



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Úvod do funkcionální analýzy

Jméno :

Příjmení :

Číslo studenta:

Prostory funkcí

1. Máme metrický prostor (X, ϱ) ,

a) $x, y, z \in X$, pak platí:

$$\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$\varrho(x, y) = \varrho(y, x),$$

$$\varrho(x, z) = \varrho(x, y) + \varrho(y, z),$$

$$\varrho(x, y) = 0 \Rightarrow x = y,$$

$$\varrho(x, y) = \varrho(y, x),$$

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z),$$

$$\varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$$

$$\varrho(x, y) = \varrho(y, x),$$

$$\varrho(x, z) \leq \varrho(x, y) + \varrho(y, z),$$

b) posloupnost $\{u_n\} \subset X$ konverguje k $u \in X$ právě tehdy, když platí

$$\exists \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: \\ n \geq n_0 \Rightarrow \varrho(u_n, u) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: \\ n \geq n_0 \Rightarrow \varrho(u_n, u) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \forall n_0 \in \mathbb{N} \forall n \in \mathbb{N}: \\ n \geq n_0 \Rightarrow \varrho(u_n, u) < \varepsilon$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N}: \\ n \geq n_0 \Rightarrow \varrho(u_n, u) < \varepsilon$$

c) řekneme, že (X, ϱ) je úplný, jestliže

v X existuje hustá
podmnožina

každá cauchyovská
posloupnost je
konvergentní

každá konvergentní
posloupnost je
cauchyovská

každá posloupnost je
omezená

d) v X existuje spočetná hustá podmnožina, pak

X je 1.kategorie

X je 2.kategorie

X je úplný

X je separabilní

2. Máme lineární prostor X ,

a) funkce $\|\cdot\|_X : X \rightarrow [0, \infty)$ se nazývá norma na X , jestliže $\forall u, v \in X, \forall \kappa \in \mathbb{R}$ platí

$$\|u\|_X = 0 \Rightarrow u = o,$$

$$\|u\|_X = 0 \Rightarrow u = o,$$

$$\|u\|_X = 0 \Rightarrow u = o,$$

$$\|\kappa u\|_X = |\kappa| \|u\|_X,$$

$$\|\kappa u\|_X = |\kappa| \|u\|_X,$$

$$\|\kappa u\|_X = \kappa \|u\|_X,$$

$$\|u+v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X,$$

$$\|u+v\|_X = \|u\|_X + \|v\|_X,$$

$$\|u+v\|_X \leq \|u\|_X + \|v\|_X,$$

b) X se nazývá Banachův, jestliže

je normovaný a úplný
vzhledem k metrice
 $\varrho(u, v) = \|u + v\|_X$

každá konvergentní
posloupnost má
limitu v X

je normovaný a úplný
vzhledem k metrice
 $\varrho(u, v) = \|u - v\|_X$

každá cauchyovská
posloupnost má
limitu v X

c) funkce $g : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ se nazývá skalární součin na X , jestliže $\forall u, v, w \in X, \forall \kappa \in \mathbb{R}$ platí

$$u \neq 0 \Rightarrow g(u, u) > 0,$$

$$u \neq 0 \Rightarrow g(u, u) > 0,$$

$$u \neq 0 \Rightarrow g(u, u) > 0,$$

$$g(u, v) = g(v, u),$$

$$g(u, v) = g(v, u),$$

$$g(u, v) = g(v, u),$$

$$g(\kappa u, v) = \kappa g(u, v),$$

$$g(\kappa u, v) = \kappa g(u, v),$$

$$g(\kappa u, v) = |\kappa| g(u, v),$$

$$g(u + w, v) \leq g(u, v) + g(w, v)$$

$$g(u + w, v) = g(u, v) + g(w, v)$$

$$g(u + w, v) = g(u, v) + g(w, v)$$

d) X se nazývá Hilbertův, jestliže je unitární (se skalárním součinem $g(u, v)$) a

je normovaný a úplný
vzhledem k metrice
 $\varrho(u, v) = \|u - v\|_X$

je úplný vzhledem
k metrice $\varrho(u, v) =$
 $g(u - v, u - v)$

je úplný vzhledem
k metrice $\varrho(u, v) =$
 $\sqrt{g(u - v, u - v)}$

je normovaný a každá
cauchyovská posloup-
nost má limitu v X

3. Máme prostor $R^N = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$,

a) eukleidovská norma na prostoru R^N je dána předpisem

$$|u|_{\mathbb{R}^N, 2} =$$

$$(|u_1|^2 + \dots + |u_N|^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$|u|_{\mathbb{R}^N, p} =$$

