2y}$ $\quad \left[x = 8\sin^2\frac{y}{2} + Ce^{-\cos y}\right]$

43. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^{-3}}\,,\; y(1) = 1$ $\quad \left[y = -\frac{1}{x^3} + \frac{2}{x^2}\right]$

44. $y' - 2xy = 1\,,\; y(0) = 0$ $\quad \left[y = e^{x^2}\int\limits_0^x e^{-t^2}dt\right]$

45. $2\sqrt{x}y' - y = -\sin\sqrt{x} - \cos\sqrt{x}\,,\; y$ je omezená pro $\to \infty$ $\quad [y = \cos\sqrt{x}]$

46. $2x^2y' - xy = 2x\cos x - 3\sin x\,,\; y \to 0$ pro $x \to \infty$ $\quad \left[y = \frac{\sin x}{x}\right]$

47. $(1+x^2)\ln(1+x^2)y' - 2xy = \ln(1+x^2) - 2x\,\mathrm{arcotg}\,x$ $\quad [y = \mathrm{arcotg}\,x]$

$\left[y \to -\frac{\pi}{2}\text{ pro } x \to -\infty\right]$

WolframAlpha

1.4 Bernoulliova rovnice

Příklad 48: Převodem na lineární diferenciální rovnici vyřešte
$$x\,y' - y = x^2\,y^{-1}\,.$$

Teorie

Substitucí $z = y^2 \Rightarrow z' = 2yy'$ dostaneme
$$xy'y - y^2 = x^2 \quad \Rightarrow \quad xz' - 2z = 2x^2\,.$$
Vyřešíme lineární rovnici

1. hom. rovnice

$xz' - 2z = 0$

$z_h = C\,x^2$

2. part. řešení

$x\,C'\,x^2 = 2x^2$

$C = \ln|x|^2$

$z_p = \ln x^2 \cdot x^2$

3. obecné řešení

$z = C\,x^2 + \ln(x^2)\,x^2 \;\Rightarrow\; y^2 = C\,x^2 + \ln(x^2)\,x^2\,.$

49. $y' + 2y = y^2e^x$ $\quad \left[y(e^x + Ce^{2x}) = 1, y = 0\right]$

50. $xy' - 2x^2\sqrt{y} = 4y$ $\quad \left[y = x^4\ln^2 Cx, y = 0\right]$

51. $xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0$ $\quad \left[y^{-2} = x^4(2e^x + C), y = 0\right]$

52. $(1+x^2)y' = xy + x^2y^2$ $\quad \left[\frac{1}{y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\left(C - \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2+1})\right)\right]$

WolframAlpha

2 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

2.1 Systémy funkcí

Příklad 53 : Máme rozhodnout o lineární závislosti nebo nezávislosti funkcí $1, x, x^2$ na intervalu $I = (-\infty, \infty)$. Teorie

Budeme zkoumat, kdy $\forall\, x \in I$ nastane rovnost

$$c_1\, 1 + c_2\, x + c_3\, x^2 = 0\,.$$

Postupně pro $x = 0$ dostaneme $c_1 = 0$, pak pro $x = 1$ a $x = -1$ dostaneme $c_2 + c_3 = 0$ a $-c_2 + c_3 = 0$. Odtud plyne $c_2 = 0$, $c_3 = 0$. Podle definice jsou funkce $1, x, x^2$ lineárně nezávislé. Wronskián daných funkcí je

$$W(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0\,.$$

Tedy i podle věty 10.4 jsou funkce $1, x, x^2$ lineárně nezávislé.

Rozhodněte o lineární závislosti nebo nezávislosti následujících funkcí

54. $1, 2, x, x^2$ [závislé]
55. e^x, xe^x, x^2e^x [nezávislé]
56. $5, \cos^2 x, \sin^2 x$ [závislé]
57. $\cos x, \cos(x+1), \cos(x-2)$ [závislé]
58. $1, \arcsin x, \arccos x$ [závislé]
59. $\cos x, \sin x, \cos 2x$ [nezávislé]

Najděte Wronskián funkcí

60. $1, x$ $[1]$
61. e^{-x}, xe^{-x} $\left[e^{-2x}\right]$
62. $2, \cos x, \cos 2x$ $\left[-8\sin^3 x\right]$
63. $4, \sin^2 x, \cos 2x$ $[0]$
64. $e^{-3x}\sin 2x, e^{-3x}\cos 2x$ $\left[-2e^{-6x}\right]$

WolframAlpha

2.2 Eulerova rovnice

Řešení Eulerovy rovnice $x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 x\, y' + a_0 y = 0$, kde $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ hledáme ve tvaru $y(x) = x^\lambda$, (popř. $x^\lambda \ln x, \ldots, x^\lambda \ln^{k-1} x$) $\lambda \in \mathbb{C}$.

Teorie

Příklad 65 : Dosazením funkce $y(x) = x^\lambda$ do rovnice

$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0$$

dostaneme $x^2\lambda(\lambda-1)x^{\lambda-2} - 4x\lambda x^{\lambda-1} + 6x^\lambda = 0$, tedy

$$(\lambda^2 - 5\lambda + 6)\, x^\lambda = 0\,.$$

Tato rovnost je splněna (při $x \neq 0$) pro kořeny $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, uvedeného polynomu. Funkce $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^3$ tvoří fundamentální systém dané rovnice a její obecné řešení má tvar

$$y = C_1\, x^2 + C_2\, x^3\,.$$

Příklad 66 : Podobně při řešení rovnice $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$ dostaneme $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$ a fundamentální systém rovnice je tvořen funkcemi $y_1(x) = x^2$, $y_2(x) = x^2 \ln x$. Obecné řešení má tedy tvar $y = C_1\, x^2 + C_2\, x^2 \ln x$.

Příklad 67 : Řešení rovnice $x^2y'' + 3xy' + 2y = 0$ hledáme ve tvaru $y(x) = x^\lambda$. Po dosazení do rovnice dostaneme $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1 + i$, $\lambda_2 = -1 - i$. Do fundamentálního systému tedy patří funkce $y_1(x) = x^{-1+i}$, $y_2(x) = x^{-1-i}$ nebo $y_1(x) = x^{-1}\cos(\ln x)$, $y_2(x) = x^{-1}\sin(\ln x)$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = \frac{C_1}{x}\cos(\ln x) + \frac{C_2}{x}\sin(\ln x)\,.$$

68. $x^2y'' - 3xy' - y = 0$ $\quad \left[y = C_1 x^{2+\sqrt{5}} + C_2 x^{2-\sqrt{5}}\right]$

69. $x^3y''' + x^2y'' = 0$ $\quad [y = C_1 + C_2 x + C_3 x \ln x]$

70. $x^2y'' + 5xy' + 3y = 0$ $\quad \left[y = C_1 x^{-1} + C_2 x^{-3}\right]$

71. $x^2y'' + 7xy' + 8y = 0$ $\quad \left[y = C_1 x^{-2} + C_2 x^{-4}\right]$

72. $x^3y''' - 6y = 0$ $\quad \left[y = C_1 x^3 + C_2 \cos(\sqrt{2}\ln x) + C_3 \sin(\sqrt{2}\ln x)\right]$

73. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$ $\quad [y = x]$

WolframAlpha

2.3 Rovnice s konstantními koeficienty

Příklad 74: Řešení homogenní lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty

$$y'' - y' - 12y = 0$$

hledáme ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{\lambda x}$ (popř. $x\mathrm{e}^{\lambda x}, \dots, x^{k-1}\mathrm{e}^{\lambda x}$), pak $y' = \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x}$. Tedy $\lambda^2\mathrm{e}^{\lambda x} - \lambda\mathrm{e}^{\lambda x} - 12\mathrm{e}^{\lambda x} = 0$ a číselný parametr λ je kořenem **charakteristické rovnice (charakteristického polynomu)**

$$\lambda^2 - \lambda + 12 = 0.$$

Tedy $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$, fundamentální systém rovnice je tvořen funkcemi e^{-4x}, e^{3x} a obecné řešení rovnice má tvar

$$y(x) = C_1\mathrm{e}^{-4x} + C_2\mathrm{e}^{3x}\,.$$

Teorie

Příklad 75: Rovnice

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

má charakteristickou rovnici $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 2$. Fundamentální systém rovnice je nyní tvořen funkcemi $y_1(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $y_2(x) = x\,\mathrm{e}^{2x}$ a obecné řešení rovnice má tvar

$$y = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,x\,\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Příklad 76: K rovnici $y'' + 4y = 0$ přísluší charakteristická rovnice $\lambda^2 + 4 = 0$ s kořeny $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$. Fundamentální systém je tvořen funkcemi $y_1(x) = \mathrm{e}^{2ix}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{-2ix}$ nebo $y_1(x) = \cos 2x$, $y_2(x) = \sin 2x$. Obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x\,.$$

77. $y''' - y'' - y' + y = 0;\ \ y(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3$ $\quad [y = e^x(1+x)]$
78. $y'' - 4y' + 3y = 0;\ \ y(0) = 6,\ y'(0) = 10$ $\quad \left[y = 4e^x + 2e^{3x}\right]$
79. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$ $\quad \left[y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + C_3e^{-3x}\right]$
80. $y^{(6)} + 2y^{(5)} + y^{(4)} = 0$ $\quad \left[y = C_1 + C_2x + C_3x^2 + C_4x^3 + e^{-x}(C_5 + C_6x)\right]$
81. $4y'' - 8y' + 5y = 0$ $\quad \left[y = e^x(C_1\cos\frac{x}{2} + C_2\sin\frac{x}{2})\right]$
82. $y''' - 8y = 0$ $\quad \left[y = C_1e^{2x} + e^{-x}(C_2\cos\sqrt{3}x + C_3\sin\sqrt{3}x\right]$
83. $y^{(4)} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$ $\quad [y = (C_1 + C_2x)e^{-x} + (C_3\cos 2x + C_4\sin 2x)e^{-x}]$
84. $y'' - 2y' + 2y = 0; y(0) = 0, y'(0) = 1$ $\quad [y = e^x\sin x]$
85. $y'' - 2y' + 3y = 0; y(0) = 1, y'(0) = 3$ $\quad \left[y = e^x(\cos\sqrt{2}x + \sqrt{2}\sin\sqrt{2}x)\right]$

WolframAlpha

2.4 Metoda snižování řádu

Pokud známe jedno řešení $y_1(x)$ homogenní rovnice, pak další partikulární řešení hledáme ve tvaru $y(x) = y_1(x) \cdot z(x)$.