$$(|u_1|^p + \dots + |u_N|^p)^{\frac{1}{p}}$$

$$|u|_{\mathbb{R}^N, 1} =$$

$$(|u_1| + \dots + |u_N|)$$

$$|u|_{\mathbb{R}^N, \infty} =$$

$$\max\{|u_1|, \dots, |u_N|\}$$

b) podmnožiny prostoru R^N s topologií indukovanou normou $|u|_{\mathbb{R}^N, p}$ jsou kompaktní právě tehdy, když

jsou otevřené a	jsou uzavřené a	jsou uzavřené	jsou otevřené
obloukově souvislé	obloukově souvislé	a omezené	a omezené

c) podmnožina $\Omega \subset R^N$ se nazývá oblast, jestliže je

obloukově souvislá	otevřená a omezená	uzavřená a omezená	obloukově souvislá
a uzavřená			a otevřená

Sobolevovy prostory

1. Funkce u je prvkem prostoru $W^{1,2}(0,1)$, jestliže $u \in L^2(0,1)$ a zároveň

klasická derivace	$\int_0^1 u \varphi' dx = - \int_0^1 u' \varphi dx$	$\exists g \in L^2(0,1) :$	$\exists g \in L^2(0,1) :$
$u' \in L^2(0,1)$	$\forall \varphi \in L^2(0,1)$	$\int_0^1 u \varphi' dx = - \int_0^1 g \varphi dx$	$\int_0^1 u \varphi' dx = - \int_0^1 g \varphi dx$
		$\forall \varphi \in \mathcal{D}(0,1)$	$\forall \varphi \in C^\infty(0,1)$

2. Funkce u je prvkem prostoru $W_0^{1,2}(0,1)$, jestliže existuje posloupnost funkcí $\{u_n\}$ z prostoru

$C^\infty(0,1)$ taková, že	$\mathcal{D}(0,1)$ taková, že	$C^\infty(0,1)$ taková, že	$\mathcal{D}(0,1)$ taková, že
$\ u - u_n\ _{W^{1,2}(0,1)} \rightarrow 0$	$\ u - u_n\ _{L^2(0,1)} \rightarrow 0$	$\ u - u_n\ _{W^{1,2}(0,1)} \rightarrow 0$	$\ u - u_n\ _{W^{1,2}(0,1)} \rightarrow 0$

3. Pro každé $1 \leq p < \infty$ existuje konstanta $C_p(a, b)$, závisající pouze na p, a, b , taková, že

$$\begin{aligned} \left(\int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &\leq \left(\int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_a^b |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \\ C_p \left(\int_a^b |u'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} &C_p \left(\int_a^b |u'(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} C_p \left(\int_a^b |u'(x)|^{p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} C_p \left(\int_a^b |u'(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ \forall u \in W_0^{1,2}(0,1) &\forall u \in W_0^{1,2}(0,1) \forall u \in C^1(0,1) \forall u \in C^1(0,1) \end{aligned}$$

4. Necht

$$s > \frac{N}{4}, \quad s > \frac{N}{2}, \quad s > N - 2, \quad 2s > N - 2,$$

pak prostor $H^s(\mathbb{R}^N)$ je spojitě vnořen do prostoru $C(\mathbb{R}^N)$.

5. Necht $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená otevřená množina s hranicí $\partial\Omega$ třídy C^1 . Potom prostor $W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < N$ je spojitě vnořen do prostoru $L^{p^*}(\Omega)$, kde

$$p^* = \frac{N-p}{pN} \quad p^* = \frac{Np}{p-N} \quad p^* = \frac{N+p}{pN} \quad p^* = \frac{pN}{N-p}$$

6. Necht $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ je omezená otevřená množina s hranicí $\partial\Omega$ třídy C^1 . Potom prostor $W^{1,p}(\Omega)$, $N < p$, je spojitě vnořen do prostoru $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, kde

$$\alpha = 1 - \frac{N}{p} \quad \alpha = 1 - \frac{1}{p} \quad \alpha = 1 - \frac{1}{N} \quad \alpha = 1$$