Teorie

Příklad 86 : Rovnice $(\sin x - \cos x)\, y'' - 2\sin x\, y' + (\cos x + \sin x)\, y = 0$ má jedno řešení $y_1 = \mathrm{e}^x$. Pro druhé řešení $y(x) = \mathrm{e}^x z(x)$, platí $y' = \mathrm{e}^x(z + z')$, $y'' = \mathrm{e}^x(z + 2z' + z'')$ a po dosazení do původní rovnice dostaneme

$$(\sin x - \cos x)\, \mathrm{e}^x(z + 2z' + z'') - 2\sin x\, \mathrm{e}^x(z + z') + (\cos x + \sin x)\, \mathrm{e}^x z = 0 \;\Rightarrow$$

$$(\sin x - \cos x)\,(2z' + z'') - 2\sin x\, z' = 0 \;\Rightarrow (u = z')$$

$$(\sin x - \cos x)\, u' - \cos x\, 2u = 0 \Rightarrow (\sin x - \cos x)\, du = \cos x\, 2u\, dx \;\Rightarrow$$

$$\int \frac{1}{2u}\, du = \int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}\, dx\,; \qquad \text{vypočteme integrál vpravo}$$

$$\int \frac{\cos x}{\sin x - \cos x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{2\cos x}{\sin x - \cos x}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{\cos x - \sin x + \cos x + \sin x}{\sin x - \cos x}\, dx =$$

$$\left\{ \begin{array}{c} v = \sin x - \cos x \\ dv = (\cos x + \sin x)\, dx \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\int -1\, dx + \frac{1}{2}\int \frac{1}{v}\, dv = -\frac{x}{2} + \ln|\sin x - \cos x| + C\,;$$

tedy $\quad \frac{1}{2}\ln u = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sin x - \cos x| + \hat{C} \;\Rightarrow\; u = C\mathrm{e}^{-x}(\sin x - \cos x)\ (= z') \;\Rightarrow$ $z = C\mathrm{e}^{-x}(-\sin x) \;\Rightarrow y = \mathrm{e}^x C\mathrm{e}^{-x}(-\sin x) = -C\sin x$ a obecné řešení má tvar

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\sin x\,.$$

Nalezněte obecné řešení následujících rovnic, jestliže znáte partikulární řešení

87. $(1 - x^2)y'' - xy' + \frac{1}{4}y = 0\,;\;\; y_1 = \sqrt{1+x}$ $\qquad \left[y = C_1\sqrt{1+x} + C_2\sqrt{1-x}\right]$

88. $x^2(x+1)y'' - 2y = 0\,;\;\; y_1 = \frac{1+x}{x}$ $\qquad \left[y = C_1(\frac{1+x}{x}) + C_2(\frac{x^2+x-1}{x} - \frac{2(x+1)\ln|x+1|}{x})\right]$

89. $xy'' + 2y' - xy = 0\,;\;\; y_1 = \frac{e^x}{x}$ $\qquad [xy = C_1e^{-x} + C_2e^x]$

90. $y'' - 2(1 + \mathrm{tg}^2 x)y = 0\,;\;\; y_1 = \mathrm{tg}\, x$ $\qquad [y = C_1\,\mathrm{tg}\, x + C_2(1 + x\,\mathrm{tg}\, x)]$

91. $(e^x + 1)y'' - 2y' - e^x y = 0\,;\;\; y_1 = e^x - 1$ $\qquad \left[y = C_1(e^x - 1) + \frac{C_2}{e^x+1}\right]$

92. $x^2(2x-1)y''' + (4x-3)xy'' - 2xy' + 2y = 0$ $\left[y = C_1x + \frac{C_2}{x} + C_3(x\ln|x| + 1)\right]$ $\left[y_1 = x, y_2 = \frac{1}{x}\right]$

93. $(x^2 - 2x + 3)y''' - (x^2+1)y'' + 2xy' - 2y = 0$ $\left[y = C_1x + C_2e^x + C_3(x^2 - 1)\right]$ $[y_1 = x, y_2 = e^x]$

WolframAlpha

2.5 Nehomogenní rovnice

Teorie

Příklad 94 : Metodou variace konstant vyřešíme rovnici

$$y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}\,.$$

1. Určíme obecné řešení homogenní rovnice $y'' + 9y = 0$ (viz metoda charakteristické rovnice, příklad (74))

$$\lambda^2 + 9 = 0 \Rightarrow y_h(x) = C_1\,\cos 3x + C_2\,\sin 3x\,.$$

2. Partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)\cos 3x + C_2(x)\sin 3x\,.$$

Funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$ splňují soustavu algebraických rovnic:

$$\begin{array}{rcl} C_1'\cos 3x + C_2'\sin 3x & = & 0 \;\Rightarrow\; 3C_1'\cos 3x\sin 3x + 3C_2'\sin^2 3x \;=\; 0\,,\\ -3C_1'\sin 3x + 3C_2'\cos 3x & = & \frac{1}{\sin 3x} \Rightarrow -3C_1'\sin 3x\cos 3x + 3C_2'\cos^2 3x \;=\; \frac{\cos 3x}{\sin 3x}\,. \end{array}$$

Odtud po sečtení rovnic dostaneme $3C_2' = \frac{\cos 3x}{\sin 3x} \Rightarrow C_2 = \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|$ a z první rovnice plyne $C_1'\cos 3x + \frac{\cos 3x}{3} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{x}{3}$. Partikulární řešení má tvar

$$y_p(x) = -\frac{x}{3}\,\cos x + \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|\,\sin 3x\,.$$

3. Obecným řešením úlohy je funkce

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\,\cos 3x + C_2\,\sin 3x - \frac{x}{3}\,\cos 3x + \frac{1}{9}\ln|\sin 3x|\,\sin 3x\,.$$

Příklad 95 : Metodou variace konstant vyřešíme rovnici

$$y'' - 4y' + 4y = \frac{e^{2x}}{x}\,.$$

1. Určíme obecné řešení homogenní rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$ (viz metoda charakteristické rovnice, příklad (75))

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \;\Rightarrow\; y_h(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,x\mathrm{e}^{2x}\,.$$

2. Partikulární řešení y_p nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru

$$y_p(x) = C_1(x)\,\mathrm{e}^{2x} + C_2(x)\,x\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$ splňují soustavu algebraických rovnic:

$$\begin{aligned} C_1'\mathrm{e}^{2x} + C_2' x\mathrm{e}^{2x} &= 0 \Rightarrow & C_1' + C_2' x &= 0\,, \\ C_1' 2\mathrm{e}^{2x} + C_2'(\mathrm{e}^{2x} + x2\mathrm{e}^{2x}) &= \tfrac{e^{2x}}{x} \Rightarrow & 2C_1' + C_2'(1+2x) &= \tfrac{1}{x}\,. \end{aligned}$$

Odečteme dvojnásobek první rovnici od druhé a dostaneme $C_2' = \frac{1}{x} \Rightarrow C_2 = \ln|x|$ a z první rovnice plyne $C_1' + \frac{1}{x}x = 0 \Rightarrow C_1 = -x$. Partikulární řešení má tvar

$$y_p(x) = -x\,\mathrm{e}^{2x} + \ln|x|\,x\mathrm{e}^{2x}\,.$$

3. Obecným řešením úlohy je funkce

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,x\mathrm{e}^{2x} + \ln|x|\,x\mathrm{e}^{2x}\,.$$

Řešte rovnice

96. $y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x}$ $\quad [y = e^x(x\ln|x| + C_1 x + C_2)]$

97. $y'' - 2y' + y = \frac{\mathrm{e}^x}{x^2+1}$ $\quad \left[y = \mathrm{e}^x(C_1 x + C_2 - \ln\sqrt{x^2+1} + x\,\mathrm{arctg}\,x)\right]$

98. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ $\quad \left[y = (e^{-x} + e^{-2x})\ln(\mathrm{e}^x+1) + C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x}\right]$

99. $y'' + y + \mathrm{cotg}^2\,x = 0$ $\quad \left[y = 2 + C_1\cos x + C_2\sin x + \cos(x)\ln|\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}|\right]$

Vyřešte rovnici $y'' - y' = f(x)$, jestliže

100. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$ $\quad [y = \mathrm{e}^x(x + C_1) - (\mathrm{e}^x+1)\ln(\mathrm{e}^x+1) + C_2]$

101. $f(x) = e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}$ $\quad \left[y = \frac{1}{2}\mathrm{e}^x(\arcsin(\mathrm{e}^x) + \mathrm{e}^x\sqrt{1-e^{2x}} + C_1) + \frac{1}{3}\sqrt{(1-e^{2x})^3} + C_2\right]$

102. $f(x) = e^{2x}\cos(\mathrm{e}^x)$ $\quad [y = C_1\mathrm{e}^x - \cos(\mathrm{e}^x) + C_2]$

WolframAlpha

Řešte počáteční úlohy

103. $y'' + 4y = 2\cos 2x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 4$ $\quad \left[y = \frac{1}{2}(4+x)\sin 2x\right]$

104. $y'' - 9y = 1 - x,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 0$ $\quad \left[y = \frac{1}{27}(\mathrm{e}^{3x} + 2\mathrm{e}^{-3x}) + \frac{1}{9}(x-1)\right]$

105. $y'' + y' - 2y = 2,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$ $\quad [y = \mathrm{e}^x - 1]$

2.6 Metoda odhadu tvaru partikulárního řešení

Teorie

<u>*Příklad 106*</u>: Pomocí odhadu tvaru partikulárníbo řešení vyřešíme rovnici

$$y'' - 5y' = (x-1)^2 \,.$$

1. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 5\lambda = 0$, má kořeny $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 5$ a homogenní řešení má tvar
$$y_h = C_1 + C_2\,\mathrm{e}^{5x} \,.$$

2. Z rovnosti
$$(x-1)^2 = \mathrm{e}^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$$
vyplývá $a = 0$, $b = 0$, $n = 2$, $m = 0$ $\Rightarrow$ $k = \max\{m, n\} = 2$, $R_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, kde a_2, a_1, a_0 jsou konstanty. Kritické číslo $a + i\,b = 0$ je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, tedy $r = 1$.

   Partikulární řešení nehomogenní rovnice má tedy tvar $x^r R_k(x)$, neboli
$$y_p(x) = x\,(a_2x^2 + a_1x + a_0) \,,$$
potom $y_p'(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0 + x\,(2a_2x + a_1) = 3a_2x^2 + 2a_1x + a_0$, $y_p''(x) = 6a_2x + 2a_1$. Po dosazení y_p', y_p'' do dané rovnice dostaneme:
$$6a_2x + 2a_1 - 5\,(3a_2x^2 + 2a_1x + a_0) = (x-1)^2 \,,$$
$$-15a_2x^2 + (6a_2 - 10a_1)x + 2a_1 - 5a_0 = x^2 - 2x + 1 \,,$$
$$\Rightarrow \quad a_2 = \tfrac{-1}{15}\,,\ a_1 = \tfrac{4}{25}\,,\ = a_0 = \tfrac{-17}{125}\,,$$
a partikulárním řešením je funkce $y_p(x) = x\,(\frac{-1}{15}x^2 + \frac{4}{25}x + \frac{-17}{125})$.

3. Obecné řešení má tvar $y(x) = C_1 + C_2\,x\mathrm{e}^{5x} + x\,(\frac{-1}{15}x^2 + \frac{4}{25}x + \frac{-17}{125})$.

<u>*Příklad 107*</u>: Pomocí metody odhadu vyřešíme rovnici

$$y'' - y = \mathrm{e}^x - x \,.$$

1. Charakteristická rovnice $\lambda^2 - 1 = 0$, má kořeny $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ a homogenní řešení má tvar
$$y_h = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-x} \,.$$

2. Zadanou úlohu rozdělíme na dvě - s pravou stranou: a) e^x a b) $-x$.

   a) Z rovnosti
$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$$
vyplývá $a = 1$, $b = 0$, $n = 0$, $m = 0$ $\Rightarrow$ $k = 0$, $R_0(x) = a_0$. Kritické číslo $a + i\,b = 1$ je jednonásobný kořen charakteristické rovnice, tedy $r = 1$.

Partikulární řešení nehomogenní rovnice hledáme ve tvaru $y_p(x) = x\,\mathrm{e}^x a_0$, potom $y_p'(x) = a_0\,(1+x)\mathrm{e}^x$, $y_p''(x) = a_0\,(2+x)\mathrm{e}^x$. Po dosazení dostaneme: $a_0\,(2+x)\mathrm{e}^x - a_0\,x\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x \;\Rightarrow\; a_0 = \frac{1}{2}$ a řešením je funkce

$$y_{p_a}(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x\,.$$

b) Z rovnosti

$$-x = \mathrm{e}^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$$

vyplývá $a = 0$, $b = 0$, $n = 1$, $m = 0 \;\Rightarrow\; k = 1$, $R_1(x) = a_1x + a_0$. Kritické číslo $a + i\,b = 0$ není kořenem charakteristické rovnice, tedy $r = 0$.

Partikulární řešení má nyní tvar $y_p(x) = a_1x + a_0$, potom $y_p'(x) = a_1$, $y_p''(x) = 0$. Po dosazení dostaneme: $-(a_1x + a_0) = -x \;\Rightarrow\; a_1 = 1$, $a_0 = 0$ a řešením je funkce

$$y_{p_b}(x) = x\,.$$

Partikulární řešení má tudíž tvar $y_p(x) = y_{p_a}(x) + y_{p_b}(x) = \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x + x$.

3. Obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^x + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + \frac{1}{2}x\mathrm{e}^x + x\,.$$

Metodou odhadu řešte rovnice

108. $y'' + y = 4x\mathrm{e}^x$ $\quad\left[y = C_1\cos x + C_2\sin x + (2x-2)\mathrm{e}^x\right]$

109. $y'' - y = 2\mathrm{e}^x - x^2$ $\quad\left[y = C_1\mathrm{e}^x + C_2e^{-x} + x\mathrm{e}^x + x^2 + 2\right]$

110. $y'' + y' - 2y = 3x\mathrm{e}^x$ $\quad\left[y = C_1\mathrm{e}^x + C_2e^{-2x} + (\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3})\mathrm{e}^x\right]$

111. $y'' - 3y' + 2y = \sin x$ $\quad\left[y = C_1\mathrm{e}^x + C_2e^{2x} + \frac{\sin x}{10} + \frac{3\cos x}{10}\right]$

112. $y'' + y = 4\sin x$ $\quad\left[y = C_1\cos x + C_2\sin x - 2x\cos x\right]$

113. $y'' - 3y' + 2y = x\cos x$ $\quad\left[y = C_1\mathrm{e}^x + C_2e^{2x} + (\frac{x}{10} - \frac{12}{100})\cos x - (\frac{3x}{10} + \frac{34}{100})\sin x\right]$

114. $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x}$ $\quad\left[y = C_1\mathrm{e}^x + C_2e^{-4x} - \frac{x}{5}e^{-4x} - (\frac{x}{6} + \frac{1}{36})e^{-x}\right]$

115. $y'' - 9y = e^{3x}\cos x$ $\quad\left[y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} + e^{3x}(\frac{6}{37}\sin x - \frac{1}{37}\cos x)\right]$

116. $y'' - 2y' + y = 6x\mathrm{e}^x$ $\quad\left[y = (C_1 + C_2x + x^3)\mathrm{e}^x\right]$

117. $y'' + y = x\sin x$ $\quad\left[y = (C_1 - \frac{x^2}{4})\cos x + (C_2 + \frac{x}{4})\sin x\right]$

Řešte rovnice s počáteční podmínkou

118. $y'' + 9y = 6e^{3x}\,;\ y(0) = y'(0) = 0$ $\left[y = -\frac{1}{3}(\cos 3x + \sin 3x - e^{3x})\right]$

119. $y'' - 4y' + 5y = 2x^2 \mathrm{e}^x\,;\ y(0) = 2,\ y'(0) = 3$ $\left[y = e^{2x}(\cos x - 2\sin x) + (x+1)^2 \mathrm{e}^x\right]$

120. $y'' + 6y' + 9y = 10\sin x\,;\ y(0) = y'(0) = 0$ $\left[y = (x + \frac{3}{5})e^{-3x} + \frac{1}{5}(4\sin x - 3\cos x)\right]$

121. $y'' + 4y = \sin x\,;\ y(0) = y'(0) = 1$ $\left[y = \cos 2x + \frac{1}{3}(\sin 2x + \sin x)\right]$

122. $y'' + y = 2\cos x\,;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ $[y = \cos x + x\sin x]$

Odhadněte partikulární řešení následujících rovnic

123. $y'' - 7y' = (x-1)^2$ $\left[A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x\right]$

124. $y'' + 7x' = e^{-7x}$ $\left[Axe^{-7x}\right]$

125. $y'' - 8y' + 16y = (10 - x)e^{4x}$ $\left[(A_1x^3 + A_2x^2)e^{4x}\right]$

126. $y'' + 25y = \cos 5x$ $[x(A\cos 5x + B\sin 5x)]$

127. $y'' + 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x + \cos 2x)$ $\left[(A\cos 2x + B\sin 2x)e^{2x}\right]$

128. $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(\sin 2x - \cos 2x)$ $\left[x(A\cos 2x + B\sin 2x)e^{2x}\right]$

129. $y^{(4)} - y''' = 4$ $\left[Ax^3\right]$

130. $y''' + 2y'' + y' = (2x+1)\sin x + (x^2 - 4x)\cos x$ $\left[(Ax^2 + Bx + C)\cos x + \right.$
$\left.+ (Dx^2 + Ex + F)\sin x\right]$

131. $y''' - y' = \mathrm{e}^x \sin x + 2x^2$ $[\mathrm{e}^x(A\cos x + B\sin x) +$
$\left.+ x(Cx^2 + Dx + E)\right]$

132. $y^{(4)} - 4y''' + 8y'' - 8y' + 4y = \mathrm{e}^x(x\cos x + \sin x)$ $\left[x^2\mathrm{e}^x\{(Ax + B)\cos x + \right.$
$+ (Cx + D)\sin x\}]$

133. $y^{(5)} - y^{(4)} + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 3\cos 2x + 1$ $\left[x^2(A\cos 2x + B\sin 2x) + C\right]$
$[y = 3\cos 2x + 1]$

$\boxed{\text{WolframAlpha}}$

2.7 Okrajové úlohy

Teorie

Příklad 134 : Pomocí charakteristické rovnice a dosazením okrajových podmínek vyřešíme smíšenou okrajovou úlohu

$$\begin{aligned} & y'' - 2y' - 8y = 0\,, \qquad x \in (0,1)\,, \\ & y(0) = 1\,,\quad y'(1) = 0\,. \end{aligned}$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 4\,,\ \lambda_2 = -2$ a obecným řešením úlohy je funkce $y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{4x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x}$. Z okrajových podmínek dostaneme

$$\left.\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2\,, \\ 0 &= 4C_1\mathrm{e}^4 - 2C_2\mathrm{e}^{-2}\,, \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} C_1 &= \tfrac{1}{1+2\mathrm{e}^6}\,, \\ C_2 &= \tfrac{2\mathrm{e}^6}{1+2\mathrm{e}^6}\,. \end{aligned}$$

Řešením okrajové úlohy je funkce $y(x) = \frac{1}{1+2\mathrm{e}^6}\,\mathrm{e}^{4x} + \frac{2\mathrm{e}^6}{1+2\mathrm{e}^6}\,\mathrm{e}^{-2x}$.

Řešte následující okrajové úlohy

135. $y'' - y = 0\,;\ y(0) = 0, y(2\pi) = 1$ $\left[y = \frac{\sinh x}{\sinh 2\pi}\right]$

136. $y'' + y = 0\,;\ y(0) = 0, y(2\pi) = 1$ [nemá řešení]

137. $y'' - k^2 y = 0\,;\ y(0) = v_1, y(x_0) = v_2$ $\left[y = \frac{1}{\sinh kx_0}(v_1 \sinh k(x_0 - x) + v_2 \sinh kx)\right]$

138. $y'' - \alpha^2 y = 0\,;\ y(0) = v, y'(x_0) = 0$ $\left[y = v\frac{\cosh(x_0 - x)}{\cosh \alpha x_0}\right]$

139. $y'' - \alpha^2 s y = 0\,;\ y(0) = \frac{1}{s}, y'(x_0) = 0$ $\left[s < 0; y = \frac{\cos \alpha\sqrt{-s}(x_0 - x)}{s \cos \alpha\sqrt{-s}x_0} \text{ pro } x_0 \neq \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha\sqrt{-s}}\right]$
$\left[\text{pro } x_0 = \frac{(2k+1)\pi}{2\alpha\sqrt{-s}} \text{ nemá řešení; } s > 0; y = \frac{\cosh \alpha\sqrt{s}(x_0 - x)}{s \cosh \alpha\sqrt{s}x_0}; k = 1, 2, 3, \ldots\right]$

140. $y'' - \lambda^2 y = 0\,;\ \lambda \neq 0, y(0) = 0, y(1) = \frac{1}{\lambda}$ $\left[y = \frac{\sinh \lambda x}{\lambda \sinh \lambda}\right]$

141. $y'' - \lambda^2 y = 0\,;\ \lambda \neq 0, y(0) = 0, y'(1) = \frac{1}{\lambda}$ $\left[y = \frac{\sinh \lambda x}{\lambda^2 \cosh \lambda}\right]$

142. $y'' - \lambda^2 y = 0\,;\ \lambda \neq 0, y'(0) = 0, y(1) = \frac{1}{\lambda}$ $\left[y = \frac{\cosh \lambda x}{\lambda \cosh \lambda}\right]$

143. $xy'' + y' = 0;\ y(1) = \alpha y'(1)\,;\ y(x)$ je omezená pro $x \to \infty$ $[y = 0]$

144. $y^{(4)} - \lambda^4 y = 0;\ y(0) = y''(0) = 0, y(\pi) = y''(\pi) = 0$ $[y = C \sin kx \text{ pro } \lambda = k]$
$[k = 1, 2, 3, \ldots \quad y = 0 \text{ pro ostatní } \lambda]$

WolframAlpha

2.8 Úlohy na vlastní čísla a vlastní funkce

Teorie

Příklad 145 : Určíme vlastní čísla a vlastní funkce okrajové úlohy

$$y'' + \lambda y = 0\,, \quad y'(0) = 0\,, \quad y'(\pi) = 0\,.$$

Řešení hledáme ve tvaru $y(x) = \mathrm{e}^{kx}$, potom charakteristická rovnice má tvar $k^2 + \lambda = 0 \Rightarrow k = \pm\sqrt{-\lambda}$.

- Pro $\lambda < 0$ je $k_1 = \sqrt{-\lambda}\,,\, k_2 = -\sqrt{-\lambda}$ a obecné řešení má tvar

  $$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x} \;\Rightarrow\; y'(x) = \sqrt{-\lambda}\,C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} - \sqrt{-\lambda}\,C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x}\,.$$

  Z okrajových podmínek dostáváme soustavu rovnic pro neznámé konstanty $C_1,\ C_2$

  $$\left.\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2\,,\\ 0 &= \sqrt{-\lambda}\,C_1\,\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\pi} - \sqrt{-\lambda}\,C_2\,\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\pi}\,, \end{aligned}\right\}\; C_1 = 0,\ C_2 = 0 \;\Rightarrow\; y = 0\,.$$

- Pro $\lambda = 0$ má obecné řešení tvar $y(x) = C_1 + C_2\,x \;\Rightarrow\; y'(x) = C_2$ a z okrajových podmínek dostaneme

  $$C_1 \in \mathbb{R}\,,\ C_2 = 0 \;\Rightarrow\; y = C_1\,.$$

- Pro $\lambda > 0$ má obecné řešení tvar

  $$y(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x \;\Rightarrow\; y'(x) = -\sqrt{\lambda}\,C_1\sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}\,C_2\cos\sqrt{\lambda}x\,.$$

  Z okrajových podmínek plyne

  $$\left.\begin{aligned} 0 &= C_2\,,\\ 0 &= -C_1\,\sin\sqrt{\lambda}\pi\,, \end{aligned}\right\}\; \sqrt{\lambda}\pi = n\pi\,,\, n \in \mathbb{N}\,.$$

  Dostáváme tak **posloupnost vlastních čísel**

  $$\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$$

  a **posloupnost jim odpovídajících vlastních funkcí** je

  $$\{\cos x, \cos 2x, \cos 3x, \ldots\}.$$

Najděte vlastní čísla a vlastní funkce úlohy $y'' + \lambda y = 0$, je-li

146. $x \in <0, \pi>, y(0) = y'(\pi) = 0$ $\quad\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2}{4}, y_K = \sin\frac{2K-1}{2}x, K \in N\right]$

147. $x \in < 0, \pi >, y'(0) = y(\pi) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2}{4}, y_K = \cos \frac{2K-1}{2} x, K \in N\right]$

148. $x \in < 1, 2 >, y(1) = y(2) = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2, y_K = \sin K\pi x, K \in N\right]$

149. $x \in < 1, 2 >, y(1) = y'(2) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4}, y_K = \cos \frac{2K-1}{2}\pi x, K \in N\right]$

150. $x \in < 1, 2 >, y'(1) = y(2) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4}, y_K = \sin \frac{2k-1}{2}\pi x, K \in N\right]$

151. $x \in < 1, 2 >, y'(1) = y'(2) = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2, y_K = \cos K\pi x; K = 0, 1, 2, \dots\right]$

152. $x \in < a, b >, y(a) = y(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{(b-a)^2}, y_K = \sin \frac{K\pi(x-a)}{b-a}, K \in N\right]$

153. $x \in < a, b >, y(a) = y'(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}, y_K = \sin \frac{(2K-1)(x-a)\pi}{2(b-a)}, K \in N\right]$

154. $x \in < a, b >, y'(a) = y(b) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{(2K-1)^2\pi^2}{4(b-a)^2}, y_K = \cos \frac{(2K-1)(x-a)\pi}{2(b-a)}, K \in N\right]$

Najděte vlastní čísla a vlastní funkce následujících okrajových úloh

155. $y'' + 2y' + \lambda y = 0\,;\; x \in < 0, l >,\; y(0) = y(l) = 0$ $\left[\lambda_K = 1 + \frac{K^2\pi^2}{l^2}\right]$
$\left[y_K = e^{-x} \sin \frac{K\pi x}{l}, K \in N\right]$

156. $x^2y'' + xy' + \lambda y = 0\,;\; x \in < 1, l >,\; y(1) = y(l) = 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{\ln^2 l}, y_K = \sin \frac{K\pi \ln x}{\ln l}\right]$

157. $y'' + (\lambda + 1)y = 0$ $\left[\lambda_K = K^2\pi^2 - 1, K \in N\right]$
$x \in < 0, 1 >,\; y(0) = y'(0) = 0,\; y(1) - y'(1) = 0$ $\left[y_K = \sin(\mathrm{arcotg}(K\pi) + K\pi x)\right]$

158. $y'' + \frac{2}{x}y' + \lambda y = 0\,;\; y(l) = 0, y$ je omezená pro $x \to 0$ $\left[\lambda_K = \frac{K^2\pi^2}{l^2}, y_K = \frac{1}{x} \sin \frac{K\pi x}{l}\right]$

3 Soustavy lineárních diferenciálních rovnic

Teorie

<u>*Příklad 159*</u>: Určíme fundamentální matici a obecné řešení homogenní soustavy

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + y_2 \\ y_2' &= 3y_1 + 4y_2 \,. \end{aligned}$$

Řešení homogenní úlohy hledáme ve tvaru $\vec{y}(x) = \vec{h}\mathrm{e}^{\lambda x}$, kde $\vec{h}, \lambda$ budou vlastní vektory a vlastní čísla matice soustavy

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} .$$

Vlastní čísla matice soustavy dostaneme z rovnice

$$\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \det \begin{pmatrix} \lambda - 2 & -1 \\ -3 & \lambda - 4 \end{pmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 4) - 3 = 0 \;\Rightarrow\; \lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = 5\,.$$

K vlastním číslům určíme vlastní vektory:

$$\lambda_1 = 1: \quad (\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{h}_1 = (1, -1)^T \;,$$

$$\lambda_2 = 5: \quad (5\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \;\Rightarrow\; \vec{h}_2 = (1, 3)^T \;.$$

Fundamentální matice má tedy tvar

$$\mathbb{Y}(x) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5x} \right) = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{5x} \\ -\mathrm{e}^x & 3\,\mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix}$$

a obecné řešení má tvar

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5x}.$$

3.1 Soustavy homogenních diferenciálních rovnic

160. $y_1' = y_1 - y_2$ $\quad [y_1 = C_1 e^{-x} + C_2 e^{3x}]$
$y_2' = y_2 - 4y_1$ $\quad [y_2 = 2C_1 e^{-x} - 2C_2 e^{3x}]$

161. $y_1' + y_1 - 8y_2 = 0$ $\quad [y_1 = 2C_1 e^{3x} - 4C_2 e^{-3x}]$
$y_2' - y_1 - y_2 = 0$ $\quad [y_2 = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-3x}]$

162. $y_1' = y_1 + y_2$ $\quad [y_1 = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)]$
$y_2' = 3y_2 - 2y_1$ $\quad [y_2 = e^{2x}\{(C_1 + C_2)\cos x + (C_2 - C_1)\sin x\}]$

163. $y_1' = y_1 - 3y_2$ $\qquad [y_1 = \mathrm{e}^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x)]$
$y_2' = 3y_1 + y_2$ $\qquad [y_2 = \mathrm{e}^x(C_1 \sin 3x - C_2 \cos 3x)]$

164. $y_1' + y_1 + 5y_2 = 0$ $\qquad [y_1 = (2C_2 - C_1) \cos 2x - (2C_1 + C_2) \sin 2x]$
$y_2' - y_1 - y_2 = 0$ $\qquad [y_2 = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x]$

165. $y_1' = 2y_1 + y_2$ $\qquad \left[y_1 = (C_1 + C_2 x)e^{3x}\right]$
$y_2' = 4y_2 - y_1$ $\qquad \left[y_2 = (C_1 + C_2 + C_2 x)e^{3x}\right]$

166. $y_1' = 3y_1 - y_2$ $\qquad [y_1 = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x]$
$y_2' = 4y_1 - y_2$ $\qquad [y_2 = (2C_1 - C_2 + 2C_2 x)\mathrm{e}^x]$

167. $y_1' = y_1 + y_3 - y_2$ $\qquad \left[y_1 = C_1\mathrm{e}^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-x}\right]$
$y_2' = y_1 + y_2 - y_3$ $\qquad \left[y_2 = C_1\mathrm{e}^x - 3C_3 e^{-x}\right]$
$y_3' = 2y_1 - y_2$ $\qquad \left[y_3 = C_1\mathrm{e}^x + C_2 e^{2x} - 5C_3 e^{-x}\right]$

168. $y_1' = 3y_1 - y_2 + y_3$ $\qquad \left[y_1 = C_1\mathrm{e}^x + C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x}\right]$
$y_2' = y_1 + y_2 + y_3$ $\qquad \left[y_2 = C_1\mathrm{e}^x - 2C_2 e^{2x} + C_3 e^{5x}\right]$
$y_3' = 4y_1 - y_2 + 4y_3$ $\qquad \left[y_3 = -C_1\mathrm{e}^x - 3C_2 e^{2x} + 3C_3 e^{5x}\right]$

169. $y_1' = 4y_2 - 2y_3 - 3y_1$ $\qquad \left[y_1 = C_1\mathrm{e}^x + C_3 e^{-x}\right]$
$y_2' = y_3 + y_1$ $\qquad \left[y_2 = C_1\mathrm{e}^x + C_2 e^{2x}\right]$
$y_3' = 6y_1 - 6y_2 + 5y_3$ $\qquad \left[y_3 = 2C_2 e^{2x} - C_3 e^{-x}\right]$

170. $y_1' = y_1 - y_2 - y_3$ $\qquad [y_1 = \mathrm{e}^x(2C_2 \sin 2x + 2C_3 \cos 2x)]$
$y_2' = y_1 + y_2$ $\qquad [y_2 = \mathrm{e}^x(C_1 - C_2 \cos 2x + C_3 \sin 2x)]$
$y_3' = 3y_1 + y_3$ $\qquad [y_3 = \mathrm{e}^x(-C_1 - 3C_3 \cos 2x + 3C_3 \sin 2x]$

171. $y_1' = 4y_1 - y_2 - y_3$ $\qquad \left[y_1 = C_1 e^{2x} + (C_2 + C_3)e^{3x}\right]$
$y_2' = y_1 + 2y_2 - y_3$ $\qquad \left[y_2 = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}\right]$
$y_3' = y_1 - y_2 + 2y_3$ $\qquad \left[y_3 = C_1 e^{2x} + C_3 e^{3x}\right]$

172. $y_1' = y_1 - y_2 + y_3$ $\qquad \left[y_1 = (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^x + C_3 e^{2x}\right]$
$y_2' = y_1 + y_2 - y_3$ $\qquad [y_2 = (C_1 - 2C_2 + C_2 x)\mathrm{e}^x]$
$y_3' = 2y_3 - y_2$ $\qquad \left[y_3 = (C_1 - C_2 + C_2 x)\mathrm{e}^x + C_3 e^{2x}\right]$

173. $y_1' = 4y_1 - y_2$ $\qquad \left[y_1 = (C_1 + C_2 x + C_3 x^2)e^{2x}\right]$
$y_2' = 3y_1 + y_2 - y_3$ $\qquad \left[y_2 = \{2C_1 - C_2 + (2C_2 - 2C_3)x + 2C_3 x^2\}e^{2x}\right]$
$y_3' = y_1 + y_3$ $\qquad \left[y_3 = \{C_1 - C_2 + 2C_3 + (C_2 - 2C_3)x + C_3 x^2\}e^{2x}\right]$

WolframAlpha

3.2 Soustavy nehomogenních diferenciálních rovnic

Příklad 174 : Řešení nehomogenní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= \ 2y_1 + y_2 + \mathrm{e}^x \\ y_2' &= \ 3y_1 + 4y_2 \,. \end{aligned}$$

hledáme metodou **variace konstant**.

- Nejdříve vyřešíme homogenní soustavu (viz příklad 159). Řešení homogenní soustavy má tvar

$$\vec{y}(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x & \mathrm{e}^{5x} \\ -\mathrm{e}^x & 3\mathrm{e}^{5x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5x} \,,$$

  kde $\mathbb{Y}(x)$ je fundamentální matice soustavy a $\vec{C}$ je vektor konstant.

- Partikulární řešení dané soustavy hledáme ve tvaru $\vec{y}_p(x) = \mathbb{Y}(x) \cdot \vec{C}(x)$, kde $\vec{C}(x)$ je vektor funkcí. Po dosazení do soustavy dostaneme $\mathbb{Y}'(x)\vec{C}(x) + \mathbb{Y}(x)\vec{C}'(x) = \mathbb{A}\mathbb{Y}(x)\vec{C}(x) + \vec{b}(x)$. Protože $\mathbb{Y}' = \mathbb{A}\mathbb{Y}$, tak platí

$$C_1'(x) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + C_2'(x) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5x} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^x \\ 0 \end{pmatrix} .$$

  Odtud vyplývá

$$\begin{aligned} C_1'\,\mathrm{e}^x + C_2'\,\mathrm{e}^{5x} &= \mathrm{e}^x \\ -C_1'\,\mathrm{e}^x + 3C_2'\,\mathrm{e}^{5x} &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 4C_2'\,\mathrm{e}^{5x} &= \mathrm{e}^x \\ -4C_1'\,\mathrm{e}^x &= -3\mathrm{e}^x \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} C_2 &= \tfrac{-1}{16}\,\mathrm{e}^{-4x} \\ C_1 &= \tfrac{3}{4}\,x \end{aligned}$$

  a partikulární řešení soustavy má tvar

$$y_p(x) = \frac{3}{4}\,x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + \frac{-1}{16} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x.$$

- Obecným řešením nehomogenní soustavy je funkce

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_p(x) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{5x} + \tfrac{3}{4}\,x \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x + \tfrac{-1}{16} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^x \,.$$

Příklad 175 : Řešení nehomogenní soustavy diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned} y_1' &= \ y_2 + \mathrm{e}^x \\ y_2' &= \ y_1 + x^2 \,. \end{aligned}$$

dostaneme ve třech krocích.

- 1.krok Vyřešíme homogenní soustavu (v soustavě zůstanou jen členy s funkcemi a jejich derivacemi)
$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_1 \,. \end{aligned}$$
Matice soustavy je $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ a její vlastní čísla dostaneme z rovnice
$$\det(\lambda\mathbb{I} - \mathbb{A}) = \det\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = -1\,.$$
K vlastním číslům určíme vlastní vektory:
$$\lambda_1 = 1: \quad (1\cdot\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{h}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$
$$\lambda_2 = -1: \quad (-1\cdot\mathbb{I} - \mathbb{A})\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$
Fundamentální matice má tedy tvar
$$\mathbb{Y}(x) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x}\right) = \begin{pmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{pmatrix}.$$
Označíme $\vec{C} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$, pak obecné řešení homogenní soustavy má tvar
$$\vec{y}_h(x) = \mathbb{Y}(x)\cdot\vec{C} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} = C_1\,\vec{h}_1\,e^x + C_2\,\vec{h}_2\,e^{-x}\,.$$

- 2.krok Partikulární řešení soustavy hledáme ve tvaru $\vec{y}_p(x) = \mathbb{Y}(x)\cdot\vec{C}(x)\,,$ kde $\vec{C}(x) = \begin{pmatrix} C_1(x) \\ C_2(x) \end{pmatrix}$ je nyní vektor funkcí.
Po dosazení do soustavy dostaneme
$\mathbb{Y}'(x)\vec{C}(x) + \mathbb{Y}(x)\vec{C}'(x) = \mathbb{A}\mathbb{Y}(x)\vec{C}(x) + \vec{b}(x)\,,$ kde $\vec{b}(x) = \begin{pmatrix} e^x \\ x^2 \end{pmatrix}$.
Protože $\mathbb{Y}'(x) = \mathbb{A}\mathbb{Y}(x)$, tak platí
$$C_1'(x)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^x + C_2'(x)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-x} = \begin{pmatrix} e^x \\ x^2 \end{pmatrix}$$
Odtud vyplývá
$$\begin{aligned} C_1'\,e^x + C_2'\,e^{-x} &= e^x \\ C_1'\,e^x - C_2'\,e^{-x} &= x^2 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} 2C_1'\,e^x &= e^x + x^2 \\ 2C_2'\,e^{-x} &= e^x - x^2 \end{aligned} \quad\Rightarrow\quad \begin{aligned} C_1' &= \tfrac{1}{2}(1 + x^2 e^{-x}) \\ C_2' &= \tfrac{1}{2}(e^{2x} - x^2 e^x) \end{aligned}$$

a pomocí per partes dostaneme

$\int x^2 \mathrm{e}^{-x}\,dx = -x^2\mathrm{e}^{-x} + \int 2x\mathrm{e}^{-x}\,dx = -x^2\mathrm{e}^{-x} - 2x\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{-x} = (-x^2-2x-2)\mathrm{e}^{-x}.$

Tudíž $C_1 = \frac{1}{2}(x + (-x^2-2x+2)\mathrm{e}^{-x})\,,\quad C_2 = \frac{1}{2}(\,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - (x^2-2x+2)\mathrm{e}^{x})$

a partikulární řešení soustavy má tvar

$$y_p(x) = \frac{1}{2}(x+(-x^2-2x-2)\mathrm{e}^{-x})\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{2}(\,\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x} - (x^2-2x+2)\mathrm{e}^{x})\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x}$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x} - x^2 - 2\\ \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x} - 2x\end{pmatrix}$$

- 3.krok Obecným řešením nehomogenní soustavy je vektorová funkce

$$\vec{y}(x) = \vec{y}_h(x) + \vec{y}_p(x) = C_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{x} + C_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\mathrm{e}^{-x} + \begin{pmatrix}\frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x} + \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x} - x^2 - 2\\ \frac{1}{2}x\mathrm{e}^{x} - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{x} - 2x\end{pmatrix}.$$

176. $y_1' = y_2 - 5\cos x$ $\quad[y_1 = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-x} - 2\sin x - \cos x]$
$y_2' = 2y_1 + y_2$ $\quad[y_2 = 2C_1\mathrm{e}^{2x} - C_2\mathrm{e}^{-x} + \sin x + 3\cos x]$

177. $y_1' = 4y_1 + y_2 - \mathrm{e}^{2x}$ $\quad[y_1 = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{3x} + (x+1)\mathrm{e}^{2x}]$
$y_2' = y_2 - 2y_1$ $\quad[y_2 = -2C_1\mathrm{e}^{2x} - C_2\mathrm{e}^{3x} - 2x\mathrm{e}^{2x}]$

178. $y_1' = 2y_2 - y_1 + 1$ $\quad[y_1 = (C_1 + 2C_2x)\mathrm{e}^{x} - 3]$
$y_2' = 3y_2 - 2y_1$ $\quad[y_2 = (C_1 + C_2 + 2C_2x)\mathrm{e}^{x} - 2]$

179. $y_1' = 5y_1 - 3y_2 + 2\mathrm{e}^{3x}$ $\quad[y_1 = C_1\mathrm{e}^{2x} + 3C_2\mathrm{e}^{4x} - \mathrm{e}^{-x} - 4\mathrm{e}^{3x}]$
$y_2' = y_1 + y_2 + 5\mathrm{e}^{-x}$ $\quad[y_2 = C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{4x} - 2\mathrm{e}^{-x} - 2\mathrm{e}^{3x}]$

180. $y_1' = 2y_1 - 4y_2$ $\quad[y_1 = 4C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} - 4x\mathrm{e}^{x}]$
$y_2' = y_1 - 3y_2 + 3\mathrm{e}^{x}$ $\quad[y_2 = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} - (x-1)\mathrm{e}^{x}]$

181. $y_1' = 2y_1 - y_2$ $\quad[y_1 = C_1\mathrm{e}^{3x} + 3x^2 + 2x + C_2]$
$y_2' = y_2 - 2y_1 + 18x$ $\quad[y_2 = -C_1\mathrm{e}^{3x} + 6x^2 - 2x + 2C_2 - 2]$

182. $y_1' = y_1 + 2y_2 + 16x\mathrm{e}^{x}$ $\quad[y_1 = 2C_1\mathrm{e}^{2x} + C_2\mathrm{e}^{-3x} - (12x+13)\mathrm{e}^{x}]$
$y_2' = 2y_1 - 2y_2$ $\quad[y_2 = C_1\mathrm{e}^{2x} - 2C_2\mathrm{e}^{-3x} - (8x+6)\mathrm{e}^{x}]$

183. $y_1' = 2y_1 - y_2$ $\quad[y_1 = (C_1 + C_2x - x^2)\mathrm{e}^{x}]$
$y_2' = y_1 + 2\mathrm{e}^{x}$ $\quad[y_2 = \{C_1 - C_2 + (C_2+2)x - x^2\}\mathrm{e}^{x}]$

184. $y_1' = y_1 - y_2 + 8x$ $\quad[y_1 = C_1\cos 2x - C_2\sin 2x + 2x + 2]$
$y_2' = 5y_1 - y_2$ $\quad[y_2 = (C_1 + 2C_2)\cos 2x + (2C_1 - C_2)\sin 2x + 10x]$

185. $y_1' = 2y_1 - y_2$ $\qquad \left[y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + e^x(2\cos x - \sin x)\right]$

$\quad y_2' = 2y_2 - y_1 - 5e^x \sin x$ $\qquad \left[y_2 = C_1 e^x - C_2 e^{3x} + e^x(3\cos x + \sin x)\right]$

186. $y_1' = y_2 + \operatorname{tg}^2 x - 1$ $\qquad [y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x + \operatorname{tg} x]$

$\quad y_2' = -y_1 + \operatorname{tg} x$ $\qquad [y_2 = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 2]$

187. $y_1' = -4y_1 - 2y_2 + \frac{2}{e^x - 1}$ $\qquad [y_1 = C_1 + 2C_2 e^{-x} + 2e^{-x} \ln|e^x - 1|]$

$\quad y_2' = 6y_1 + 3y_2 - \frac{3}{e^x - 1}$ $\qquad [y_2 = -2C_1 - 3C_2 e^{-x} - 3e^{-x} \ln|e^x - 1|]$

188. $y_1' = y_1 - y_2 + \frac{1}{\cos x}$ $[y_1 = (C_1 + x)\cos x + (C_2 + x)\sin x + (\cos x - \sin x)\ln|\cos x|]$

$\quad y_2' = 2y_1 - y_2$ $[y_2 = (C_1 - C_2)\cos x + (C_1 + C_2)\sin x + 2\cos x \ln|\cos x| + 2x\sin x]$

189. $y_1' = 2y_1 + y_2 - 2y_3 - x + 2$ $\qquad [y_1 = C_1 e^x + C_2 \sin x + C_3 \cos x]$

$\quad y_2' = 1 - y_1$ $\qquad [y_2 = x - C_1 e^x + C_2 \cos x - C_3 \sin x]$

$\quad y_3' = y_1 + y_2 - y_3 - x + 1$ $\qquad [y_3 = 1 + C_2 \sin x + C_3 \cos x]$

Najděte partikulární řešení následujících soustav diferenciálních rovnic

190. $y_2' = y_2 + y_3\,;\ y_2(0) = 0, y_3(0) = -1$ $\qquad \left[y_2 = e^{2x} - e^{3x}\right]$

$\quad y_3' = -2y_2 + 4y_3$ $\qquad \left[y_3 = e^{2x} - 2e^{3x}\right]$

191. $y_2' = 3y_2 - y_3\,;\ y_2(0) = 1, y_3(0) = 5$ $\qquad \left[y_2 = e^{-2x}\right]$

$\quad y_3' = 10y_2 - 4y_3$ $\qquad \left[y_3 = 5e^{-2x}\right]$

192. $y_1' = 3y_1 + 8y_2\,;\ y_1(0) = 6, y_2(0) = -2$ $\qquad [y_1 = 2(2e^x + e^{-x})]$

$\quad y_2' = -3y_2 - y_1$ $\qquad [y_2 = -e^x - e^{-x}]$

193. $y_1' = e^x - y_2 - 5y_1\,;\ y_1(0) = \frac{119}{900}, y_2(0) = \frac{211}{900}$ $\qquad \left[y_1 = \frac{4}{25}e^x - \frac{1}{36}e^{2x}\right]$

$\quad y_2' = e^{2x} + y_1 - 3y_2$ $\qquad \left[y_2 = \frac{1}{25}e^x + \frac{7}{36}e^{2x}\right]$

194. $y_1' = y_2\,;\ y_1(0) = y_2(0) = 1$ $\qquad [y_1 = \cos x + \sin x]$

$\quad y_2' = -y_1$ $\qquad [y_2 = \cos x - \sin x]$

195. $y_1' = 4y_1 - 5y_2\,;\ y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$ $\qquad \left[y_1 = (1 - 2x)e^{-2x}\right]$

$\quad y_2' = y_1$ $\qquad \left[y_2 = xe^{-2x}\right]$

196. $y_1' = y_1 + y_2 + x\,;\ y_1(0) = -\frac{7}{9}, y_2(0) = -\frac{5}{9}$ $\qquad \left[y_1 = -\frac{4}{3}x - \frac{7}{9}\right]$

$\quad y_2' = y_1 - 2y_2 + 2x$ $\qquad \left[y_2 = \frac{1}{3}x - \frac{5}{9}\right]$

197. $y_1' = y_1 + 5y_2\,;\ y_1(0) = -2, y_2(0) = 1$ $\qquad [y_1 = (\sin x - 2\cos x)e^{-x}]$

$\quad y_2' = -3y_2 - y_1$ $\qquad [y_2 = e^{-x} \cos x]$

198. $2y_1' = 6y_1 - y_2 - 6x^2 - x + 3\,;\ y_1(0) = 2, y_2(0) = 3$ $\qquad \left[y_1 = e^{2x} + e^{3x} + x^2 + x\right]$

$\quad y_2' = 2y_2 - 2x - 1$ $\qquad \left[y_2 = 2e^{2x} + x + 1\right]$

4 Laplaceova transformace

Laplaceovou transformací funkce $f(t) : [0,\infty] \to \mathbb{R}$ je funkce $F(p)$, kde $p \in \mathbb{C}$ a $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}\,dt$, píšeme $F(p) = \mathscr{L}\{f(t)\}$.

<u>*Příklad 199*</u> : Najdeme z definice obrazy funkcí $f(t) = 1$, $f(t) = e^{-at}$, $a \in \mathbb{R}$:
$\int_0^\infty e^{-pt}\,dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^\infty = \frac{1}{p}$, $Re(p) > 0$; $\int_0^\infty e^{at}e^{-pt}\,dt = \left[\frac{e^{(a-p)t}}{a-p}\right]_0^\infty = \frac{1}{p-a}$, $Re(p-a) > 0$.
Tedy $\mathscr{L}\{1\} = \frac{1}{p}$, $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$.

<u>*Příklad 200*</u> : Linearity, tj. $\mathscr{L}\{\alpha f_1 + \beta f_2\} = \alpha\mathscr{L}\{f_1\} + \beta\mathscr{L}\{f_2\}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, Laplaceovy transformace využijeme pro $\cosh \omega t = \frac{e^{\omega t}+e^{-\omega t}}{2}$, platí:

$$\mathscr{L}\{\cosh at\} = \frac{1}{2}\left(\mathscr{L}\{e^{at}\} + \mathscr{L}\{e^{-at}\}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p+a}\right) = \frac{p}{p^2-a^2},$$

Podobně pro $\sinh at = \frac{e^{at}-e^{-at}}{2}$ a také $\cos \omega t = \frac{e^{j\omega t}+e^{-j\omega t}}{2}$, $\sin \omega t = \frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2i}$, $\omega \in \mathbb{R}$ $(e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi)$ dostaneme:

$$\mathscr{L}\{\sinh at\} = \frac{a}{p^2-a^2}, \quad \mathscr{L}\{\cos \omega t\} = \frac{p}{p^2+\omega^2}, \quad \mathscr{L}\{\sin \omega t\} = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.$$

<u>*Příklad 201*</u> : V Laplaceově obrazu funkce $e^{at}f(t)$ dochází k **posunutí obrazu**
$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\} = \int_0^\infty e^{at}f(t)e^{-pt}\,dt = \int_0^\infty f(t)e^{-(p-a)t}\,dt = F(p-a)$, např.:

$$\mathscr{L}\{e^{at}\cos \omega t\} = \frac{p-a}{(p-a)^2+\omega^2}, \quad \mathscr{L}\{e^{at}\sin \omega t\} = \frac{\omega}{(p-a)^2+\omega^2}.$$

$$\mathscr{L}\{e^{5t}\cosh 2t\} = \frac{p-5}{(p-5)^2-4}, \quad \mathscr{L}\{e^{2t}\sinh 3t\} = \frac{3}{(p-2)^2-9}.$$

<u>*Příklad 202*</u> : Pokud vynásobíme argument funkce konstantou $a > 0$, pak dojde ke **změně měřítka** $\mathscr{L}\{f(at)\} = \int_0^\infty f(at)e^{-pt}\,dt = \frac{1}{a}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{p}{a}\tau}\,d\tau = \frac{1}{a}F\left(\frac{p}{a}\right)$.
Jelikož $\mathscr{L}\{\sin t\} = \frac{1}{p^2+1}$, tak $\mathscr{L}\{\sin 3t\} = \frac{1}{3}\frac{1}{(\frac{p}{3})^2+1} = \frac{3}{p^2+9}$.

<u>*Příklad 203*</u> : Derivováním Laplaceova obrazu podle p dostaneme:
$\frac{dF(p)}{dp} = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}(-t)\,dt \Rightarrow \mathscr{L}\{tf(t)\} = -\frac{dF(p)}{dp}$ a $\mathscr{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n\frac{d^nF(p)}{dp^n}$.

Konkrétně $\mathscr{L}\{t\cdot 1) = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{p^2}$, $\mathscr{L}\{t\cdot t\} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2}\right) = \frac{2}{p^3}$ a $\mathscr{L}\{t^n\} = \frac{n!}{p^{n+1}}$.
Také $\mathscr{L}\{t\cos t\} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{p}{p^2+1}\right) = \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$, $\mathscr{L}\{t\sin t\} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p^2+1}\right) = \frac{1}{(p^2+1)^2}$.

Příklad 204 : Pro **obraz derivace** funkce platí: $\mathscr{L}\{f'(t)\} = pF(p) - f(0+)$, neboť pomocí per partes dostaneme $\int\limits_0^\infty f'(t)e^{-pt}\,dt = [f(t)e^{-pt}]_0^\infty - \int\limits_0^\infty f(t)e^{-pt}(-p)\,dt$ $= -f(0+) + pF(p)$. Podobně $\mathscr{L}\{f''(t)\} = p^2F(p) - pf(0+) - f'(0+)$.
Obecně platí: $\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = p^nF(p) - p^{n-1}f(0+) - \cdots - f^{(n-1)}(0+)$.

Nyní budeme uvažovat funkci $\varphi(t) = \int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau$, potom $\varphi'(t) = f(t)$, $\varphi(0) = 0$ a pro **obraz integrálu** platí: $\mathscr{L}\left\{\int\limits_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{F(p)}{p}$, neboť $p\mathscr{L}\{\int\limits_0^t f(\tau)d\tau\} =$

$p\mathscr{L}\{\varphi(t)\} - \overbrace{\varphi(0+)}^{0} = \mathscr{L}\{\varphi'(t)\} = \mathscr{L}\{f(t)\} = F(p)$.

4.1 Diferenciální rovnice

Příklad 205 : Pomocí Laplaceovy transformace převedeme diferenciální rovnici s počátečními podmínkami na algebraickou rovnici. Chceme vyřešit:

$$y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0\,, \quad y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0\,.$$

Označíme $\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(p)$ a zobrazíme počáteční úlohu pomocí Laplaceovy transformace, dostaneme:

$$\mathscr{L}\{y''(t) + 5y'(t) + 6y(t)\} =$$

$$p^2Y(p) - py(0+) - y'(0+) + 5(pY(p) - y(0+)) + 6Y(p) =$$

$$(p^2 + 5p + 6)Y(p) - p - 5 = 0 \Rightarrow$$

$$Y(p) = \frac{p+5}{p^2+5p+6}\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky obdržíme $\frac{p+5}{p^2+5p+6} = \frac{A}{p+3} + \frac{B}{p+2} = \frac{A(p+2)+B(p+3)}{p^2+5p+6} \Rightarrow$ $p + 5 = A(p+2) + B(p+3)$, pro $p = -3$ je $2 = A(-1)$, pro $p = -2$ je $3 = B$. Tedy $Y(p) = \frac{-2}{p+3} + \frac{3}{p+2}$. Nyní k danému obrazu najdeme předmět Laplaceovy transformace. Jinými slovy chceme použít **zpětnou Laplaceovu transformaci**

$$\mathscr{L}^{-1}\{Y(p)\} = y(t).$$

Protože $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$, tak $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{-2}{p+3}\} = -2e^{-3t}$, $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{3}{p+2}\} = 3e^{-2t}$ a tedy $\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{p+5}{p^2+5p+6}\right\} = -2e^{-3t} + 3e^{-2t}$. Řešením počáteční úlohy je funkce $y(t) = -2e^{-3t} + 3e^{-2t}$.

<u>*Příklad 206*</u> : Pomocí Laplaceovy transformace chceme vyřešit:

$$y''(t) - 2y'(t) + y(t) = 0\,, \quad y(0) = -1\,,\ y'(0) = 2\,.$$

Označíme $\mathscr{L}\{y(t)\} = Y(p)$ a zobrazíme počáteční úlohu pomocí Laplaceovy transformace, dostaneme:

$$\mathscr{L}\{y''(t) - 2y'(t) + y(t)\} =$$

$$p^2Y(p) - py(0+) - y'(0+) - 2(pY(p) - y(0+)) + Y(p) =$$

$$(p^2 - 2p + 1)Y(p) + p - 2 - 2 = 0 \ \Rightarrow\ Y(p) = \frac{4-p}{(p-1)^2}\,.$$

Rozkladem na parciální zlomky obdržíme $\frac{4-p}{(p-1)^2} = \frac{A}{(p-1)^2} + \frac{B}{p-1} = \frac{A+B(p-1)}{(p-1)^2} \Rightarrow$ $4 - p = A + B(p-1)$, pro $p = 1$ je $3 = A$, pro $p = 0$ je $4 = 3 - B$.
Tedy $Y(p) = \frac{3}{(p-1)^2} + \frac{-1}{p-1}$. Nyní k danému obrazu najdeme předmět Laplaceovy transformace. Protože $\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{p-a}$ a $\mathscr{L}\{te^{at}\} = -\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p-a}\right) = \frac{1}{(p-a)^2}$, tak $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{3}{(p-1)^2}\} = 3te^t$, $\mathscr{L}^{-1}\{\frac{-1}{p-1}\} = -e^t$ a řešením počáteční úlohy je funkce $y(t) = 3te^t - e^t$.

4.1.1 Konvoluce

Operátor, který dvěma reálným funkcím f, g přiřadí funkci $(f * g)(t)$ předpisem $(f * g)(t) = \int\limits_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau$ se nazývá **konvoluce**.
Pro obraz konvoluce při Laplaceově transformaci platí: $\mathscr{L}((f*g)(t)) = F(p)G(p)$.
<u>*Příklad 207*</u> : Pomocí Laplaceovy transformace budeme řešit:

$$y''(t) + y(t) = \sin t\,, \quad y(0) = 0\,,\ y'(0) = 0\,.$$

Zobrazíme diferenciální úlohu pomocí Laplaceovy transformace, dostaneme:
$p^2Y(p) - py(0+) - y'(0+) + Y(p) = \frac{1}{p^2+1} \Rightarrow Y(p) = \frac{1}{p^2+1}\frac{1}{p^2+1}$.

Odtud $y(t) = \mathscr{L}^{-1}\{\frac{1}{p^2+1}\frac{1}{p^2+1}\} = \int\limits_0^t \sin(\tau)\sin(t-\tau)\,d\tau$.

Zároveň platí $\frac{1}{(p^2+1)^2} = \frac{1}{2}(\frac{1}{p^2+1} - \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2})$ a také $y(t) = \mathscr{L}^{-1}(\frac{1}{2}(\frac{1}{p^2+1} - \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2})) = \frac{1}{2}(\sin t - t\cos t)$.

4.2 Soustavy rovnic

Příklad 208 : Pomocí Laplaceovy transformace vyřešíme soustavu diferenciálních rovnic s počátečními podmínkami:

$$\begin{aligned} y_1' &= \quad y_1 - 2y_2, \quad y_1(0+) = 0\,, \\ y_2' &= -4y_1 + 3y_2, \quad y_2(0+) = 1\,. \end{aligned} \qquad \text{Jelikož} \quad \begin{aligned} \mathscr{L}\{y_1'(t)\} &= p\,Y_1(p) - \, y_1(0+), \\ \mathscr{L}\{y_2'(t)\} &= p\,Y_2(p) - y_2(0+), \end{aligned}$$

tak dostaneme soustavu algebraických rovnic

$$\begin{aligned} p\,Y_1(p) - 0 &= \quad Y_1(p) - 2Y_2(p), \\ p\,Y_2(p) - 1 &= -4Y_1(p) + 3Y_2(p), \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} (p-1)Y_1(p) + \quad 2Y_2(p) &= 0, \\ 4Y_1(p) + (p-3)Y_2(p) &= 1. \end{aligned}$$

Odtud $Y_2(p) = -\frac{(p-1)}{2}Y_1(p)$ a po dosazení $4Y_1(p) - (p-3)\frac{(p-1)}{2}Y_1(p) = 1$.

Tudíž $Y_1(p) = \frac{-2}{(p+1)(p-5)} = \frac{1}{3(p+1)} - \frac{1}{3(p-5)}$ a $Y_2(p) = \frac{(p-1)}{(p+1)(p-5)} = \frac{1}{3(p+1)} + \frac{2}{3(p-5)}$.

Zpětnou transformací dostaneme $y_1(t) = \frac{1}{3}(e^{-t} - e^{5t})$ a $y_2(t) = \frac{1}{3}(e^{-t} + 2e^{5t})$.

Pomocí Laplaceovy transformace najděte řešení následujících soustav diferenciálních rovnic

209. $y_1' = y_1 - 2y_2\,;\; y_1(0+) = 0,\, y_2(0+) = 1$ $\left[y_1 = -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{2x}\sin(3x)\right]$
$y_2' = 5y_1 + 3y_2$ $\left[y_2 = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}(\sin(3x) + 3\cos(3x))\right]$

210. $y_1' = y_1 - y_2\,;\; y_1(0+) = 1,\, y_2(0+) = 1$ $\left[y_1 = \mathrm{e}^{2x}(-2x+1)\right]$
$y_2' = y_1 + 3y_2$ $\left[y_2 = \mathrm{e}^{2x}(2x+1)\right]$

211. $y_1' = 5y_1 - y_2\,;\; y_1(0+) = 2,\, y_2(0+) = 1$ $\left[y_1 = \mathrm{e}^{5x}(2\cos x - \sin x)\right]$
$y_2' = y_1 + 5y_2$ $\left[y_2 = \mathrm{e}^{5x}(2\sin x + \cos x)\right]$

212. $2y_1' = 6y_1 - y_2 - 6x^2 - x + 3\,;\; y_1(0) = 2, y_2(0) = 1$ $\left[y_1 = 2\mathrm{e}^{3x} + x^2 + x\right]$
$y_2' = 2y_2 - 2x - 1$ $[y_2 = x + 1]$

213. $y_1' = y_1 - y_2 + 8x\,;\; y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$ $[y_1 = -\sin 2x - 2\cos 2x + 2x + 2)]$
$y_2' = 5y_1 - y_2$ $[y_2 = -5\sin 2x + 10x]$

214. $y_1' = 4y_1 - 2y_2 + x\,;\; y_1(0) = 0, y_2(0) = 0$ $\left[y_1 = \frac{1}{54}(8\mathrm{e}^{3x} - 9x^2 - 24x - 8)\right]$
$y_2' = 2y_1 - y_2$ $\left[y_2 = \frac{1}{27}(2\mathrm{e}^{3x} - 9x^2 - 6x - 2)\right]$

5 Posloupnosti a řady funkcí

5.1 Posloupnosti funkcí

Teorie

<u>*Příklad 215*</u> : Budeme vyšetřovat konvergenci posloupnosti $f_n(x) = \frac{n^2}{n^2+x^2}$.

Pro bodovou konvergenci platí

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2\left(1+\frac{x^2}{n^2}\right)} = 1\,.$$

Při hledání množiny M, na které posloupnost konverguje stejnoměrně nás zajímá rozdíl $\left|\frac{n^2}{n^2+x^2} - 1\right| = \left|\frac{n^2-n^2-x^2}{n^2+x^2}\right| = \frac{x^2}{n^2+x^2}$. Zjistíme, kdy platí

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} \frac{x^2}{n^2+x^2} = 0\,.$$

Pokud je M omezená množina, pak $\exists\, K\, \forall\, x \in M : |x| \le K$ a platí

$$\frac{x^2}{n^2+x^2} \le \frac{K^2}{n^2} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in M} \frac{x^2}{n^2+x^2} = 0\,.$$

Jestliže $M = \mathbb{R}$, pak $\sup\limits_{x\in M} \frac{x^2}{n^2+x^2} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in M} \frac{x^2}{n^2+x^2} = 1\,.$

Daná posloupnost tedy konverguje stejnoměrně na každé omezené množině, na celé reálné ose konverguje bodově.

Rozhodněte o stejnoměrné konvergenci posloupnosti $\{f_n(x)\}$, je-li

216. $f_n(x) = x^n$ $[x \in (-1, 1\rangle$ bodově, $x \in \langle -1+\varepsilon, 1-\varepsilon\rangle$ stejn.$]$
217. $f_n(x) = \frac{\operatorname{arcotg} nx}{\sqrt{n+x}}$ $[D(f_1) = (-1, \infty)$, $x \in (-1, +\infty)$ stejn.$]$
218. $f_n(x) = x^n + x^{n+1}$ $[x \in \langle -1, 1\rangle$ bodově, $x \in \langle -1, 1-\varepsilon\rangle$ stejn.$]$
219. $f_n(x) = x^n - x^{2n}$ $[x \in (-1, 1\rangle$ bodově, $x \in \langle -1+\varepsilon, 1\rangle$ stejn.$]$
220. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$ $\left[f_n \to 0 \text{ pro } x \in \mathbb{R}\,,\ \text{ale } f_n(\tfrac{1}{n}) = \tfrac{1}{2}\right]$
221. $f_n(x) = \frac{2x}{1+n^2x^2}$ $[x \in \mathbb{R}$ stejn.$]$
222. $f_n(x) = \sqrt{x+\frac{1}{n}} - \sqrt{x}$ $[x \in \langle 0, +\infty)$ stejn.$]$
223. $f_n(x) = \mathrm{e}^{n(x-1)}$ $[x \in (-\infty, 1)$ bodově, $x \in (-\infty, 1-\varepsilon\rangle$ stejn.$]$
224. $f_n(x) = \operatorname{arctg} nx$ $[x \in (-\infty, \infty)$ bodově, $x \in (-\infty, -\varepsilon\rangle \cup \langle \varepsilon, +\infty)$ stejn.$]$
225. $f_n(x) = x \operatorname{arcotg} nx$ $[x \in \langle 0, +\infty)$ bodově i stejn.$]$

5.2 Funkční řady

Teorie

<u>*Příklad 226*</u> : Máme najít obor konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln^n x$.

Použijeme odmocninové kritérium a zkoumáme, pro která $x \in \mathbb{R}$ platí nerovnost $\sqrt[n]{|\ln^n x|} = |\ln x| < 1$, což je splněno pro $\frac{1}{e} < x < e$. Pro $x_1 = \frac{1}{e}$ dostaneme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, která diverguje; podobně pro $x_2 = e$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1^n$ opět diverguje. Obor konvergence dané řady je tedy interval $(\frac{1}{e}, e)$.

Najděte obor konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, je-li

227. $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{2n+1}(\frac{1-x}{1+x})^n$ $[< 0, \infty)]$

228. $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ $[x \in R- < -1, 1 >]$

229. $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^{2n}}$ $[x \in R - \{-1, 1\}]$

230. $f_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x^n}$ $[|x| > 1]$

231. $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx}$ $[x > 0]$

232. $f_n(x) = \frac{\cos nx}{\mathrm{e}^{nx}}$ $[x > 0]$

233. $f_n(x) = (5 - x^2)^n$ $\left[2 < |x| < \sqrt{6}\right]$

234. $f_n(x) = n^{-\ln x^2}$ $[|x| > \sqrt{e}]$

235. $f_n(x) = n^2 \mathrm{e}^{-nx^2}$ $[x \in R - \{0\}]$

236. $f_n(x) = \frac{x^n}{1-x^n}$ $[|x| < 1]$

Dokažte stejnoměrnou konvergenci $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$, je-li

237. $f_n(x) = \frac{1}{x^2+n^2}$ $[x \in R]$

238. $f_n(x) = \frac{(-1)^n}{x+2^n}$ $[x \geq 0]$

239. $f_n(x) = \frac{x}{1+n^4x^2}$ $[x \in R]$

240. $f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$ $[x \in R]$

241. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^5x^2}$ $[x \in R]$

242. $f_n(x) = \operatorname{arcotg} \frac{2x}{x^2+n^3}$ $[x \in R]$

243. $f_n(x) = \frac{\cos nx}{n^2}$ $[x \in R]$

244. $f_n(x) = \frac{x^2 \sin(n\sqrt{x})}{1+n^3x^4}$ $[x \geq 0]$

245. $f_n(x) = (\operatorname{arcotg} \frac{x}{x^2+n^2})^2$ $[x \geq 0]$

246. $f_n(x) = \ln(1 + \frac{x^2}{n \ln^2 n})$ $[n \geq 2, |x| \leq a, a > 0]$

247. $f_n(x) = \frac{\sin(\frac{x^2}{n})}{x^2\sqrt{n}+1}$ $[|x| \leq a, a > 0]$

248. $f_n(x) = \frac{\sin(\frac{x}{n}) \sin 2nx}{x^2+4n}$ $[x \in R]$

249. $f_n(x) = \frac{n^2}{\sqrt{n!}}(x^n + x^{-n})$ $\left[\frac{1}{2} \leq |x| \leq 2\right]$

250. $f_n(x) = x^2 \mathrm{e}^{-nx}$ $[\varepsilon \leq x \leq a, (\varepsilon, a > 0, \varepsilon < a)]$

WolframAlpha

5.3 Mocniné řady

Teorie

<u>*Příklad 251*</u> : Najdeme obor konvergence řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n x^{3n}$.

Po substituci $y = x^3$ dostaneme mocninnou řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n y^n$, která má poloměr konvergence $R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|5^n|}} = \frac{1}{5}$. Pro $y = -\frac{1}{5}$ dostaneme řadu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n$, která diverguje; podobně pro $y = \frac{1}{5}$ řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ diverguje. Obor konvergence původní řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 5^n x^{3n}$ je tedy interval $(-\frac{1}{\sqrt[3]{5}}, \frac{1}{\sqrt[3]{5}})$.

Najděte poloměr konvergence řady

252. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{[3+(-1)^n]^n}{n} x^n$ $\left[\frac{1}{4}\right]$

253. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^{2n}$ $\left[\sqrt{\frac{e}{2}}\right]$

254. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 3^n (n^3 + 2) x^{2n}$ $\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$

Najděte poloměr konvergence řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, je-li

255. $a_n = \frac{1}{n^2}$ $[1]$

256. $a_n = \frac{1}{n!}$ $[\infty]$

257. $a_n = \frac{(1+i)^n}{n 2^n}$ $[\sqrt{2}]$

258. $a_n = \alpha^{n^2} (0 < \alpha < 1)$ $[\infty]$

259. $a_n = \frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n^2} (a, b > 0)$ $[\min(\frac{1}{a}, \frac{1}{b})]$

260. $a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+1}}$ $[1]$

261. $a_n = \frac{1}{a^n + b^n} (a, b > 0)$ $[\min(a, b)]$

262. $a_n = (-1)^{n-1} \{\frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}\}^p$ $[2^p]$

263. $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!} (\frac{n}{e})^n$ $[1]$

264. $a_n = \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)}$ $[1]$

Najděte obor konvergence mocninné řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, je-li

265. $a_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}, x_0 = 1$ $[<0,2>]$

266. $a_n = (\frac{2n-1}{3n+2})^n, x_0 = -2$ $[(-\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})]$

267. $a_n = \frac{(-1)^n}{2n+1}, x_0 = 0$ $[(-1,1>]$

268. $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}3^n}, x_0 = 1$ $[<-2,4)]$

269. $a_n = \sqrt{\frac{n^4+3}{n^3+4n}}, x_0 = -2$ $[(-3,-1)]$

270. $a_n = \frac{5^n+(-3)^n}{n+1}, x_0 = 0$ $[<-\frac{1}{5}, \frac{1}{5})]$

271. $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \ln \frac{3n-2}{3n+2}, x_0 = -1$ $[<-2,0>]$

272. $a_n = \frac{\sqrt[3]{2n+1}-\sqrt[3]{2n-1}}{\sqrt{n}}, x_0 = -3$ $[<-4,-2>]$

273. $a_n = \sqrt[n]{a} - 1, x_0 = 0, a > 0, a \neq 1$ $[<-1,1)]$

274. $a_n = \frac{3^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n^2+n+1}}, x_0 = 1$ $[<0,2>]$

WolframAlpha

Najděte rozvoj funkce $f(x)$ v mocninou řadu

275. $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}; x \in R\right]$

276. $f(x) = \cos^2 x$ $\left[1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} x^{2n}; x \in R\right]$

277. $f(x) = \sin 3x \sin 5x$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n-1}}{(2n)!}(1-2^{4n})x^{2n}; x \in R\right]$

278. $f(x) = \sin^3 x$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3(3^{2n}-1)}{4(2n+1)!} x^{2n+1}; x \in R\right]$

279. $f(x) = \frac{x^2}{(1+x)^2}$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) x^{n+2}; x \in (-1,1)\right]$

280. $f(x) = \frac{5x-4}{x+2}$ $\left[-2 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{7(-1)^{n-1}}{2^n} x^n; x \in (-2,2)\right]$

281. $f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3}$ $\left[-\frac{1}{4}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^n3^{n+1}}{3^{n+1}}x^n; x \in (-1,1)\right]$

282. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in (-1,1)\right]$

283. $f(x) = \ln\frac{3-2x}{2+3x}$ $\left[\ln\frac{3}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\{(-\frac{3}{2})^n - (\frac{2}{3})^n\}\frac{x^n}{n}; x \in (-\frac{2}{3}, \frac{2}{3} >\right]$

284. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\left[1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}; x \in (-1,1)\right]$

285. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ $\left[1 + \frac{x^2}{2} + \sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n}; x \in (-1,1)\right]$

286. $f(x) = (1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}; x \in (-1,1)\right]$

287. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-2x}}$ $\left[x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{n!}x^{n+1}; x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\right]$

288. $f(x) = (1+x^2)\,\mathrm{arcotg}\,x$ $\left[x + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}x^{2n+1}; x \in < -1, 1 >\right]$

Najděte rozvoj funkce $f(x)$ v mocninnou řadu

289. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ $\left[x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in < -1, 1 >\right]$

290. $f(x) = \arcsin x$ $\left[x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in < -1, 1 >\right]$

291. $f(x) = \mathrm{arcotg}\,\frac{x+3}{x-3}$ $\left[-\frac{\pi}{4} + \sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^{2n+1}}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}; x \in < -3, -3 >\right]$

292. $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{5}}\{(\frac{\sqrt{5}+1}{2})^{n+1} + (-1)^n(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1}\}; |x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]$

293. $f(x) = \frac{1}{1+x+x^2}$ $\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin\frac{2\pi(n+1)}{3}x^n; x \in (-1,1)\right]$

294. $f(x) = \frac{x\cos\alpha - x^2}{1-2x\cos\alpha+x^2}$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n\cos n\alpha; x \in (-1,1)\right]$

295. $f(x) = \frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\,\mathrm{arcotg}\,x$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}; x \in (-1,1)\right]$

296. $f(x) = x \operatorname{arcotg} x - \ln\sqrt{1+x^2}$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n}}{2n(2n-1)}; x \in <-1, 1>\right]$

297. $f(x) = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ $\left[1 + \frac{x^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}; x \in <-1, 1>\right]$

298. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n; x \in (-1, 1)\right]$

299. $f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1-x}$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sum\limits_{k=0}^{u}\frac{1}{k!}x^n; x \in (-1, 1)\right]$

300. $f(x) = \operatorname{arcotg}^2 x$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1})\frac{x^{2n}}{n}; x \in <-1, 1>\right]$

301. $f(x) = \mathrm{e}^x \sin x$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\sin(\frac{n\pi}{4})}{n!}x^n; x \in R\right]$

302. $f(x) = \mathrm{e}^x \cos x$ $\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos(\frac{n\pi}{4})}{n!}x^n; x \in R\right]$

303. $f(x) = (\frac{\arcsin x}{x})^2$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+2)!}x^{2n}; |x| \leq 1\right]$

Pomocí rozvoje v mocninnou řadu vypočtěte integrály

304. $\int\limits_0^x \mathrm{e}^{-t^2}dt$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}; x \in R\right]$

305. $\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt$ $\left[\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}; x \in R\right]$

306. $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$ $\left[x + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!x^{4n+1}}{(2n)!!(4n+1)}; x \in (-1, 1)\right]$

307. $\int\limits_0^x \frac{t^2 dt}{\sqrt{1+t^2}}$ $\left[\frac{x^3}{3} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!x^{2n+3}}{(2n)!!(2n+3)}; x \in <-1, 1>\right]$

WolframAlpha

6 Taylorova metoda pro řešení počátečních úloh

Nechť funkce $f = f(x)$ má derivace všech řádů v bodě x_0. Mocninná řada

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n ,$$

se nazývá **Taylorova řada** funkce f.

Taylorova metoda řešení počátečních úloh

Předpokládejme, že řešení $y(x)$ počáteční úlohy má v bodě x_0 derivace všech řádů. Řešení pak hledáme ve tvaru

$$y(x) = y(x_0) + y'(x_0)(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

a hodnoty $y(x_0)$, $y'(x_0)$, $\dots$ určíme z diferenciální rovnice a z počátečních podmínek.

Příklad 308 : Řešíme počáteční úlohu

$$y' = -y, \quad y(0) = 1 .$$

Z počáteční podmínky a rovnice plyne $y'(0) = -1$ a postupným derivováním rovnice dostaneme:

$$\begin{aligned}
y''(x) &= -\,y'(x) &&\Rightarrow y''(0) = 1 ,\\
y'''(x) &= -\,y''(x) &&\Rightarrow y'''(0) = -1 ,\\
y^{IV}(x) &= -\,y'''(x) &&\Rightarrow y^{IV}(0) = 1 ,\\
&\vdots \\
y^{(n)}(x) &= -y^{(n-1)}(x) &&\Rightarrow y^{(n)}(0) = (-1)^n .
\end{aligned}$$

Po dosazení do Taylorovy řady dostaneme $y(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n$ $(= \mathrm{e}^{-x})$.

Příklad 309 : Řešíme počáteční úlohu

$$y'' = xy, \quad y(0) = 4,\ y'(0) = 3 .$$

Z počátečních podmínek plyne

$$y(x) = 4 + 3(x - 0) + \frac{y''(0)}{2!}(x - 0)^2 + \dots .$$

Z rovnice dostaneme postupným derivováním:

$$\begin{aligned}
&y''(x) = x\,y(x) \\
&\qquad\qquad\qquad \Rightarrow y''(0) = 0\,y(0) = 0\,, \\
&y'''(x) = y(x) + x\,y'(x) \\
&\qquad\qquad\qquad \Rightarrow y'''(0) = y(0) + 0 \cdot y'(0) = 1 \cdot 4\,, \\
&y^{IV}(x) = y'(x) + y'(x) + x\,y''(x) \\
&\qquad\qquad\qquad \Rightarrow y^{IV}(0) = 2y'(0) + 0 \cdot y''(0) = 2 \cdot 3\,, \\
&\qquad\qquad\qquad \vdots \\
&y^{(n)}(x) = (n-2)y^{(n-3)}(x) + x\,y^{(n-2)}(x) \\
&\qquad\qquad\qquad \Rightarrow y^{(n)}(0) = (n-2)y^{(n-3)}(0)\,.
\end{aligned}$$

Obecně

$$\begin{aligned}
&y^{(3n)}(0) = (3n-2)(3n-5)\cdots 4 \cdot 1 \cdot 4\,, \\
&y^{(3n+1)}(0) = (3n-1)(3n-4)\cdots 5 \cdot 2 \cdot 3\,, \\
&y^{(3n+2)}(0) = 0\,.
\end{aligned}$$

Po dosazení do předpokládaného tvaru řešení dostaneme:

$$\begin{aligned}
y(x) &= 4 + 3x + \tfrac{4}{3!}x^3 + \tfrac{3}{4!}x^4 + \dots \\
&= 4 + 3x + \sum_{n=1}^{\infty} 4\tfrac{(3n-2)(3n-5)\cdots 4\cdot 1}{(3n)!}x^{3n} + 3\tfrac{(3n-1)(3n-4)\cdots 5\cdot 2}{(3n+1)!}x^{3n+1}.
\end{aligned}$$

Najděte řešení počáteční úlohy ve tvaru Taylorovy řady

310. $y' - y = 0\,,\ y(0) = 1$ $\left[y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n\right]$

311. $y'' + y = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 0$ $\left[y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}x^{2n}\right]$

312. $y'' + y = 0\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1$ $\left[y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}\right]$

313. $y'' - 2y' + y = 0\,,\ y(0) = 1\,,\ y'(0) = 1$ $\left[y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}x^n\right]$

314. $y'' - 2y' + y = 0\,,\ y(0) = 0\,,\ y'(0) = 1$ $\left[y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n!}x^n\right]$

7 Fourierovy řady

Teorie

Příklad 315 : Stanovíme Fourierovu řadu funkce $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 0 \le x \le \pi \\ 0 & \text{pro} \quad -\pi \le x \le 0 \end{cases}$
podle základního trigonometrického systému, tj. ve tvaru

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Vypočteme koeficienty a_k, b_k:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 \, d\xi = 1 \,, \qquad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos k\xi \, d\xi = \frac{1}{k} [\sin k\xi]_0^\pi \,, \quad k = 1, 2, \dots ,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin k\xi \, d\xi = -\frac{1}{k} [\cos k\xi]_0^\pi = -\frac{1}{k} [(-1)^k - 1] \,, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Výsledek píšeme ve tvaru:

$$s(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$ na intervalu $(-\pi, \pi)$, je-li

316. $f(x) = |x|$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$ $\left[\frac{\pi}{2} - 4 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}; \frac{\pi^2}{8} \right]$

317. $f(x) = \pi^2 - x^2$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$
$\left[\frac{2}{3}\pi^2 + 4 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} \cos nx; \frac{\pi^2}{6}, \frac{\pi^2}{12} \right]$

318. $f(x) = \operatorname{sign} x$ Výsledku využijte k sečtení řady $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ $\left[\frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}; \frac{\pi}{4} \right]$

319. $f(x) = \sin ax \quad a \notin Z$ $\left[\frac{2 \sin \pi a}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n \sin nx}{n^2 - a^2} \right]$

320. $f(x) = \cos ax \quad a \notin Z$ $\left[\frac{2 \sin \pi a}{\pi} \{ \frac{1}{2a} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a \cos nx}{a^2 - n^2} \} \right]$

321. $f(x) = e^{ax} \quad a \neq 0$ $\left[\frac{2}{\pi} \sinh a\pi \{ \frac{1}{2a} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^2+n^2} (a \cos nx - n \sin nx) \} \right]$

322. $f(x) = \frac{q \sin x}{1 - 2q \cos x + q^2} \quad |q| < 1$ $\left[\sum_{n=1}^{\infty} q^n \sin nx; \text{zaveďte } \mathrm{e}^{ix} = z\right]$

Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$, je-li

323. $f(x) = \frac{\pi - x}{2}, x \in (0, 2\pi)$ $\left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\right]$

324. $f(x) = x, x \in (a, a + 2l)$ $\left[a + l + \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\pi}(\sin \frac{n\pi a}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} - \cos \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi x}{l})\right]$

325. $f(x) = x^2, x \in (0, 2\pi)$ $\left[\frac{4\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}\right]$

326. $f(x) = \mathrm{e}^{ax}, x \in (-h, h)$ $\left[2 \sinh ah \{\frac{1}{2ah} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{ah \cos(\frac{n\pi x}{h}) - n \sin(\frac{n\pi x}{h})}{(ah)^2 + (\pi n)^2}\}\right]$

327. $f(x) = x \cos x, x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ $\left[\frac{16}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(4n^2 - 1)^2} \sin 2nx\right]$

328. $f(x) = \mathrm{e}^x - 1, x \in (0, 2\pi)$ $\left[\frac{\mathrm{e}^{2\pi} - 1}{\pi} \{\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\cos nx}{1 + n^2} - \frac{n \sin nx}{1 + n^2})\} - 1\right]$

Najděte Fourierovu řadu funkcí $f_n(x) = \sin^n x$ a $g_n(x) = \cos^n x$ pro $n = 2, 3, 4, 5$.

329. $f_2(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$ $\left[g_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x\right]$

330. $f_3(x) = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$ $\left[g_3(x) = \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x\right]$

331. $f_4(x) = \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$ $\left[g_4(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x\right]$

332. $f_5(x) = -\frac{5}{8} \sin x + \frac{5}{16} \sin 3x - \frac{1}{16} \sin 5x$ $\left[g_5(x) = \frac{5}{8} \cos x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 5x\right]$

Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x)$, je-li

333. $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}, x \in (0, \pi)$ (kosinová řada) $\left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}\right]$

334. $f(x) = x^2, x \in (0, \pi)$ (sinová řada) $\left[\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \{\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^2}[(-1)^n - 1]\} \sin nx\right]$

335. $f(x) = \sin ax, a \in Z, x \in (0, \pi)$ (kosinová řada) $\left[\frac{4a}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{a^2 - (2n+1)^2} \text{pro } a \text{ sudé}\right]$

$\left[\frac{4a}{\pi} \{\frac{1}{2a^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{a^2 - 4n^2}\} \text{pro } a \text{ liché}\right]$

336. $f(x) = \cos ax, a \in Z, x \in (0,\pi)$ (sinová řada) $\left[-\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{a^2-(2n+1)^2} \text{ pro } a \text{ sudé}\right]$

$\left[-\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\sin 2nx}{a^2-4n^2} \text{ pro } a \text{ liché}\right]$

337. $f(x) = x(\frac{\pi}{2}-x), x \in (0,\frac{\pi}{2})$ podle soustavy

$\{\cos(2n-1)x\}, n \in N$ $\left[-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\{1+\frac{4(-1)^n}{(2n-1)\pi}\}\cos(2n-1)x\right]$

$\{\sin(2n-1)x\}, n \in N$ $\left[\sum_{n=1}^{\infty}\{\frac{2(-1)^n}{(2n-1)^2}+\frac{8}{(2n-1)^3}\}\sin(2n-1)x\right]$

Integrací Fourierova rozvoje funkce $f(x) = x$ najděte rozvoj funkcí x^2, x^3, x^4, x^5 pro $x \in (-\pi,\pi)$

338. $f(x) = x$ $\left[2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}\right]$

339. $f(x) = x^2$ $\left[\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}(-1)^n\right]$

340. $f(x) = x^3$ $\left[2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{6-\pi^2n^2}{n^3}\sin nx\right]$

341. $f(x) = x^4$ $\left[\frac{\pi^4}{5}+8\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{6-\pi^2n^2}{n^4}\cos nx\right]$

342. $f(x) = x^5$ $\left[2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{120-20\pi^2n^2+\pi^4n^4}{n^5}\sin nx\right]$

WolframAlpha